arXiv:2302.01050v1 [quant-ph] 2 Feb 2023

无限量子自旋链的群胚与代数

Florio Maria Ciaglia[1,7], FabioDi Cosmo[1,2,8], Paolo Facchi[3,4,9], Alberto Ibort[1,2,10],Arturo Konderak[3,4,11], Giuseppe Marmo[5,6,12][1]马德里卡洛斯三世大学数学系，莱加内斯，*E-28911*，马德里，西班牙[2] 数学科学研究所（*CSIC-UAM-UC3M-UCM*）[3]巴里大学物理系与 *MECENAS*，巴里，*I-70126*，意大利[4]*INFN*，巴里分部，巴里，*I-70126*，意大利[5] 那不勒斯费德里科二世大学*"E. Pancini"*物理系，那不勒斯，意大利[6] *INFN*，那不勒斯分部，那不勒斯，意大利[7]电子邮件：*fciaglia@math.uc3m.es* [8]电子邮件：*fcosmo@math.uc3m.es*[9]电子邮件：*paolo.facchi@ba.infn.it* [10] 电子邮件：*albertoi@math.uc3m.es*[11] 电子邮件：*arturo.konderak@ba.infn.it* [11]电子邮件：*marmo@na.infn.it*

摘要

众所周知，量子理论的某些特征无法用希尔伯特空间上的标准图景来描述。特别是在尝试以形式化方式构建量子场论或有限密度的热力学系统时，便会遇到这种情况。这迫使我们引入不同类型的代数，其一般性超出了量子力学标准课程中通常接触到的代数。我们展示了这些代数如何自然地出现在无限自旋链量子力学的薛温格描述中。特别是，我们运用近期研究中发展出的狄拉克-费曼-薛温格（DFS）态的工具，引入一种基于 Tomita-Takesaki 模理论的动力学，并据此应用这一方法来描述伊辛模型。

关键词：薛温格图像、代数、群胚、量子场论、自旋链

1 引言

在量子理论的表述中，Schwinger 引入了一种以跃迁概念为基础的方法 [1]。他指出，量子力学的主要特征在于测量所导致的不同结果之间的跃迁。随后对不相容可观测量的测量可能会改变实验结果，这与经典理论不同；在经典理论中，原则上所有可观测量都可以同时测量，而且不会发生跃迁。从 Schwinger 的观点来看，这种对量子力学的描述需要一种更适用于微观现象学的“新符号语言”。这种语言的基本单元是选择性测量的概念，即“一个装置，它从系综中选出系统，使其可观测量 A 的值明确为‘a’，并使其返回时可观测量B的值明确为‘b’”。这些符号作为抽象实体，满足一组公理，其中包括复合律。因此，在一系列论文中 [2, 3, 4], ，部分作者提出，群胚的复合律是适用于 Schwinger 方法的抽象框架。随后，借助表示论 [5], ，可以在希尔伯特空间上得到标准量子力学的狄拉克图景 [3], ；而引入群胚代数的概念，也可以得到量子力学的代数图景 [4, 6]。

为阐明这些想法，我们来看下面这个简单的例子；它是量子力学中的标准情形。假设测量一个自旋为 $S = 1/2$ 的粒子沿 z 轴的自旋，并且假设不允许在 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 态之间发生跃迁。设系统的态为相干叠加 $\psi = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$，其中 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。通过测量沿 z 轴的自旋，我们只能测得概率 $|\alpha|^2$ 和 $|\beta|^2$，而这些概率完全无法表征态 ψ。尤其是，该态的表现会像经典混合态

$$\rho = |\alpha|^2\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\beta|^2\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\,, \tag{1}$$

其中，操作性（非相干）基 $\{|\uparrow\rangle\,, |\downarrow\rangle\}$ 中不存在量子相干性。显然，只有借助其他可观测量（沿 x 或 y 轴的自旋），才能完全表征该态；用薛温格图景来说，这意味着形如 $|\uparrow\rangle\langle\downarrow|$ 和 $|\downarrow\rangle\langle\uparrow|$ 的跃迁。量子理论编码在密度矩阵的非对角项中。这种方法用于量子相干资源理论，其中资源被确定为非相干基 [7, 8] 的相干叠加。

有限群胚已在先前的研究中得到广泛研究，可以证明，这种情况下的一般情形可概括为量子理论（跃迁）与经典理论（超选择规则）之间的混合 [3, 4]。具体而言，从代数视角来看，可以得到具有有限个自由度的标准量子力

学，其由有界算子完备代数的直和（类型 I 代数）描述。

本文将从薛温格图景的量子力学视角，研究一种可能的方法，以获得比 I 型更一般的代数族。这些代数在 [9, 10, 11, 12] 中被引入，作为独立量子力学系统的非平凡实例，并用于将布尔代数扩展到非交换情形。正如我们稍后将看到的，根据其投影是否有限，它们被分为 II 型和 III 型代数。它们最初作为抽象的数学实体被引入，后来已被证明在量子场论 [13, 14, 15, 16] 的代数描述中也发挥着核心作用。从数学角度看，已有研究表明，与某些特殊类型群胚相关联的代数可以是 II 型或 III [17] 型。本文将利用这些考量，从薛温格图景的量子力学视角探究可能的影响。

具体而言，我们将考察一个群胚，其对象空间为 Ω_∞，由无限序列 $x = \{x_i \mid x_i = 0, 1 \; \forall i \in \mathbb{N}\}$ 构成；跃迁则由群 $\Gamma \subset \Omega_\infty$ 的作用给出，该群的元素是仅有有限个元素非零的序列 x_i。从物理角度来看，由于具有两个对象的集合上的对群胚与量子比特相关，因此这里研究的群胚可以描述一条无限量子比特链，其中只允许翻转有限个量子比特的跃迁。我们将证明，与此类系统相关联的代数可以属于 II 型或 III型，具体取决于某个概率 λ，从而在这一框架下重现冯·诺依曼代数理论中的一个著名结果 [18, 19, 20]。

此前关于量子力学群胚方法的研究中引入的一个要素，是狄拉克-费曼-薛温格（DFS）态这一概念。这些态由遵循群胚底层复合律变换的函数定义，见第 5 节。本文将考察与上述序列群胚相关联的 DFS 态族的结构，并展示它们与群上同调之间的联系。此前的一项研究已揭示了这些 DFS 态的动力学作用，具体而言，是在考察与运动学群胚相关联的路径群胚时 [21, 22]。在这种情况下，与 DFS 态相关联的 DFS 函数的指数被解释为一个作用泛函。本文将提出另一种方式，借此 DFS 函数能够定义动力学。事实上，同一个指数可用于定义群胚的正值同态。随后，通过恰当地选择群胚上的测度，这个同态便确定一个模函数，而与之相关联的模自同构则确定群胚代数的典范演化。最后，我们将考察一个具体的 DFS 函数示例，它能够重现

伊辛链的动力学，并以 Tomita-Takesaki 模理论加以描述。从这个意义上说，本文尝试通过一个非平凡示例，更直接地考察 DFS 态中的动力学内涵，以期更深入地理解 Schwinger 量子作用量原理。

我们简要概述本文的内容。第 2 节总结了 C^*-代数、von Neumann 代数和左希尔伯特代数的一些基本事实，这些内容将在本文的核心部分用到。第 3 节将简要介绍（约化）群胚冯·诺依曼代数的构造；第 4 节则将这一构造应用于一个特定的群胚。该群胚由一个可数群作用于序列空间构造而成，该作用是自由的、遍历的且非传递的。借助冯·诺依曼代数理论中的经典结果，我们证明，与该群胚相关联的群胚代数可以是 II_1 型或 III_λ 型，具体取决于序列空间上的测度。在最后的第 5 节中，我们给出 DFS 函数及其与群上同调关系的算法构造。最后，我们对所研究的群胚上的测度给出一个显式构造；该测度的模函数可以解释为无限伊辛链的动力学。

2 代数描述

量子力学有多种描述方式（一般而言并不等价）。与薛定谔、狄拉克和 von Neumann 等人相关的标准描述方式，以选取一个希尔伯特空间为基础，其中的射线表示系统的态 [23]。在这一图景中，可观测量是所选希尔伯特空间上的有界自伴算子。

量子力学的另一种描述方式源自海森堡的量子力学方法，后来由荒木、哈格和卡斯特勒发展，旨在以公理化方式引入量子场的概念；这种描述以代数为基础 [24, 25, 26]。在这里，可观测量作为理论的基本构件，是给定代数中的自伴元；而态则是该代数上的正泛函。一旦选定一个态，便可通过 GNS 构造构建一个希尔伯特空间，并将该代数表示为有界自伴算子，从而与前一种方法建立联系。

根据所研究的理论，可以选择不同类型的代数。本章将简要介绍 C^*-代数、W^*-代数和左希尔伯特代数，这些概念将在后续章节中广泛使用。更详细的分析可参见例如 [25, 26, 27, 28, 29] 。它们都是复数域 $\mathbb{C}$ 上的对合代数（或 $*$-代数），也就是说，它们是在 $\mathbb{C}$ 上的向量空间 $\mathfrak{A}$ ，并配备了一个乘法运算，该运算将每一对 W^*, [25, 26, 27, 28, 29] 中的元素关联到 C^*，且满足

结合律（$A(BC) = (AB)C$, $\forall A, B, C \in \mathfrak{A}$）和分配律（$A(B + C) = AB + AC$, $\alpha\beta(AB) = (\alpha A)(\beta B)$, $\forall A, B, C \in \mathfrak{A}$ 和 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$）。此外，这个代数还配备了一个称为对合的映射 $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$，满足

i. $(AB)^* = B^* A^*$,

ii. $A^{**} = A$,

iii. $(A + \lambda B)^* = A^* + \overline{\lambda} B^*$,

其中 A, B 属于 $\mathfrak{A}$，而 λ 属于 $\mathbb{C}$。

这些类型的代数之间的差异，主要源于我们在这些空间上引入拓扑的方式。我们将在本节余下部分指出这些差异。

2.1 C^*-代数与 W^*-代数

C^*-代数的概念由 Segal [30], 在 Gelfand 和 Naixmark [31, 32]的工作基础上加以形式化。它被定义为一个复对合代数 $\mathfrak{A}$，其上定义了一个范数 $\|\cdot\|$，并满足

i. $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$,

ii. $\|A^* A\| = \|A\|^2$,

并且 $\mathfrak{A}$ 关于该范数是完备的。由上述性质可立即推出 $\|A^*\| = \|A\|$。这意味着，刻画该代数的所有运算在此范数所诱导的拓扑下都是连续的，从而使 $\mathfrak{A}$ 成为一个 Banach $*$-代数。我们将看到，C^*-代数与冯·诺依曼代数的区别在于用于闭包该代数的拓扑。按照 Segal 的说法，这种一致拓扑在物理学中更为自然。特别是，这一结构使我们能够将算子分析中的一些概念（如谱分析或分解理论）扩展到代数框架 [26]中。

在代数描述中，态作为定义在 $\mathfrak{A}$ 上的正归一泛函进入理论。具体而言，它们被定义为满足以下条件的线性映射

$$\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C} \tag{2}$$

满足

vi. $\omega(A^* A) \geqslant 0 \quad A \in \mathfrak{A}$,

vii. $\|\omega\| = 1$。

当代数有单位元时， $\mathbb{I}$, $\|\omega\| = 1$ 等价于条件 $\omega(\mathbb{I}) = 1$。可证明这一点，见 [25, 26], ： 任何这样的泛函在一致拓扑下都是连续的，并满足柯西-施瓦茨型不等式。在量子力学的代数方法中，态是该理论统计解释的关键要素，因为对于一个自伴元， $A = A^*$ 在 $\mathfrak{A}$中， $\omega(A)$被解释为测量 A的期望值。它们与希尔伯特空间的态之间的关系可通过表示论得到，即从 $\mathfrak{A}$ 到希尔伯特空间 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$上有界算子集合的代数同态 π 。

特别地，给定 $\mathfrak{A}$ 上的一个 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 的态 ω ，存在一个唯一的（相差一个酉变换）表示 $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega)$，其向量态 $\Psi_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ 是 ω 的一个代表：

$$\langle \Psi_\omega | \pi_\omega(A) \Psi_\omega \rangle = \omega(A), \qquad \forall A \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

此外， Ψ_ω 是循环的，也就是说， $\{\pi_\omega(A)\Psi_\omega | A \in \mathfrak{A}\}$ 在 $\mathcal{H}_\omega$ 中稠密。这种表示通常称为循环表示或 GNS 表示 [30, 32]。我们将用三元组表示它

$$(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Psi_\omega). \tag{4}$$

利用这种表示和方程 (3)，我们看到，态总可以看作某个适当表示中的向量态。

冯·诺伊曼代数，或 W^*-代数，最初被引入为算子环，是巴拿赫空间的对偶 C^*-代数；也就是说，对每个 W^*-代数 $\mathfrak{M}$ ，都存在一个巴拿赫空间 $\mathfrak{M}_*$ ，使得 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{*}^{*}$。Sakai [29] 提出了一种抽象方法来研究这些代数，使其不再依赖于希尔伯特空间的引入。事实上，在 von Neumann 最初的表述中，这些代数是从希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 出发定义的：它们是有界算子代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的子代数。具体而言，给定算子集 $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$，我们将其交换子称为集合 $\mathfrak{M}'$ ，即 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中与 $\mathfrak{M}$ 的每个元素都可交换的算子所组成的集合：

$$\mathfrak{M}' = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | AB = BA, \quad \forall B \in \mathfrak{M}\}. \tag{5}$$

相反， $\mathfrak{M}$ 的双交换子是 $\mathfrak{M}'$ 的交换子：

$$\mathfrak{M}'' = (\mathfrak{M}')' \supset \mathfrak{M}. \tag{6}$$

希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的冯·诺依曼代数 $\mathfrak{M}$ 是一个由有界算子构成的 $*$-代数，满足 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}''$。容易看出，冯·诺依曼代数也是一个 C^*-代数，因为它在一致拓扑下是闭的。可以看出，冯·诺依曼代数在弱拓扑下也是闭的。

根据定义，给定一个有界算子网 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$，如果它弱收敛到 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则称

$$A_\alpha \xrightarrow{w} A \iff \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} : \langle \varphi | A_\alpha \psi \rangle \to \langle \varphi | A\psi \rangle \,. \tag{7}$$

