arXiv:2302.01043v2 [math.DS] 6 Mar 2023

三维球面上稳定电磁结构与勒让德场的拓扑

BENJAMIN BODE 和 Daniel Peralta-Sal AS

Abstract. 自由空间中麦克斯韦方程组的零解具有这样的性质：电场线和磁力线的拓扑结构始终保持不变。本文将一类特别重要的零解（与霍普夫纤维化相关）的研究，与三维球面标准接触结构下成对保体积勒让德场的存在性联系起来。利用这一联系，我们证明，当且仅当勒让德链环的每个分支的旋转数均为零时，该链环才能实现为一个处处非零的勒让德场的闭轨道集合；此场对应于某个零解的电场部分或磁场部分。此外，我们证明，$\mathbb{S}^3$ 上的任意圆周叶状结构（塞弗特叶状结构）都同位于一个由三维球面标准接触结构下的保体积勒让德场所定义的叶状结构。我们还构造了一个新的麦克斯韦方程组零解，使其电场的每条正环面纽结都是一条闭合电场线。最后，我们证明，$\mathbb{R}^3$ 中的任意环面曲面（可能是纽结化的）都能实现为麦克斯韦方程组某个零解的磁面，从而意味着它始终稳定。特别是，$\mathbb{S}^3$ 上与之关联的保体积勒让德场具有一个正体积的不变环面集合，且这些环面具有相同的拓扑类型。

1. Introduction

自由空间中电磁场的时间演化由 $\mathbb{R}^3$ 中的麦克斯韦方程组描述：

$$\partial_t E = \operatorname{curl} B\,, \qquad \partial_t B = -\operatorname{curl} E \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} E = 0\,, \qquad \operatorname{div} B = 0\,, \tag{1.2}$$

这里，我们将所有常数都设为 1。E 和 B 是随时间变化的向量场，分别表示电磁场的电场部分和磁场部分。按照惯例，curl 和 div 分别表示 $\mathbb{R}^3$ 中向量场的旋度和散度。

固定时刻 t 的电场积分曲线，即自治常微分方程的解

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = E(x(\tau), t)$$

对于某个初始条件 $x(0) = x_0$，它们是在时刻 t 的电力线。类似地，在每个固定时刻 t，磁力线是磁场的积分曲线。一般而言，电力线和磁力线会在时间演化过程中改变其拓扑结构并发生分岔 [2]。然而，对于麦克斯韦方程组的一类特别重要的解，即所谓的零解，电力线和磁力线在所有时刻都保持其拓扑结构。

1.1. 稳定电磁结构。我们回顾一下，若电场和磁场彼此正交且模长相同，即对于所有 t，均有 $E \cdot B = 0$ 和 $|E| = |B|$，则电磁场$E(x,t)$ $B(x,t)$ 是麦克斯韦方程组的零解。此时，电力线和磁力线的时间演化由一参数微分同胚族 $\Phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 给出，其中 Φ_0 等于恒等映射。更确切地说，如果归一化的坡印廷场

$$P := \frac{E \times B}{W}$$

处处光滑，且 $W := \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$ 为能量密度，因此可得 [19, 16,17] E 和 B 可表示为初始电场和磁场E_0、B_0 的形式

$$E(t) = h(t)\Phi_{t*}E_0\,, \qquad B(t) = h(t)\Phi_{t*}B_0\,,$$

其中，Φ_{t*} 是由 P 定义的非自治流的推前，而 h 是一个显式（以 W 表示）的非零函数，其表达式与本文无关。该性质的一个引人注目的结论是：如果相应的麦克斯韦方程组解为零解，那么任意拓扑电磁结构（例如打结的闭合场线或不变环面）只要在时刻 $t = 0$ 包含于 E 或 B，就会一直保持不变。因此，我们称初始电磁场的拓扑结构在时间演化下是稳定的。

鉴于上述讨论，电磁场中稳定拓扑结构的研究与麦克斯韦方程组零解的研究密切相关。Bateman 提出了一种构造此类零场的杰出方法 [4]。粗略地说，Bateman 表明，给定一个映射 $(\alpha, \beta) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$（称为一对 Bateman变量），它满足某个偏微分方程；再给定任意全纯函数 $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$，便有一种求得零电磁场的方法；我们将在第 2 节回顾这一构造的细节。对函数 (α, β) 和 h 作特定选择，可得到一个麦克斯韦方程组解，称为 Hopfion，它与三维球面上的霍普夫纤维化 $\mathbb{S}^3$密切相关。该解中的每条场线都是闭合的，且任意两条场线都构成一个霍普夫链环，并且这一性质始终成立。Synge [29], 最早发现了这一重要解，但其拓扑内涵是 Ra˜nada 于 [21, 22] 采用完全不同的方法揭示的。在过去 25 年间，这一解受到广泛研究，其中包括一项实验实现方案 [8]。文献 [16], 对 Hopfion 作了推广，作者遵循 Bateman 方法构造了零解，其电场线和磁力线呈任意环面纽结的形状。这些解属于 Hopf 型，即采用与 Hopfion 相同的 (α, β) 选择，但全纯函数 h 的选择不同。感兴趣的读者可参阅 [2]，了解该主题的全面介绍。顺带一提，文献 [17] 刻画了在麦克斯韦方程组演化下可产生零解的初始电场和磁场 E_0, B_0。然而，要有效运用这种刻画非常困难，因此巴特曼构造仍是构造零电磁场的唯一有效方法。

1.2. 与接触几何的联系。尽管 Bateman 方法清晰明了，但构造编码非环面型纽结和链环的零电磁场极具挑战性，直到最近才得以解决 [6]。实现这一结果的关键观察，是零

解与接触几何之间存在着出人意料的联系。具体而言，已证明，任何 Hopf 型 Bateman 场都与一对相对于 $\mathbb{S}^3$ 上标准接触结构的勒让德向量场相关联；该接触结构由标准接触 1-形式的核给出

$$-y_1\mathrm{d}x_1 + x_1\mathrm{d}y_1 - y_2\mathrm{d}x_2 + x_2\mathrm{d}y_2, \tag{1.3}$$

其中，我们以 $z_i = x_i + \mathrm{i}y_i$, $i = 1, 2$ 作为 $\mathbb{C}^2$ 上的坐标。这两个勒让德场分别是 $\mathbb{R}^3$ 上电场和磁场在时刻 $t = 0$ 经由 Bateman变量 $(\alpha, \beta)|_{t=0}$ 推前所得结果的实数倍。本文始终将 $\mathbb{S}^3$ 定义为 $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ 中的单位球面，即 $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$，并赋予其标准体积形式；该体积形式恰与标准接触形式 (1.3) 相容。

与接触几何中通常具有的灵活性不同，我们强调，在本文中，不允许对标准接触结构进行同痕，除非同痕保持标准接触形式的核不变。因此，本文所说的勒让德对象，始终指与 1-形式 (1.3) 的核相切的对象（向量场、曲线等）。

本文旨在探讨并利用前述稳定电磁结构（通过零解）与相对于标准接触结构的勒让德向量场之间的关系。这种联系具有双向益处。一方面，通过研究 $\mathbb{S}^3$ 上的勒让德向量场，我们可以得到电磁 Bateman 解；另一方面，借助 Bateman 方法，我们可以构造具有指定拓扑结构的勒让德场，例如具有打结周期轨道或不变环面的场。顺便一提，我们注意到 Arnold 在 [1, Problem 1994-13] 中考虑了研究勒让德向量场周期轨道的问题。具体而言：

考虑曲面 M^2 上磁场中的一个粒子。研究 ST^*M^2 上的勒让德无散向量场，尤其是它们的闭轨道。更一般地，考虑某种（标准？）接触结构下 $\mathbb{S}^3$ 上的无散勒让德向量场。在这类向量场中，是否存在一个反例，能够推翻 Seifert 猜想?

尽管我们无法深入了解带电粒子在曲面上的磁场中的运动（参见注释 3.2），但我们希望，本工作中引入的新技术能够对无散勒让德场相关问题有所帮助。

1.3. 定理陈述。我们的第一个主要结果是刻画那些能够通过巴特曼构造在 $\mathbb{R}^3$ 上产生零电磁场的 $\mathbb{S}^3$ 上的勒让德向量场。如第 2 节将要回顾的，$\mathbb{R}^3$ 上的向量场是利用逆投影映射 $(\alpha, \beta)|_{t=0}^{-1}$ 从 $\mathbb{S}^3$ 上的向量场得到的，该映射由立体投影和镜面反射复合而成。复结构 $J\colon T\mathbb{C}^2 \to T\mathbb{C}^2$ 将任意给定的、相对于 $\mathbb{S}^3$ 上标准接触结构为勒让德的向量场 X 映射为向量场 JX；这是 $\mathbb{S}^3$ 上唯一满足 $|X| = |JX|$, $X \cdot JX = 0$ 且 (X, JX) 取正向的勒让德向量场（相对于标准接触结构）。这里，向量积和范数均使用 $\mathbb{S}^3$ 上的典范度量计算。

定理 1.1. 设 E_0 是 $\mathbb{S}^3$ 上一个实解析向量场，且相对于标准接触结构为勒让德。则 E_0 和 $B_0 := JE_0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上给出一个与霍普夫纤维化相关的电磁 Bateman 解，当且仅当E_0 和 B_0 无散。

接下来，利用贝特曼技巧，我们构造出无处为零的无散 Legendrian 向量场，其周期轨道集合具有预先指定的、旋转数为零的轨道（详情见第 4 节）；前文提到的阿诺德问题也为研究无散勒让德场提供了额外的动机。

定理 1.2. 设 X 是 $\mathbb{S}^3$ 上的一个无处为零的勒让德场（相对于标准接触形式）。那么， X 的任何周期轨道的旋转数都为零。反过来，给定 $\mathbb{S}^3$中的任意勒让德链环 $L = \cup_{i=1}^n L_i$ ，其中每个 L_i的旋转数都为零，则 $\mathbb{S}^3$ 上存在一个无处为零、实解析、无散的勒让德场（相对于标准接触结构），使得L 同位于其周期轨道的一个子集。

注 1.3. 对每个 L_i 唯一的条件是旋转数为零，因此无论瑟斯顿-贝尼昆不变量取何值，每个勒让德结都可以实现为一条周期轨道。特别要注意，每种链环类型都有一个勒让德代表，其所有分支的旋转数均为零，因此这些假设并不会限制链环的拓扑。

正如前文所强调的，定理 1.2 的证明用到了巴特曼构造。因此，我们还得到了具有稳定闭合电磁场线的麦克斯韦方程零解，从而可以将 [6, 定理 1] 推广到不消失电磁场的情形。

推论 1.4. 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的任意链 $L = \cup_{i=1}^n L_i$ 以及任意（可能为空或非真）子集 $I \subset \{1, 2, \cdots, n\}$，存在一个微分同胚的光滑同伦$\Phi_t$： $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ，以及一个不消失的电磁场，使得对于所有 $t \in \mathbb{R}$， Φ_t（$\cup_{i\in I} L_i$）是闭合电力线的子集，而 Φ_t（$\cup_{i\notin I} L_i$）是闭合磁力线的子集。

一般而言，推论 1.4 中得到的解的电力线和磁力线并非全部闭合。事实上，Hopfion 解 [21, 22],中所有场线均闭合，这促使我们探究：除霍普夫纤维化之外，三维球面上的塞弗特叶状结构能否由巴特曼场实现？在这方面，我们可以证明，任意（正向的）塞弗特叶状结构都与标准接触结构下的某个勒让德叶状结构微分同胚。鉴于前文提到的接触几何关联，这是构造与塞弗特叶状结构微分同胚的稳定电磁场的第一步。

命题 1.5. 任意的塞弗特叶状结构 $S_{p,\ q}$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$， $\mathbb{S}^3$ 都同位于由一个关于标准接触结构的处处非零、实解析、无散的勒让德向量场 X 所定义的叶状结构。

注 1.6. 鉴于定理 1.1，阻止我们得出 X 属于 Bateman 型的唯一一点，是我们无法验证 JX 是否无散。

[16] 中构造的场具有这样的性质：其中包含一组形状为正环面链的闭合场线。在该构造中，不同的环面

链环对应不同的 Bateman 场。在下一个结果中，我们将证明存在一个单一的 Bateman 场，其中包含每一个正环面链。为证明这一论断，我们利用巴特曼构造的一种对称性：通过复共轭和时间反演，可以从已知的一对 Bateman变量（α，β）得到一对新的 Bateman变量（$\tilde{\alpha}$，β）。~

