# Aregulous 几何中的逼近与同伦 y

Wojciech Kucharz

arXiv:2302.01055v1 [math.AG] 2 Feb 2023

**摘要**。设 $X$、$Y$ 是非奇异实代数集。若映射 $\varphi\colon X \to Y$ 属于 $\mathcal{C}^k$ 类，并且将 $\varphi$ 限制在 $X$ 的某个扎里斯基开稠密子集上后得到正则映射，则称其为 $k$-regulous 映射，其中 $k$ 是非负整数。假设 $Y$ 一致有理，且 $k \geq 1$，我们证明，$\mathcal{C}^\infty$ 类映射 $f\colon X \to Y$ 能够在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下由 $k$-regulous 映射逼近，当且仅当 $f$ 与某个 $k$-regulous 映射同伦。一致有理实代数簇包括球面、格拉斯曼流形和有理非奇异曲面，并且在沿非奇异中心作膨胀后仍保持一致有理。此外，取 $Y = \mathbb{S}^p$（单位 $p$ 维球面），对于 $k \geq 0$，我们获得了若干关于在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下用 $k$-regulous 映射逼近从 $X$ 到 $\mathbb{S}^p$ 的$\mathcal{C}^\infty$ 类映射的新结果。

**关键词**。实代数簇，正则映射， $k$-regulous 映射，逼近，同伦，灵活簇，单位球面。

**数学主题分类（2020年）**。14P05,14P25, 26C15,57R99.

## 1 引言

regulous 几何近来已发展成为实代数几何的一个分支。它研究可连续延拓或可延拓为满足某些可微性条件的有理映射。下文中，我们将提出新方法，从而更深入地理解 regulous 几何框架下映射的逼近与同伦这两个概念之间的关系。

本文中，实代数簇一词指一种环化空间，其结构层是取值于 $\mathbb{R}$的函数构成的 $\mathbb{R}$-代数层，并且同构于某个实射影 $n$空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$中的扎里斯基局部闭子集，其中 $n$，且赋予扎里斯基拓扑和正则函数层。这与 $[5, 58]$, 相符，后者对实代数几何作了详尽阐述。回顾一下，本文所采用意义下的每个实代数簇实际上都是仿射的，也就是说，同构于某个 $n$的代数子集，其中 $\mathbb{R}^n$ ；参见 [5, 命题 3.2.10 和定理 3.4.4]。实代数簇之间的态射称为正则映射。每个实代数簇还带有由 $\mathbb{R}$上的通常度量所确定的欧几里得拓扑。除非另有明确说明，所有与实代数簇有关的拓扑概念均指欧几里得拓扑。

按照惯例，所有$\mathcal{C}^\infty$ 流形都假设为豪斯多夫且第二可数。两个$\mathcal{C}^k$流形之间的$\mathcal{C}^k$ 映射空间 $M, N$，其中 $k$为非负整数或$k = \infty$，赋予$\mathcal{C}^k$ 拓扑（关于该拓扑的定义，参见 [32, 第 34, 36]页或 [63,第 311] 页；请注意，在 [32] 中它称为弱$\mathcal{C}^k$ 拓扑；$\mathcal{C}^0$ 拓扑就是紧开拓扑）。

设 $X, Y$ 是两个非奇异实代数簇。若映射 $f\colon X \to Y$ 在 $X$ 上连续，且存在 $X$ 的一个扎里斯基开稠密子集 $U$，使得限制映射 $f|_U\colon U \to Y$ 是正则映射，则称 $f$ 为 regulous 映射。用 $X(f)$ 表示所有此类 $U$ 的并集。$X$ 的补集 $P(f) := X \setminus X(f)$ 是 $X$ 中最小的 Zariski 闭子集，使得限制映射 $f|_{X\setminus P(f)}\colon X \setminus P(f) \to Y$ 是正则映射。若 $f(P(f)) \neq Y$，则称 $f$ 为良好 regulous 映射。文献中，regulous 映射也称为连续有理映射 [37, 38, 40, 42–44, 46, 50, 51] 或分层正则映射 [45, 53, 64]。Fichou、Huisman、Mangolte 和 Monnier [22] 创造了简洁名称“regulous”。自 [40] 于2009年发表以来，已有数位数学家致力于研究 regulous 映射，参见 [4, 20–26, 37, 38, 40, 42–47, 49–54, 59, 64, 65] 及其中的参考文献。

映射 $f\colon X \to Y$ 称为 $k$-*regulous*，其中 $k$ 是非负整数或 $k = \infty$，如果它既是 regulous 映射，又属于 $\mathcal{C}^k$ 类。因此，不太正式地说，$k$-regulous 映射是一个具有有理表示的 $\mathcal{C}^k$ 映射。显然，“0-regulous”与“regulous”相同。正如 [40, 命题 2.1] 中所观察到的，$\infty$-regulous 映射与正则映射一致，而后者通常单独研究。一个标准的 $k$-regulous 函数例子（其中 $k$ 是非负整数）为 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$f(x,y) = \frac{x^{3+k}}{x^2+y^2} \quad \text{for } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{and} \quad f(0,0) = 0.$$

显然，$f$ 不属于 $\mathcal{C}^{k+1}$ 类。

我们称 $\mathcal{C}^l$ 映射 $f\colon X \to Y$ 可在 拓扑下被 $k$-*regulous* 映射逼近，其中 $\mathcal{C}^k$ 拓扑，其中 $0 \le k \le l \le \infty$，如果对于 $f$ 在 $\mathcal{C}^k(X,Y)$ 中的每个邻域 $\mathcal{U}$，都存在一个属于 $\mathcal{U}$ 的 $k$-regulous 映射。研究映射 $f$ 是否可在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下由 $k$-regulous 映射逼近时，我们不妨假设 $f$ 属于 $\mathcal{C}^\infty$ 类。这是合理的，因为集合 $\mathcal{C}^\infty(X,Y)$ 在空间 $\mathcal{C}^k(X,Y)$ 中稠密。

**定义 1.1.** 若一个 $n$ 维实代数簇 $Y$ 的每个点在 $Y$ 中都有一个 Zariski 开邻域，且该邻域与 $\mathbb{R}^n$ 的某个 Zariski 开子集双正则同构，则称其为一致有理的。

显然，每个一致有理实代数簇都是纯维数的非奇异簇。Gromov 提出的一个引人深思的开放问题是：每个有理非奇异簇是否都是一致有理的？关于复簇的讨论，见 [31, 第 885] 页和 [15]。