冯·诺伊曼代数关于由此收敛概念诱导的拓扑是闭的。

关于冯·诺伊曼代数的基本结果之一是双交换子定理 [26, 33]:

定理 1（双交换子定理）。 非退化代数 $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}\left(\mathcal{H}\right)$ 是冯·诺伊曼代数，当且仅当它在弱拓扑下是闭的。

还可以考虑 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$上的其他拓扑（σ-弱拓扑、强拓扑、 σ-强拓扑、强* 拓扑和 σ-强* 拓扑），对于所有这些拓扑，定理 1 都成立，参见 [26]。

给定一个 $*$-算子代数，总可以通过考察其双交换子得到一个冯·诺伊曼代数，并且它恰好是该代数自身的弱闭包。在一篇具有开创性的论文中， [9], Murray 和 von Neumann 提出了冯·诺伊曼代数的分类。这项工作的主要动机是刻画所有满足以下条件的代数

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}' = \mathbb{C}\mathbb{I} \,. \tag{8}$$

在量子力学框架下， $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 可解释为独立系统的代数。满足条件 (8) 的代数称为因子。例如，给定希尔伯特空间的张量积

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \tag{9}$$

代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathrm{I}_2$ 和 $\mathrm{I}_1 \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ 是因子的例子。冯·诺依曼最初提出的问题，是寻找不具有这种简单形式的因子。

在 [9], 中，因子通过维数函数$\mathfrak{D}$分为三种不同的类型。这种刻画可以扩展并推广到所有冯·诺依曼代数。这里我们概述这一刻画，详情请参见 [27] 。在此之前，我们需要定义投影之间的一种等价关系。

定义 2. 设 $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个冯·诺依曼代数，且 p, q 是 $\mathfrak{M}$中的投影。若存在一个线性部分等距算子 $U \in \mathfrak{M}$，使得 $p = U^*U$且 $q = UU^*$，则称 p 与 q相似，并记为 $p \sim q$。

注意，在先前的假设下， U 是从 p 的支撑到 q的支撑之间的等距算子。

定义 3。 设 $\mathfrak{M}$ 是一个冯·诺依曼代数，并将其中心称为 $Z = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$。那么

1. $\mathfrak{M}$ 若每个非零中心投影 $z \in Z$ 在 $\mathfrak{M}$中都有一个阿贝尔子投影 $p \leqslant z$，则称其为 $\boldsymbol{Type\ \ I}$。根据定义，这意味着子代数$p\mathfrak{M}p$ 是作用在 $p\mathcal{H}$上的阿贝尔 W^*-代数。*2.* 若 $\mathfrak{M}$ 不含任何阿贝尔投影，则称其为 $\boldsymbol{Type\ \ II}$。此外，每个非零中心投影 $z \in Z$ 都支配 $\mathfrak{M}$中的一个非零有限投影 $p \leqslant z$。这里，若投影 p 不存在与 p相似的真子投影$q < p$，则称其为有限投影。

3. 若 $\mathfrak{M}$ 不含任何有限投影，则称其为 $\boldsymbol{Type\ \ III}$。

请注意，2. 中有限性的概念是集合论中的标准概念。

一般而言，每个冯·诺依曼代数都可以唯一地分解为 I、 II 和 III 型代数[27]的直和。 I 型代数是标准量子力学中使用的代数。如果它们是因子，则可证明它们同构于希尔伯特空间 $\mathcal{B}$（$\mathcal{H}$）上的完备算子代数。一般情况下，它们只是这类完备算子的直和（或直积分）。

II 型代数可分为两类。具体而言，如果单位元是有限的，则它们是 II_1 型；如果不存在有限的中心投影，则它们是 II_∞ 型。Murray 和 von Neumann 证明，所有 II_1 型代数都存在唯一的有限迹。从这个意义上说，它们可以被解释为有限矩阵代数在连续统中的推广。此外，他们还证明，在同构意义下，存在唯一的超有限 II_1 型因子。

II 型代数最初是在抽象的数学框架中引入的，后来被证明与量子场论相关。Powers 在其开创性工作中首次构造了一个由彼此不等价的 II_1 型因子组成的连续统族，证明了这类代数存在不可数多个。特别是，他的工作后来得到推广，研究者考虑了比有限矩阵代数更一般的矩阵代数族（见下文）。随后，Krieger 以及 Connes 等人刻画了一个更广泛的代数族，即可约代数族。

我们还预先指出，Powers 的同一构造依赖于参数 λ，也可用于得到超有限 II_1 因子。在本节的最后一部分，我们将简要总结这一构造。这将具有重要意义，因为我们将说明它如何等价于一个经过适当定义的群胚的可观测量代数。

考虑由张量积归纳得到的 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ o f

2×2 矩阵代数。具体来说，取递增序列

$$\mathcal{A}_n = M_{2^n} = \bigotimes_{k=1}^{n} M_2 \tag{10}$$

借助嵌入 $A \in \mathcal{A}_n \mapsto A \otimes \mathbb{I}_2 \in \mathcal{A}_{n+1}$。将 $\mathfrak{A}_0 = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ 称为有限维代数 $\mathcal{A}_n$ 的并集，并将 $\mathfrak{A}$ 称为由该并集生成的 C^* 代数：

$$\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n} = \overline{\mathfrak{A}_0}. \tag{11}$$

特别地，这个 C^* 代数定义为 $\mathfrak{A}_0$ 在继承自 $\mathcal{A}_n$ 的一致范数下的闭包。考虑一列密度矩阵 $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中取值于 M_2，并在 $\mathfrak{A}$ 上定义相应的张量积态：

$$\phi = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \rho_n. \tag{12}$$

更确切地说，我们可以在每个 $\mathcal{A}_n$ 上将 ϕ 定义为有限张量积

$$\phi(A) = \mathrm{Tr}((\otimes_{k=1}^{n}\rho_k)A), \qquad A \in \mathcal{A}_n. \tag{13}$$

这将在 $\mathfrak{A}_0$ 上定义 ϕ。由于它关于 ϕ 范数连续，因此可唯一延拓为 $\mathfrak{A}$ 上的一个态。特别地，Powers 考虑了所有 ρ_n 均等于某个特定 ρ_λ 的特殊情形，其定义为

$$\rho_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \tag{14}$$

以及 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$。随后，他考虑了与该态对应的 GNS 表示，我们将其记为 $(\mathcal{H}_\lambda, \pi_\lambda, \Psi_\lambda)$，以及由 $\pi_\lambda(\mathfrak{A})$ 生成的冯·诺依曼代数$\pi_\lambda(\mathfrak{A})''$。

结果表明，对于 λ 的每个取值，相应的冯·诺依曼代数 $\mathfrak{M}_\lambda$ 都是一个因子。特别地，当 $0 < \lambda < 1/2$ 时可得到 III 型因子；而当 $\lambda = 1/2$ 时，则得到超有限因子 II_1。最终，他证明了 λ 的不同取值会生成非同构因子，从而表明存在一个连续的非等价 III 型因子族。

有趣的是，可以通过引入无限张量积来得到这个循环表示，这正是 von Neumann 最初采用的方法 [39]。遗憾的是，他无法将其表述为 GNS 表示，因为后者是在此之后才引入的。

最后请注意，Araki-Woods [34] 的方法推广了前面的讨论：它假设代数 $\mathfrak{A}$ 由不同维数的矩阵代数定义，并在方程（12）中采用不同的 ρ_n。

2.2 左希尔伯特代数

Tomita [40], 将左希尔伯特代数引入为模理论的自然框架，随后 Takesaki [28, 41]又对其进行了研究。它们在热力学中发挥着重要作用，因为它们阐明了动力学与平衡态 [26, 42, 43, 44]之间的联系。特别是，它们可用于刻画开放量子系统的渐近动力学：连续时间情形见 [45]，离散情形见 [46]。显然，它们在因子分类 [38, 47]中也发挥着重要作用。在 Schwinger 的量子力学图像中，它们居于核心地位，因为可观测量代数是由某个左希尔伯特代数 [6, 48, 49]生成的冯·诺依曼代数。

定义 4（左希尔伯特代数）。左希尔伯特代数是一个复代数$\mathfrak{C}$，配备一个内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$, $\cdot$（在该内积下不完备）以及一个对合 $x \to x^{\#}$，并满足以下性质：

(*i*) 对于所有 $\xi \in \mathfrak{C}$，映射 $\pi_\ell(\xi): \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}, \eta \mapsto \xi\eta$ 是有界的；

(*ii*) 对于所有 $\xi\ \eta\quad \zeta\quad \mathfrak{C}\qquad \langle\zeta|\xi\eta\rangle = \langle\xi^{\#}\zeta|\eta\rangle\qquad \pi_\ell\ \xi^{\dagger} =$，以及 中的，有，$\pi_\ell\ \xi^{\#}$ 或等价地 （） （）；(*iii*) 对合 $\#$ 在 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ 中是可闭的，其中 $\mathfrak{C}$ 是在内积拓扑下的闭包；

(iv) $\mathfrak{C}^2 = \{\xi\eta, \xi, \eta \in \mathfrak{C}\}$ *is dense in* $\mathcal{H}$.

一个简单的例子是与态 ω相关联的 C^*-代数 $\mathfrak{A}$的循环表示 $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Psi_\omega)$。假设态 Ψ_ω 对 $\pi_\omega(\mathfrak{A})$是分离的，即

$$A\Psi_\omega = B\Psi_\omega \implies A = B, \tag{15}$$

其中 A、B 属于 $\pi_\omega(\mathfrak{A})$。于是，通过考虑以下结构可得到一个左希尔伯特代数：

$$\mathfrak{C} = \{\pi_\omega(A)\Psi_\omega | A \in \mathfrak{A}\} \subset \mathcal{H}_\omega \tag{16}$$

其乘积和对合分别定义如下：

$$(\pi_\omega(A)\Psi_\omega)(\pi_\omega(B)\Psi_\omega) = \pi_\omega(AB)\Psi_\omega, \tag{17}$$

$$(\pi_\omega(A)\Psi_\omega)^{\#} = \pi_\omega(A)^*\Psi_\omega = \pi_\omega(A^*)\Psi_\omega. \tag{18}$$

与左希尔伯特代数类似，也可以定义右希尔伯特代数。在这种情况下，π_ℓ 在 (*i*) 中被算子 $\pi_r(\eta)(\xi) = \xi\eta$取代，该算子必须有界；记作 $\eta \mapsto \eta^\flat$ 的对合必须满足 $\langle\zeta|\xi\eta\rangle = \langle\zeta\eta^\flat|\xi\rangle$，而不是 (*ii*)。

可以从左希尔伯特代数得到右希尔伯特代数。具体而言，需要定义一个右有界乘积和一个对合 $\flat$。对合 $\flat$ 是通过对合 # 的伴随得到的。更准确地说，令

$$S : \mathcal{D}^{\#} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{D}^{\#} \tag{19}$$

的闭包及其伴随

$$F : \mathcal{D}^{\flat} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{D}^{\flat}, \tag{20}$$

对所有 $\xi \in \mathcal{D}^{\#}$ 和 $\eta \in \mathcal{D}^{\flat}$，满足

$$\langle \eta | S\xi \rangle = \langle \xi | F\eta \rangle \,. \tag{21}$$

注意， F 和 S 是反线性算子。特别地，可以定义模算子 $\Delta = FS$，并得到 S 的极分解:

$$S = J\Delta^{1/2}, \tag{22}$$

其中，反幺正算子 J 称为模共轭。正如我们将看到的，模算子决定了代数上的一种动力学，可将其视为系统固有的性质。

通过考察所有满足乘积 $\pi_\ell(\xi)\eta$ 在 ξ 中有界的元素 η，可以得到右乘积。将所有这类 η 构成的集合记为 $\mathfrak{B}'$，并令 $\pi_r(\eta)\xi = \pi_\ell(\xi)\eta$。于是，可以证明集合

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{B}' \cap \mathcal{D}^{\flat} \tag{23}$$

实际上是一个右希尔伯特代数。这里，右乘积和对合都有明确的定义。左希尔伯特代数与右希尔伯特代数之间的关系，非常类似于冯·诺依曼代数与其交换子之间的关系。特别地，若将 $\pi_\ell(\mathfrak{C})$ 生成的冯·诺依曼代数记为 $\mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C})$，将 $\pi_r(\mathfrak{C}')$ 生成的冯·诺依曼代数记为 $\mathcal{R}_r(\mathfrak{C}')$，则有

$$\mathcal{R}_r(\mathfrak{C}') = \mathcal{R}_r(\mathfrak{C})'. \tag{24}$$

对 $\mathfrak{C}'$ 重复类似的论证，可以得到另一个左希尔伯特代数$\mathfrak{C}'' \supset \mathfrak{C}$，依此类推:

$$\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}'' = \mathfrak{C}^{iv} \ldots, \tag{25}$$

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}''' = \mathfrak{C}^{v} \ldots. \tag{26}$$

若 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}''$，则称左希尔伯特代数是满的。

关于左希尔伯特代数和模理论的主要结果，与由其自然产生的代数自同构有关。

定理 5 (Tomita-Takesaki定理)。 设 $\mathfrak{C}$ 是一个左希尔伯特代数，其模算子为 Δ，模共轭为 J。记 $\mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C})$ 为由 $\mathfrak{C}$生成的冯·诺依曼代数。以下关系成立：

$$J\mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C})J = \mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C})', \tag{27}$$

$$J\mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C})'J = \mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C}), \tag{28}$$

$$\Delta^{it}\mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C})\Delta^{-it} = \mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C}), \tag{29}$$

$$\Delta^{it}\mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C})'\Delta^{-it} = \mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C})'. \tag{30}$$

前两个关系通过算子 J 将冯·诺依曼代数 $\mathcal{R}_\ell(\mathfrak{C})$ 与其对易子联系起来。后两个关系则表示该代数的幺正动力学（相对于内积），其由哈密顿量 $H = -\log \Delta$ 生成。