命题1.7。存在一个零电磁场，其在时刻 $t = 0$ 的电场部分（因此在任意其他时刻 $t \in \mathbb{R}$也一样）包含每个正环面纽结作为周期轨道。

最后，我们证明一个关于将任意拓扑类型的不变环面实现为 $\mathbb{R}^3$中Bateman型零解的磁面（或电面）的定理（与霍普夫纤维化相关）。特别地， $\mathbb{S}^3$ 上的相应无散勒让德场包含一个由同一拓扑类型的不变环面组成的正体积集合。该结果的证明是本文技术要求最高的部分，包括构造一个具有纽结周期轨道的Bateman磁场，该周期轨道是具有丢番图频率的椭圆型轨道；随后，R¨ussmann [26] 的一个深刻结果表明，上述磁力线被一个正体积的不变环面集合所积聚，从而得到所需的磁面。对于这一陈述，我们回顾一下：如果一个向量场的所有轨道都在环面上稠密，则称该向量场的不变环面是遍历的。

定理 1.8. 给定 T in $\mathbb{R}^3$ 中的一个光滑环面，存在一个麦克斯韦方程组的零解，其磁面构成一个正体积集合，且这些磁面与 T 同位。磁场的这些不变环面是遍历的，并且对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都存在。对于 $\mathbb{S}^3$ 上相对于标准接触结构的相应无散勒让德场，也有类似结果。

1.4. 论文结构。本文余下部分安排如下。第 2 节回顾巴特曼构造及其与 $\mathbb{S}^3$ 上的霍普夫纤维化和勒让德场的关系。第 3 节将运用这些工具证明定理 1.1。第 4 节讨论勒让德向量场的周期轨道。随后在第 4.1 节证明定理 1.2，并在第 4.2 节讨论勒让德塞弗特叶状结构及命题1.5的证明。第 5 节中，我们通过复共轭和时间反演研究Bateman变量之间的变换，并证明命题1.7。第 6 节确立零解的存在性，这些零解呈现任意拓扑的磁面，参见定理 1.8。最后，第 7 节中我们对具有独立研究价值的可积巴特曼场作出若干观察，并解释 [16] 中构造的场的可积性，同时说明其与 Rudolph 的完全切向 $\mathbb{C}$-链环 [23, 24] 之间的联系。

2. Bateman's construction of null electromagnetic fields

本节将介绍巴特曼构造：它将一个全纯函数与一个零电磁场联系起来，并揭示了其与接触几何之间令人惊讶的联系。

与通常一样，在本文中，我们将用黎曼-西尔伯斯坦向量表示电磁场

$$F = E + \mathrm{i}B : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{C}^3 ,$$

其 E 实部是（随时间变化的）电场，虚部B 是磁场。关于黎曼-西尔伯斯坦表述的历史及其诸多用途概述，请读者参阅 [5]。

设 $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{C}$ 是满足偏微分方程的两个函数

$$\nabla\alpha \times \nabla\beta = \mathrm{i}(\partial_t\alpha\nabla\beta - \partial_t\beta\nabla\alpha)\,, \tag{2.1}$$

其中 ∇ 表示关于三个空间变量的梯度算子。Bateman 在 [4] 中证明，任意一对 $f, g\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ 全纯函数都定义了一个电磁场

$$F = E + \mathrm{i}B = \nabla f(\alpha,\beta) \times \nabla g(\alpha,\beta)\,,$$

该电磁场在所有时刻 t 都是零场。

以 (z_1, z_2) 作为 $\mathbb{C}^2$ 的坐标，并令 $h := \partial_{z_1} f \partial_{z_2} g - \partial_{z_2} f \partial_{z_1} g$，我们可以将 F 重写为

$$F = h(\alpha,\beta)\nabla\alpha \times \nabla\beta\,. \tag{2.2}$$

由于 f 和 g 是任意的全纯函数，因此可以用任意全纯函数 h 来定义 Bateman 场。反过来，任何（实解析）零场都可以通过巴特曼构造 [15] 在局部得到，只需选择适当的 (α, β) 和全纯 h。事实上，只需 h 在 (α, β) 的像的某个邻域上全纯即可。

由于麦克斯韦方程组的这些解是零解，其场线的拓扑结构在任何时刻都保持不变。也就是说，正如第 1.1 节中所回顾的，场线的时间演化由沿归一化坡印廷矢量场输运该场线给出。

巴特曼构造中的主要困难在于寻找方程 (2.1) 的全局解。(α, β) 的一个特别有趣且富有成效的选择是（例如参见 [16]）：

$$\alpha(x,y,z,t) = \frac{x^2+y^2+z^2-t^2-1+2\mathrm{i}z}{x^2+y^2+z^2-(t-\mathrm{i})^2}\,,$$

$$\beta(x,y,z,t) = \frac{2(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2+z^2-(t-\mathrm{i})^2}\,. \tag{2.3}$$

很容易验证这些函数满足偏微分方程 (2.1)。注意，

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\,,$$

因此，映射 (α, β) 的像位于三维球面中。事实上，[6] 中证明了，在 $t = 0$ 处，映射 (α, β) 是先进行立体投影、再进行镜面反射所得映射的逆映射。更准确地说，将沿平面 $\{y = 0\}$ 的立体投影与镜面反射的复合记为 $\phi_0\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$，则有 $\phi_0(\alpha, \beta)|_{t=0} = \mathrm{id}$。事实上，对于 t 的任意取值，映射 (α, β) 都定义了从 $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \to \mathbb{S}^3$ 出发的一个微分同胚。

显然，Bateman 解的坡印廷场不依赖于全纯函数 h。对于方程（2.3）中给出的特解 (α, β)，在时间 $t = 0$，坡印廷场就是 $\mathbb{S}^3$ 上的霍普夫场经 ϕ_0 推前所得（相差一个实因子）

$$-y_1\partial_{x_1} + x_1\partial_{y_1} - y_2\partial_{x_2} + x_2\partial_{y_2}\,. \tag{2.4}$$

它的积分曲线与霍普夫纤维化的纤维相切，因此所有场线都是闭合的，且任意两条场线都会构成一个霍普夫链环（将 $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 与 $\mathbb{S}^3$ 识别）。下文中，选择 (α, β) 如方程（2.3）所示的 Bateman 解

将称为 Hopf 型。注意，霍普夫场（2.4）是 $\mathbb{S}^3$ 上标准接触形式的对偶，参见方程（1.3）。因此可知，在时刻 $t=0$，任何 Hopf 型 Bateman 场的电场部分和磁场部分都是 $\mathbb{S}^3$ 上勒让德场经 ϕ_0 推前所得（相对于标准接触形式）。

因此，这些场的时间演化可以理解为：固定 $\mathbb{S}^3$ 上的 Legendrian 场，同时通过其对 t 的依赖改变投影映射 (α,β)（或者更确切地说，$(\alpha,\beta)|_{t=t_*}^{-1}:\mathbb{S}^3\setminus\{(1,0)\}\to\mathbb{R}^3$）。更准确地说，注意这些场

$$\begin{aligned} v_1 &= -x_2\partial_{x_1}+y_2\partial_{y_1}+x_1\partial_{x_2}-y_1\partial_{y_2}\,,\\ v_2 &= -y_2\partial_{x_1}-x_2\partial_{y_1}+y_1\partial_{x_2}+x_1\partial_{y_2}\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

在 $\mathbb{S}^3$ 的每一点构成标准接触平面的一组基。它们（经由旋转）与方程 (2.4) 中的霍普夫场等距，因此所有场线都是闭合的。事实证明，对于每个固定的时间 t，它们（相差同一个实因子，该因子在 [6] 中明确给出）是映射 $(\alpha,\beta)|_t$ 对 Re($\nabla\alpha\times\nabla\beta$) 和 Im($\nabla\alpha\times\nabla\beta$) 的推前。换句话说，它们分别对应于具有 $h=1$ 和 $h=-\mathrm{i}$ 的 Hopf 型 Bateman 解的电场部分。

因此，该场

$$\widetilde{F}:=h(z_1,z_2)(v_1+\mathrm{i}v_2) \tag{2.6}$$

是通过 $(\alpha,\beta)|_t$ 将式 (2.2) 中采用选择 (2.3) 的 Bateman 场推前所得的结果，差一个随时间变化的实因子。特别地，两个场 F 和 $\frown F$ 对于所有 t 都具有拓扑等价的场线，并且其中一个处处不为零，当且仅当另一个处处不为零。我们称 F 的实部和虚部 $\widetilde{}$ 构成与式 (2.2) 中的 Bateman 解 F 相对应的一对勒让德场。注意，$\widetilde{F}$ 定义在 $\mathbb{S}^3$ 上，而 F 定义在 $\mathbb{R}^{3+1}$ 上。我们还称定义在 $\mathbb{S}^3$ 上的一对勒让德场 (E_0,B_0) 为 Bateman 型，如果它由某个 Hopf 型的 Bateman 解 F 按 $\widetilde{}$ $F=E_0+\mathrm{i}B_0$ 得到。

注 2.1。如 [6], 中所述，$(\alpha,\beta)|_{t=0}$ 的逆映射并不是立体投影映射，而是立体投影与镜面反射的复合，这意味着：如果定义在 $\mathbb{S}^3$ 上的 Bateman 型勒让德场具有一条纽结类型为 K 的闭轨道，那么 $\mathbb{R}^3$ 中相应的电场或磁场部分也具有一条闭轨道，其纽结类型是 K 的镜像。例如，[16] 中的电磁场在 $\mathbb{R}^3$ 中具有呈正环面纽结形状的场线，但定义在 $\mathbb{S}^3$ 上的场中的相应场线是负环面纽结。

3. From Legendrian fields to Bateman solutions: proof of Theorem 1.1

设 F 是 $\mathbb{R}^{3+1}$ 中一个 Hopf 型麦克斯韦方程组的 Bateman 解。如第 2 节所述（详情见 [6]），它给出 $\mathbb{S}^3$ 上的一对 Bateman 型勒让德场 (E_0,B_0)，相对于标准接触结构而言。根据构造，这些场是实解析、无散且 $B_0=JE_0$ 的（回忆一下第 1.3 节中 J 的定义）。本节将证明，反过来，任何具有这些性质的勒让德场对都属于 Bateman 型。作为应用，我们得到一个简单的拓扑必要条件，用以判断某个向量场能否成为 Hopf 型 Bateman 解的电场部分或磁场部分。

首先，我们需要了解一类函数 $\tilde{h}\colon\ \mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}$，它们可以延拓为定义在 $\mathbb{S}^3$某个邻域上的全纯函数。设 M 是 $\mathbb{C}^n$的一个光滑实子流形。点 $p \in M$ 处的复切空间 H_pM 定义为 $T_pM \cap J(T_pM)$，其中 J 是 $\mathbb{C}^n$上的复结构。若 H_pM 的复维数不依赖于 $p \in M$，则称 M 为 CR流形。

三维球面 $\mathbb{S}^3$ 是 $\mathbb{C}^2$中的一个 CR流形，其中复切空间的（复）维数为 1，且恰好由标准接触形式的接触分布给出；也就是说，在 $\mathbb{S}^3$ 的每一点，它都由方程（2.5）中引入的 v_1 和v_2 生成。我们可以将复切空间视为 $\mathbb{S}^3$ 上的一个复线丛，由以下元素生成

$$\mathbb{L} = (-x_2 + \mathrm{i}y_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + (x_1 - \mathrm{i}y_1)\frac{\partial}{\partial z_2}\,, \tag{3.1}$$

其中$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\ (\frac{\partial}{\partial x_i} - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y_i})$。注意，$\mathrm{Re}(\mathbb{L}) = \frac{1}{2}v_1$，且 $\mathrm{Im}(\mathbb{L}) = \frac{1}{2}v_2$。切向柯西-黎曼算子定义为

$$\overline{\mathbb{L}} = (-x_2 - \mathrm{i}y_2)\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} + (x_1 + \mathrm{i}y_1)\frac{\partial}{\partial \overline{z_2}} \tag{3.2}$$