我们的主要结果之一如下。

**定理 1.2.** 设 $k$ 为正整数，$X$ 为非奇异实代数簇，$Y$ 为一致有理实代数簇。那么，对于一个 $\mathcal{C}^\infty$ 映射 $f\colon X \to Y$，以下条件等价：

(a) $f$ 可以在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下由 $k$-*regulous* 映射逼近。

(b) $f$ 与一个 $k$-*regulous* 映射同伦。

定理 1.2 是否适用于 $k = 0$ 或 $k = \infty$ 仍是一个开放问题。我们还有一个更一般的结果，即定理 4.2，其中目标簇 $Y$ 不必是有理的。

下面的例子展示了定理 1.2 的适用范围。

**例 1.3.** 以下是一些一致有理实代数簇。

**(i)** 对任意非负整数 $n$，单位 $n$ 球面

$$\mathbb{S}^n \coloneqq \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

是一致 有理的，因为去掉一个点后的 $\mathbb{S}^n$ 与 $\mathbb{R}^n$ 双正则同构 .

**(ii)** 令 $\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{H}$，其中 $\mathbb{H}$ 是四元数（斜）域。格拉斯曼流形$\mathbb{G}_d(\mathbb{F}^n)$由 $\mathbb{F}^n$ 中的 $\mathbb{F}$ 向量 $d$ 维子空间构成，可视为实代数簇（见 $[5,$ 第 $72, 73, 352]$ 页）；因此它是一致有理的。

**(iii)** 有理非奇异实代数曲面是一致有理的。正如 $[57,$ 第 2.2$]$，小节所详述，这可由 Comessatti 定理 $[19,$ 第 $257]$，页推出；其现代证明见 $[36,$ 定理 $30]$ 以及 $[62,$ 第 137 页，命题 6.4$]$。

**(iv)** 对一致有理簇进行以非奇异中心为中心的爆破后，所得簇仍是一致有理的；$[31,$ 第 $885]$ 页给出的证明以及 $[15]$ 在复数情形下的证明同样适用于实代数簇。

此前关于用 $k$-regulous 映射进行逼近的所有结果，都涉及取值于格拉斯曼簇 $[40, 52, 53, 64]$ 或单位球面 $[4, 40, 42, 43, 46, 49, 50, 53, 54, 65]$的映射。定理 1.2 在前一种情形下并未提供任何新信息（至少当 $X$ 紧时如此），但在后一种情形下开辟了新的可能性。

根据定理 1.2 和例 1.3(i)，我们立即得到以下关于取值于 $\mathbb{S}^p$的映射的结果。

**推论 1.4**。设 $k$ 为正整数，$X$ 为非奇异实代数簇，$p$ 为非负整数。那么，对于 $C^\infty$ 映射 $f\colon X \to \mathbb{S}^p$，以下条件等价：

(a) $f$ 可在 $C^k$ 拓扑下由 $k$-*regulous* 映射逼近。

(b) $f$ 与一个 $k$-*regulous* 映射同伦。 □

到目前为止，只有当 $X$ 紧且 $\dim X \geq p \geq 1$ 取三个特殊值时，推论 1.4 才已得到证明，即 $p$ 为 $p = 1$、2 或 4 $[40,$ 推论 3.8$]$。由于 $\infty$-regulous 与正则相同，根据 $[14,$ 推论 1.2$]$，推论 1.4 中允许取值 $k = \infty$。

在定理 1.2 和推论 1.4 中，假设整数 $k$ 为正数，也就是说，排除了 $k = 0$ 的情形（尽管这或许并非必要）。不过，我们有以下涉及良好 regulous 映射的判据，而根据定义，良好 regulous 映射是 0-regulous 的。

**推论 1.5**。设 $X$ 是一个紧致非奇异实代数簇，$k$、$p$ 是两个非负整数。假设 $C^\infty$ 映射 $f\colon X \to \mathbb{S}^p$ 同伦于一个良好 *regulous* 映射。那么，$f$ 可以在 $C^k$ 拓扑下由 $k$-*regulous* 映射逼近。

证明。为处理 $k = 0$ 的情形，我们选取一个整数 $l > k$。由于 $f$ 同伦于一个良好 regulous 映射，因此它也同伦于一个良好 $l$-regulous 映射 $[40,$ 定理 2.4$]$。因此，根据推论 1.4，$f$ 可以在$C^l$ 拓扑下由 $l$-regulous 映射逼近。结论由此得出。 □

关于推论 1.5，一个自然的问题是：从 $X$ 到 $\mathbb{S}^p$ 的每个 regulous 映射是否都同伦于一个良好 regulous 映射。根据 [40,定理 2.4]，通过庞特里亚金–汤姆构造，可以用带框架余 bordism 类刻画那些同伦于良好 regulous 映射的映入单位球面的连续映射。接下来，我们关注由良好 $k$-regulous 映射进行的逼近。

设 $X$ 是一个非奇异实代数簇。若 $Z$ 是 $X$的非奇异扎里斯基局部闭子集，则它在 $X$ 中的扎里斯基闭包 $V$ 具有形式 $V = Z \cup W$，其中 $W$ 是 $X$ 的扎里斯基闭子集，且 $Z \cap W = \varnothing$，$\dim W < \dim Z$。显然，假设 $Z$ 在 $X$ 中是闭的（按欧几里得拓扑），则 $Z$ 恰好是 $V$的非奇异点集。一个说明性例子是 $Z = C \setminus \{(0:0:1)\}$，其中 $C$ 是奇异三次曲线

$$C \coloneqq \{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : y^2z - x^3 - x^2z = 0\}$$

在实射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$中。

$X$ 的紧 $\mathcal{C}^\infty$ 子流形 $M$ 称为允许弱代数逼近，如果对于包含映射 $M \hookrightarrow X$ 在空间 $\mathcal{C}^\infty(M, X)$中的每个邻域 $\mathcal{U}$，都存在一个 $\mathcal{C}^\infty$ 嵌入 $e\colon M \to X$，其值域包含于 $\mathcal{U}$中，且 $e(M)$是 $X$的非奇异扎里斯基局部闭子集。