3 群胚与群胚代数

本节将概述群胚的主要定义，以及与之相关的可观测量代数。详情请参见 [3, 4, 5, 48, 49, 50, 51, 52]。

群胚是对群概念的推广，因为群胚的元素并非都可以复合。用范畴论的术语来说，群胚是一个集合 $\mathcal{G}$，我们称之为过渡集合；它还配有一组对象 Ω，即所谓的基底。这里存在两个映射 t (目标) 和 s (源)，它们从 $\mathcal{G}$ 映到 Ω，并以下述方式刻画群胚 $\mathcal{G}$ 中两个元素 α、β 之间的乘积（或复合） $\alpha \circ \beta$。

设 α、β 和 γ 属于 $\mathcal{G}$，且 $x \in \Omega$。

(i) $\alpha \circ \beta$ 有定义，当且仅当 $s(\alpha) = t(\beta)$；此时 $s(\alpha \circ \beta) = s(\beta)$，且 $t(\alpha \circ \beta) = t(\alpha)$。(ii) 对每个 $x \in \Omega$，都存在一个单位元 $\mathbb{I}_x \in \mathcal{G}$，满足 $s(\mathbb{I}_x) = t(\mathbb{I}_x) = x$，并且对所有满足 $x = s(\alpha) = t(\beta)$ 的 α、β，有 $\alpha \circ \mathbb{I}_x = \alpha$ 和 $\mathbb{I}_x \circ \beta = \beta$。(iii) 结合律：只要两边中任意一边有定义，就有 $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$。(iv) 任意 $\alpha \in \mathcal{G}$ 都有一个双侧逆元 α^{-1}，即 $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathbb{I}_{s(\alpha)}$ 和 $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathbb{I}_{t(\alpha)}$。

采用范畴论形式主义，我们写作

$$\alpha : x \to y, \tag{31}$$

以表示 $\alpha \in \mathcal{G}$ 具有 $s(\alpha) = x$ 和 $t(\alpha) = y$。受 Schwinger 的量子力学方法启发，我们将基底 Ω 解释为测量结果的集合。这样一来，$\mathcal{G}$ 中的一个 α 可以解释为从结果 x 到结果 y的跃迁。

类似于引入一个群的群代数的方式，我们现在来说明如何定义群胚代数。它将被解释为物理可观测量代数，从而将量子力学的群胚图景与代数图景联系起来。为了更好地理解这些概念，我们先从有限情形开始。

例 6 （例：有限群胚）。考虑一个有限群胚 $\mathcal{G} = \{\gamma_k | k = 1, \ldots, N\}$，其基底为 $\Omega = \{x_a | a = 1, \ldots, n\}$, $n \leqslant N$。我们可以按如下方式定义群胚代数 $\mathbb{C}[\mathcal{G}]$

$$\mathbb{C}[\mathcal{G}] = \mathrm{span}(\mathcal{G}) = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{A} = A_k \gamma_k | A_k \in \mathbb{C} \right\} \tag{32}$$

两个元素之间的乘积定义如下：

$$\boldsymbol{A} \star \boldsymbol{B} = \sum_{k,j=1}^{N} A_k B_l \gamma_k \circ \gamma_j. \tag{33}$$

代数 $\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_k$ 中元素的对合定义为

$$\boldsymbol{A}^\dagger = \sum_{k=1}^{N} \overline{A_k} \gamma_k^{-1} \tag{34}$$

注意，由于群胚的复合律并非交换律，这个代数是非交换的。群胚代数对应于量子力学代数描述中的可观测量代数，而它的自伴元就是可观测量。将乘积 (33) 视为算子 $\boldsymbol{A}\star$ 作用于 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}[\mathcal{G}]$，我们便得到代数的一个自然表示，称为正则表示。转向无限群胚时，这将成为一个左希尔伯特代数。

通过考察希尔伯特空间可以得到另一种表示

$$\mathcal{H}_\Omega = \left\{ \varphi = \sum_{a=1}^{n} \varphi_a \left| x_a \right\rangle | \varphi_a \in \mathbb{C} \right\}. \tag{35}$$

本质上，Ω 的元素（结果）构成了希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\Omega$的一组基。然后，我们可以通过将群胚 $\gamma : x \mapsto y$ 中的每个元素映射为算子，在 $\mathcal{H}_\Omega$ 上定义 $\mathbb{C}[G]$ 的一个表示 π

$$\gamma \in G \mapsto |y\rangle\langle x| \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\Omega). \tag{36}$$

这称为群胚代数的基本表示。由此可得到对群胚元素的标准解释：它们是与测量结果相关联的向量之间的秩一算子。各向同性群中的每个跃迁（由 $\mathcal{G}_x^x$ 表示的跃迁 $\gamma \in \mathcal{G}$ 的集合，满足 $s(\gamma) = t(\gamma) = x$构成一个群，我们称之为 x处的各向同性群）都表示为秩一投影算子 $|x\rangle\langle x|$。

例7 (示例：对群胚)。 考虑一个有限群胚 $\mathcal{G} = \Omega \times \Omega$，它恰好是基集 Ω 与自身的直积：

$$\mathcal{G} = \Omega \times \Omega. \tag{37}$$

对于$(x, y) \in \mathcal{G}$，我们将源函数和目标函数定义为

$$t(x, y) = x, \quad s(x, y) = y. \tag{38}$$

(x, y) 与(w, z) 可以复合，当且仅当 $y = w$；此时$(x, y) \circ (y, z) = (x, z)$。于是，群胚代数变为

$$\mathbb{C}[\Omega \times \Omega] = \left\{ \boldsymbol{c} = \sum_{xy} c_{xy}(x, y) | x, y \in \Omega, c_{xy} \in \mathbb{C} \right\}. \tag{39}$$

利用基本表示，这不过是定义在 $\mathbb{C}[\Omega]$ 上的完备矩阵代数。令$(x, y) \leftrightarrow |x\rangle\langle y|$，则两个元素$\boldsymbol{c} = \sum_{xy} c_{xy} |x\rangle\langle y|$ 和$\boldsymbol{d} = \sum_{xy} d_{xy} |x\rangle\langle y|$ 的 $\star$ 乘积为

$$\boldsymbol{c} \star \boldsymbol{d} = \sum_{xyz} c_{xy} d_{yz} |x\rangle\langle z| , \tag{40}$$

这恰好是矩阵 $[c_{xy}]$ 与 $[d_{xy}]$之间的矩阵乘法。由此得到标准量子力学，其可观测量代数由 $\mathbb{C}[\Omega]$ 上的所有算子构成：

$$\nu[\Omega \times \Omega] = \mathcal{B}(\mathcal{H}_\Omega) = M_n \tag{41}$$

这里有几点需要说明。首先，对于一般的群胚，基本表示并不忠实，因为各向同性群都被平凡地表示为同一个元素，参见例 6 的最后一行。因此，集合 Ω 的对群胚的基本表示对应于希尔伯特空间的标准情形：其中选取了一个完备相容可观测量族，且不考虑规范自由度。具有非平凡各向同性群的一般群胚允许在描述中引入某些规范自由度。然而，这些冗余自由度在基本表示中会消失。我们将看到，可以通过另一种方式，即借助正则表示，得到忠实表示。

3.1 群胚代数

本小节介绍测度群胚的群胚代数及其正则表示的构造。测度群胚是指配有可测子集的博雷尔代数以及某个特殊测度等价类的群胚。之所以选择测度，是因为在涉及非离散群胚时，需要将（32）中的求和替换为积分。与群情形类似，[53, p. 120], 这种测度需要是广义左不变哈尔测度。利用这种测度，可以得到该理论的连续正则表示。这里我们只概述主要结果，不对形式体系作过多探讨。详情请见 [6, 48, 49]。

考虑由可测解析群胚 $\mathcal{G}$ 和测度等价类 $[\mu]$ 组成的对 $(\mathcal{G}, [\mu])$，并假设某个概率 λ 属于该测度类。由于 λ 是概率测度，所诱导的测度

$$\tilde{\lambda} = t_* \lambda = \lambda \circ t^{-1}, \tag{42}$$

是良定义的。设 μ 是 $\mathcal{G}$ 上的一个测度，它与 λ 等价。利用关于目标映射 t: $\mathcal{G} \to \Omega$ 的解体定理，可以将其关于 λ 分解为 ~

$$\mu = \int_\Omega \mu^x d\tilde{\lambda}(x), \tag{43}$$

其中，对所有 $x \in \Omega$ [48, 54, 55], 均有 $\mu^x(\mathcal{G} \setminus t^{-1}(\{x\})) = 0$ 。特别地，这个分解是唯一的，测度族 $\{\mu^x\}_{x\in\Omega}$ 在 Ω 上除一个零测集外唯一确定，这意味着该分解实际上与整个测度等价类相关联。

给定 μ，若测度族 $\{\mu^x\}_{x\in\Omega}$ 在左复合下保持不变，则称其为一组左不变的 Haar 测度

$$(L_\alpha)_* \mu^{s(\alpha)} = \mu^{s(\alpha)} \circ L_\alpha^{-1} = \mu^{t(\alpha)}, \tag{44}$$

其中

$$\begin{aligned} L_\alpha : \mathcal{G}^{s(\alpha)} &\to \mathcal{G}^{t(\alpha)} \\ \beta &\mapsto \alpha \circ \beta. \end{aligned} \tag{45}$$

这里，$G^x = \{\alpha \in G | t(\alpha) = x\}$。简言之，测度族 $\{\mu^x\}_{x\in\Omega}$ 不受左复合的影响。在 [48] 中证明，任意测度群胚 $(\mathcal{G}, \lambda)$，只要其中 λ 是关于取逆不变的概率测度（见下文），就存在一族左不变的哈尔测度；这族测度可通过分解一个与 λ等价的测度 μ得到。

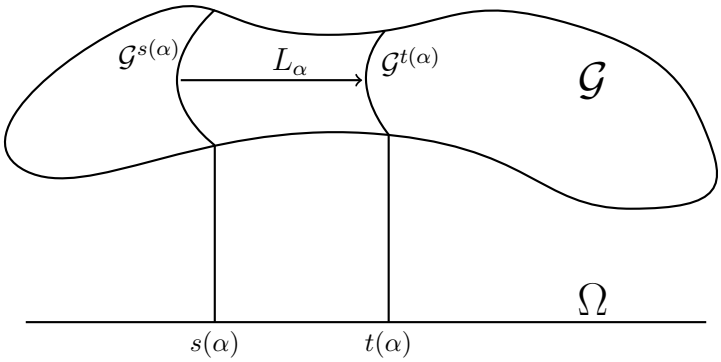

图1：群胚中元素 α 的左作用 L_α 会将可与 α 合成的元素子集 $\mathcal{G}^{s(\alpha)}$ 映射到 $\mathcal{G}^{t(\alpha)}$，其中的元素可与 α^{-1} 合成。哈尔测度 $\mu^{s(\alpha)}$ 也会相应地变换。

利用一族哈尔测度，可以构造一个带对合的代数，从而将群胚表示为一族算子，并将群胚代数 (32) 的概念推广到连续情形。这个代数将在薛温格图像中发挥可观测量代数的作用。

设 $(\mathcal{G}, \lambda)$ 是一个测度群胚，并考虑一个相对于 λ 绝对连续且 σ-有限的测度 μ。将此测度写为

$$\mu = \int_\Omega \mu^x d\tilde{\lambda}(x), \tag{46}$$

˜，其中 λ 按照 (42) 定义，并假设族 $\{\mu^x\}_x$ 是一个哈尔测度系统，也就是说，它满足方程 (44)。同样，在对 λ 施加适当假设的条件下，这样的系统存在。

此外，假设测度 μ 与其逆相似。也就是说，将逆称为

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{G} &\to \mathcal{G} \\ \alpha &\mapsto \alpha^{-1}, \end{aligned} \tag{47}$$

相对于 τ， μ 的推回与 μ 相似：

$$\tau_* \mu = \mu \circ \tau^{-1} = \Delta^{-1} \mu. \tag{48}$$

这里， Δ^{-1} 是一个从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathbb{R}_+$的函数，表示逆测度 $\tau_*\mu$ 相对于测度 μ的 Radon-Nikodym 导数。我们将 Δ称为模函数，并且将看到它与 Tomita-Takesaki

第 2.2 节中讨论的模算子有关。可以证明

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha^{-1}) &= \Delta(\alpha)^{-1},\\ \Delta(\alpha\circ\beta) &= \Delta(\alpha)\Delta(\beta)\,,\end{aligned} \tag{49}$$

这意味着，模函数是从群胚 $\mathcal{G}$ 到乘法群 $\mathbb{R}_+$的群胚同态。

可以从这个测度出发构造一个代数。令 F 为一个可测函数

$$F:\mathcal{G}\to\mathbb{C}, \tag{50}$$

并将其哈恩范数定义为

$$\|F\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}}=\max\left\{\left\|\int_{\mathcal{G}}|F(\alpha)|d\mu^x(\alpha)\right\|_{\mathrm{L}^\infty},\left\|\int_{\mathcal{G}}\Delta^{-1}(\alpha)\big|F(\alpha^{-1})\big|d\mu^x(\alpha)\right\|_{\mathrm{L}^\infty}\right\}. \tag{51}$$

这里，L^∞ 是相对于测度 $\tilde{\lambda}$ 以及积分中的参数 x，在空间 Ω 上的本质上确界。将 $\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}(\mathcal{G})$称为具有有限哈恩范数的函数集合。于是，向量空间

$$\mathfrak{C}=\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}(\mathcal{G})\cap\mathrm{L}^2(\mathcal{G}) \tag{52}$$

is 一个左希尔伯特代数 [6, 40], ，其对合和乘积分别定义为

$$F^\dagger(\alpha)=\Delta^{-1}(\alpha)\overline{F(\alpha^{-1})}=\Delta(\alpha^{-1})\overline{F(\alpha^{-1})}, \tag{53}$$

$$(F\star G)(\alpha)=\int_{\mathcal{G}}F(\beta)G(\beta^{-1}\circ\alpha)d\mu^{t(\alpha)}(\beta). \tag{54}$$

由 $\mathfrak{C}$ 生成的冯·诺依曼代数记为 $\nu[\mathcal{G}]=\mathfrak{C}''$，它将表示物理可观测量代数。显然，在有限情形下，使用计数测度，前面的方程将得到代数 (32)。