其中$\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} = \frac{1}{2}\ (\frac{\partial}{\partial x_i} + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y_i})$。若光滑函数 $f\colon\ \mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}$ 满足以下切向 Cauchy-Riemann方程，则称其为 CR 函数：

$$\overline{\mathbb{L}} f = 0\,. \tag{3.3}$$

CR 函数在复空间子流形上的函数的全纯延拓中发挥着重要作用。若 $\tilde{f}\colon\ \mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}$ 是定义在 $\mathbb{S}^3$上的实解析函数，则 $\tilde{f}$ 满足切向Cauchy-Riemann方程，当且仅当 $\tilde{f}$ 可延拓为定义在 $\mathbb{S}^3$某个邻域上的全纯函数；也就是说，存在 $\mathbb{S}^3$ 的一个邻域 $U \subset \mathbb{C}^2$ 以及一个全纯函数 $f\colon\ U \to \tilde{\mathbb{C}}$，使得 $f|_{\mathbb{S}^3} = f$。这一结果（具有不同程度的一般性）归功于 Severi [27, 28] 和 Tomassini [30], ，并适用于任意实解析 CR流形及其相应的切向Cauchy-Riemann方程组。关于这一主题的近期综述，参见 [3] 。

现在来考察定理 1.1陈述中的勒让德场。由于 E_0 和 $B_0 = JE_0$ 是勒让德且实解析的，因此很容易得出，它们可以表示为 v_1 和 v_2 的线性组合（参见公式 (2.5)）：

$$\begin{aligned} E_0 &= \mathrm{Re}(\tilde{h})v_1 - \mathrm{Im}(\tilde{h})v_2\,, \\ B_0 &= \mathrm{Re}(\tilde{h})v_2 + \mathrm{Im}(\tilde{h})v_1\,, \end{aligned}$$

对于某个实解析函数 $\tilde{h}\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}$。我们计算 E_0 和B_0 的散度，发现

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(E_0) &= \mathrm{div}\Big(\mathrm{Re}(\tilde{h})v_1 - \mathrm{Im}(\tilde{h})v_2\Big) \\ &= -x_2\frac{\partial \mathrm{Re}(\tilde{h})}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial \mathrm{Im}(\tilde{h})}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial \mathrm{Re}(\tilde{h})}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial \mathrm{Im}(\tilde{h})}{\partial y_1} \\ &\quad + x_1\frac{\partial \mathrm{Re}(\tilde{h})}{\partial x_2} - y_1\frac{\partial \mathrm{Im}(\tilde{h})}{\partial x_2} - y_1\frac{\partial \mathrm{Re}(\tilde{h})}{\partial y_2} - x_1\frac{\partial \mathrm{Im}(\tilde{h})}{\partial y_2} \\ &= \mathrm{Re}(\mathbb{L}(\tilde{h}))\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(B_0) &= \operatorname{div}\Big(\operatorname{Re}(\tilde{h})v_2 + \operatorname{Im}(\tilde{h})v_1\Big)\\ &= -x_2\frac{\partial \operatorname{Im}(\tilde{h})}{\partial x_1} - y_2\frac{\partial \operatorname{Re}(\tilde{h})}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial \operatorname{Im}(\tilde{h})}{\partial y_1} - x_2\frac{\partial \operatorname{Re}(\tilde{h}}{\partial y_1}\\ &\quad + x_1\frac{\partial \operatorname{Im}(\tilde{h})}{\partial x_2} + y_1\frac{\partial \operatorname{Re}(\tilde{h})}{\partial x_2} - y_1\frac{\partial \operatorname{Im}(\tilde{h})}{\partial y_2} + x_1\frac{\partial \operatorname{Re}(\tilde{h})}{\partial y_2}\\ &= \operatorname{Im}(\mathbb{L}(\tilde{h})). \qquad (3.5)\end{aligned}$$

因此，当且仅当解析函数h 满足切向Cauchy-Riemann方程时， E_0 和 B_0 均为无散场。反过来，这等价于存在 $\tilde{h}$ 在 $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$的某个邻域上的全纯延拓。因此，存在 $\mathbb{S}^3$ 的一个邻域 $U \subset \mathbb{C}^2$ 以及一个全纯函数h: $U \to \mathbb{C}$ ，使得

$$h|_{\mathbb{S}^3} = \tilde{h}\,. \qquad (3.6)$$

最后，取方程（2.3）中的(α, β) : $\mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{C}^2$ ，我们注意到，只要函数 h 在(α, β)的像的某个邻域内全纯，巴特曼构造便成立，而该像为 $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$。因此，Bateman 场

$$F = h(\alpha, \beta)(\nabla\alpha \times \nabla\beta)$$

是在 $\mathbb{R}^{3+1}$上的麦克斯韦方程组的一个零解。由于 h 满足方程（3.6），(E_0, B_0)就是 $\mathbb{S}^3$ 上与解 F对应的一对勒让德场。至此定理得证。

注释 3.1. 由于 Bateman 型的勒让德场是初始电场和磁场在映射 $(\alpha, \beta)|_{t=0}$ 下的推前（相差一个已知的实因子），我们可以将定理 1.1 解读为一个与 [17, 第 3], 节相似的结果：它提供了一种可能性，即只研究 $t = 0$ 处的初始数据，便可判断电磁场是否在所有时刻均为零。

注释 3.2. 无散勒让德场的研究与磁测地线问题 [14] 之间存在有趣的联系。 $\mathbb{S}^2$ 上的磁测地线问题给出一个 $\mathbb{S}^3$ 上的哈密顿向量场，该场相对于标准接触形式是勒让德的，且无散。遗憾的是，除非磁场在 $\mathbb{S}^2$ 上恒为零，否则无法像定理 1.1 那样将它嵌入 Bateman 型对中。在这种情况下，可得到一个霍普夫场，定义在 $\mathbb{S}^3$ 上。

最后，我们证明，$\mathbb{S}^3$ 上的任意巴特曼型非消失场，都可以通过非消失勒让德场与方程 (2.5) 中的霍普夫场 v_1 同伦。由于任意巴特曼型场相对于标准接触结构都是 Legendrian 场，因此结论可由以下标准结果推出（为求完整，我们给出简短证明）。

命题 3.3. 设 X 是 $\mathbb{S}^3$ 上的非消失勒让德场（相对于标准接触结构）。那么 X 可通过非消失勒让德场与 v_1 同伦。

证明。与定理 1.1 的证明一样，我们可以用定义在 $\mathbb{S}^3$ 上的复值函数 h 表示每个勒让德场，该函数在基 $\{v_1, v_2\}$ 中表示该场。

这种对应关系在相对于标准接触结构的非零勒让德场空间与非零复值函数 h：$\mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 的空间之间建立了一个同胚。由于 $\pi_3(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = 0$，任意两个这样的映射都是同伦的，这意味着相应的勒让德场可以通过非零勒让德场彼此同伦。特别地，X 与 v_1 同伦，它对应于函数 $h = 1$。□

4. Knotted periodic orbits of non-vanishing Legendrian fields

本节聚焦于非消失的勒让德场（相对于标准接触结构）及其周期轨道。如第 2 节所述，Hopf 型 Bateman 解的电场（或磁场）部分在 $t = 0$处的一条周期轨道，对应于$\mathbb{S}^3$上相关勒让德场的一条周期轨道。因此，它是相对于标准接触结构的勒让德结。定理 1.2 声称，勒让德结能否由非消失勒让德场（以及非消失 Bateman 场）的周期轨道实现，仅由勒让德结的一种经典接触不变量——旋转数 [13, 第 3 节5]——决定：

定义 4.1. 设 K 是接触流形 (M, ξ) 中的一条零同调的勒让德结，且 Σ 是满足 $\partial\Sigma = K$的嵌入的可定向曲面。给定接触丛 $\xi|_\Sigma$ 的限制丛的一个平凡化，以及 V 上一个处处非零的切向量场 K，我们可以通过 V 相对于给定平凡化的坐标，将其视为 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$中的一条环路。于是，旋转数 $\mathcal{R}(K)$ 定义为这条环路的绕数，且与平凡化的选择无关。

注 4.2. 回顾一下，曲面上带边界的任意可定向二维平面丛都是平凡的，因此定义 4.1 中的平凡化总是存在。对于 $\mathbb{S}^3$ 上的标准接触结构，式 (2.5) 中引入的向量场 $\{v_1, v_2\}$ 构成这种平凡化的一组基，事实上还是一组全局基。因此，$\mathbb{S}^3$ 上勒让德结的旋转数（相对于标准接触结构）与塞弗特曲面 Σ 无关。

在第 4.1 节中，我们利用 Bateman 的构造，以及第 2 节中解释的勒让德场与麦克斯韦方程组零解之间的对应关系，证明定理 1.2 和推论 1.4。在第 4.2 节中，我们探讨如何将 $\mathbb{S}^3$ 上任意由圆构成的叶状结构实现为 Bateman 型电场（或磁场），并证明命题 1.5。

4.1. 定理 1.2 和推论 1.4 的证明。设 X 是 $\mathbb{S}^3$ 上的一个勒让德（相对于标准接触结构）且处处非零的向量场。我们在第 3 节中论证过，它可以用 Hopf 基 $\{v_1, v_2\}$ 表示为

$$\mathrm{Re}(h(v_1 + \mathrm{i}v_2)) \tag{4.1}$$

其中 h 是一个复值函数：$\mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$。显然，函数 h 的定义方式是将 X 用上述接触分布的基表示。

令 K 为 X的一个周期轨道。由于 $\mathbb{S}^3$ 是单连通的，K 是零伦的，因此存在环路同伦 K_s, $s \in [0, 1]$，其中 $K_0 = K$，且 K_1 是一个点 $(z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$。于是，$h(K_s)$ 是 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 中的一个同伦，它将 $h(K)$ 变为一个点

$h(z_1^0, z_2^0)$。根据定义， K 的旋转数是环路 $h(K)$ 的绕数。由于绕数是 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$中的一个同伦不变量，且常值环路的绕数为零，我们得出 $\mathcal{R}(K) = 0$。

反过来，假设 $L = \cup_{i=1}^n L_i$ 是 $\mathbb{S}^3$ （标准接触结构）上的勒让德链环，且对所有 i， $\mathcal{R}(L_i) = 0$。我们可以放心地假设 L 是实解析的（相差一个勒让德同痕）， [23], 因此利用 [6, 引理 2]，我们可以为链环的每个分支定义一个实解析函数 H_i: $L_i \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$，使得在 L_i 上的任意一点处， L_i 的非零切向量为

$$\mathrm{Re}(H_i)v_1 - \mathrm{Im}(H_i)v_2\,. \tag{4.2}$$

由于 L_i 的旋转数为零，闭曲线 $H_i(L_i) \subset\mathbb{C}\backslash\{0\}$的绕数为零，因此 Log($H_i$)是在 L_i上定义良好的实解析函数。

现在，由于 L_i 是实解析的勒让德纽结，且 Log(H_i)是实解析的，我们可以直接应用 Burns 和 Stout 的延拓定理 [7]。因此，我们得出结论：Log(H_i)可延拓为全纯函数 h ，其定义在 $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$的一个邻域 U 上，即对所有 i， $h|_{L_i} = \mathrm{Log}(H_i)$。

最后，我们对 h 取指数，得到

$$e^h : U \to \mathbb{C}\backslash\{0\}\,,$$

这是一个满足 $e^h|_{L_i} = H_i$ 的全纯函数。由等式 (4.2) 可知，.....的实部

$$\widetilde{F} := e^h(v_1 + \mathrm{i}v_2)$$

是 $\mathbb{S}^3$ 上的一个向量场 X ，其中每个 L_i 都是一个周期轨道。根据构造， X 不处处为零且是勒让德的。此外，由于 h 是 U 上的全纯函数（因而是 CR 函数），等式 (3.4) 表明 div $X = 0$。至此，定理 1.2 得证。

为证明推论 1.4，我们首先注意到（如第 2 节所述），在映射 $(\alpha, \beta)|_{t=0}$: $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \to \mathbb{S}^3$ 下， L 的像是一个链 $L' \subset \mathbb{S}^3$；该映射是一个微分同胚。由于 $\mathbb{S}^3$ 上的任意链都同位于一个勒让德链环（相对于标准接触结构），且其所有分支的旋转数均为零的链环，参见例如 [11, 第 2 节。7], 因此，我们可以放心地假设（在同位意义下）， L 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个链，其对应的链 L' 满足上述性质。