假设 $X$ 是紧的。如果存在一个 $f$ 的正则值 $y \in \mathbb{S}^p$，使得 $f^{-1}(y)$ 是 $X$ 的非奇异扎里斯基局部闭子集（相应地，$X$ 中的 $\mathcal{C}^\infty$ 子流形 $f^{-1}(y)$ 具有弱代数逼近），则称 $\mathcal{C}^\infty$ 映射 $f\colon X \to \mathbb{S}^p$ 是适配（相应地，弱适配）的。

关于用良好的 $k$-regulous 映射逼近取值于单位球面的 $\mathcal{C}^\infty$ 映射，我们的主要结果如下。

**定理 1.6**。设 $X$ 是一个紧致非奇异实代数簇，$k$、$p$ 是两个整数，且 $k \geq 0$、$p \geq 1$。那么，对于一个 $\mathcal{C}^\infty$ 映射 $f\colon X \to \mathbb{S}^p$，以下条件等价：

（a） $f$ 可以在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑中由良好的 $k$-*regulous* 映射逼近。

（b） $f$ 可以在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑中由适配的 $\mathcal{C}^\infty$ 映射逼近。

（c） $f$ 可以在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑中由弱适配的 $\mathcal{C}^\infty$ 映射逼近。

利用定理 1.6，我们可以得到两个不需要任何技术性假设的逼近结果。

**推论 1.7.** 设 $X$ 是维数为 $p$ 的紧致非奇异实代数簇，且 $k$ 是一个非负整数。那么，从 $X$ 到 $\mathbb{S}^p$ 的每个 $\mathcal{C}^\infty$ 映射，都可以在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下由 *nice* $k$-*regulous* 映射逼近。

证明. 由于 $\dim X = p$，从 $X$ 到 $\mathbb{S}^p$ 的每个 $\mathcal{C}^\infty$ 映射都是适配的，因此结论由定理 1.6 得出。□

对于单位球面之间的映射，我们有如下结论。

**定理 1.8**。设 $k$ 为一个非负整数。那么，对于每一对（$n$、$p$）非负整数，从 $\mathbb{S}^n$ 到 $\mathbb{S}^p$ 的每个 $\mathcal{C}^\infty$ 映射，都可以在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下由良好的 $k$-*regulous* 映射逼近。

证明。设 $M$ 为 $\mathbb{S}^n$ 的一个紧$\mathcal{C}^\infty$ 子流形，且 $\dim M < n$。设 $a$ 为$\mathbb{S}^n \setminus M$中的一个点，并设 $\rho\colon \mathbb{S}^n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^n$ 为立体投影。根据 [1, 定理 A], , $\mathbb{R}^n$ 中的$\mathcal{C}^\infty$ 子流形 $\rho(M)$ 具有弱代数逼近。由于 $\rho$ 是一个双正则同构， $M$ 在 $\mathbb{S}^n$中具有弱代数逼近。因此，若 $p \geq 1$，则每个$\mathcal{C}^\infty$ 映射 $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^p$ 都是弱适配的，故由定理 1.6 可得结论。 $p = 0$ 的情形显然。

□

对于任意一对非负整数 $(n,\ p)$，每个 $\mathcal{C}^\infty$映射 $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^p$ 能否在 $\mathcal{C}^\infty$ （或 $\mathcal{C}^0$）拓扑下由正则映射逼近，仍未有定论；更多信息见 [14] 。

现在我们转而讨论另一种刻画：哪些映入单位球面的 $\mathcal{C}^\infty$ 映射可以由良好的 $k$-regulous 映射逼近。

设 $X$ 是一个紧致非奇异实代数簇，并设 $p$ 是一个满足 $0 \leq p \leq n := \dim X$ 的整数。依照 [50, 第 19], 页的说法，若上同调类 $v \in H^p(X;\mathbb{Z}/2)$ 的庞加莱对偶同调类可由 $H_{n-p}(X;\mathbb{Z}/2)$ 中的一个紧的 $(n-p)$ 维 $\mathcal{C}^\infty$ 子流形 $Z$ 表示，且该子流形嵌入时具有平凡法丛，并且 $Z$ 是 $X$ 的非奇异扎里斯基局部闭子集，则称该上同调类为 适配的 。记由所有适配上同调类生成的 $H^p(X;\mathbb{Z}/2)$ 的子群为 $A^p(X;\mathbb{Z}/2)$。

**定理 1.9**。设 $X$ 是一个紧致非奇异实代数簇， $k$、 $p$ 是两个整数，且 $k \geq 0$、 $2p \geq$ 维数 $X + 1$。那么，对于一个 $\mathcal{C}^\infty$ 映射 $f\colon\ X \to \mathbb{S}^p$，以下条件等价：

(a) $f$ 可以在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下由良好 $k$-*regulous* 映射逼近。

(b) $f$ 可以在 $\mathcal{C}^0$ 拓扑下由良好 *regulous* 映射逼近。

(c) $f$ 与一个良好 *regulous* 映射同伦。

(d) $f^*(\sigma_p) \in A^p(X;\ \mathbb{Z}/2)$，其中 $f^*\colon\ H^p(\mathbb{S}^p;\ \mathbb{Z}/2) \to H^p(X;\ \mathbb{Z}/2)$ 是诱导同态，且 $\sigma_p$ 是 $H^p(\mathbb{S}^p;\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$中的唯一非零元素。

自然会想到，定理 1.9 中的假设 $2p \geq$ 维数 $X + 1$ 是否必要。

下面的例子揭示了取值于单位球面中的正则、 $k$-regulous 和 $\mathcal{C}^\infty$ 映射之间的一些关系。

例 1.10. 设 $k$ 是一个非负整数，令 $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ 为 $\mathbb{S}^1$ 的 $n$ 重笛卡尔积。容易验证，对于 $0 \leq p \leq n$，有 $A^p(\mathbb{T}^n;\ \mathbb{Z}/2) = H^p(\mathbb{T}^n;\mathbb{Z}/2)$。因此，根据定理 1.9，若 $2p \geq n + 1$，则每个 $\mathcal{C}^\infty$ 映射 $\mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^p$ 都可以在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下由优良的 $k$-regulous 映射逼近。另一方面，根据 [7, 定理 3.2], , 若 $n$ 是正偶数，则每个正则映射 $\mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^n$ 都是零伦的（当然，存在不是零伦的 $\mathcal{C}^\infty$ 映射 $\mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^n$ , 且它们不能在 $\mathcal{C}^0$ 拓扑下由正则映射逼近）。特别地，定理 1.6、1.9 以及推论 1.5、1.7 中不能允许 $k = \infty$ 。此外，根据 [43, 定理 2.8], , 若 $n > p \geq 1$，则存在一个非奇异实代数簇 $X$ 和一个 $\mathcal{C}^\infty$ 映射 $f\colon$ $X \to \mathbb{S}^p$ , 使得 $X$ 与 $\mathbb{T}^n$ 微分同胚，且 $f$ 不与任何 regulous 映射同伦。