一般而言，代数 $\nu[\mathcal{G}]$ 是非交换的，从这个意义上说，我们所描述的理论是非经典的。该表示并不可约，但给出了一个已经处于标准形的代数。根据左希尔伯特代数的一般理论，对合算子 $\dagger$ 可以写成乘积 $J\Delta^{1/2}$，其中 J 是反幺正算子，而 Δ 是模算子。在这种情况下，算子 Δ: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ 是由模函数给出的乘法算子，而 $J:\mathrm{L}^2(\mathcal{G})\to\mathrm{L}^2(\mathcal{G})$ 的作用如下:

$$Jf=\delta^{-\frac{1}{2}}\overline{f\circ\tau}\,. \tag{55}$$

这个代数的表示不是不可约的，而通过算子 J 共轭得到的交换子，对应于群胚在自身上的右作用所生成的代数。

在有限情形下，交换子代数至少对应于 Ω 中的结果测度。我们从标准对偶群胚的例子（例7）中推导出这个代数。与 Ω × Ω 对应的物理代数可以表示为完备矩阵代数，如方程 (41) 所示。根据标准量子力学，与计算基 $|x\rangle_{x\in\Omega}$ 对应的经典子代数是对角矩阵代数：

$$\nu_{\mathrm{cl}}(\Omega\times\Omega)=\mathrm{diag}(\lambda_x : x\in\Omega). \tag{56}$$

该子代数在正则表示中的作用为

$$\sum_x \lambda_x |x\rangle\langle x| \star \sum_{yz} c_{yz} |y\rangle\langle z| = \sum_{xz} \lambda_x c_{xz} |x\rangle\langle z| . \tag{57}$$

4 无限量子比特链群胚

本节将把上一节的构造应用于一个特定的群胚实例。我们将考察可数无穷多个量子比特群胚 [3] 的副本。它可以被解释为一条自旋链。我们将说明，取决于所选的群胚测度，与此实例对应的物理代数可以属于 II_1 or III 中的任一类型。这展示了非平凡代数如何自然地出现在群胚图景中。

我们先介绍一些记号。令 $i\in\mathbb{N}$，并称

$$\Omega_i=\{0,1\}, \tag{58}$$

为第 i 个量子比特的基底，其元素是对其进行测量可能得到的结果。整条链的基底为

$$\Omega_\infty=\prod_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i=\{(x_1,x_2,\dots)|x_i\in\Omega_i\}. \tag{59}$$

Ω_∞ 中的一个序列 $(x_1, x_2, \dots)$ 表示对整条链进行测量，从而获取每个位置的信息。

如前所述，非交换性是通过跃迁引入理论的。我们将引入只允许有限个自旋（或量子比特）翻转的跃迁。它们可以在 Ω_∞ 上作为以下可数集中的元素引入

$$\Gamma=\{(x_1,x_2,\dots)\in\Omega_\infty|\exists N \text{ s.t. } x_i=0\ \forall i>N\}. \tag{60}$$

给定一个元素 $x^o\in\Gamma$，如果 $x_i=1$ 是序列中等于 1 的成员，则第 i 个量子比特会发生翻转。更准确地说，我们将考虑群胚

$$\mathcal{G}=\Omega_\infty\times\Gamma, \tag{61}$$

其目标函数和源函数定义为

$$s(x, x^o) = x \oplus x^o, \tag{62}$$
$$t(x, x^o) = x, \tag{63}$$

对于 $(x, x^o) \in \Omega_\infty \times \Gamma$。这里，$\oplus$ 符号表示模 2 求和，两个序列的和则是指逐项相加。注意，此处集合Γ 在运算 $\oplus$ 下构成一个可数阿贝尔群，且逆运算与其自身 $\oplus$ 相同。从现在起，我们用 $x, y, \ldots$ 表示 Ω_∞ 中的元素，用 $x^o, y^o, \ldots$ 表示 Γ 的元素。群胚$\alpha =$ 中的两个元素 (x, x^o) 和 $(\beta =, y, y^o)$ 可复合，当且仅当 $y = t(\beta) = s(\alpha) = x \oplus x^o$，此时

$$\alpha \circ \beta = (x, x^o) \circ (y, y^o) = (x, x^o \oplus y^o). \tag{64}$$

注意，(64) 中给出的描述不同于例7中对对群胚的描述，因为 (61) 中的第二项是目标与源之差，而不是源本身。特别要注意，该群胚不是连通的，因为当且仅当基底中的不同元素在有限项之后相等时，才能定义它们之间的跃迁。事实上，该群胚可以看作一个作用群胚，其中群 $(\Gamma, \oplus)$ 作用于基底 Ω_∞，见 [3]。

给定基底中的一个元素 x，其单位元为 $\mathbb{I}_x = (x, 0)$，而群胚中元素 (x, x^o) 的逆为 $(x, x^o)^{-1} = (x \oplus x^o, x^o)$。

我们将该模型理解为一个自旋系统，并测量自旋沿 z 轴的分量；假设有限个量子比特（或自旋）可能因噪声或量子跃迁而发生翻转，并且原则上每次跃迁都可以逆转。

为了构造第 3.1 节中定义的可观测量的冯·诺伊曼代数，我们需要在群胚 $\mathcal{G}$ 上定义一个测度，使其相对于逆测度绝对连续（式（48）），并且左不变（式（44））。我们将其显式构造为测度的乘积：一个测度定义在基底 Ω_∞ 上，另一个定义在过渡集合Γ上。

在 Ω_∞ 上构造测度时，我们将采用概率论 [56, 57, 58]中定义无限乘积上概率的标准方法。下面简要概述这一方法。首先，需要定义可测集。给定集合 $A_N \subset \prod_{i=1}^N \Omega_i$，定义 Ω_∞ 上以 A_N 为基底的柱集为集合

$$\mathscr{C}(A_N) = \{x \in \Omega_\infty | (x_1, \ldots, x_N) \in A_N\}. \tag{65}$$

这个柱集由所有在 A_N 中前 N 个元素的序列组成。对 Ω_i 执行 $N \in \mathbb{N}$ 和 $A_N \subset \prod_{i=1}^N$，我们得到 Ω_∞ 中的一族柱集。我们将 σ-代数 Σ_∞ 定义为由这些柱集生成的 σ-代数。这样便可以

在 Σ_∞ 上构造乘积概率。设在每个 Ω_i 上定义一个概率

$$\nu_i = \lambda_i \delta_{\{0\}} + (1-\lambda_i)\delta_{\{1\}}, \quad 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1. \tag{66}$$

这里，$\delta_{\{k\}}(A)$ 是位于 k 的 δ 测度，当 k 属于 A 时取值为 1，否则为 0。于是，存在唯一的概率测度 $\nu_\infty = \prod_i \nu_i$，定义在 Σ_∞ 上，其在柱集上的作用等于 ν_i 的有限乘积测度的乘积，即

$$\nu_\infty(\mathscr{C}(A_N)) = \left\{ \prod_{i=1}^{N} \nu_i \right\}(A_N), \tag{67}$$

对所有 $N \in \mathbb{N}$ 和 $A_N \subset \prod_{i=1}^{N} \Omega_i$ 均成立。这个结果称为柯尔莫哥洛夫定理 [56, p. 27]。

现在我们需要在 Γ 上定义一个测度。注意，作为 Ω_∞ 的子集，Γ 是一个可测集，相对于 ν_∞ 而言其测度为 0（除非出现病态情形 $\lambda_i = 1$，这显然属于 i）。为了建立一个非平凡的理论，我们必须在其上引入另一种测度。由于 Γ 在 $\oplus$ 下构成一个可数交换群，我们将采用其上的（群）哈尔测度，也就是计数测度 #:

$$\#(A) = \sum_{x^o \in A} 1, \tag{68}$$

对所有 $A \subset \Gamma$ 定义。Γ 上的 σ-代数是 Γ 的幂集，$\mathcal{P}(\Gamma)$。$\mathcal{G}$ 上的测度由乘积测度 $\mu = \nu_\infty \times \#$ 给出，该测度定义在乘积 σ-代数 $\Sigma_\infty \times \mathcal{P}(\Gamma)$ 上。

正如第 3.1 节所强调的，为了得到上一节提到的物理代数 [48, 49]，测度 μ 必须满足某些要求。具体而言，它必须与其逆测度等价（48），并且其在目标映射各纤维上的限制必须构成左不变哈尔测度系（44）。

逆。我们需要检验测度 μ 是否与其逆测度等价。考虑逆映射

$$\tau : \mathcal{G} = \Omega_\infty \times \Gamma \to \mathcal{G} = \Omega_\infty \times \Gamma \tag{69}$$

$$\alpha = (x, x^o) \mapsto \alpha^{-1} = (x \oplus x^o,\, x^o). \tag{70}$$

逆测度是将 μ 经 τ 推前得到的:

$$\tau_* \mu(K) = \mu(K^{-1}) = \mu(\{(x, x^o)^{-1} | (x, x^o) \in K\}), \tag{71}$$

其中 $(x, x^o)^{-1} = (x \oplus x^o, x^o)$。令 $K|_{x^0} = \{x | (x, x^o) \in K\}$，可得

$$\mu(K^{-1}) = \sum_{x^o \in \Gamma} \nu_\infty(K^{-1}|_{x^o}) = \sum_{x^o \in \Gamma} ((L_{x^o})_* \nu_\infty)(K|_{x^o}). \tag{72}$$

现在，我们断言 $((L_{x^o})_*\nu_\infty) = \Delta^{-1}\nu_\infty$，其中模函数 Δ 由下式给出

$$\Delta^{-1}(x, x^o) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \right)^{(2x_i-1)x_i^o}. \tag{73}$$

事实上，我们选取一族有限的元素 $y_i \in \Omega_i$，其中有 $i = 1$、. . .、 N，并证明柱集 $\mathscr{C}(\{(y_1, \ldots, y_N)\})$ 满足前述公式；随后，柯尔莫哥洛夫定理的唯一性便保证该等式在整个 σ-代数 Σ_∞ 上成立。具体而言，

$$\begin{aligned}((L_{x^o})_*\nu_\infty)(\mathscr{C}((y_1, \ldots, y_n))) &= \nu_\infty(\mathscr{C}(y_1 \oplus x_1^o, \ldots, y_N \oplus x_N^o)) \\ &= \prod_{i=1}^{N} [\lambda_i \delta_{\{0\}}(y_i \oplus x_i^o) + (1-\lambda_i)\delta_{\{1\}}(y_i \oplus x_i^o)] \\ &= \prod_{i=1}^{N} [\lambda_i f_0^i(x_i^o)\delta_{\{0\}}(y_i) + (1-\lambda_i) f_1^i(x_i^o)\delta_{\{1\}}(y_i)]. \end{aligned} \tag{74}$$

这里， $\lambda_i f_0^i$对于 $x_i^o = 0$ 必须取值 λ_i，对于 $x_i^o = 1$ 则必须取值 $1 - \lambda_i$；而 $(1 - \lambda_i)f_1^i$ 对于 $x_i^o = 0$ 必须取值 $1 - \lambda_i$，对于 $x_i^o = 1$ 则必须取值 λ_i。但这些恰好就是 $\Delta^{-1}(x, x^o)$ 的取值。将此等式与第 139] 页的 [18, 比较。由于 Δ 是严格正函数，因此测度 μ 和 $\tau_*\mu$ 彼此绝对连续。

左不变性。 按照 [48, 49], 中的方法，我们需要将测度 μ 按照式 (46) 分解为一个概率 λ，它关于 μ 绝对连续。考虑定义在 Γ 上的概率分布 m，其形式为

$$m(A) = \sum_{x^o \in A} m(x^o) \quad 0 < m(x^o) < 1, \ \sum_{x^o \in \Gamma} m(x^o) = 1. \tag{75}$$

于是，概率论 $\lambda = \nu_\infty \times m$ 使 $(\mathcal{G}, \lambda)$ 成为一个测度群胚。注意，λ 相对于 μ是绝对连续的。将 λ 关于目标函数 t的推前记为如下形式，见方程 (42):

$$\tilde{\lambda}(A) = t_*\lambda(A) = \lambda(t^{-1}(A)) = \lambda(A \times \Gamma) = \nu_\infty(A), \tag{76}$$

对于 Ω_∞ 中所有 A可测子集。于是

$$\mu = \int_{\Omega_\infty} d\tilde{\lambda}(x)\mu^x = \int_{\Omega_\infty} d\tilde{\lambda}(x)\delta_{\{x\}} \times \#, \tag{77}$$

其中

$$\mu^x = \delta_{\{x\}} \times \#, \tag{78}$$

满足性质 $\mu^x(G \setminus t^{-1}(\{x\})) = 0$，见方程（43）。现在我们来检查族 $\{\mu^x\}_{x\in\Omega_\infty}$ 是否左不变。对于 $\alpha = (x, x^o)$，左作用（ 45 ）变为

$$\begin{aligned} L_\alpha : \{x \oplus x^o\} \times \Gamma &\to \{x\} \times \Gamma \\ \beta = (x \oplus x^o, y^o) &\mapsto \alpha \circ \beta = (x, x^o \oplus y^o). \end{aligned} \tag{79}$$

这里，$\{x \oplus x^o\} \times \Gamma = t^{-1}(\{x \oplus x^o\})$ 是所有可以与 α 复合的变换的集合，而 $\{x\} \times \Gamma = t^{-1}(\{x\})$ 是目标与 α 相同的变换的集合。

对于满足 $K_x = \mathcal{K} \cup t^{-1}(x) \neq \emptyset$ 的集合 $\mathcal{K} \subset \mathcal{G} = \Omega_\infty \times \Gamma$，方程 (44) 现在变为:

$$\begin{aligned} (L_\alpha)_* (\mu^{s(\alpha)})(\mathcal{K}) &= \mu^{s(\alpha)} \circ L_{\alpha^{-1}}(\mathcal{K}) = \mu^{s(\alpha)} \circ L_{\alpha^{-1}}(K_x) \\ &= \mu^{x+x^o} \circ L^{-1}_{(x,x^o)}(K_x) = \#(K_x) = \mu^x(\mathcal{K}). \end{aligned} \tag{80}$$

这里，我们利用了 L_α 的值域位于 $t^{-1}(x)$ 上这一事实。因此，可以利用测度 $\nu_\infty \times \#$，从无限量子比特链群胚 $\mathcal{G}$ 得到一个左希尔伯特代数和一个冯·诺依曼代数。