现在，我们可以对分量 L'_i、 $i \in I$ 应用前面的构造，并为 L' 的其余分量定义一个实解析函数 H_i： $L'_i \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$、$i \notin I$，从而得到一个非零切向量:

$$\mathrm{Im}(H_i)v_1 + \mathrm{Re}(H_i)v_2\,.$$

按照前面的方法，我们得到一个适用于所有 i 的公共全纯延拓 h： $U \to \mathbb{C}^2$、$h|_{L'_i} = H_i$ ，然后便可在 $\mathbb{R}^{3+1}$ 上定义 Bateman 场

$$F = e^{h(\alpha,\beta)}(\nabla\alpha \times \nabla\beta)\,,$$

其按构造处处非零。由第 2 节可知，对于每个 t，映射$(\alpha, \beta)|_t$ 对 F 的电场和磁场部分的推前，恰好分别是 F的~实部和虚部，至多相差一个处处非零的（依赖于t的）比例因子~。由于 $\cup_{i\in I} L'$是 Re F的周期轨道的子集，而 L'的其余~个分量是 Im F的周期轨道的子集，我们最终得出，对于所有 t， F 的电场部分具有一个与 $\cup_{i\in I} L_i$同位的周期轨道子集，

而其他分量则对应于磁场部分的周期轨道。推论由此得证。

4.2. 勒让德塞弗特叶状结构。推论 1.4 中的 Bateman 解呈现了一组指定的打结周期轨道，但显然并非所有电场线或磁力线都是闭合的。鉴于 Ra˜nada 的解 [21]，对应于 $\mathbb{S}^3$上的霍普夫纤维化，自然会问，零电磁场的这类拓扑构型是否也能出现在其他链环类型中。确切地说，我们要寻找一种电场和/或磁场，使得相应的 Bateman 型勒让德场在 $\mathbb{S}^3$ 上的所有轨道都是闭合的。

爱泼斯坦的一项经典结果 [10] 表明，$\mathbb{S}^3$ 上所有轨道均为闭合轨道的向量场构成一个塞弗特叶状结构。$\mathbb{S}^3$ 上塞弗特叶状结构的每条正则纤维都是一个环面链环，而两条例外纤维总是构成一个霍普夫链环。$\mathbb{S}^3$ 上的塞弗特叶状结构族由两个整数 p 和 q,$q \geqslant 1$完全刻画，其中 gcd$(p, q) = 1$。叶状结构 $S_{p,\ q}$经过点 $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3$的叶由以下参数曲线给出

$$(z_1 e^{\mathrm{i}p\varphi}, z_2 e^{\mathrm{i}q\varphi}),$$

其中 $\varphi \in [0, 2\pi)$。该叶是一个（p, q）环面纽结，除非 $z_1 = 0$ 或 $z_2 = 0$，此时它是一个平凡结。任意两个这样的叶状结构 $S_{p,\ q}$和 $S_{p',\ q'}$，若（p, q）$\neq$（p', q'），（p, q）$\neq$（q', p'），且 gcd$(p, q) =$ gcd$(p', q') = 1$，则它们并不等价；而 $\mathbb{S}^3$ 上的每个塞弗特叶状结构都等价于某个 $S_{p,\ q}$，其中（p, q）可任意选取。回顾一下，若存在一个将一个叶状结构映到另一个叶状结构的保定向微分同胚，我们就称这两个叶状结构等价。

由定理 1.1 可知，塞弗特叶状结构属于 Bateman 型的必要条件是，其所有叶相对于标准接触结构都必须是勒让德的。关于勒让德叶状结构的一般研究，参见 [18, 20]。此处我们证明命题 1.5，即每个正塞弗特叶状结构 $S_{p,\ q}$, $p > 0$,$q > 0$ 都等价于一个相对于标准接触结构为勒让德的叶状结构。

命题1.5的证明。与塞弗特叶状结构相切的向量场 $X_{p,q}$ $S_{p,q}$ of$\mathbb{S}^3$ 为

$$X_{p,q} = -py_1\partial_{x_1} + px_1\partial_{y_1} - qy_2\partial_{x_2} + qx_2\partial_{y_2},$$

其中我们使用坐标 $z_i = x_i +$iy_i, $i = 1, 2$。显然，$X_{p,q}$无散。直接计算可得，$X_{p,q}$ 属于 1-形式的核

$$\begin{aligned}
\alpha_{p,q} := &\left(-\frac{(p(x_1^2+y_1^2)+q(x_2^2+y_2^2))(x_1x_2-y_1y_2)x_1}{x_1^2+y_1^2} - q\frac{(y_1x_2+x_1y_2)y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)\mathrm{d}x_1\\
&+\left(-\frac{(p(x_1^2+y_1^2)+q(x_2^2+y_2^2))(x_1x_2-y_1y_2)y_1}{x_1^2+y_1^2} + q\frac{(y_1x_2+x_1y_2)x_1}{x_1^2+y_1^2}\right)\mathrm{d}y_1\\
&+\left(\frac{(p(x_1^2+y_1^2)+q(x_2^2+y_2^2))(x_1x_2-y_1y_2)x_2}{x_2^2+y_2^2} + p\frac{(y_1x_2+x_1y_2)y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)\mathrm{d}x_2\\
&+\left(\frac{(p(x_1^2+y_1^2)+q(x_2^2+y_2^2))(x_1x_2-y_1y_2)y_2}{x_2^2+y_2^2} - p\frac{(y_1x_2+x_1y_2)x_2}{x_2^2+y_2^2}\right)\mathrm{d}y_2 .
\end{aligned} \tag{4.3}$$

这个 1-形式处处光滑（实际上是实解析的）。使用 Hopf坐标 $(z_1, z_2) =$(cos s exp(iϕ_1), sin s exp(iϕ_2)), $s \in [0, \pi/2]$, 可以很容易看出这一点。

$\phi_{1,2} \in [0, 2\pi)$，其中 $\alpha_{p,q}$ 取更简单的形式

$\alpha_{p,\ q} = (p\cos^2 s + q\sin^2 s)\cos(\phi_1 + \phi_2)ds + \sin(\phi_1 + \phi_2)\sin s\cos\ s($ $qd\phi_1 - pd\phi_2)$，并且$X_{p,\ q}$ 可写为

$$X_{p,q} = p\partial_{\phi_1} + q\partial_{\phi_2}\,.$$

我们断言，1-形式$\alpha_{p,\ q}$ 是接触形式（因此其核定义了接触结构$\xi_{p,\ q}$），条件是 $p > 0, q > 0$。事实上，在Hopf坐标中进行简单计算可得

$$\begin{aligned}\alpha_{p,q} \wedge d\alpha_{p,q} &= (p+q)(p\cos^2 s + q\sin^2 s)\Big(-\sin s\cos s ds \wedge d\phi_1 \wedge d\phi_2\Big)\\ &= (p+q)(p\cos^2 s + q\sin^2 s)\mu_0\,,\end{aligned}$$

其中 μ_0 是 $\mathbb{S}^3$ 上的标准体积形式，以Hopf坐标表示。由此显然可知，对于任意 $p > 0$ 和 $q > 0$，$\alpha_{p,\ q}$ 都是一个（实解析）接触形式，即使这些数值不是整数。

鉴于$\alpha_{p,\ q}$ 的表达式，很容易构造一个接触形式的同伦，将$\alpha_{p,\ q}$ 与$\alpha_{1,\ 1}$连接起来：

$$\alpha(t) := \alpha_{p(t),q(t)}$$

其中 $p(t) = t + p(1-t)$，且 $q(t) = t + q(1-t)$，$t \in [0,1]$。显然，$\alpha(0) = \alpha_{p,\ q}$且 $\alpha(1) = \alpha_{1,\ 1}$。因此，Moser路径方法 [13] 表明，存在一个（接触）微分同胚同伦 Φ_t，可将相应的接触结构相互变换。事实上，由于

$$\alpha_{1,1} = -x_2\mathrm{d}x_1 + y_2\mathrm{d}y_1 + x_1\mathrm{d}x_2 - y_1\mathrm{d}y_2\,,$$

是通过旋转 $(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1, -x_2, y_1, y_2)$ 从 $\mathbb{S}^3$ 上的标准接触形式得到的，因此我们推知，所有接触结构 $\xi_{p,\ q}$, $p > 0$, $q > 0$ 都等价于 $\mathbb{S}^3$ 上的标准接触结构。由于接触形式的同伦 $\alpha(t)$ 关于 t 以及在 $\mathbb{S}^3$ 上均为实解析的，Moser 定理的证明表明，Φ_t 是一个实解析同伦。

记 $\Phi_{p,q}$ 为 $\mathbb{S}^3$ 的实解析微分同胚，满足 $\xi_{p,q}$ 是标准接触结构的拉回，由此可推得，推前 $(\Phi_{p,q})_*(X_{p,q})$ 是相对于标准接触结构的实解析勒让德向量场。此外，由于 $X_{p,q}$ 是无散的，即它保持标准体积形式，

$$L_{X_{p,q}}\mu_0 = 0\,,$$

我们得出结论：$(\Phi_{p,q})_*(X_{p,q})$ 保持体积形式 $(\Phi_{p\,q,}^{-1})^*\mu_0$。定义 $\mathbb{S}^3$ 上的正实解析函数 $F_{p,q}$ 为

$$(\Phi_{p,q}^{-1})^*\mu_0 =: F_{p,q}\mu_0\,,$$

由此得到向量场 $X := F_{p,q}(\Phi_{p,q})_*(X_{p,q})$ 是实解析、无散且勒让德的，相对于标准接触结构。命题得证。□

注 4.3. 原则上，Moser路径方法也为我们提供了如何求出微分同胚 $\Phi_{p,\ q}$ 的指引。随后我们可以检查勒让德正交场 JX 的散度。如果 $\mathrm{div}(JX) = 0$，那么 (X, JX) 就是一对 Bateman型勒让德场，因此该拓扑结构对所有 t 都是稳定的。然而在实践中，按照 Moser 方法需要求解的微分方程

很难分析，因此在现阶段，除霍普夫场之外，其他塞弗特纤维化是否会作为电磁场中的稳定结构出现，仍未有定论。

5. New Bateman variables and torus knots

本节中，我们构造一对具有 Bateman 类型的勒让德向量场，使得其电场部分的周期轨道包含所有正环面纽结。该构造通过引入一对新的 Bateman变量来实现，即方程(2.1)的新解，具体内容见第 5.1 节。

5.1. 反全纯函数与时间反演。设 $\alpha\colon\ \mathbb{R}^{3+1}$ 是关于三个空间变量 x、 y 和 z以及时间变量t的复值函数。记 $\tilde{\alpha}\colon\ \mathbb{R}^{3+1}\to\mathbb{C}$ 为由 α 取复共轭并进行时间反演后得到的函数，即将 t 替换为 $-t$:

$$\tilde{\alpha}(x,y,z,t):=\overline{\alpha(x,y,z,-t)}\,.$$

下面的引理表明，这种初等（尽管并非平凡）的变换保持贝特曼性质。

˜引理5.1. 设 α 和 β 为 Bateman变量。那么，上文定义的 $\tilde{\alpha}$ 和 β 也为 Bateman变量。

证明。根据 Bateman变量的定义，时空函数 α 和 β 满足˜方程（2.1）。我们断言，二元组（$\tilde{\alpha}$, β）也满足方程（2.1）。事实上

$$\begin{aligned}\nabla\tilde{\alpha}\times\nabla\tilde{\beta}&=\left(\overline{\nabla\alpha\times\nabla\beta}\right)|_{t\to-t}\\&=-\mathrm{i}\overline{(\partial_t\alpha\nabla\beta-\partial_t\beta\nabla\alpha)}|_{t\to-t}\\&=-\mathrm{i}(\partial_t\overline{\alpha}\nabla\overline{\beta}-\partial_t\overline{\beta}\nabla\overline{\alpha})|_{t\to-t}\\&=\mathrm{i}(\partial_t\tilde{\alpha}\nabla\tilde{\beta}-\partial_t\tilde{\beta}\nabla\tilde{\alpha})\,,\end{aligned}\tag{5.1}$$

由此完成引理的证明。 □

接下来，我们利用这一引理构造新的、非 Hopf 型的麦克斯韦方程零解。回顾一下，若函数 $h\colon\ U\subset\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ 的复共轭 $\overline{h}$ 是全纯函数，则称其为反全纯函数。

命题 5.2. 设（α, β）为 Bateman变量，且对所有 t，$(\overline{\alpha},\overline{\beta})$的像均包含于$(\alpha,\beta)|_{t=0}$的像中。设 $h\colon\ U\to\mathbb{C}$ 是在包含$(\alpha,\beta)|_{t=0}$ 在 $\mathbb{C}^2$中的像的某个邻域 U 上的反全纯函数。那么

$$E_0:=Re(h(\alpha,\beta)\nabla\alpha\times\nabla\beta)|_{t=0}\,,\qquad B_0:=-Im(h(\alpha,\beta)\nabla\alpha\times\nabla\beta)|_{t=0}$$