有充分证据表明，例 1.10 所展示的现象相当普遍： $k$-regulous 映射（其中 $k$ 是非负整数）比正则映射更灵活。 [3, 14] 以及许多更早的论文 [6, 8–13, 28–30, 33–35, 39, 41, 56, 60, 61]研究了正则映射逼近。

定理 1.2、1.6 和 1.9 在第 4 节中得到证明。定理 1.2 的证明所采用的方法在第 2 节和第 3 节中发展。这些方法的灵感源自复几何，尤其是 Gromov 的文章 [31] 以及 Forstnerič 等人在 [27]中阐述的相关工作。定理 3.6、3.7、4.2 和 4.3 也具有独立的研究价值，它们是定理 1.2 的精细化版本。我们将推论 4.4 与 [40]的一些结果结合，推导出定理 1.6。证明定理 1.9 的关键是定理 1.6, [50] 和 Benoist 的论文 [2]。上文宣布的关于映入单位球面的结果，是对 [43, 46, 50], 的重大改进；后者仅涉及在$\mathcal{C}^0$ 拓扑下以良好 regulous 映射进行逼近。

# 2 可塑性与局部可塑性性质

与 [53], 中一样，我们所说的实代数簇 $V$ 的分层 是指有限个两两不相交的扎里斯基局部闭子集组成的集合 $\mathcal{V}$，其并集为 $V$。$\mathcal{V}$ 的每个元素称为一个层；层可以是空的。

**定义 2.1**。设 $k$ 是一个非负整数，或者 $k = \infty$、 $X$ 和 $Y$ 是非奇异实代数簇；$\mathcal{X}$ 是 $X$ 的一个分层，$\mathcal{Y}$ 是 $Y$ 的一个分层。

若映射 $f\colon X \to Y$ 属于 $\mathcal{C}^k$ 类，且对每个$\mathcal{X}$ 的层 $S \in$，其限制 $f|_S\colon S \to Y$ 都是正则映射，则称该映射为 $(k, \mathcal{X})$-正则。此外，若 $f(S)$ 包含于$\mathcal{Y}$ 的某个层 $T \in$ 中，则称 $f$ 为 $(k, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$-正则。

现在我们可以给出 $k$-regulous 映射的另一种描述（另见 [38, 命题 8] 和 [22, 定理 4.1]）。

**引理 2.2**。令 $k$、 $X$、 $Y$、$X$、$Y$ 如定义 *2.1* 中所述。

(i) 若映射 $f\colon X \to Y$ 是 $(k, X)$-正则的，则它是 $k$-*regulous* 的。

(ii) 若映射 $f\colon X \to Y$ 是 $k$-*regulous* 的，则存在 $X$ 的一个分层 $X'$，使得 $X \mid P(f)$ 是 $X$ 的一个层 $'$，并且 $f$ 是 $(k, X')$-正则的（$P(f)$ 是在第 *1* 节中定义的 $X$ 的 *Zariski* 闭子集）。

(iii) 若映射 $f\colon X \to Y$ 是 $k$-*regulous* 的，则存在 $X$ 的一个分层 $X''$，使得 $f$ 是 $(k, X'', Y)$-正则的。

证明。(i) 的证明是直接的，而 (ii) 由 [38, 命题 8 和第 91] 页的（[38] 讨论了 $Y = \mathbb{R}$, 但一般情形立即成立，因为 $Y$ 可视为 $\mathbb{R}^p$ 的子簇，对某个 $p$ 而言）推出。为证明 (iii), 我们选取一个如 (ii) 中的分层 $\mathcal{X}'$，并定义

$$\mathcal{X}'' := \{(f|_S)^{-1}(T) : S \in \mathcal{X}' \text{ and } T \in \mathcal{Y}\}. \qquad \square$$

为清晰起见，我们记录如下结论（另见 [22, Corollaire 4.14]）。

**推论 2.3**。设 $X, Y, Z$ 为非奇异实代数簇， $k$ 为非负整数或 $k = \infty$。假设 $f\colon X \to Y$和 $g\colon Y \to Z$ 是 $k$-*regulous* 映射。那么复合映射 $g \circ f$ 也是 $k$-*regulous*。

证明。根据引理 2.2(ii)，存在 $Y$ 的一个分层 $\mathcal{Y}$，使得映射 $g$ 是 $(k,\mathcal{Y})$-正则。根据引理 2.2(iii)，我们可以选择 $X$ 的一个分层 $\mathcal{X}$，使得映射$f$ 是 $(k, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$-正则。因此，映射 $g \circ f$ 是 $(k, \mathcal{X})$-正则，故根据引理 2.2(i)，它是 $k$-regulous。 $\square$

下文中我们讨论的向量丛均为 $\mathbb{R}$-向量丛。设$Y$是一个实代数簇。给定一个向量丛 $p$: $E \to Y$，其定义在 $Y$ 上，全空间为 $E$，丛投影为 $p$；我们有时将 $E$ 称为 $Y$ 上的向量丛。若 $y$ 是 $Y$中的一个点，我们用 $E_y := p^{-1}(y)$表示 $E$ 在 $y$ 上的纤维，并用 $0_y$ 表示 $E_y$ 中的零向量。我们称集合 $Z(E) := \{0_y \in E : y \in Y\}$ 为 $E$的零截面。

关于实代数簇上的代数向量丛的一般理论，请参阅 [5, 第 12 节1]。对于每个代数向量丛 $E$，存在一个非负整数 $n$，以及一个从乘积向量丛$Y \times \mathbb{R}^n$ 到 $E$ [5, 的满射代数态射（定理 12.17]）。