卷积。现在，我们沿用第 3.1 节中的步骤，在希尔伯特空间$\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu)$ 上得到左希尔伯特代数 $\mathfrak{C}$ 和可观测量的冯·诺伊曼代数 $\nu[\mathcal{G}]$ 。

给定 $\mathcal{G}$上的可测函数 F，其哈恩范数定义如方程（51）所示，其中 Δ 为式（73）给出的模函数，测度 μ^x 由（78）给出。函数 F 的哈恩范数为

$$\|F\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}} = \max\left\{ \left\| \sum_{x^o\in\Gamma} |F(x, x^o)| \right\|_{\mathrm{L}^\infty}, \left\| \sum_{x^o\in\Gamma} \Delta(x, x^o)^{-1} |F(x, x \oplus x^o)| \right\|_{\mathrm{L}^\infty} \right\} \tag{81}$$

若 F, G 属于 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu)$ 且具有有限的哈恩范数，则卷积 [6] 有良好定义。令 $\alpha = (x, x^o)$ 属于 $\mathcal{G}$，并将 F 与 G 的卷积写为式 (54)

$$\begin{aligned} (F \star G)(\alpha) &= \int_{\mathcal{G}} F(\beta) G(\beta^{-1} \circ \alpha) d\mu^{t(\alpha)}(\beta) \\ &= \int_{\mathcal{G}} F(y, y^o) G((y \oplus y^o, y^o) \circ (x, x^o)) d\mu^x(y, y^o) \\ &= \sum_{y^o\in\Gamma} F(x, y^o) G((x \oplus y^o, y^o) \circ (x, x^o)) \\ &= \sum_{y^o\in\Gamma} F(x, y^o) G(x \oplus y^o, x^o \oplus y^o), \end{aligned} \tag{82}$$

with $\beta = (y, y^o)$。式 (78) 中的狄拉克测度 δ 确保 $y = t(\beta) = t(\alpha) = x$。

将具有有限哈恩范数的函数空间称为 $\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}(\mathcal{G}, \mu)$，并将同时属于 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu)$ 的那些函数的集合称为 $\mathfrak{A}$：

$$\mathfrak{C} = \mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}(\mathcal{G}, \mu) \cap \mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu). \tag{83}$$

由于测度是 σ-有限的，卷积 (78) 在 $\mathfrak{C}$ 上具有结合性。算子 [6]

$$\begin{aligned} \pi_F : \mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu) &\to \mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu) \\ \psi &\mapsto \pi_F \psi = F \star \psi \end{aligned} \tag{84}$$

是有界的。事实上，给定 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G})$ 中的 $F \in \mathfrak{C}$ 和 ψ，并利用施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned} \|F \star \psi\|^2_{\mathrm{L}^2} &= \int_{\Omega_\infty} \sum_{x^o \in \Gamma} \Big| \sum_{y^o \in \Gamma} F(x, y^o) \psi(x \oplus y^o, x^o \oplus y^o) \Big|^2 d\nu_\infty(x) \\ &\leqslant \int_{\Omega_\infty} \sum_{x^o \in \Gamma} \sum_{z^o \in \Gamma} \Big| F(x, z^o) \Big| \sum_{y^o \in \Gamma} \big| F(x, y^o) \psi(x \oplus y^o, x^o \oplus y^o)^2 \big| d\nu_\infty(x) \\ &\leqslant \|F\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}} \int_{\Omega_\infty} \sum_{x^o \in \Gamma} \sum_{y^o \in \Gamma} \big| F(x \oplus y^o, y^o) \psi(x, x^o)^2 \big| d\nu_\infty(x \oplus y^o) \\ &= \|F\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}} \int_{\Omega_\infty} \sum_{x^o \in \Gamma} |\psi(x, x^o)|^2 \sum_{y^o \in \Gamma} |F(x \oplus y^o, y^o)| \Delta(x, y^o)^{-1} d\nu_\infty(x) \\ &\leqslant \|F\|^2_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}} \|\psi\|^2_{\mathrm{L}^2}, \end{aligned} \tag{85}$$

因此 $\|\pi_F\|_{\mathcal{B}(\mathrm{L}^2)} \leqslant \|F\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}}$。向量空间 $\mathfrak{C}$ 成为一个左希尔伯特代数，其对合 $\dagger$：式 (53) 中的 $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ 表示为

$$F^\dagger(\alpha) = \Delta^{-1}(\alpha) \overline{F(\alpha^{-1})}, \tag{86}$$

Δ 由方程 (73) 给出。最后，算子希尔伯特代数可在 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu)$ 上关于弱拓扑取闭包，从而得到可观测量的冯·诺伊曼代数。

从现在起，我们令所有 λ_i 都等于给定的 λ，其中 $0 < \lambda \leqslant 1/2$。在下一节中，我们将证明这个算子代数同 Powers 在 [20], 中定义的代数同构；为此，我们将指出它们都等价于 Pukánszky 在其著作 [18] 中定义的代数。

4.1 Pukánszky 代数

现在我们将证明，与无限量子比特链群胚相关联的物理代数 $\nu[\mathcal{G}]$ 同 Pukánszky [18] 和 Powers

由此得到的代数同构，并由此可知，λ 的不同取值会导出不同且不等价的量子理论。特别地，当 $0<\lambda<1/2$ 时，我们得到 III 型因子；而当 $\lambda=1/2$ 时，我们得到超有限 II_1 型因子。特别是，文献中将 $0<\lambda<1/2$ 对应的不等价 III 型因子标记为 $\mathcal{R}_{\tilde{\lambda}}$，$\lambda=\lambda/(1-\lambda)\in[0,1]$ [25, 38]。

使用上文引入的记号，Pukánszky 代数定义在 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G},\mu)$ 上，并由以下两族算子 $V_{x^o}, L_\varphi : \mathrm{L}^2(\mathcal{G},\mu)\to\mathrm{L}^2(\mathcal{G},\mu)$ 生成：

$$(V_{y^o}\psi)(x,x^o)=\Delta(x,y^o)^{-1/2}\psi(x\oplus y^o, x^o\oplus y^o), \tag{87}$$
$$(L_\varphi\psi)(x,x^o)=\varphi(x)\psi(x,x^o). \tag{88}$$

这里，y^o 是 Γ的一个元素，而 φ 是 $\mathrm{L}^\infty(\Omega_\infty,\nu_\infty)$ 中的一个可测函数。项 $\Delta^{-1/2}$ 使算子 V_{y^o} 成为酉算子。

令 $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}}$ 为由 V_{x^o} 和 L_φ生成的冯·诺依曼代数。现在我们证明 $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}}=\nu[\mathcal{G}]$。为此，只需证明两个代数的生成算子彼此包含。

我们从 $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}}\subset\nu[\mathcal{G}]$开始。设 y^o 属于 Γ，我们来寻找一个函数 $F_{y^o}\in\mathrm{L}^2\cap\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}$，使得

$$(V_{y^o}\psi)(x,x^o)=(F_{y^o}\star\psi)(x,x^o)=\sum_{z^o\in\Gamma}F_{y^o}(x,z^o)\psi(x\oplus z^o,x^o\oplus z^o), \tag{89}$$

对所有 $\psi\in\mathrm{L}^2$ 都成立。这意味着 $F_{y^o}(x,x^o)=\delta_{y^o}(x^o)\Delta(x,x^o)^{-1/2}$。此外，$F_{y^o}$ 确实属于 $\mathrm{L}^2\cap\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}$。具体而言，$\|F_{y^o}\|_{\mathrm{L}^2}=1$，而

$$\sum_{x^o\in\Gamma}|F_{y^o}(x,x^o)|=\Delta(x,y^o)^{-1/2}\leqslant\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^{\sum_{j\in\mathbb{N}}y_j^o/2}<+\infty, \tag{90}$$

$$\sum_{x^o\in\Gamma}|F_{y^o}(x,x^o)|\Delta^{-1}(x,x^o)=\Delta(x,y^o)^{-3/2}\leqslant\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^{\sum_{j\in\mathbb{N}}3y_j^o/2}<+\infty. \tag{91}$$

那么，$V_{y^o}\in\nu[\mathcal{G}]$。关于 (88)，令 $\varphi\in\mathrm{L}^\infty(\Omega_\infty)$，并考虑方程

$$(L_\varphi\psi)(x,x^o)=(G_\varphi\star\psi)(x,x^o)=\sum_{z^o\in\Gamma}G_\varphi(x,z^o)\psi(x\oplus z^o,x^o\oplus z^o). \tag{92}$$

于是，我们得到

$$G_\varphi(x,x^o)=\delta_{\{0\}}(x^o)\varphi(x). \tag{93}$$

容易看出，$\|G_\varphi\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty}$，而

$$\left\| \sum_{x^o \in \Gamma} |G_\varphi(x, x^o)| \right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \left\| \sum_{x^o \in \Gamma} \delta_{\{0\}}(x^o) |\varphi(x)| \right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty} < +\infty, \tag{94}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{x^o \in \Gamma} |G_\varphi(x, x^o)| \Delta(x, x^o)^{-1} \right\|_{\mathrm{L}^\infty} &= \left\| \sum_{x^o \in \Gamma} \delta_{\{0\}}(x^o) |\varphi(x)| \Delta(x, x^o)^{-1} \right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty} \\ &< +\infty, \end{aligned} \tag{95}$$

因此 $G_\varphi \in \mathfrak{C}$，并且 $L_\varphi \in \nu[\mathcal{G}]$。特别地，注意到算子 L_φ 定义了一个阿贝尔子代数，我们可以将其解释为与对自旋进行无噪声测量相对应的经典代数。因此，$\mathfrak{M}_{\mathrm{P}} \subset \nu[\mathcal{G}]$。

反过来，我们应证明，$\mathfrak{C}$ 中的函数属于 Pukánszky 代数。首先，注意对于所有 $y^o \in \Gamma$ 和 $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega_\infty)$，函数

$$F(x, x^o) = \delta_{\{y^o\}}(x^o) \varphi(x) \tag{96}$$

属于 $\mathrm{L}^2 \cap \mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}$，并且

$$\begin{aligned} (F \star \psi)(x, x^o) &= \sum_{z^o \in \Gamma} \delta_{\{y^o\}}(z^o) \varphi(x) \psi(x \oplus z^o, x^o \oplus z^o) = \varphi(x) \psi(x \oplus z^o, x^o \oplus z^o) \\ &= \varphi(x) \Delta(x, y^o)^{1/2} (V_{y^o} \psi)(x, x^o) = L_{\varphi\sqrt{\Delta}} V_{y^o} \psi(x, x^o). \end{aligned} \tag{97}$$

因此，形如（96）的函数通过卷积（82）定义了一个算子 π_F（84），而该算子属于 Pukánszky 代数 $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}}$。接下来，我们将 F 中任意其他函数分解为形如（96）的函数之和。具体地，

$$F(x, x^o) = \sum_{y^o \in \Gamma} \delta_{\{y^o\}}(x^o) F(x, x^o)\,, \tag{98}$$

其中 $\|F(x, x^o)\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \|F\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}} < \infty$。这意味着前一个和中的每个元素都具有形式（96），因而属于 Pukánszky 代数。因此，这类元素的任意有限和也属于该代数。为了证明 F 属于该代数，我们只需证明

$$(\chi_{\Gamma_n} F) \star \psi \xrightarrow{\mathrm{L}^2} F\psi, \tag{99}$$

其中 $\Gamma_n = \{x^o \in \Gamma | x_i = 0,\ \forall i > n\}$，且 χ_{Γ_n} Γ_n 上的特征函数。

令 $G_n = F(1-\chi_{\Gamma_n})$，并重复 (85) 中的相同步骤，我们得到

$$\begin{aligned}\|G_n \star \psi\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= \int_{\Omega_\infty} \sum_{x^o\in\Gamma} \Big| \sum_{y^o\in\Gamma} G_n(x,y^o)\psi(x\oplus y^o, x^o\oplus y^o)\Big|^2 d\nu_\infty(x) \\ &\leqslant \int_{\Omega_\infty} \sum_{x^o z^o\in\Gamma} \Big|G_n(x,z^o)\Big| \sum_{y^o\in\Gamma} \big|G_n(x,y^o)\psi(x\oplus y^o, x^o\oplus y^o)^2\big| d\nu_\infty(x) \\ &\leqslant \|F\|_{\mathrm{L}^1_H} \sum_{y^o\notin\Gamma_n} \left\{ \int_{\Omega_\infty} \sum_{x^o\in\Gamma} \big|F(x,y^o)\psi(x\oplus y^o, x^o\oplus y^o)^2\big| d\nu_\infty(x)\right\}.\end{aligned} \tag{100}$$

如果对所有 y^o 求和收敛，则方程中的最后一项趋于 0。但这是成立的，因为

$$\sum_{y^o\in\Gamma_n} \left\{ \int_{\Omega_\infty} \sum_{x^o\in\Gamma} \big|F(x,y^o)\psi(x\oplus y^o, x^o\oplus y^o)^2\big| d\nu_\infty(x)\right\} \leqslant \|F\|_{\mathrm{L}^1_H} \|\psi\|_{\mathrm{L}^2}^2 < \infty, \tag{101}$$

重复方程 (85) 最后一行中的相同计算即可得到。因此，$\pi_F \in \mathfrak{M}_{\mathrm{P}}$，且 $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}} \supset \nu[\mathcal{G}]$，从而 $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}} = \nu[\mathcal{G}]$。

本节最后一部分将说明，如何从第 2.1 节给出的鲍尔斯构造得到 Pukánszky 代数 $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}}$ 。具体而言，我们将在希尔伯特空间 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G},\mu)$ 上表示方程 (11) 中的代数 $\mathfrak{A}$ ，从而得到一个等价的循环表示。Glimm [19], 首次提出了这一构造，它将由 (87) 和 (88) 生成的 Pukánszky 因子映射到 Powers 得到的因子。为了得到相应的循环表示，方程 (66) 中 Ω 上的测度参数 λ 必须与 (14) 中的参数相同λ 。