是一个在所有时刻均为零的电磁场的初始数据。

证明。我们首先计算

$$\begin{aligned}E_0+\mathrm{i}B_0&=\overline{h(\alpha,\beta)\nabla\alpha\times\nabla\beta}|_{t=0}\\&=\overline{h}(\overline{\alpha},\overline{\beta})\nabla\overline{\alpha}\times\nabla\overline{\beta}|_{t=0}\\&=\overline{h}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\nabla\tilde{\alpha}\times\nabla\tilde{\beta}|_{t=0}\,,\end{aligned}\tag{5.2}$$

˜其中 $\tilde{\alpha}$ 和 β 如前所定义。由于 h 在 U 上是反全纯的，其共轭$\overline{h}$ 在 $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$的像的某个邻域上是全纯的，而该像与˜ ˜$(\tilde{\alpha},\beta)$的像相同。由于 $\tilde{\alpha}$ 和 β 是 Bateman变量（参见引理5.1），初始数据 $E_0 + \mathrm{i}B_0$ 等于 $t = 0$处相应的 Bateman 场。由此，命题可由 Bateman 构造和解的唯一性得出。□

备注 5.3. 需要强调的是，命题 5.2 并不与第 2 节所述的巴特曼构造相矛盾（在该节中，我们要求 h全纯）。确实， $\mathbb{R}^3$ 上的一对含时向量场描述一个与霍普夫纤维化相关的 Bateman 场，当且仅当 $\mathbb{S}^3$ 上的相应函数 h 满足 $\mathbb{S}^3$上的切向Cauchy-Riemann方程。然而，在命题 5.2 中，我们构造的麦克斯韦方程组的零解是 Bateman 型的，但对应的并非方程（2.3）中的 (α,β)，而是新的 Bateman变量˜$(\tilde{\alpha},\beta)$（它们不是 Hopf 型）。因此，如公式（5.2）所示，必须全纯的是函数$\overline{h}$ ，而 h 则是反全纯的。

最后我们注意到，方程（2.3）中引入的 Bateman 对 (α,β)（Hopf 型 Bateman 解）满足命题 5.2 的假设，因为对于所有 $t_* \in \mathbb{R}$，$(\alpha,\beta)|_{t=t_*}$ 的像都是 $\mathbb{S}^3$ 。由此可知， $\mathbb{S}^3$ 上的一对勒让德向量场，若其关于 Hopf 基 $\{v_1, v_2\}$ 的分量分别是某个反全纯函数的实部和虚部，也对应于巴特曼场。

5.2. 环面纽结：命题1.7的证明。本节利用上一节得到的结果证明命题1.7。为此，我们考虑反全纯函数 $h(z_1, z_2) = \overline{z_1 z_2}$。由 Re$(h(z_1, z_2)(v_1 + \mathrm{i}v_2))$ 给出的勒让德向量场 X on$\mathbb{S}^3$ 可显式写为

$$X = y_1(x_2^2 + y_2^2)\partial_{x_1} - x_1(x_2^2 + y_2^2)\partial_{y_1} - y_2(x_1^2 + y_1^2)\partial_{x_2} + x_2(x_1^2 + y_1^2)\partial_{y_2}\,, \tag{5.3}$$

其中 $z_i = x_i + \mathrm{i}y_i$ 如常。容易验证，函数 $|z_1|^2$ 和 $|z_2|^2$ 是向量场 X 的第一积分。利用这一观察，计算经过点 $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3$ 的 X 的积分曲线是初等的，其表达式为

$$(z_1 e^{-\mathrm{i}|z_2|^2\tau}, z_2 e^{\mathrm{i}|z_1|^2\tau})\,, \tag{5.4}$$

当 $\tau \in \mathbb{R}$ 时。

X 的场线与 $\mathbb{S}^3$ 中恒定 $|z_1|$ （或等价地，恒定 $|z_2|$）的环面相切。场线的斜率为 $-|z_2|^2/|z_1|^2$，因此当且仅当 $|z_2|^2/|z_1|^2 \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 时，场线是闭合的。特别地，对于$|z_2|^2/|z_1|^2 = p/q$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N}$，相应环面上的所有场线都构成环面纽结 $T_{p,\ -q}$。

回顾一下，对于方程（2.3）中的 Bateman变量（α,β），我们用 ϕ_0表示（α,β）$|_{t=0}$ 的逆。 X 经 ϕ_0 推前得到的 E_0 ，除相差一个实因子外，等于 $h(\alpha,\beta)(\nabla\alpha \times \nabla\beta)|_{t=0}$的实部。于是，根据命题 5.2， E_0 和$B_0 := -\mathrm{Im}(h(\alpha,\beta)(\nabla\alpha \times \nabla\beta)|_{t=0})$构成了一个 Bateman 场的初始数据，其˜Bateman变量为（$\tilde{\alpha},\beta$）。特别是，嵌套环面的拓扑结构以及这些环面稠密子集上的环面纽结叶状结构，在所有时刻都保持不变。注意， ϕ_0 是反转定向的，因为它是立体投影与镜面反射的复合。因此，负环面纽结 $T_{p,\ -q}$ 在 $\mathbb{S}^3$

中变为其镜像$T_{p,\ q}$。命题的证明至此完成。

6. Invariant magnetic tori: proof of Theorem 1.8

第 4 节介绍的构造具有指定周期轨道的 Bateman 场的方法，基于 Burns 和 Stout 的延拓定理 [7], 。该定理指出，定义在 $\mathbb{S}^3$ 上勒让德链环 L 上的实解析复值函数，可以延拓为定义在 $\mathbb{S}^3$ 某个邻域上的全纯函数。这种延拓远非唯一，因此我们可以得到整族 Bateman 场，使指定的纽结 L 成为周期轨道。本节将证明，在这一整族中，我们总能找到一个向量场，它具有一个正体积的不变环面集合，这些环面是不变环面 L 的管状邻域的边界。根据构造，这些不变环面是 Bateman 型零解的磁面。由此，只需注意到 $\mathbb{S}^3$ 中的任意环面曲面 T 都同位于某个纽结 L 的边界，而该边界又同位于一个解析勒让德结，即可推出定理 1.8。

为此，我们首先回顾，根据 Rudolph 定理 [23, 24, 25] （参见第 7.2 节）， $\mathbb{S}^3$ 上的任意实解析勒让德链环 L 都是全纯函数 $F\colon\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ 的零点集与 $\cap\,\mathbb{S}^3$ 的完全相切交集F^{-1}(0)。这个函数 F 并不唯一。下面的技术引理表明，可以选取函数F ，使其在 L 上的梯度满足指定条件。证明中我们使用向量场

$$v_3 = x_1\partial_{x_1} + y_1\partial_{y_1} + x_2\partial_{x_2} + y_2\partial_{y_2}\,,$$
$$v_4 = -y_1\partial_{x_1} + x_1\partial_{y_1} - y_2\partial_{x_2} + x_2\partial_{y_2}\,,$$

这些向量场与勒让德场 v_1 和 v_2 一起，为每个点 $p \in \mathbb{S}^3$构成$T_p\mathbb{R}^4$ 的正交归一基。

引理 6.1. 设 L是 $\mathbb{S}^3$中的实解析勒让德链环。那么，存在定义在 $\mathbb{S}^3$ 某个邻域 U 上的全纯函数 $F\colon\ U \to \mathbb{C}$ ，使得 L 是 F^{-1}(0) $\cap\,\mathbb{S}^3$ 的一个分支， L 上的所有点都是相切交点，并且

$$\nabla Re(F)(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

对所有 $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in L$，其中 ∇ 是关于 x_1,y_1,x_2和 y_2的欧几里得梯度。

注 6.2. 注意，对于所有 $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in L$， 等式 ∇Re(F)(x_1, y_1, x_2, y_2) $=(x_1, y_1,$ $x_2, y_2)$ 等价于 $\frac{\partial F}{\partial z_i}|_L = \overline{z_i},\ i = 1, 2$。

证明。由 Rudolph 可知，由于 L 是实解析且为勒让德的，存在一个全纯函数 $\widetilde{F}\colon$ $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ ，使得 L 是 $\widetilde{F}^{-1}$(0) 与 $\mathbb{S}^3$的相切交集。

~ ~ ~因此， ∇Re(F) 和 ∇Im(F) 均属于 span(v_3, v_4)，即存在一对实解析函数 $(\lambda_1, \lambda_2)\colon L \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$，使得 ∇Re(F) $= \lambda_1 v_3 +$ ~ ~$\lambda_2 v_4$且 ∇Im(F) $= \lambda_1 v_4 - \lambda_2 v_3$（因为 F是全纯的）。

现在，对于每个点 $p \in L$ ，我们将 g 定义为： $L \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$g(p) := \frac{\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\,, \tag{6.1}$$

它是定义在 L 上的实解析复值函数。根据 Burns 和 Stout 定理，它可以全纯延拓到 $\mathbb{S}^3$ 的某个邻域 U 上，我们将其记为 $\widetilde{g}$。

~最后，令 $F := \widetilde{g}F$，我们便可轻易推得

$$\begin{aligned}\nabla\mathrm{Re}(F)(x_1,y_1,x_2,y_2) &= (\mathrm{Re}(\widetilde{g})\lambda_1 + \mathrm{Im}(\widetilde{g})\lambda_2)v_3 + (\mathrm{Re}(\widetilde{g})\lambda_2 - \mathrm{Im}(\widetilde{g})\lambda_1)v_4 \\ &= v_3 = (x_1,y_1,x_2,y_2)\end{aligned} \tag{6.2}$$

对所有 $(x_1,y_1,x_2,y_2) \in L$ 均成立。由于 L 是 $F^{-1}(0)$ 与 $\mathbb{S}^3$ 的切向交集集合中的一个分量，引理得证。□

设 L 是 $\mathbb{S}^3$ 中的一个实解析勒让德结。我们的目标是构造 $\mathbb{S}^3$ 上的勒让德场 B_0，它对应于一个 Bateman 型解（在 $t=0$ 处）的磁场部分，并使得 L 是 B_0 的椭圆周期轨道，其丢番图频率为 $[9,$，见第 $2]$ 节。这意味着，由 B_0 在 L 上的流所定义的单值矩阵具有两个纯虚特征值 $\exp(\pm \mathrm{i}\omega)$，且 $\frac{\omega}{2\pi}$ 是一个丢番图数。回顾一下，若存在常数 $\gamma > 0$ 和 $\tau > 2$，使得对于任意 $p \in \mathbb{Z}$ 和 $q \in \mathbb{Z}_0$，均有 $\left|w - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{\gamma}{|q|^\tau}$，则无理数 w 称为丢番图数。正如我们稍后将看到的，这与 B_0 的不变环面在 L 上聚集的存在性有关。

按照第 4 节中使用的 Bateman 构造，设 U 是 $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ 的一个邻域，并设 $h:$ $U \to \mathbb{C}$ 是一个全纯函数，使得 L 是相应 Bateman 场的磁场部分 B_0 的一条周期轨道 ~，即

$$\tilde{B}_0 := \mathrm{Im}(h(v_1 + \mathrm{i}v_2))\,,$$

限制在 L 上时，是一个单位切向量 T。取一个引理 6.1 中的全纯函数 $F:\ U \to \mathbb{C}$，其零点在 L 中与 $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}$ 相切相交，且 $\frac{\partial F}{\partial z_i}|_L = \overline{z_i},\ i = 1, 2$，并取任意一个全纯函数 $g:\ U \to \mathbb{C}$。显然，对应于 $h + gF$ 的 Bateman 场（记为 B_0）

$$B_0 := \mathrm{Im}((h + gF)(v_1 + \mathrm{i}v_2))\,,$$

也以 L 为周期轨道，并且 $h + gF$ 在 L 上的梯度满足

$$\nabla\mathrm{Re}(h + gF) = \nabla\mathrm{Re}(h) + \mathrm{Re}(g)(x_1,y_1,x_2,y_2)_{\circ,p} - \mathrm{Im}(g)(-y_1,x_1,-y_2,x_2)_{\circ,p}\,, \tag{6.3}$$

$$\nabla\mathrm{Im}(h + gF) = \nabla\mathrm{Im}(h) + \mathrm{Im}(g)(x_1,y_1,x_2,y_2)_{\circ,p} + \mathrm{Re}(g)(-y_1,x_1,-y_2,x_2)_{\circ,p}\,. \tag{6.4}$$