假设 $Y$ 是一个非奇异实代数簇，我们用 $TY$ 表示 $Y$的切丛，用 $T_yY$表示 $Y$在 $y \in Y$处的切空间。

以下概念对于证明我们的所有主要定理至关重要。

**定义 2.4.** 设 $Y$ 是一个非奇异实代数簇，且 $k$ 是一个正整数或$k = \infty$。

(i) 对于 $Y$，一个 *$k$-regulous* 喷射 是一个三元组（$E$，$p$，$s$），其中 $p$: $E \to Y$是 $Y$上的代数向量丛，且 $s$: $E \to Y$是一个 $k$-regulous 映射，满足对所有 $y \in Y$，$s(0_y) = y$。

(ii) 若 $k$-regulous 喷射 $(E, p, s)$ 满足导数

$$d_{0_y}s \colon T_{0_y}E \to T_yY$$

将 $T_{0_y}E$ 的子空间 $E_y = T_{0_y}E_y$ 映射到 $T_yY$ 上，则称其为

$$d_{0_y}s(E_y) = T_yY \quad \text{for all } y \in Y.$$

(iii) 若簇 $Y$ 存在支配的 $k$-regulous 喷射，则称其为 $k$-可变形 .

为简便起见，$\infty$-regulous 喷射、支配 $\infty$-regulous 喷射和 $\infty$-可塑簇分别称为喷射、支配性喷射和可塑簇。

由于 $\infty$-regulous 映射是正则的，因此上文定义 2.4 中的喷射、支配喷射和可变形簇的概念，与 [14, 定义 2.1] 中的相应概念相同。

**引理 2.5.** 设 $Y$ 是一个非奇异实代数簇，且 $k$ 是一个正整数或 $k = \infty$。如果簇 $Y$ 是 $k$-可变形的，那么它存在一个支配的 $k$-*regulous* 喷射$(E, p, s)$，使得 $p$: $E = Y \times \mathbb{R}^n \to Y$ 是乘积向量丛。

˜证明. 设 $(E, \tilde{p}, \tilde{s})$ 是 $Y$ 的一个支配的 $k$-regulous 喷射。取一个非负整数 $n$˜，以及一个满射代数态射 $\alpha$: $E \to E$，它将乘积向量丛 $p$: $E = Y \times \mathbb{R}^n \to Y$ 映到 $\tilde{p}$: $E \to Y$。根据推论 2.3，映射 $s$: $E \to Y$, $s(y, v) = \tilde{s}(\alpha(y, v))$ 是 $k$-regulous 的，因此 $(E, p, s)$ 是 $Y$ 的一个支配的 $k$-regulous 喷射。

□

现在我们回顾实代数簇可变形的一些重要例子。

**例 2.6.** 设 $G$ 是一个线性实代数群，即一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的扎里斯基闭子群，其中 $n$。$G$-空间 是一个实代数簇 $Y$，$G$ 作用于其上，作用 $G \times Y \to Y$，$(a, y) \mapsto a \cdot y$ 是正则映射。若 $Y$ 非奇异，且对每个点 $y \in Y$，映射 $G \to Y$，$a \mapsto a \cdot y$ 在 $G$ 的单位元处的导数都是满射，则称 $G$-空间 $Y$ 是良好 的。显然，若 $Y$ 对 $G$ 是齐性的（也就是说，$G$ 在 $Y$ 上传递地作用），则 $Y$ 是一个良好的 $G$-空间。根据 [14, 命题 2.8],，每个良好的 $G$-空间都是可变形的。

特别地，单位 $n$ 球面 $\mathbb{S}^n$ 和实射影 $n$ 空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ 都是可塑簇，因为它们是正交群 $\mathrm{O}(n+1) \subset \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ 的齐性空间。

引入以下定义也很方便。

**定义 2.7**。 设 $Y$ 是一个非奇异实代数簇。

(i) $Y$的一个局部喷射 是一个正则映射 $\sigma\colon U\times\mathbb{R}^n\to Y$，其中 $U$是 $Y$的一个扎里斯基开子集， $n$ 是一个非负整数，并且对所有 $y\in U$，都有 $\sigma(y,\ 0)=y$。(ii) 若局部喷射 $\sigma\colon U\times\mathbb{R}^n\to Y$是 $Y$的局部喷射，且对每个点 $y\in U$，映射 $\sigma(y,\ \cdot)\colon\mathbb{R}^n\to Y$，$v\mapsto\sigma(y,\ v)$ 在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的导数为满射，则称该局部喷射为支配的 。(iii) 若对每个点 $p\in Y$，都存在一个支配的局部喷射 $\sigma\colon U\times\mathbb{R}^n\to Y$，它是 $Y$的局部喷射，并且满足 $p\in U$，则称簇 $Y$为局部可变形 。

由定义 2.4 和 2.7 可直接得出，每个可变形实代数簇都是局部可变形的。逆命题似乎也成立，但我们只能证明以下较弱的结果。

**命题 2.8**。 设 $Y$ 是局部可变形的非奇异实代数簇。那么，对于每个正整数 $k$，簇 $Y$ 是 $k$-可变形的。

证明。 由于簇 $Y$ 在扎里斯基拓扑下是拟紧的，存在有限个 $Y$的支配局部喷射 $\{\sigma_i\colon U_i\times\mathbb{R}^{n_i}\to Y\colon\ i=1,\dots,q\}$，使得扎里斯基开集 $U_i$ 非空且覆盖 $Y$。选取一个正则函数 $\varphi_i\colon\ Y\to\mathbb{R}$，满足$\varphi_i^{-1}(0)=Y\setminus U_i$，其中 $i=1,\dots,q$。

设 $k$是正整数。根据下文的引理 2.9，存在一个正整数 $r$，使得对于 $i=1,\dots,q$，由下式定义的映射 $\sigma_i^{(r)}\colon\ Y\times\mathbb{R}^{n_i}\to Y$

$$\sigma_i^{(r)}(y,v_i)=\begin{cases}\sigma_i(y,\varphi_i(y)^r v_i) & \text{for } (y,v_i)\in U_i\times\mathbb{R}^{n_i}\\ y & \text{for } (y,v_i)\in(Y\setminus U_i)\times\mathbb{R}^{n_i}\end{cases}$$