对于 $k\in\mathbb{N}$，考虑 V_{e_k} 和 L_{ψ_k}，其中

$$e_k = (\delta_{kj})_{j\in\mathbb{N}} = (0,\dots,0,\overset{\mathrm{k}}{\underset{\downarrow}{1}},0,\dots)\in\Gamma, \tag{102}$$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} +1 \text{ if } x_k = 0, \\ -1 \text{ if } x_k = 1. \end{cases} \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{G},\mu). \tag{103}$$

$\mathrm{L}^2(\mathcal{G},\mu)$ 上 $\mathfrak{A}$ 的 Glimm表示 π_λ 定义为赋予

$$\sigma_1^{(k)} = \underbrace{\mathbb{I}_2\otimes\mathbb{I}_2\otimes\cdots\otimes\mathbb{I}_2}_{k-1}\otimes\sigma_1 \in M_{2^k} \mapsto V_{e_k}\in\nu_{\mathrm{P}}, \tag{104}$$

$$\sigma_3^{(k)} = \underbrace{\mathbb{I}_2\otimes\mathbb{I}_2\otimes\cdots\otimes\mathbb{I}_2}_{k-1}\otimes\sigma_3 \in M_{2^k} \mapsto L_{\psi_k}\in\nu_{\mathrm{P}}. \tag{105}$$

循环向量为

$$\Psi_\lambda(x, x^o) = \delta_{\{0\}}(x^o)\chi_{\Omega_\infty}(x), \tag{106}$$

以及 $\langle\Psi_\lambda|\pi_\lambda(A)\Psi_\lambda\rangle = \phi(A)$。要证明这一点，只需将 A 在 M_{2^n} 中按 $\{\mathbb{I}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 的张量积基展开，并明确计算Ψ_λ的期望值。

4.2 模理论

给定一个左希尔伯特代数，可以像公式 (22) 那样写出对合 $\dagger$的闭包$\hat{}$的极分解。我们用 Δ表示由 Tomita-Takesaki 理论得到的模算子，以区别于 (73) 中的模函数 Δ 。

正如我们在第 3.1 节中已经提到的，模算子和模共轭与群胚 $\mathcal{G}$的模函数 Δ 之间满足

$$(JF)(\alpha) = \Delta^{-1/2}(\alpha)\overline{F}(\alpha^{-1}), \tag{107}$$

$$(\hat{\Delta}F)(\alpha) = \Delta(\alpha)F(\alpha), \tag{108}$$

对于 $\mathfrak{C}$中的 F，参见 [6]。事实证明， Δ 只是一个乘法算子。具体而言，利用 (73) 可得

$$\hat{\Delta}(x, x^o) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^{(2x_j-1)x_j^o}. \tag{109}$$

根据 Tomita-Takesaki 模理论，特别是定理 5，可以在代数 $\nu[\mathcal{G}]$上定义幺正动力学，见公式 (29)。生成这一动力学的哈密顿量由模算子$\hat{}$ Δ的对数给出，在我们的情形下具体为

$$H(x, x^o) = \log\hat{\Delta}(x, x^o) = \log\frac{1-\lambda}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}(2x_j - 1)x_j^o. \tag{110}$$

相应的谱是乘法函数的本质值域，即:

$$\mathrm{spec}(H) = \log\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{111}$$

具体而言，对于每个位置 j，求和中的每一项在 $x_j^0 = 1$ 和 $x_j = 1$时取值为 $+1$ ，而在 $x_j^0 = 1$ 和 $x_j = 0$时取值为 -1 。相应的特征向量由这些集合上的特征函数组合而成。将此谱与 [38,p. 485]进行比较。

5 个 DFS态

在群胚图景中，引入态有不同的方式。一种观点是，可以将态定义为群胚上的量子测度；量子测度是 Sorkin 提出的一种测度论推广，旨在将干涉考虑在内 [59]。另一方面，一旦定义了群胚代数，就可以将态描述为可观测量代数 $\nu[\mathcal{G}]$ 上的正归一泛函，从而继承代数描述的结构 [4]。本文将采用后一种方法。

在群胚图景中定义的态里，有一类后来证明特别重要的态，即狄拉克-费曼-施温格态 [21]。对于可测空间 Ω 上的对群胚（见例7），引入物理代数后（式 (41)），它们正是该理论的纯态。然而，它们最重要之处在于：在量子力学的历史方法中，可以用它们来编码系统的动力学 [21, 60, 61]。具体而言，这些态通过群胚上的一个正定型函数表示；该函数也是一个取值于 $U(1)$ 的群胚同态，而相应的相位因子可解释为运动学群胚的路径群胚上的抽象作用泛函。

另一方面，如果将虚指数函数替换为实指数函数，就可以利用 DFS 函数定义取值于 $\mathbb{R}_+$ 的群胚同态。我们已经见过这类函数的一个例子：无限量子比特链Δ 的函数，它已被证明与相应群胚代数的 Tomita-Takesaki 算子相关联。从这个意义上说，DFS 函数可以通过与 Tomita-Takesaki 算子相关联的群胚代数自同构来确定动力学。本文将从这一视角考察 DFS 函数，并首先利用它们与群 Γ 的某个上同调类相联系这一事实，对其作出完整刻画。接着，我们可以探讨群胚上是否存在合适的 Haar测度系，使得所选的实 DFS 函数作为模函数。答案是肯定的，参见 [62, 63] ；我们还将给出一个与伊辛动力学相关的重要例子。先来看第一个结果。

对于无限量子比特链，实 DFS 态定义为从以下形式的正定型函数出发：

$$\varphi(\alpha) = \mathrm{e}^{-\mathscr{S}(\alpha)}. \tag{112}$$

其中 $\mathscr{S}:\ \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的可测函数

$$\mathscr{S}(\alpha \circ \beta) = \mathscr{S}(\alpha) + \mathscr{S}(\beta). \tag{113}$$

现在，我们将给出一种构造性方法，以获得无限量子比特链群胚的实值 DFS 函数。

同态条件 (113) 表示为

$$\mathscr{S}(x, x^o \oplus y^o) = \mathscr{S}(x \oplus y^o, x^o) + \mathscr{S}(x, y^o) = \mathscr{S}(x, x^o) + \mathscr{S}(x \oplus x^o, y^o). \quad (114)$$

一种初步方法是，直接在元素（x， e_k）上定义 $\mathscr{S}$，其中 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是方程 (59) 中 Γ 的元素，而 x 属于 Ω_∞。然后，通过写出 $x^o = \sum_i e_{k_i}$ 并使用 (114) 的第一个等式，将这一表达式扩展到 $\Omega_\infty \times \Gamma$ 中的所有（x， x^o）。遗憾的是，第二个等式对 DFS 函数空间引入了其他约束。请注意，这是群 Γ的交换性所导致的结果。

我们可以完善前面的想法，并据此归纳地构造一个 DFS 函数。首先，我们需要考察 DFS 函数的一些基本性质。特别是， $\mathscr{S}$ 必须满足

$$\mathscr{S}(x, 0) = 0, \quad (115)$$

因为 $\mathscr{S}(x, x^o) = \mathscr{S}(x, x^o \oplus 0) = \mathscr{S}(x, 0) + \mathscr{S}(x, x^o)$。此外

$$\mathscr{S}(x \oplus x^o, x^o) = \mathscr{S}(x, 0) - \mathscr{S}(x, x^o) = -\mathscr{S}(x, x^o), \quad (116)$$

我们将利用这两个性质归纳地构造 $\mathscr{S}$。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义集合

$$\Gamma_n = \{(x_1, x_2 \dots) \in \Omega_\infty : x_k = 0,\ \forall k > n\}, \quad (117)$$
$$\mathscr{C}_n = \{(x_1, x_2 \dots) \in \Omega_\infty : x_k = 0,\ \forall k \leqslant n\}. \quad (118)$$

注意， $\Gamma_n \subset \Gamma = \cup_k \Gamma_k$，而 $\mathscr{C}_n \subset \Omega_\infty$ 是柱集 $\mathscr{C}(\{\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}\})$，见公式 (65)。

我们将使用归纳假设，要求 $\mathscr{S}$ 在集合上满足 DFS 条件

$$\Omega_\infty \times \Gamma_n, \quad (119)$$

这意味着 (114) 对所有 x^o、$y^o \in \Gamma_n$ 和 $x \in \Omega_\infty$ 都成立。然后，我们将把 $\mathscr{S}$ 扩展为一个在 $\Omega_\infty \times \Gamma_{n+1}$ 上满足 DFS 条件的函数。具体过程如下。

(1) 在柱集 $\mathscr{C}_{n+1}$ 中，为 x 自由定义函数 $\mathscr{S}(x, e_{n+1})$。这意味着 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 0$，且 $\mathscr{S}$ 定义在 $\mathscr{C}_{n+1} \times \{e_{n+1}\}$ 上。

(2) 根据条件 (116)，将其扩展到 $\mathscr{C}_n$。这意味着定义 $\mathscr{S}(x \oplus e_{n+1}, e_{n+1}) \equiv -\mathscr{S}(x, e_{n+1})$，其中 x 仍属于 $\mathscr{C}_{n+1}$。此时， $\mathscr{S}$定义在 $\Omega_\infty \times \Gamma_n$和 $\mathscr{C}_n \times \{e_{n+1}\}$上。

(3) 考虑 $x^o \in \Gamma_n$ 和 $z \in \Omega_\infty$。唯一分解 $z = \overline{z} \oplus z^o$，其中 $z^o \in \Gamma_n$ 和 $\overline{z}$ 属于 $\mathscr{C}_n$。因此，定义

$$\mathscr{S}(z, x^o \oplus e_{n+1}) \equiv \mathscr{S}\underbrace{(\overline{z} \oplus e_{n+1}, z^o \oplus x^o)}_{\in\ \Omega_\infty \times \Gamma_n} - \underbrace{\mathscr{S}(\overline{z}, z^o)}_{\in \Omega_\infty \times \Gamma_n} + \underbrace{\mathscr{S}(\overline{z}, e_{n+1})}_{\in \mathscr{C}_n \times \{e_{n+1}\}}. \quad (120)$$

由于 $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup (\Gamma_n \oplus \{e_{n+1}\})$，方程 (120) 在整个 $\Omega_\infty \times \Gamma_{n+1}$ 上延拓为 $\mathscr{S}$。我们必须证明它确实是 $\Omega_\infty \times \Gamma_{n+1}$ 上的 DFS 函数。具体而言，我们需要证明

$$\mathscr{S}(z, x^o \oplus y^o) = \mathscr{S}(z \oplus y^o, x^o) + \mathscr{S}(z, y^o) = \mathscr{S}(z, x^o) + \mathscr{S}(z \oplus x^o, y^o) \quad (121)$$

对所有 $z \in \Omega_\infty$ 以及 x^o、$y^o \in \Gamma_{n+1}$ 均成立。我们将通过对 x^o_{n+1} 和 y^o_{n+1} 的所有可能取值逐项求值来验证这一点。

情况 1： $x^o_{n+1} = 1, \quad y^o_{n+1} = 0$。

回忆 $x^o = e_{n+1} \oplus x^o$，于是 $x^o \in \Gamma_n$。分解 $z = z^o \oplus \overline{z}$，其中 $z^o \in \Gamma_n$ 和 $\overline{z} \in \mathscr{C}_n$。我们来验证 (121) 中的第一个等式。

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}(\overline{z} \oplus z^o, (x^o \oplus e_{n+1}) \oplus y^o) &= \mathscr{S}(\overline{z} \oplus e_{n+1}, x^o \oplus y^o \oplus z^o) - \mathscr{S}(\overline{z}, z^o) + \mathscr{S}(\overline{z}, e_{n+1}) \\
&= \mathscr{S}(\overline{z} \oplus e_{n+1}, x^o \oplus (y^o \oplus z^o)) - \mathscr{S}(\overline{z}, y^o \oplus z^o) \\
&\quad + \mathscr{S}(\overline{z}, e_{n+1}) + \mathscr{S}(\overline{z}, y^o \oplus z^o) - \mathscr{S}(\overline{z}, z^o) \\
&= \mathscr{S}(\overline{z} \oplus y^o \oplus z^o, x^o + e_{n+1}) + \mathscr{S}(\overline{z} \oplus z^o, y^o) \\
&= \mathscr{S}(z \oplus y^o, x^o \oplus e_{n+1}) + \mathscr{S}(z, y^o) \qquad (122)
\end{aligned}$$

对于 (121) 中的第二个等式

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}(\overline{z} \oplus z^o, (x^o \oplus e_{n+1}) \oplus y^o) &= \mathscr{S}(\overline{z} \oplus e_{n+1}, x^o \oplus y^o \oplus z^o) - \mathscr{S}(\overline{z}, z^o) + \mathscr{S}(\overline{z}, e_{n+1}) \\
&= \mathscr{S}(\overline{z} \oplus e_{n+1}, x^o \oplus z^o) - \mathscr{S}(\overline{z}, z^o) + \mathscr{S}(\overline{z}, e_{n+1}) \\
&\quad + S(\overline{z} \oplus z^o \oplus x^o \oplus e_{n+1}, y^o) \\
&= \mathscr{S}(z, x^o \oplus e_{n+1}) + \mathscr{S}(z \oplus x^o \oplus e_{n+1}, y^o). \qquad (123)
\end{aligned}$$

这就证明了第一种情况下的方程 (121)。

情况 2： $x^o_{n+1} = y^o_{n+1} = 1.$

再次回顾 $x^o = x^o \oplus e_{n+1}$, $y^o = y^o \oplus e_{n+1}$，于是 $x^o, y^o \in \Gamma_n$。注意，$S(z, (x^o \oplus e_{n+1}) \oplus (y^o \oplus e_{n+1})) = S(z, x^o \oplus y^o)$。另一方面