此处及下文中，我们采用如下记号：对于 $T_p\mathbb{R}^4$ 中任意切向量 $V = \xi_1\partial_{x_1} + \xi_2\partial_{y_1} + \xi_3\partial_{x_2} + \xi_4\partial_{y_2}$，记 V° 为点 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in \mathbb{R}^4$；而要将 $\mathbb{R}^4$ 中的一个点与给定点 $p \in \mathbb{R}^4$ 处的一个切向量对应起来，我们记作 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)_{\circ,\ p} = \xi_1\partial_{x_1} + \xi_2\partial_{y_1} + \xi_3\partial_{x_2} + \xi_4\partial_{y_2\circ}$

令 $N(L)$ 表示 $\mathbb{S}^3$ 中 L 的管状邻域，令 NL 表示其在 $\mathbb{S}^3$ 中的法丛。令 $N_{\mathbb{R}^4}(L)$ 和 $N_{\mathbb{R}^4}L$ 表示将 L 视为 $\mathbb{R}^4$ 的子流形时相应的对象。由于 L 是勒让德的，N_pL、 $p \in L$ 有一组基，由 v_4（标准接触形式的对偶）和一个与 L 勒让德正交的 Z 构成，后者明确写作 $\mathrm{Re}(h(v_1 + \mathrm{i}v_2))$（或等价地，$\mathrm{Re}((h + gF)(v_1 + \mathrm{i}v_2))$）。同样，$\{v_4, Z, v_3\}$ 在 $p \in L$ 处构成 $\mathbb{R}^4$ 中 L 的法丛 $N_{\mathbb{R}^4,\ p}L$ 的一组正交归一基。

为了求出磁场 B_0 在其周期轨道 L 上的单值矩阵，我们需要计算 B_0 在 L 上的雅可比矩阵（实际上只需其在 NL 上的法向分量）；为此，我们在 $N(L)$ 和 $N_{\mathbb{R}^4}(L)$ 上引入合适的坐标系。首先，我们在带有欧氏度量的 $\mathbb{R}^4$ 中使用指数映射；最终，这并非我们所关注的坐标系，但它会大大简化计算。

设 $\alpha \in \mathbb{S}^1_L$ 为纽结 L 的弧长参数化，$\gamma(\alpha)$ 为将 $\mathbb{S}^1_L$ 解析嵌入到 $\mathbb{S}^3$ 中的映射，其像为 L，即 $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = T$。不失一般性，可假设 $|L| = 1$。显然，对于每个 $p \in L$，$\{T, v_4, Z, v_3\}$ 构成 $T_p\mathbb{R}^4$ 的正交归一基。由于 $\mathbb{R}^4$ 中的测地线都是直线，$N_{\mathbb{R}^4}(L)$ 中点 p 处的切空间有如下正交归一基：

$$\mathcal{B} = \{V_1, V_2, V_3, V_4\} := \{T(\alpha), v_4(\alpha), Z(\alpha), v_3(\alpha)\},$$

其中，$\gamma(\alpha)$ 是 L 上距离 p 最近的点。稍微滥用一下记号，在这个表达式中，$T(\alpha)$（位于距纽结 L 某处 p 的点）是将 $T(\alpha)$（位于纽结上）沿着 $\mathbb{R}^4$ 中从 $\gamma(\alpha)$ 到 p 的唯一测地线平行移动所得的向量；$v_4(\alpha)$、$Z(\alpha)$ 和 $v_3(\alpha)$ 也同理。我们强调，$v_3(\alpha)$ 在 $\mathbb{S}^3$ 的 $\gamma(\alpha)$ 处与其垂直，但在 $N_{\mathbb{R}^4}(L)$ 的其他点处并不垂直；而 $\{T(\alpha)\ v_4(\alpha)\ Z(\alpha)\}$ 仅在 $\gamma(\alpha)$ 处与 $\mathbb{S}^3$ 相切。

注意到，由于 $|h+gF|^2|_L = 1$，在 L 的每一点都有 $V_1 \cdot \nabla\big(|h+gF|^2\big) = 0$，利用柯西-黎曼方程和引理 6.1 进行直接计算（例如使用计算机软件 Mathematica），可得在 L 上的任意一点（以 α坐标参数化）满足以下恒等式：

$$
\begin{aligned}
(\partial_{V_2} B_0) \cdot V_2 =& 0 && (6.5)\\
(\partial_{V_2} B_0) \cdot V_3 =& 1 + \mathrm{Re}(g)\mathrm{Re}(h) + \mathrm{Im}(g)\mathrm{Im}(h)\\
&+ \mathrm{Re}(h)(\nabla \mathrm{Re}(h) \cdot v_3) - \mathrm{Im}(h)(\nabla \mathrm{Re}(h) \cdot v_4)\\
=:& G(\alpha) && (6.6)\\
(\partial_{V_3} B_0) \cdot V_2 =& -1 && (6.7)\\
(\partial_{V_3} B_0) \cdot V_3 =& 0. && (6.8)
\end{aligned}
$$

由于 g 是任意函数，且 $h|_L \neq 0$，我们可以令 $G(\alpha)$ 为 L上的任意实解析函数。此处及下文中，给定 $\mathbb{R}^4$上的两个向量场 W_1 和W_2，$\partial_{W_1} W_2$ 表示向量场 $(W_1 \cdot \nabla) W_2$，其中 $W_1 \cdot \nabla$的作用按分量理解（∇ 和 $\cdot$ 使用 $\mathbb{R}^4$中的欧氏度量计算）。

接下来我们注意到，在 L 上的每一点，向量 $-Z$ 和 v_4 构成该点处 NL 的一组标准正交基。由此，通过与 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ 的对应关系，可以定义 L 在 $\mathbb{S}^3$ 中的法丛上的坐标，该对应关系将

$$(\alpha, x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \mapsto (\alpha, -xZ(\alpha), yv_4(\alpha)). \tag{6.9}$$

由于指数映射 $\exp_{\mathbb{S}^3} : N_{\mathbb{S}^3} L \to N_{\mathbb{S}^3}(L)$ 在法丛零截面的一个邻域上是微分同胚，因此在法丛上选取的坐标定义了 L 在 $\mathbb{S}^3$ 中的管状邻域上的一组坐标。

由于 $\mathbb{S}^3$ 上的测地线都是大圆，指数映射可明确写为

$$\begin{aligned}\exp_{\mathbb{S}^3}(\alpha,x,y) =& \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\gamma(\alpha)\\ &+\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-xZ(\alpha)+yv_4(\alpha)\right)^{\circ}.\end{aligned}\tag{6.10}$$

接下来，我们旨在计算 ∂_α、 $-Z(\alpha)$ 和 $v_4(\alpha)$（与坐标 (α,x,y) 相关联的 $N_{\mathbb{S}^3}L$ 上的完整基）经指数映射后的推前，用这些坐标表示 B_0 ，并计算其各分量的导数。为简化计算并继续使用 4 维欧几里得坐标，我们将 $\exp_{\mathbb{S}^3}$ 扩展为映射 $\widetilde{\exp}$，定义在 $N_{\mathbb{R}^4}L$ 上，而不只是定义在 NL 上。我们定义

$$\widetilde{\exp}(\alpha,x,y,z) := (z+1)\exp_{\mathbb{S}^3}(\alpha,x,y)\,.\tag{6.11}$$

注意，对于 $z=0$，我们有通常的指数映射 $\exp_{\mathbb{S}^3}$。利用 Mathematica，我们可以计算 ∂_α、 $-Z(\alpha)$、 $v_4(\alpha)$ 和 $v_3(\alpha)$ 经 $\widetilde{\exp}$ 后的推前，并得到一个新的有序完整基 $\mathcal{B}'=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$，对应于 $N_{\mathbb{R}^4}(L)$ 的新坐标 $(\bar\alpha,\bar x,\bar y,\bar z)$。根据构造，我们有

$$w_1=\partial_{\bar\alpha}\,,\qquad w_2=\partial_{\bar x}\,,\qquad w_3=\partial_{\bar y}\,,\qquad w_4=\partial_{\bar z}\,,$$

以及 $\bar\alpha=\alpha$ 在 L上的表达式，它在新坐标中由 $\bar x=\bar y=\bar z=0$定义。

将每个 w_i 表示为 V_j 的线性组合，即可定义满足 $\mathcal{B}'=M\mathcal{B}$的矩阵$M$ 。为此，值得回顾的是，$\mathcal{B}$ 中的基向量是以这样的方式定义的：在纽结 L 上，它们关于标准复结构两两构成共轭对：

$$\begin{aligned}Z(\alpha) &= -JT(\alpha)\,,\\ v_4(\alpha) &= Jv_3(\alpha)\,,\\ \gamma(\alpha)_{\circ,\gamma(\alpha)} &= v_3(\alpha)\,,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_4^{\circ}(\alpha)}{\partial\alpha} &= \frac{\partial(J(\gamma)_{\circ,\gamma(\alpha)})^{\circ}}{\partial\alpha}\\ &= J\frac{\partial\gamma(\alpha)}{\partial\alpha} = JT(\alpha) = -Z(\alpha)\,.\end{aligned}$$

我们知道， $\mathcal{B}$ 在 L上的 $\mathbb{R}^4$ 的切空间中构成一组正交归一基。因此可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z(\alpha)}{\partial\alpha}\cdot v_4(\alpha) &= \frac{\partial(v_4(\alpha)\cdot Z(\alpha))}{\partial\alpha} - Z(\alpha)\cdot\frac{\partial v_4(\alpha)}{\partial\alpha}\\ &= Z(\alpha)\cdot Z(\alpha) = 1\,,\end{aligned}\tag{6.12}$$

$$\frac{\partial Z(\alpha)}{\partial\alpha}\cdot Z(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\partial(Z(\alpha)\cdot Z(\alpha))}{\partial\alpha} = 0\,.\tag{6.13}$$

因此

$$\frac{\partial Z}{\partial\alpha} = v_4(\alpha) + F_1T(\alpha) + F_2v_3(\alpha)\tag{6.14}$$

对于某些函数 F_1、 F_2： $\mathbb{S}^1_L\to\mathbb{R}$。

利用这些恒等式，我们可以计算矩阵 M （它是可逆的），并发现其元素 m_{ij}、i、$j=1$、2、3、4 在纽结上（即当 $x=y=z=0$ 时）满足以下性质：

$$\begin{aligned} m_{22} &= 0\,, \\ m_{23} &= -1\,, \\ m_{32} &= 1\,, \\ m_{33} &= 0\,, \\ m_{11} &= m_{44} = 1\,, \end{aligned}$$

其余所有元素均为 0。

那么，我们可以用坐标（$\bar{\alpha}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$）表示磁场为 $B_0 = \sum_{i=1}^{4} B_{0,\,i} w_i$ （回想一下， $\mathcal{B}'$ 在这些坐标下构成一个完整基），其中

$$B_{0,i} = \sum_{j=1}^{4} \left(M^{-1}\right)_{ji} B_0 \cdot V_j\,.$$

为了计算向量场 B_0 在坐标（$\bar{\alpha}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$）下的泰勒展开的一阶项，我们需要求导数 $\partial B_{0,\,}{}_{\partial w_j}{}^{i}$ 并在$\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0$ 处取值（即在 L 上取值）。注意，~~—~~ w_4 与我们无关，因为我们知道B_0 与 $\mathbb{S}^3$相切。我们用 c_{ij} 表示矩阵 $\left(M^{-1}\right)_{ij}$ 的各项。

一般而言，我们有

$$\partial_{w_j} B_{0,i} = \sum_{k=1}^{4} \Big((\partial_{w_j} c_{ki})(B_0 \cdot V_k) + c_{ki} (\partial_{w_j} B_0) \cdot V_k + c_{ki} B_0 \cdot (\partial_{w_j} V_k) \Big)\,. \tag{6.15}$$

我们只关心 $i, j = 2, 3$，它对应于 $\mathbb{S}^3$ 中 L 的法向方向。值得注意的是，在 L 上我们有

$$\begin{aligned} B_0 \cdot V_1 &= B_0 \cdot T = 1\,, \\ B_0 \cdot V_2 &= B_0 \cdot V_3 = B_0 \cdot V_4 = 0\,, \end{aligned}$$

因为 L 是勒让德的。因此，方程 (6.15) 中 c_{ki} 的相关导数只有以下这些（在 $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0$ 处）：

$$\begin{aligned} \partial_{w_2} c_{12} &= 0\,, \\ \partial_{w_3} c_{12} &= -1\,, \\ \partial_{w_2} c_{13} &= 1\,, \\ \partial_{w_3} c_{13} &= 0\,. \end{aligned}$$