是 $k$-regulous 的。此外，根据构造，对于每个点 $y\in U_i$，映射 $\sigma_i^{(r)}(y,\cdot)\colon\ \mathbb{R}^{n_i}\to Y$, $v_i\mapsto\sigma_i^{(r)}(y,v_i)$ 在 $0\in\mathbb{R}^{n_i}$处的导数都是满射。对于 $i=1,\dots,q$，我们递归地定义映射 $s_i\colon\ Y\times\mathbb{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n_i}\to Y$如下

$$\begin{aligned}&s_i=\sigma_1^{(r)} && \text{对于 } i=1,\\ &s_i(y,v_1,\dots,v_{i-1},v_i)=\sigma_i^{(r)}(s_{i-1}(y,v_1,\dots,v_{i-1}),v_i) && \text{for } i\geq 2.\end{aligned}$$

根据推论 2.3，映射 $s_i$ 是 $k$-regulous 的。我们得到一个支配的 $k$-regulous 喷射 $(E,\ p,\ s)$，用于 $Y$，其中

$$p\colon E=Y\times\mathbb{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n_q}\to Y$$

是乘积向量丛，且 $s=s_q$。因此，簇 $Y$是 $k$-可变形的 . □

在命题 2.8 的证明中，我们用到了以下结果。

**引理 2.9**。 设 $Y$ 为非奇异实代数簇， $U$ 为 $Y$的非空扎里斯基开子集，且 $\tau\colon$ $U\times\mathbb{R}^n\to Y$为满足条件 $\tau(y,0)=y$的正则映射，其中对所有 $y\in U$均成立。设 $\varphi\colon$ $Y\to\mathbb{R}$ 为满足 $\varphi^{-1}(0)=Y\setminus U$ 的正则函数。那么，对每个非负整数 $k$，存在一个正整数 $r(k)$，使得对于每个整数 $(k)$，由下式定义的映射： $Y\times\mathbb{R}^n\to Y$

$$\tau^{(r)}(y,w)=\begin{cases}\tau(y,\varphi(y)^r w) & for\ (y,w)\in U\times\mathbb{R}^n\\ y & for\ (y,w)\in(Y\setminus U)\times\mathbb{R}^n\end{cases}$$

是 $k$-*regulous*。

证明。我们可以假设 $Y$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的代数子集。于是

$$\tau(y,w)=(\tau_1(y,w),\dots,\tau_m(y,w)) \quad \text{for all } (y,w)\in U\times\mathbb{R}^n,$$

其中，$\tau_i\colon U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是关于 $i=1,\dots,m$ 的正则函数。注意

$$\tau_i(y,0)=y_i \quad \text{for all } y=(y_1,\dots,y_m)\in U.$$

根据 [5, 命题 3.2，3], 存在多项式函数 $p_i,q_i\colon \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得

$$q_i^{-1}(0)\cap(U\times\mathbb{R}^n)=\varnothing \quad \text{and} \quad \tau_i(y,w)=\frac{p_i(y,w)}{q_i(y,w)} \quad \text{for all } (y,w)\in U\times\mathbb{R}^n.$$

我们得到

$$\tau_i(y,w)-\tau_i(y,0)=\frac{p_i(y,w)q_i(y,0)-p_i(y,0)q_i(y,w)}{q_i(y,w)q_i(y,0)}$$

因此

$$\tau_i(y,w)=y_i+\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}(y,w)w_j,$$

其中，$\tau_{ij}\colon U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是正则函数，且 $w=(w_1,\dots,w_n)$。

设 $k$ 为非负整数，并令 $\pi\colon Y\times\mathbb{R}^n\to Y$ 为典范投影。由于 $(\varphi\circ\pi)^{-1}(0)=(Y\times\mathbb{R}^n)\setminus(U\times\mathbb{R}^n)$，存在正整数 $r(k)$，使得对于每个整数 $r\geq r(k)$，由下式定义的函数 $\tau_{ij}^{(r)}\colon Y\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$\tau_{ij}^{(r)}(y,w)=\begin{cases}\tau_{ij}(y,w)\varphi(y)^r & \text{for } (y,w)\in U\times\mathbb{R}^n\\ 0 & \text{for } (y,w)\in(Y\times\mathbb{R}^n)\setminus(U\times\mathbb{R}^n)\end{cases}$$

属于 $\mathcal{C}^k$ 类，对于 $i=1,\dots,m$，$j=1,\dots,n$（参见命题 3.4]，，以及 $Y=\mathbb{R}^m$的引理 5.2]）。现在我们定义映射 $\tau^{(r)}\colon Y\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，如下：

$$\tau^{(r)}(y,w)=(\tau_1^{(r)}(y,w),\dots,\tau_m^{(r)}(y,w)),$$

其中

$$\tau_i^{(r)}(y,w)=y_i+\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}^{(r)}(y,\varphi(y)^r w)w_j \quad \text{for } i=1,\dots,m.$$

根据构造，映射 $\tau^{(r)}$ 属于 $\mathcal{C}^k$类。此外，

$$\tau^{(r)}(y,w)=\begin{cases}\tau(y,\varphi(y)^r w) & \text{for } (y,w)\in U\times\mathbb{R}^n\\ y & \text{for } (y,w)\in(Y\setminus U)\times\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

证明完毕，因为 $\tau_{(r)}$ 在 $U\times\mathbb{R}^n$ 和 $(Y\setminus U)\times\mathbb{R}^n$ 上的限制都是正则映射。

□

还需要进一步研究，以揭示一致有理性与 $k$-可塑性之间的关系。

我们考虑赋有欧几里得范数 $\|-\|$的 $\mathbb{R}^n$。若 $A$ 是 $\mathbb{R}^n$的非空子集，且 $x\in\mathbb{R}^n$，则我们用 $\operatorname{dist}(x,A)$ 表示从 $x$ 到 $A$ 的欧几里得距离。

**引理 2.10**。设 $X$ 是实代数簇，$n$ 是非负整数，且 $U$ 是 $X\times\mathbb{R}^n$ 中 $X\times\{0\}$ 的 *Zariski* 开邻域。那么存在一个正则函数 $\varepsilon\colon X\to\mathbb{R}$，使得

$$\varepsilon(x)>0 \quad \textit{and} \quad \left(x,\varepsilon(x)\frac{v}{1+\|v\|^2}\right)\in U \quad \textit{for all } (x,v)\in X\times\mathbb{R}^n.$$