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}(z \oplus (y^o \oplus e_{n+1}), x^o \oplus e_{n+1}) &= \mathscr{S}((\overline{z} \oplus e_{n+1}) \oplus (y^o \oplus z^o), x^o \oplus e_{n+1}) \\
&= \mathscr{S}((\overline{z} \oplus e_{n+1}) \oplus e_{n+1}, x^o \oplus y^o \oplus z^o) \\
&\quad - \mathscr{S}(\overline{z} \oplus e_{n+1}, y^o \oplus z^o) + \mathscr{S}(\overline{z} \oplus e_{n+1}, e_{n+1}) \\
&= \mathscr{S}(\overline{z}, x^o \oplus y^o \oplus z^o) - \mathscr{S}(\overline{z} \oplus e_{n+1}, y^o \oplus z^o) \\
&\quad - \mathscr{S}(\overline{z}, e_{n+1}). \qquad (124)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(z\oplus(y^o\oplus e_{n+1})x^o\oplus e_{n+1})+\mathscr{S}(z,y^o\oplus e_{n+1})&=\mathscr{S}(\overline{z},x^o\oplus y^o\oplus z^o)\\&\quad-\mathscr{S}(\overline{z}\oplus e_{n+1},y^o\oplus z^o)-\mathscr{S}(\overline{z},e_{n+1})\\&\quad+\mathscr{S}(\overline{z}\oplus e_{n+1},z^o\oplus y^o)-\mathscr{S}(\overline{z},z)-\mathscr{S}(\overline{z},z^o)\\&=\mathscr{S}(z\oplus z^o,x^o\oplus y^o).\end{aligned}\tag{125}$$

由此可见，方程 (120) 在 $\Omega_\infty\times\Gamma_n$ 上生成一个实值 DFS 函数。重复这一过程，便可将其扩展到整个空间 $\Omega_\infty\times\Gamma$。

这里需要指出，条件 (114) 也可以从群 Γ的上同调角度来解释。事实上，令 $\mathscr{A}$ 为 Ω_∞ 上可测函数构成的空间，它在群 Γ 的以下作用下构成一个 Γ-模 [64]：

$$(x^o\circ S)(x)=S(x\oplus x^o)\,.\tag{126}$$

特别地，注意到 Γ-模可以解释为从 $\Omega_\infty\times\Gamma$到 $\mathbb{R}$ 的函数。

将 Γ^n 称为 Γ 的 n 重直积

$$\Gamma^n=\underbrace{\Gamma\times\Gamma\times\cdots\times\Gamma}_{n}.\tag{127}$$

该上同调的 n 阶上链是从 Γ^n 到 $\mathscr{A}$ 的函数，并通过微分算子 δ^n: $C_n\to C_{n+1}$ 递归定义如下:

$$\begin{aligned}(\delta^n c)(x_1^o,x_2^o,\cdots,x_{n+1}^o)&=(x_1^o\circ c)(x_2^o,\cdots,x_{n+1}^o)+\\&\sum_{k=1}^{n}(-1)^k c(x_1^o,x_2^o,\cdots,x_k^o\oplus x_{k+1}^o,\cdots,x_{n+1}^o)+(-1)^{n+1}c(x_1^o,x_2^o,\cdots,x_n^o)\,.\end{aligned}\tag{128}$$

在前一个公式中，C_n 是 n 阶上链的集合，而 c 是 C_n 中的一个函数。特别地，DFS 函数满足以下 2-余循环条件:

$$(\delta^1 S)(x^o,y^o)[x]=(x^o\circ S(y^o))[x]-S(x^o\oplus y^o)[x]+S(x^o)[x]=0.\tag{129}$$

因此，作为满足此 2-余循环条件的一类特殊解，存在一些恰当上链，它们在这种情况下满足以下条件:

$$S(x^o)[x]=(\delta^0 H)(x^o)[x]=(x^o\circ H)[x]-H[x]\tag{130}$$

它们仅由可测函数 H: $\Omega_\infty\to\mathbb{R}$ 表示。在下一节中，我们将给出一个示例，说明如何将这些恰当上链之一用作测度群胚的模函数，而相应的 Tomita-Takesaki 动力学可以用著名的伊辛模型来诠释。

5.1 伊辛模型

本节中，我们将使用无限量子比特链群胚 (61) 来描述无限链的伊辛模型。这是热力学中的一个标准问题。在有限维情形下，可以通过考虑 Jordan-Wigner 变换 [65, 66, 67] 来求解该系统。然而，只有在适当的边界条件下，无限维自旋链的问题才定义良好。借助群胚形式主义，我们可以通过定义与一次跃迁相对应的能量（即一次自旋翻转导致的总能量变化），得到定义良好的哈密顿量，尽管无限链的总能量会发散。零磁场下自旋链的伊辛模型写作

$$H = -J \sum_k \sigma_3^{(k)} \sigma_3^{(k+1)}. \tag{131}$$

为简便起见，我们将 z 轴作为参考轴，这样更容易表示群胚链（61）上的算符。此外，我们采用与方程（104）相同的约定。利用 Glimm 映射（104），我们可以明确写出 H 在群胚空间 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu)$ 上的作用：

$$H(x) = -\sum_{k \in \mathbb{N}} J \psi_k(x) \psi_{k+1}(x), \tag{132}$$

其中 $\psi_k(x)$ 在方程（103）中定义。现在请注意，一般而言，这个哈密顿量并未良好定义，因为此处的级数并非绝对收敛，这是由于$|\psi_k(x)| = 1$。然而，利用群胚形式主义，我们实际上可以得到一个有限且良好定义的哈密顿量，它给出了与一次跃迁相对应的能量变化。它由 H 形式地得到：

$$S(x, x^o) = H(x \oplus x^o) - H(x). \tag{133}$$

由于这两个函数分别而言都未良好定义，我们将其明确写为：

$$S(x, x^o) = -J \sum_{k \in \mathbb{N}} (\psi_k(x \oplus x^o) \psi_{k+1}(x \oplus x^o) - \psi_k(x) \psi_{k+1}(x)). \tag{134}$$

函数 S 现在定义良好，因为对于所有 x 和 x^o，该和都收敛；这是因为k 现在只遍历有限项。具体而言，这是 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu)$ 上的乘法自伴算子，并且（相差一个符号）它就是跃迁 (x, x^o) 的源与目标之间的能量差。我们可以

例如，对于 $x^o = e_k$，可以计算它，其定义见 (102)。具体而言，可得 s

$$\begin{aligned} S(x, e_k) &= -J(\psi_k(x \oplus e_k)\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\psi_{k+1}(x) + \psi_{k-1}(x)\psi_k(x \oplus e_k) \\ &\quad - \psi_{k-1}(x)\psi_k(x)) \\ &= -J\psi_{k+1}(x)(\psi_k(x \oplus e_k) - \psi_k(x)) - J\psi_{k-1}(x)(\psi_k(x \oplus e_k) - \psi_k(x)) \\ &= -J(\psi_{k+1}(x) + \psi_{k-1}(x))(\psi_k(x \oplus e_k) - \psi_k(x)). \end{aligned} \tag{135}$$

换言之，自旋的翻转会根据其相邻自旋的符号改变整个系统的能量。

我们现在要探讨的问题是：能否在群胚 $\mathcal{G}$ 上找到一个测度，使得函数

$$\Delta_H(x, x^o) = \mathrm{e}^{-S(x,x^o)}. \tag{136}$$

成为相应的模函数？答案是肯定的。事实上，按照 Connes 的记法，群胚上的 Haar 测度系不过就是一个横截函数 [62, 63]。一旦选定一个模函数（它是群胚 $\Delta\colon\ \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ 到正实数群的同态），每个横截测度都会在群胚的基底空间上诱导出一个测度，从而在整个群胚上得到一个相对于其逆测度绝对连续的分解测度。相应的模函数就是所选定的 Δ。在 Connes 非交换积分理论中，横截测度是一个泛函 $\Lambda\colon \mathcal{E}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$，其定义域为横截函数空间，值域为扩展正实数，并满足若干条件。适当地介绍这些内容会超出本文的范围，详细信息请参阅所引文献。我们提及此事，是为了说明目前提出的问题可以在 Connes 非交换积分理论提供的一般框架下得到解决。不过，在本节余下部分，我们将明确构造空间 Ω_∞ 上的一个测度，使其相应的模函数确实为 Δ_H。

为了构造这个测度，我们将引入一族概率空间$\left\{(\Omega_{\times n}, \nu_H^{(n)})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$，并且和前面的分析一样，利用柯尔莫哥洛夫定理在 Ω_∞ 上定义概率 ν_H。通过称

$$\Omega_{\times n} = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \tag{137}$$

我们在 $\Omega_{\times n}$ 上对伊辛哈密顿量 (132) 作如下近似：

$$H_n(x^{(n)}) = -J\sum_{k=1}^{n-1} \psi_k(x)\psi_{k+1}(x) = -J\sum_{k=1}^{n-1}(2x_k - 1)(2x_{k+1} - 1), \tag{138}$$

其中 $x^{(n)}=(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\Omega_{\times n}$ 中的一个元素。注意边界上的自由边界条件。接下来，我们考虑 $\Omega_{\times n}$ 上由玻尔兹曼分布函数定义的概率论

$$\nu_H^{(n)}(A_n)=\frac{1}{Z_n}\sum_{x^{(n)}\in A_n}\mathrm{e}^{H_n(x)}, \tag{139}$$

其中 A_n $\Omega_{\times n}$ 的一个一般子集，以及 $x^{(n)}=(x_1,\cdots,x_n)$。归一化因子 Z_n 是配分函数

$$\begin{aligned}Z_n&=\sum_{x^{(n)}\in\Omega_{\times n}}\mathrm{e}^{H_n(x^{(n)})}=\sum_{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n=\pm1}\mathrm{e}^{-J(\bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_2\bar{x}_3+\cdots+\bar{x}_{n-1}\bar{x}_n)}\\&=\sum_{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{n-1}=\pm1}\mathrm{e}^{-J(\bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_2\bar{x}_3+\cdots+\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1})}2\cosh(J\bar{x}_{n-1})\\&=2\cosh J\sum_{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{n-1}=\pm1}\mathrm{e}^{-J(\bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_2\bar{x}_3+\cdots+\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1})}=(2\cosh J)^n.\end{aligned} \tag{140}$$

这里，为了简单起见，我们称其为 $\bar{x}_k=2x_k-1$。注意，第二行中的函数双曲余弦$(J\bar{x}_n)$是偶函数，且与 x_n 无关。

考虑满射族 $\pi_{n,k}:\Omega_{\times n}\to\Omega_{\times k}$，它们定义于 $n>k$，并满足 $\pi_{n,k}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$，因此 $\pi_{n,k}\circ\pi_{k,j}=\pi_{n,j}(n>k>j)$。直接应用测度推前的定义可得 $(\pi_{n,k})_*\nu_H^{(n)}=\nu_H^{(k)}$。事实上，设 A_k 为 $\Omega_{\times k}$ 的一个子集，并考虑:

$$\begin{aligned}(\pi_{n,k})_*\nu_H^{(n)}(A_k)&=\nu_H^{(n)}(\pi_{n,k}^{-1}(A_k))=\nu_H^{(n)}(A_k\times\Omega_{\times n-k})=\frac{1}{Z_n}\sum_{x^{(n)}\in A_k\times\Omega_{\times n-k}}\mathrm{e}^{H(x^{(n)})}\\&=\frac{1}{Z_n}(\sum_{x^{(k)}\in A_k}\mathrm{e}^{H(x^{(k)})})(2\cosh J)^{n-k}=\frac{1}{Z_k}\sum_{x^{(k)}\in A_k}\mathrm{e}^{H(x^{(k)})}=\nu_H^{(k)}(A_k)\,.\end{aligned} \tag{141}$$

因此，测度空间系统 $\left\{(\Omega_n,\nu_H^{(n)},\pi_{n,k})\right\}_{n,k}$ 构成一个相容概率空间的逆系统。根据柯尔莫哥洛夫定理，[56, 57, 58]存在唯一的概率测度 ν_H，定义在集合 Ω_∞ 上，并可在柱集 $\mathscr{C}(A_k)$ 上按如下方式计算:

$$\nu_H(\mathscr{C}(A_k))=\nu_H^{(k)}(A_k). \tag{142}$$

此外，该测度 ν_H 在群 Γ的作用下满足以下协变性:

$$\begin{aligned}((L_{x^o})_*\nu_H)(\mathscr{C}((y_1,\ldots,y_n)))&=\nu_H(\mathscr{C}(y_1\oplus x_1^o,\ldots,y_n\oplus x_n^o))\\&=\mathrm{e}^{H(y_1\oplus x_1^o,\ldots,y_n\oplus x_n^o)}=\Delta_H^{-1}(x^o,y)\mathrm{e}^{H(y_1,\ldots,y_n)}\end{aligned} \tag{143}$$

因此，$((L_{x^o})_*\nu_H) = \Delta_H^{-1}\nu_H$，其中 Δ_H 由方程（136）给出。总结前面的结果可知，测度 $\mu_H = \nu_H \times \#$ 定义了无限量子比特链群胚 $\mathcal{G}$ 的一组左不变哈尔测度，其模函数为 Δ_H。

由函数 Δ_H 定义的乘法算子在希尔伯特空间 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu_H)$ 上定义了一个自伴算子，该算子就是与群胚 [1] 的新左希尔伯特代数 $\mathfrak{C}$ 相关联的 Tomita-Takesaki 算子。我们可以明确写出与哈密顿量 S 对应的酉演化：

$$U_t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}St}. \tag{144}$$

相应的 Tomita-Takesaki 动力学 [28] 可针对（83）的左希尔伯特代数 $\mathfrak{C}$ 中的元素写出。设 F 属于 $\mathfrak{C}$，并将其在时刻 t 的演化作用于 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu_H)$ 中的函数 ψ，可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}St} F \star \mathrm{e}^{\mathrm{i}St}\psi(x, x^o) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}S(x,x^o)t} \sum_{y^o\in\Gamma} F(x, y^o)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(x\oplus y^o, x^o\oplus y^o)t}\psi(x\oplus y^o, x^o\oplus y^o) \\
&= \sum_{y^o\in\Gamma} F(x, y^o)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S(x,x^o)t+\mathrm{i}S(x,x^o)t+\mathrm{i}S(x,y^o)t}\psi(x\oplus y^o, x^o\oplus y^o) \\
&= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}St}F) \star \psi(x, x^o).
\end{aligned} \tag{145}$$

我们得到一个有趣的结果：与哈密顿量（134）对应的 Tomita-Takesaki 演化等价于代数中元素的酉海森堡演化。这一性质是 DFS 复合（113）的直接结果，并且对所有 DFS 函数 $\mathscr{S}$ 都成立。显然，演化态 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}St}F$ 仍属于 $\mathfrak{C}$，因为乘法算子的模为 1，既不影响 L^2 范数，也不影响 $\mathrm{L}^1_{\mathrm{H}}$ 范数（81）。这一特征源于以下事实：利用群胚上的测度，可以定义一个具有规范正规权及相关模自同构的左希尔伯特代数。