此外，对于 $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0$

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{44} = 1\,, \\ c_{23} &= 1\,, \\ c_{32} &= -1\,, \\ c_{22} &= c_{33} = 0 \end{aligned}$$

其余所有项均为 0。

此外，

$$\partial_{V_i} V_j = 0 \qquad \text{if } i, j \neq 1, \tag{6.16}$$

由于 V_j 是通过沿着 $\mathbb{R}^4$ 中垂直于 L 的直线进行平行移动来定义的。

现在考察方程（6.15）中求和的最后一项，即

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} c_{ki} B_0 \cdot (\partial_{w_j} V_k) &= \sum_{k=1}^{4} c_{ki} B_0 \cdot (\sum_{\ell=1}^{4} m_{j\ell} \partial_{V_\ell} V_k) \\ &= c_{1i} B_0 \cdot (m_{j1} \partial_{V_1} V_1)\,,\end{aligned}$$

当 $j=2$ 或 $j=3$ 时，该项为零，因为 $m_{21}=m_{31}=0$。

现在注意到，根据矩阵 M 的定义，$\partial_{w_j} B_0 = \sum_{i=1}^{4} m_{ji} \partial_{V_i} B_0$。再利用方程（6.5）–（6.8）、导数 $\partial_{w_j} c_{ki}$ 的值以及 L 上的元素 c_{ij}，我们推知，当 $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0$ 时，以下恒等式成立:

$$\begin{aligned}a_{22} := \partial_{w_2} B_{0,2} =& \sum_{k=1}^{4} c_{k2} m_{23} (\partial_{V_3} B_0) \cdot V_k \\ =& c_{32} m_{23} (\partial_{V_3} B_0) \cdot V_3 \\ =& 0\,,\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}a_{23} := \partial_{w_3} B_{0,2} =& (\partial_{w_3} c_{12})(B_0 \cdot V_1) + \sum_{i,k=1}^{4} c_{k2} m_{3i} (\partial_{V_i} B_0) \cdot V_k \\ =& -1 + c_{32} m_{32} (\partial_{V_2} B_0) \cdot V_3 \\ =& -(1 + G(\bar{\alpha}))\,,\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}a_{32} := \partial_{w_2} B_{0,3} =& (\partial_{w_2} c_{13})(B_0 \cdot V_1) + \sum_{i,k=1}^{4} c_{k3} m_{2i} (\partial_{V_i} B_0) \cdot V_k \\ =& 1 + c_{23} m_{23} (\partial_{V_3} B_0) \cdot V_2 \\ =& 2\,,\end{aligned} \tag{6.19}$$

and

$$\begin{aligned}a_{33} := \partial_{w_3} B_{0,3} =& \sum_{i,k=1}^{4} c_{k3} m_{3i} (\partial_{V_i} B_0) \cdot V_k \\ =& c_{23} m_{32} (\partial_{V_2} B_0) \cdot V_2 \\ =& 0\,.\end{aligned} \tag{6.20}$$

因此，回想基底 $\mathcal{B}'$ 是可积的，向量场 B_0 在局部坐标 $(\bar{\alpha}, \bar{x}, \bar{y})$ 中（这些坐标定义在 $\mathbb{S}^3$ 中 L 的一个邻域内）的形式为

$$\begin{aligned}B_{0,1}(\bar{\alpha}, \bar{x}, \bar{y}) &= 1 + h.o.t.\,, \\ B_{0,2}(\bar{\alpha}, \bar{x}, \bar{y}) &= a_{22}\bar{x} + a_{23}\bar{y} + h.o.t.\,, \\ B_{0,3}(\bar{\alpha}, \bar{x}, \bar{y}) &= a_{32}\bar{x} + a_{33}\bar{y} + h.o.t\,,\end{aligned}$$

其中，h.o.t. 指 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 中的高阶项。

显然，$L = \{\bar{x} = \bar{y} = 0\}$ 是 B_0的一个周期轨道，特别是$B_0|_{\bar{x}=\bar{y}=0} = \partial_{\bar{\alpha}}$。为了分析其稳定性，通常采用的方法是研究正规

变分方程（NVE），即 L上的常微分方程

$$\dot{\xi} = DB_0|_{(t,0,0)}\xi\,,$$

其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$（参见 [9, 第]节）。令 2×2 矩阵

$$A := \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(1+G(t)) \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

正规变分方程由 $\dot{\xi} = A\xi$ 给出。函数 G 的一个方便选取如下，它使我们能够显式积分这个常微分方程:

$$G(\alpha) = \frac{\omega^2}{2} - 1$$

其中某个常数 ω 将在稍后确定。由此可得，矩阵 A 的特征值为 $\pm i\omega$。然后，根据 [9, 第 2] 节，单值矩阵 $\mathcal{M}$ 由正规变分方程的基本解 $\Phi(t)$ 在 $t = 1$ 处的取值给出； $t = 1$ 是周期轨道的周期（回忆一下，我们假设 $|L| = 1$）。经过直接计算，我们得到

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\frac{\omega}{2}\sin(\omega) \\ \frac{2}{\omega}\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\exp(\pm i\omega)$。根据定义，这些就是向量场 B_0 在其周期轨道 L 上的弗洛凯乘子。因此，若取 ω 使得 $\frac{\omega}{2\pi}$ 为丢番图数，我们便得出 L 是向量场 B_0 的椭圆型周期轨道，且具有丢番图频率。另一方面，由于 B_0 是解析且无散的，直接应用 R¨ussmann 定理可知，周期轨道 L 是稳定的，这意味着 B_0 存在一个正体积的不变环面集合，它们聚集于 L；这些环面是该纽结的管状邻域的边界。定理 1.8 的证明至此完成。

注 6.3. 吕斯曼定理是以¨的局部微分同胚表述的，因此要应用该定理，我们需要在 L 上的某一点取一个解析横截面$\Sigma \cong \mathbb{R}^2$，并考虑由$B_0$的流定义的庞加莱回归映射 Π： $D \subset \Sigma \to \Sigma$，其中 D 是以 0 为中心的小半径圆盘。由于 L 是一个周期轨道，原点是 Π的不动点；此外，众所周知，这个微分同胚是保面积且解析的（因为 B_0 无散且解析）。 L 是 B_0 的一个具有丢番图频率的椭圆周期轨道这一事实，可传递到 Π的不动点 0，因此我们可以应用吕斯曼定理。

7. Final remarks on integrable Bateman fields

在本节最后部分，我们探讨 Hopf 型 Bateman 解的可积性（即第一积分的存在性）。首先回顾一下， [16], 中包含环面纽结的巴特曼场对应于全纯函数 $h = pqz_1^{p-1}z_2^{q-1}$，并且可以等价地写成

$$F = \nabla f(\alpha, \beta) \times \nabla g(\alpha, \beta)\,, \tag{7.1}$$

其中（α， β）如方程（2.3）所示，且有 $f = z_1^p$ 和 $g = z_2^q$。

除了这些磁场具有形状为 (p, q) 环面纽结的周期轨道这一事实外，它们还具有一种令人惊讶的可积性，即 $E = \mathrm{Re}(F)$ 与 $\mathrm{Im}(fg)$ 的等值集相切，而 $B = \mathrm{Im}(F)$ 与

$\mathrm{Re}(fg)$ 的等值集相切（这两个函数都是相应磁场的第一积分）。这一点可以通过直接计算证明。接下来，我们希望以一种更一般的方式解释这种可积性，将电磁场与全切向 $\mathbb{C}$-链联系起来。

7.1. 具有指定第一积分的勒让德场。首先，我们介绍一种方法（其本身也颇有意义），用于在 $\mathbb{S}^3$ 上构造具有指定第一积分的勒让德向量场（相对于标准接触结构）。

引理 7.1. 设 $G_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，并定义复值函数

$$h(z_1,z_2) = \left(\frac{\partial G_{\mathbb{R}}}{\partial x_2} - \mathrm{i}\frac{\partial G_{\mathbb{R}}}{\partial y_2}\right)(x_1 - \mathrm{i}y_1) - \left(\frac{\partial G_{\mathbb{R}}}{\partial x_1} - \mathrm{i}\frac{\partial G_{\mathbb{R}}}{\partial y_1}\right)(x_2 - \mathrm{i}y_2)\,. \tag{7.2}$$

那么，$G_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathrm{Im}(h(v_1+\mathrm{i}v_2))$ 所对应的勒让德场的第一积分。此外，若 $G_{\mathbb{R}}$ 可延拓为 $\mathbb{S}^3$ 的某个邻域 U 上的多调和函数，即存在一个全纯函数 $G\colon U\to\mathbb{C}$，使得 $\mathrm{Re}(G)|_{\mathbb{S}^3} = G_{\mathbb{R}}$，那么 $\mathrm{Im}(G)|_{\mathbb{S}^3}$ 是 $\mathrm{Re}(h(v_1+\mathrm{i}v_2))$ 所对应的勒让德场的第一积分。

证明。考虑 $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ 上的复结构 J，它在每个实切空间 $T_p\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$ 上将 (a_1,a_2,a_3,a_4) 映射为 $J(a_1,a_2,a_3,a_4) = (-a_2,a_1,-a_4,a_3)$。直接计算可得

$$\mathrm{Re}(h(z_1,z_2)) = \nabla G_{\mathbb{R}}\cdot v_1 = J\nabla G_{\mathbb{R}}\cdot v_2\,, \tag{7.3}$$

$$\mathrm{Im}(h(z_1,z_2)) = -\nabla G_{\mathbb{R}}\cdot v_2 = J\nabla G_{\mathbb{R}}\cdot v_1\,, \tag{7.4}$$

其中，∇ 表示梯度（∂_{x_1}，∂_{y_1}，∂_{x_2}，∂_{y_2}），而 $\{v_1,v_2\}$ 是第 2 节中引入的霍普夫场。由此可得

$$\mathrm{Im}(h(v_1+\mathrm{i}v_2)) = (J\nabla G_{\mathbb{R}}\cdot v_1)v_1 + (J\nabla G_{\mathbb{R}}\cdot v_2)v_2\,, \tag{7.5}$$

或者等价地，$\mathrm{Im}(h(v_1+\mathrm{i}v_2))$ 是 $J\nabla G_{\mathbb{R}}$ 在 $\mathbb{S}^3$各点处接触平面上的投影，该接触平面由 v_1 和 v_2 张成。

现在，我们将每个切空间的基从 ∂_{x_1}，∂_{y_1}，∂_{x_2}，∂_{y_2} 改为

$$\{v_1,v_2,v_3,v_4\} := \{v_1,v_2,x_1\partial_{x_1}+y_1\partial_{y_1}+x_2\partial_{x_2}+y_2\partial_{y_2},-y_1\partial_{x_1}+x_1\partial_{y_1}-y_2\partial_{x_2}+x_2\partial_{y_2}\}\,. \tag{7.6}$$

注意，这在 $\mathbb{S}^3$的每一点处定义了一个正交归一基，并且基变换保持正交性。进一步注意，$J(v_1) = v_2$ 且 $J(v_3) = v_4$，因此在这个新基下，J仍具有 $J(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) = (-a_2,\ a_1,\ -a_4,\ a_3)$ 的形式。因此，如果在此基下 $\nabla G_{\mathbb{R}} = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$，那么 $J(\nabla G_{\mathbb{R}}) = (-a_2,\ a_1,\ -a_4,\ a_3)$，且 $\mathrm{Im}(h(v_1+\mathrm{i}v_2)) = (-a_2,\ a_1,\ 0,\ 0)$，这显然与 $\nabla G_{\mathbb{R}}$正交。因此，$G_{\mathbb{R}}$ 是向量场 $\mathrm{Im}(h(v_1+\mathrm{i}v_2))$ 的第一积分。

如果 $G_{\mathbb{R}}$ 是全纯函数 G 的实部，方程（7.2）就变为

$$h(z_1,z_2) = 2\frac{\partial G}{\partial z_2}\overline{z_1} - 2\frac{\partial G}{\partial z_1}\overline{z_2} \tag{7.7}$$

and

$$J(\nabla G_{\mathbb{R}}) = J(\nabla\mathrm{Re}(G)) = \nabla\mathrm{Im}(G)\,. \tag{7.8}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(h(v_1+\mathrm{i}v_2))\cdot\nabla\mathrm{Im}(G) &= J(\mathrm{Re}(h(v_1+\mathrm{i}v_2)))\cdot J(\nabla\mathrm{Im}(G))\\ &= -\mathrm{Im}(h(v_1+\mathrm{i}v_2))\cdot\nabla(G_{\mathbb{R}}) = 0\,,\end{aligned}\tag{7.9}$$