证明。我们可以假设 $X$ 是 $\mathbb{R}^m$ 和 $U \neq X \times \mathbb{R}^n$ 的代数子集。于是我们选取一个多项式函数 $\eta\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得对所有 $(x,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$，$\eta(x,v) \geq 0$，且 $\eta$ 的零点集是 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 的代数子集 $Z := (X \times \mathbb{R}^n) \setminus U$。由于距离函数

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x,v) \mapsto \operatorname{dist}((x,v), Z)$$

是一个零点集为 $Z$ 的连续半代数函数。根据 [5, 定理 2.6，6], 存在一个正整数 $N$ 和一个连续半代数函数 $h\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得

$$\eta(x,v)^N = h(x,v) \operatorname{dist}((x,v), Z) \quad \text{for all } (x,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

因此，根据 [5, 命题 2.6，2], 存在一个实常数 $c > 0$ 和一个正整数 $r$，使得

$$|h(x,v)| \leq c(1 + \|(x,v)\|^2)^r \quad \text{for all } (x,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

因此，

$$\eta(x,0)^N \leq c(1 + \|x\|^2)^r \operatorname{dist}((x,0), Z) \quad \text{for all } x \in X.$$

由此可知，由下式定义的函数 $\varepsilon\colon X \to \mathbb{R}$

$$\varepsilon(x) = \frac{\eta(x,0)^N}{2c(1 + \|x\|^2)^r} \quad \text{for all } x \in X$$

具有所需的性质。 □

**命题 2.11**。设 $Y$ 是一个柔性非奇异实代数簇。那么，$Y$ 的每个扎里斯基开子集 $Y_0$ 都是可变形簇。

证明。由引理 2.5，存在一个关于 $Y$ 的喷射 $(E, p, s)$，使得 $p\colon E = Y \times \mathbb{R}^n \to Y$ 是乘积向量丛。令 $p_0\colon Y_0 \times \mathbb{R}^n \to Y_0$ 为 $Y_0$ 上的乘积向量丛。注意，集合 $U := E_0 \cap s^{-1}(Y_0)$ 是 $Y_0 \times \{0\}$ 在 $E_0$ 中的 Zariski 开邻域。由引理 2.10，存在一个正则函数 $\varepsilon\colon Y_0 \to \mathbb{R}$，使得

$$\varepsilon(y) > 0 \quad \text{and} \quad \left(y, \varepsilon(y)\frac{v}{1 + \|v\|^2}\right) \in U \quad \text{for all } (y,v) \in E_0.$$

显然，映射

$$s_0\colon Y_0 \times \mathbb{R}^n \to Y_0, \quad (y,v) \mapsto s\left(y, \varepsilon(y)\frac{v}{1 + \|v\|^2}\right)$$

是正则的。由于映射的导数

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \frac{v}{1 + \|v\|^2}$$

在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处是一个同构，因此 $(E_0, p_0, s_0)$ 是 $Y_0$ 的一个支配喷射。因此，$Y_0$ 是一个可变形簇。 □

命题 2.11 为可变形实代数簇提供了大量新的例子。

**例 2.12.** 设 $Y$ 是某个线性实代数群的齐性空间，且为实代数簇。如例 2.6 中所述，$Y$ 是一个可变形簇。因此，根据命题 2.11，$Y$ 的每个扎里斯基开子集都是可变形簇。

**命题 2.13.** 每个一致有理实代数簇都是局部可变形的 $e.$

证明。根据定义 1.1，只需证明 $\mathbb{R}^n$ 的每个扎里斯基开子集都是可变形簇。这由命题 2.11 立即得出，因为 $\mathbb{R}^n$ 是可变形簇（要证明 $\mathbb{R}^n$ 可变形，可考虑映射 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(y,\ v) \mapsto y+v$）。 □

**推论 2.14**。 设 $k$ 是一个正整数。每个一致有理实代数簇都是 $k$-可变形的。

证明。 只需结合命题 2.8 和命题 2.13。 □

# 3 可变形浸没的截面

我们将自由使用第 2 节中引入的术语和记号。

**记号 3.1**。 设 $X$、 $Z$ 是非奇异实代数簇，并设 $h\colon Z \to X$ 是一个满射淹没映射。此外，令 $V(h)$ 表示切丛 $TZ$ 中到 $Z$ 的代数向量子丛，其定义为

$$V(h)_z = \operatorname{Ker}(d_z h\colon T_z Z \to T_{h(z)}X) \quad \text{for all } z \in Z,$$

其中 $d_z h$ 是 $h$ 在 $z$ 处的导数。显然， $V(h)_z$ 是纤维 $h^{-1}(h(z))$ 的切空间。

设 $k$ 是一个非负整数或 $k=\infty$， $U$ 是 $X$ 的一个开子集，且 $\mathbf{X}$ 是 $X$ 的一个分层。若映射 $f\colon U \to Z$ 满足对所有 $x \in U$， $h(f(x)) = x$，则称其为 $h\colon Z \to X$ 在 $U$ 上的截面。属于 $\mathbf{C}^k$ 类的截面称为 $\mathbf{C}^k$ 截面。所谓 $\mathbf{C}^k$ 截面的同伦，是指满足 $F_t\colon U \to Z$，且对每个 $t \in [0,1]$， $x \mapsto F(x,t)$ 都是 $\mathbf{C}^k$ 截面的连续映射 $F\colon U \times [0,1] \to Z$。若存在由 $\mathbf{C}^k$ 截面组成的同伦 $F\colon U \times [0,1] \to Z$，使得 $F_0 = f_0$ 且 $F_1 = f_1$，则称两个 $\mathbf{C}^k$ 截面 $f_0$、 $f_1\colon U \to Z$ 通过 $\mathbf{C}^k$ 截面同伦。若全局截面 $g\colon X \to Z$ 是 $k$-regulous（分别为 $(k, \mathbf{X})$-正则）映射，则称其为 $k$-regulous（分别为 $(k, \mathbf{X})$-正则）截面。若 $\mathbf{C}^k$ 截面 $f\colon U \to Z$ 能在 $\mathbf{C}^k$ 拓扑下由全局 $k$-regulous（分别为全局 $(k, \mathbf{X})$-正则）截面逼近，则称该截面可由全局此类截面逼近；也就是说，对于空间 $\mathbf{C}^k(U,Z)$ 中所有 $\mathbf{C}^k$ 映射构成的空间内 $f$ 的每个邻域 $\mathbf{U}$，都存在一个全局 $k$-regulous（分别为全局 $(k, \mathbf{X})$-正则）截面 $g\colon X \to Z$，使得 $g|_U$ 属于 $\mathbf{U}$。为了研究由全局 $k$-regulous 或全局 $(k, \mathbf{X})$-正则截面进行的逼近，我们需要若干概念和辅助结果。