前面的讨论通过一个简单模型表明，在群胚图景中描述动力学时，DFS 函数不仅对历史群胚至关重要。事实上，我们已经看到，这些函数与酉演化相关，而该演化由用于定义群胚代数的左希尔伯特代数的 Tomita-Takesaki 算子所决定。这种演化自然与所研究群胚上左不变的哈尔测度系的选择相关。从这个意义上说，它是所分析系统的一种热力学时间 [68]。

[1] 这个左希尔伯特代数的构造方法与第 4 节相同，只需将希尔伯特空间 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu$ with 希尔伯特空间 $\mathrm{L}^2(\mathcal{G}, \mu_H)$ 替换进去。稍微滥用一下记号，我们仍将其称为 $\mathfrak{C}$。

6 结论

本文分析了量子力学群胚图景的一些特征。具体而言，我们着重研究了非平凡可观测量代数的构造。我们利用离散可数群 Γ 在可测空间 Ω_∞ 上的一个自由、遍历且非传递作用所构造的作用群胚，明确证明了相应的冯·诺伊曼约化代数是一个因子，其类型可能为 II_1 型或 III_λ 型，具体取决于 Ω_∞ 上测度的选择。这一构造再现了冯·诺伊曼代数理论中的著名结果，而本文尝试从 Schwinger 的量子力学图像的角度对其加以诠释。为此，我们对与所谓 DFS 态相关的正定函数 $\varphi_{\mathscr{S}} = \exp\{\mathrm{i}\mathscr{S}\}$ 给出了另一种解释。我们发现，将虚指数替换为实指数后，便得到一个取值于正实数群的群胚同态，并且可以找到一个测度，使之对应于模函数。因此，该模函数生成一个模自同构，它决定了与群胚上测度选择相关的典范动力学。这种动力学的参数是所研究系统的热时间。作为这一构造的一个具体例子，我们在群胚$\mathcal{G} = \Omega_\infty \times \Gamma$ 上构造了一个测度，其对应的模自同构可以解释为具有伊辛相互作用的无限自旋链的动力学。未来，我们希望将这个群胚解释为由一个“规范”群作用于简化构型空间的历史群胚而产生；该构型空间仅由两个结果构成。从这个意义上说，我们可以将 DFS 函数解释为此构型空间上的作用泛函。这种实现有助于澄清 Schwinger 量子力学图景的若干方面：一方面，它或许能为量子作用原理的表述提供一些启示；另一方面，它也可以作为一个受局域规范变换作用的系统的玩具模型。

致谢

本研究部分得到了意大利国家核物理研究所（INFN）通过“QUANTUM”项目以及意大利国家数学物理组（GNFM-INdAM）的支持。作者感谢西班牙经济与竞争力部通过塞韦罗·奥乔亚卓越研究中心计划（SEV-2015/0554）、MINECO 研究项目 PID2020-117477GB-I00，以及马德里自治区项目 QUITEMAD++、S2018/TCS-A4342 提供的资助。GM 感谢

桑坦德/UC3M 卓越讲席计划 2019/2020 提供的部分资助；他也是意大利国家数学物理组（INDAM）的一员。FDC 感谢 UC3M、欧盟委员会通过玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里 COFUND 行动（H2020-MSCA-COFUND-2017- GA 801538）以及桑坦德银行通过 CONEX-Plus 计划提供的资助。FMC 感谢马德里自治区政府（西班牙马德里自治区）根据与 UC3M 签订的多年期协议，在“贝阿特丽斯·加林多奖学金研究经费”项目（C\&QIG-BG-CM-UC3M）下，以及在第五期 PRICIT（区域研究与技术创新计划）框架内对本研究提供的支撑。

参考文献

[1] J. Schwinger，《量子运动学与动力学》。CRC 出版社，2018年3月。

[2] F. M. Ciaglia, A. Ibort 和 G. Marmo，“量子力学的 Schwinger 表述简介：群胚图景”，《现代物理快报 *A*》，第 33 卷，第 20 期，页码 1850122，2018年。[3] F. M. Ciaglia, A. Ibort 和 G. Marmo，“量子力学的 Schwinger 图景 I：群胚”，《现代物理几何方法国际期刊》，第 16 卷，第 08 期，页码 1950119，2019年。[4] F. M. Ciaglia, A. Ibort 和 G. Marmo，“量子力学的 Schwinger 图景 II：代数与可观测量”，《现代物理几何方法国际期刊》，第 16 卷，第 09 期，页码 1950136，2019年。[5] A. Ibort 和 M. A. Rodriguez，群、群胚及其表示导论。CRC 出版社，2019年。[6] F. Ciaglia, F. Di Cosmo, A. Ibort, G. Marmo, L. Schiavone 和 A. Zampini，“群胚的冯·诺依曼代数与量子系统的类型”，准备中，2023年。[7] T. Baumgratz, M. Cramer 和 M. B. Plenio，“量化相干性”，《物理评论快报》，第 113 卷，页码 140401，2014年9月。[8] F. D. Cunden, P. Facchi, G. Florio 和 G. Gramegna，“量子相干性资源理论的一般方面”，《物理评论 *A*》，第 103 卷，页码 022401，2021年2月。[9] F. J. Murray 和 J. v. Neumann，“算子环”，《数学年刊》，第 37 卷，第 1 期，页码 116–229，1936年。

[10] F. J. Murray 和 J. von Neumann，“算子环 II”，《美国数学会汇刊》，第 41 卷，页码 208–248，1937年。[11] J. von Neumann，“算子环 III”，《数学年刊》，第 41 卷，第 1 期，页码 94–161，1940年。[12] F. J. Murray 和 J. von Neumann，“算子环 IV”，《数学年刊》，第 44 卷，第 4 期，页码 716–808，1943年。[13] H. Araki，“与自由场相关的冯·诺依曼代数类型”，理论物理进展，第 32 卷，页码 956–965，1964年12月。[14] K. Fredenhagen，“可观测量局域代数的模结构”，《数学物理通讯》，第 97 卷，第 1-2 期，页码 79–89，1985年。[15] R. Haag，局域量子物理。Springer Berlin Heidelberg，1996年。[16] J. Yngvason，“III 型因子在量子场论中的作用”，数学物理报告，第 55 卷，第 1 期，页码 135–147，2005年。[17] M. Takesaki，算子代数理论 *III*。Springer Berlin Heidelberg，2003年。[18] L. Pukánszky，“因子的一些例子”，数学出版物，第 4 卷，页码 135–156，1956年。[19]J. Glimm，“I 型 C*-代数”，《数学年刊》，第 73 卷，第 3 期，页码 572–612，1961年。[20] R. T. Powers，“一致超有限代数的表示及其相关的冯·诺依曼环”，《美国数学会通报》，第 73 卷，第 4 期，页码 572–575，1967年。[21]F. M. Ciaglia, F. Di Cosmo, A. Ibort, G. Marmo, L. Schiavone 和 A. Zampini，“量子力学 Schwinger 图景中的费曼传播子”，《现代物理快报 *A*》，第 36 卷，第 26 期，页码 2150187，2021年。[22]F. M. Ciaglia, F. Di Cosmo, A. Ibort, G. Marmo, L. Schiavone 和 A. Zampini，“通往经典拉格朗日形式体系的量子路径”，《现代物理快报 *A*》，第 36 卷，第 15 期，页码 2150091，2021年。[23] P. Dirac，量子力学原理。Snowball Publishing，2013年。[24] H. Araki, P. Araki 和 U. Carow-Watamura，量子场的数学理论。国际物理学专著丛书，牛津大学出版社，1999年。

[25] B. Blackadar, 算子代数：*C**-代数与冯·诺依曼代数理论，第122卷。Springer Science & Business Media，2006年。[26] O. Bratteli 和 D. W. Robinson，算子代数与量子统计力学：第*1*卷：*C**-代数与*W**-代数。对称群。态的分解。Springer Science & Business Media，2002年。[27] M. Takesaki，算子代数理论 *I*。Springer Berlin Heidelber，2002年。[28] M. Takesaki，算子代数理论 *II*。Springer Berlin Heidelber，2003年。[29] S. Sakai，*C**-代数与*W**-代数。Springer Science & Business Media，2012年。[30] I. E. Segal，“算子代数的不可约表示”，《美国数学会通报》，第53卷，第2期，第73–88页，1947年。[31] I. Gelfand，“赋范环”，*Matematicheskii Sbornik*，第9卷，第1期，第3–24页，1941年。[32] I. Gelfand 和 M. Neumark，“将赋范环嵌入希尔伯特空间算子环”，*Matematicheskii Sbornik*，第12卷，第2期，第197–217页，1943年。[33] J. von Neumann，“关于泛函运算代数与正规算子理论”，《数学年刊》，第102卷，第370–427页，1930年。[34] H. Araki 和 E. J. Woods，“因子分类”，京都大学数理科学研究所纪要。*A*辑，第4卷，第1期，第51–130页，1968年。[35] W. Krieger，“关于 Araki-Woods 渐近比值集与测度空间的非奇异变换”，载于遍历理论与概率论文集，（柏林，海德堡），第158–177页，Springer Berlin Heidelberg，1970年。[36] W. Krieger，“关于遍历流与因子的同构”，《数学年刊》，第223卷，第19–70页，1976年。[37] A. Connes、J. Feldman 和 B. Weiss，“可和等价关系由单个变换生成”，《遍历理论与动力系统》，第1卷，第4期，第431–450页，1981年。[38] A. Connes，非交换几何。Elsevier Science，1995年。[39] J. Von Neumann，“关于无限直积”，《数学汇刊》，第6卷，第1–77页，1939年。

[40] M. Tomita，“关于冯·诺依曼代数的典范形式”，第五届泛函分析研讨会（东北大学，仙台，*1967*年）（日文），第101–102页，1967年。[41] M. Takesaki，*Tomita* 模希尔伯特代数理论及其应用。施普林格出版社，1970年。[42] R. Kubo，“不可逆过程的统计力学理论 I：一般理论及其在磁学与传导问题中的简单应用”，《日本物理学会杂志》，第**12**卷，第570–586页，1957年。[43] P. C. Martin 和 J. Schwinger，“多粒子系统理论 I”，《物理评论》，第**115**卷，第1342–1373页，1959年。[44] R. Haag、N. M. Hugenholtz 和 M. Winnink，“关于量子统计力学中的平衡态”，《数学物理通讯》，第**5**卷，第215–236页，1967年。[45] R. Longo，“时间的涌现”，《数学论述》，第38卷，第2期，第240–258页，2020年。[46] D. Amato、P. Facchi 和 A. Konderak，“开放量子系统的渐近动力学与模理论”，*arXiv:2210.14548 [*量子物理*]*, 2022。[47] A. Connes，“III型因子的分类”，高等师范学校科学年刊，第**6**卷，第133–252页，1973年。[48] P. Hahn，“测度群胚上的哈尔测度”，《美国数学会汇刊》，第242卷，第1–33页，1978年。[49] P. Hahn，“测度群胚的正则表示”，《美国数学会汇刊》，第242卷，第35–72页，1978年。[50] F. M. Ciaglia、A. Ibort 和 G. Marmo，“Schwinger 的量子力学图像 III：统计解释”，《现代物理几何方法国际期刊》，第16卷，第11期，文章编号1950165，2019年。[51] F. M. Ciaglia、F. Di Cosmo、A. Ibort 和 G. Marmo，“Schwinger 的量子力学图像 IV：复合与独立性”，《现代物理几何方法国际期刊》，第17卷，第04期，文章编号2050058，2020年。[52] N. P. Landsman，经典力学与量子力学之间的数学主题。Springer Science & Business Media，2012年。

[53] L. H. Loomis，《抽象调和分析导论》。Courier Corpora- tion，2013年。[54] P. R. Halmos，“测度分解”，《杜克数学杂志》，第 8 卷，1941年6月。[55] E. G. Effros，“冯·诺依曼代数中的整体结构”，《美国数学会汇刊》，第 121 卷，第 2 期，第 434–454 页，1966年。[56] A. N. Kolmogorov，《概率论基础》。Martino Fine Books，2013年。[57] A. N. Shiryaev，《概率论》。Springer New York，1996年。[58] M. M. Rao，“概率空间的射影极限”，《多元分析杂志》，第 1 卷，第 1 期，第 28–57 页，1971年。[59] R. D. Sorkin，“作为量子测度论的量子力学”，《现代物理快报 A》，第 09 卷，第 33 期，第 3119–3127 页，1994年。[60]F. M. Ciaglia、F. Di Cosmo、A. Ibort、G. Marmo、L. Schiavone 和 A. Zampini，“薛定谔量子力学图景中的因果性”，熵，第 24 卷，第 1 期，2022年。[61] R. D. Sorkin，“因果集上的历史形式标量场论”，《物理学杂志：会议系列》，第 306 卷，第 012017 页，2011年7月。[62] A. Connes，“关于积分的非交换理论”，第 19–143 页，1979年。[63] D. Kastler，“论 A. Connes 的非交换积分理论”，《数学物理通讯》，第 85 卷，第 1 期，第 99–120 页，1982年。[64] C. C. Moore，“局部紧群的扩张与低维上同调理论 I”，《美国数学会汇刊》，第 113 卷，第 40 页，1964年10月。[65] E. Wigner 和 P. Jordan，“关于泡利等价禁戒”，《物理学杂志》，第 47 卷，第 631 页，1928年。[66] E. Lieb、T. Schultz 和 D. Mattis，“反铁磁链的两个可解模型”，《物理年鉴》，第 16 卷，第 407–466 页，1961年12月。[67] P. Facchi、G. Florio、C. Invernizzi 和 S. Pascazio，“临界伊辛模型中两个自旋块的纠缠”，《物理评论 A》，第 78 卷，第 052302 页，2008年11月。

[68] A. Connes 和 C. Rovelli, “一般协变量子理论中的冯·诺依曼代数自同构与时间—热力学关系”, 《经典与量子引力》, 第 11 卷, 第 12 期, 第 2899–2917 页, 1994年。