因此，这意味着 $\mathrm{Im}(G)$ 是向量场 $\mathrm{Re}(h(v_1+\mathrm{i}v_2))$ 的第一积分。 □

接下来，我们利用这一引理，为 $\mathbb{S}^3$ 上勒让德场存在不变曲面提供一个判据。回顾一下，若函数的梯度在水平集的任意点都不为零，则称该函数的水平集是正则的。

命题 7.2. 若勒让德场 $X = \mathrm{Im}(\tilde{h}(v_1+\mathrm{i}v_2))$ 满足 $\tilde{h}:\mathbb{S}^3\to\mathbb{C}$，则它与实函数 $G_{\mathbb{R}}:\mathbb{S}^3\to\mathbb{R}$ 的正则水平集 $M = G_{\mathbb{R}}^{-1}(c)$，$c\in\mathbb{R}$，相切，当且仅当

$$\arg(\tilde{h}(z_1,z_2)) = \arg(h(z_1,z_2))\tag{7.10}$$

对于所有满足 $h(z_1,z_2)\neq 0$ 的 $(z_1,z_2)\in M$，其中 h 由方程（7.2）给出。

证明。由方程（7.3）和（7.4）可知，$h(z_1,z_2)=0$ 当且仅当 $\nabla G_{\mathbb{R}}$ 与点 $(z_1,z_2)\in\mathbb{S}^3$ 处的接触平面正交。特别地，任意勒让德向量场（相对于标准接触形式）在点 (z_1,z_2) 处都与 M 相切，只要 $h(z_1,z_2)=0$。接下来，我们分析满足 $h(z_1,z_2)\neq 0$ 的点 $(z_1,z_2)\in M$。

我们已经看到（参见引理 7.1），$\mathrm{Im}(h(v_1+\mathrm{i}v_2))$ 与 M 相切。˜因此，若对于某个 $(z_1,z_2)\in M$，$\arg(h(z_1,z_2)) = \arg(h(z_1,z_2))$，那么$X$在点 (z_1,z_2) 与 M 相切。反过来，若 $h(z_1,z_2)\neq 0$，则点 (z_1,z_2) 处的接触平面与 $T_{(z_1,z_2)}M$ 的交集是一维的（因为该水平集是正则的），因此，与 M 相切的任何勒让德切向量都必须是˜ $\mathrm{Im}(h(v_1+\mathrm{i}v_2))$ 在点 (z_1,z_2) 处的实数倍，从而 $\arg(h(z_1,z_2)) = \arg(h(z_1,z_2))$。□

特别地，以下推论可直接由 Bateman 构造和命题 7.2 得出。它给出了一个判据，用于构造具有指定不变曲面的零电磁场。

推论 7.3. 设 $G_{\mathbb{R}}:\mathbb{S}^3\to\mathbb{R}$ 是一个光滑函数。则存在一个 Hopf 型 Bateman 电磁场，其在 $t=0$ 处（投影到 $\mathbb{S}^3$上时）的磁场部分与正则水平集 $M := G_{\mathbb{R}}^{-1}(c)$ 相切，当且仅当存在某个邻域 U 上的全纯函数 $\tilde{h}:U\to\mathbb{C}$，使得 $\mathbb{S}^3$ 满足

$$\arg(\tilde{h}(z_1,z_2)) = \arg(h(z_1,z_2))\tag{7.11}$$

对于所有满足 $h(z_1,z_2)\neq 0$ 的 $(z_1,z_2)\in M$，其中 h 由方程（7.2）给出。

7.2. 完全相切的 $\mathbb{C}$-链环与 Bateman。先从以下定义开始:

定义 7.4（Rudolph [25]）。如果存在全纯函数 $G\colon \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$，使得 $\mathbb{S}^3$ 中的链 L 满足

- $G^{-1}(0)\cap\mathbb{S}^3 = L$。
- $G^{-1}(0)\cap\mathring{D}^4 = \emptyset$，其中 $\mathring{D}^4$ 表示由 $\mathbb{S}^3$ 在 $\mathbb{C}^2$中围成的开四维球。
- L 是$\rho|_{\mathrm{Reg}(G)}$的一个非退化指标 1 临界流形，即将 $\rho(z_1,z_2) := |z_1|^2+|z_2|^2$ 限制在 G的正则点集上。

注 7.5. 已知， $\mathbb{S}^3$ 中的链是全切向 $\mathbb{C}$-链，当且仅当它是实解析且勒让德的 [23, 24, 25]。

在 [6] 中，有人提出，定义 L 为交集的全纯函数 G 与全纯函数 h之间可能存在某种关系；后者定义了包含 L 的电磁场（通过 Bateman 构造）。接下来我们将证明，对于环面纽结 [16]，可以将这种关系精确地表达出来，并将电磁场的可积性纳入其中。

我们首先注意到，定义环面纽结 $T_{p,\ -q}$ 为 $G^{-1}(0)$ 与 $\mathbb{S}^3$ 的全切向交集的多项式 G 可表示为

$$G(z_1, z_2) = \rho z_1^p z_2^q - 1$$

其中常数 $\rho > 0$ 经过了适当选择（参见 [23]）。对于 [16], 中得到的那类电磁解，下面的结果建立了函数 G 与场的第一积分之间的联系。

命题 7.6。在 $\mathbb{S}^3$ 上的勒让德场对应于 [16] 中的电场 E （该电场包含 $\mathbb{R}^3$中的环面纽结 $T_{p,\ q}$，参见注记 2.1），并且与 Im(G) 的等值集相切；相应磁场 B 所对应的勒让德场与 Re(G) 的等值集相切。

证明。事实上，在 [16] 中构造的 Bateman 场使用了复多项式

$$\tilde{h}(z_1, z_2) = pq z_1^{p-1} z_2^{q-1},$$

而（p, q）-环面纽结作为函数G 引入的全切向 $\mathbb{C}$-链出现。为了构造一对 $\mathbb{S}^3$ 上的勒让德场，使得 Re(G) 和 Im(G) 是第一积分，我们使用引理 7.1，并按照公式（7.7）定义 h，从而得到

(7.12)

$$h(z_1, z_2) = 2\rho q z_1^p z_2^{q-1}\overline{z_1} - 2\rho p z_1^{p-1} z_2^q \overline{z_2} = pq z_1^{p-1} z_2^{q-1}\left(2\rho\frac{1}{p}|z_1|^2 - 2\rho\frac{1}{q}|z_2|^2\right).$$

忽略实因子 $2\rho\frac{1}{p}|z_1|^2 - 2\rho\frac{1}{q}|z_2|^2$ 后，我们得到与 [16] 中相同的全纯函数 h。相应地，除去一个实因子后，Bateman 场 [16], 的电场和磁场部分投影到 $\mathbb{S}^3$ 时，与使用函数 h 并通过引理 7.1 得到的勒让德场相切。于是我们得出，磁力线和电力线分别与 G的实部和虚部的水平集相切，正如我们所要证明的那样。□

注 7.7. 对于能够作为具有解析第一积分的无零点向量场周期轨道出现的链环类型，存在一种拓扑障碍。这类链环称为零熵链环，Etnyre 和 Ghrist 在 Wada [31, 12] 先前工作的基础上对其进行了分类。因此，由于 G 是全纯函数，如果上述构造推广到其他链环类型，那么对于不属于零熵链环族的链环，该构造必然会产生带有零点的 Bateman 场。

作为本节的总结，我们想强调，值得探究命题 7.6 中的构造能否推广到其他全纯函数G，从而得到具有第一积分的其他 Bateman 型解。然而，目前仍难以确定是否存在满足

h 方程（7.11）的全纯函数。事实上，上述环面纽结是目前已知函数 G 显式表达式的唯一例子（尽管对每种链环类型，这种函数都存在）。同样，我们知道存在能够实现任意链环类型的电力线和磁力线的 Bateman 场，但目前只有环面链环 [16]有显式表达式。

Acknowledgements

作者感谢 R. Casals 和 A. del Pino 对勒让德场提出的宝贵意见。B.B. 获得欧盟 Horizon 2020 研究与创新计划的资助，资助方式为玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号 101023017）。本研究获得由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 CEX2019-000904-S 和 PID2019-106715GB GB-C21 项目支持。

References

1. V.I. Arnold，《阿诺德问题》。施普林格，柏林，2004年。 2. M. Array´as，D. Bouwmeester，J.L. Trueba，《电磁学中的结》，《物理报告》667（2017年）1–61。 3. M. S. Baouendi，P. Ebenfeldt，L. P. Rothschild，《复空间中的实子流形及其映射》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2016年。 4. H. Bateman，《电磁波与光波运动的数学分析》。多佛出版社，纽约，1915年。 5. I. Bialynicki-Birula，Z. Bialynicka-Birula，黎曼-西尔伯斯坦向量在电磁学经典理论与量子理论中的作用，《物理学杂志A：数学与理论》46（2013年）053001。 6. B. Bode，电磁场中的稳定结与链环，《数学物理通讯》387（2021年）1757–1770。 7. D. Burns Jr.，E.L. Stout，从边界子流形延拓函数，《杜克数学杂志》43（1976年）391–404。 8. R.P. Cameron，W. Loffler，K.D. Stephan，关于单色电磁结实验实现的理论方案，《光学杂志》23（2021年）064006。 9. C. Chicone，《常微分方程及其应用》。施普林格，纽约，1999年。 10. D. B. A. Epstein，三维流形上的周期流，《数学年刊》95（1972年）66–82。 11. J. Etnyre，勒让德结与横截结，载于《纽结理论手册》第3章，第105–185页。爱思唯尔，阿姆斯特丹，2005年。 12. J. Etnyre，R. Ghrist，无黏流中的分层积分与平凡结，《当代数学》246（1999年）99–112。 13. H. Geiges，《接触拓扑学导论》。剑桥大学出版社，纽约，2008年。 14. V. Ginzburg，磁场中电荷的闭轨道：辛几何的一个应用，载于《接触几何与辛几何》，第131–148页。剑桥大学出版社，剑桥，1996年。 15. P. Hogan，巴特曼电磁波，《皇家学会会刊A辑》396（1984年）199–204。 16. H. Kedia，I. Bialynicki-Birula，D. Peralta-Salas，W. Irvine，在光场中打结，《物理评论快报》111（2013年）150404。 17. H. Kedia，D. Peralta-Salas，W. Irvine，光中的结何时能保持打结状态？《物理学杂志A：数学与理论》51（2018年）025204。 18. P. Libermann，接触流形上的勒让德叶状结构，《微分几何及其应用》1（1991年）57–76。 19. W.A. Newcomb，磁力线的运动，《物理年刊》3（1958年）347–385。 20. M.-Y. Pang，勒让德叶状结构的结构，《美国数学会会刊》320（1990年）417–455。 21. A.F. Ra˜nada，电磁场的一个拓扑理论，《数学物理快报》18（1989年）97–106。 22. A.F. Ra˜nada，拓扑电磁学，《物理学杂志A：数学与通论》25（1992年）1621–1642。 23. L. Rudolph，复平面曲线与圆球面的交集所形成的完全切向链环，载于：B.N. Apanasov，W.D. Neumann，A.W Reid，L. Siebenmann（编），《拓扑学‘90》，343–349页，德古意特，柏林，1992年。

24. L. Rudolph，通过接触几何与“经典”规范理论得到的可切性障碍，《数学发明》119（1995年）155–163。 25. L. Rudolph，复平面曲线的纽结理论，载于：W. Menasco，M. Thistlewaite（编），《纽结理论手册》，329–428页，爱思唯尔科学出版社，2005年。 26. H. Russmann，Bruno 条件下解析保面积映射的椭圆不动点稳定性。《遍历论与动力系统》22（2002年）1551–1573。 27. F. Severi，双调和函数狄利克雷问题的一般解，意大利国家林琴科学院纪要，第六辑，13（1931年）795–804。 28. F. Severi，《多复变量解析函数讲义》。C.E.D.A.M.，帕多瓦，1958年。 29. J. Synge，《相对论：狭义理论》。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1956年。 30. G. Tomassini，复流形实解析子流形上的全纯函数迹，《比萨高等师范学院年刊》20（1966年）31–43。 31. M. Wada，S^3上的非奇异莫尔斯–斯梅尔流的闭轨道，《日本数学会杂志》41（1989年）405–413。

Instituto de Ciencias Matemáticas,
Consejo Superior de Investigaciones Científicas,28049 Madrid, Spain*Email address*:
benjamin.bode@icmat.es, dperalta@icmat.es