**定义 3.2**。 设 $h\colon Z \to X$ 是记号 3.1 中的浸没，且 $k$ 是一个正整数或 $k=\infty$。

**(i)** 对于 $h\colon Z \to X$，一个 *$k$-regulous* 喷射是一个三元组 $(E,\ p,\ s)$，其中 $p\colon E \to Z$ 是 $Z$ 上的代数向量丛，且 $s\colon E \to Z$ 是一个 $k$-regulous 映射，使得

$$s(E_z) \subseteq h^{-1}(h(z)) \quad \text{and} \quad s(0_z) = z \quad \text{for all } z \in Z.$$

**(ii)** 若 $k$-正则喷射 $(E,\ p,\ s)$ 满足 $h\colon Z \to X$，且导数 $d_{0_z}s\colon T_{0_z}E \to T_z Z$ 将 $T_{0_z}E$ 的子空间 $E_z = T_{0_z}E_z$ 映射到 $V(h)_z$ 上，则称其为支配的，也就是说，

$$d_{0_z}s(E_z) = V(h)_z \quad \text{for all } z \in Z.$$

(iii) 若浸没 $h\colon Z \to X$ 存在一个支配的 $k$-正则喷射，则称其为 $k$-可变形。

为简单起见， $\infty$-regulous 喷射、支配性 $\infty$-regulous 喷射和 $\infty$-可变形浸没分别称为喷射、支配性喷射和可变形浸没。

注意，若将 $X$ 缩减为一个点，则定义 3.2 与定义 2.4 一致。由于 $\infty$-regulous 映射是正则的，因此上文定义 3.2 中的喷射、支配喷射和可变形浸没概念，与 [14, 定义 3.2] 中的概念相同。关于 $h\colon Z \to X$ 的支配性喷射的基本性质已在 [14, 第 3] 节中确立。考虑到所有必要的修改后，我们将在接下来的引理中证明 $k$-regulous 喷射的类似结果。

**引理 3.3.** 设 $h\colon Z \to X$ 为记号 *3.1* 中的浸没，且 $k$ 为正整数或$k=\infty$。若浸没 $h\colon Z \to X$ 是 $k$-可变形的，则它存在一个支配性的 $k$-*regulous* 喷射$(E, p, s)$，使得 $p\colon E = Z \times \mathbb{R}^n \to Z$ 是乘积向量丛。

证明。 设 $(E, \tilde{p}, \tilde{s})$ 是 $h\colon Z \to X$ 的一个支配的 $k$-regulous 喷射。选取一个非负整数 $n$，以及一个满射代数态射 $\alpha\colon E \to E$，它从乘积向量丛$p\colon E = Z \times \mathbb{R}^n \to Z$映到 $\tilde{p}\colon E \to Z$。由推论 2.3，映射 $s\colon E \to Z$, $s(z,v) = \tilde{s}(\alpha(z,v))$ 是 regulous 的，因此 $(E, p, s)$ 是 $h\colon Z \to X$ 的一个支配的 $k$-regulous 喷射。 □

**引理 3.4**。 设 $h\colon Z \to X$ 是记号 *3.1* 中的浸没，且 $k$ 是一个正整数或$k=\infty$。假设 $(E, p, s)$ 是 $h\colon Z \to X$ 的一个支配的 $k$-*regulous* 喷射。设 $U$ 是 $X$ 的一个开子集，并设 $F\colon U \times [0,1] \to Z$ 是 $h\colon Z \to X$ 的一个 $C^k$ 截面同伦。设 $U_0$ 是 $X$ 的一个开子集，其闭包 $U_0$ 是紧的，且包含于 $U$ 中。设 $t_0$ 是 $[0,1]$ 中的一个点。则存在 $[0,1]$ 中 $t_0$ 的一个邻域 $I_0$，以及一个连续映射$\xi\colon X \times I_0 \to E$，使得

(3.4.1) $p(\xi(x,t)) = F(x,t_0)$ *for all* $(x,t) \in U_0 \times I_0$,

(3.4.2) $\xi(x, t_0) = 0_{F(x,t_0)}$ 对所有 $x \in U_0$,

(3.4.3) $s(\xi(x,t)) = F(x,t)$ *for all* $(x,t) \in U_0 \times I_0$,

(3.4.4) 对于每个 $t \in I_0$，映射 $U_0 \to E$, $x \mapsto \xi(x,t)$ 属于 $C^k$类。

证明。 考虑 $C^{k-1}$ 态射

$$\alpha\colon E \to V(h), \quad v \mapsto d_{0_{p(v)}} s(v)$$

代数向量丛（按惯例， $\infty - 1 = \infty$）。由于 $\alpha$ 是满射态射，其核 $K$ 是 $E$的一个 $C^{k-1}$ 向量子丛。因此，对于某个 $E$的 $C^{k-1}$ 向量子丛 $E'$， $E$ 可以写成直和$E = E' \oplus K$。限制 $\alpha|_{E'}\colon E' \to V(h)$是向量丛的 $C^{k-1}$ 同构，因此我们可以选取一个 $C^{k-1}$ 态射 $\beta\colon V(h) \to E$，它将 $V(h)$同构映到 $E'$上。设 $\varphi$ 为由 $\beta$确定的代数向量丛 $\mathrm{Hom}(V(h), E)$的全局 $C^{k-1}$ 截面。若 $\psi$是 $\mathrm{Hom}(V(h), E)$的一个 $C^k$截面，且在强 $C^0$ 拓扑下充分接近 $\varphi$（强 $C^0$拓扑的定义见 [32,第 35]页），则与 $\psi$对应的 $C^k$态射 $\gamma\colon V(h) \to E$是单射，并且 $\gamma$的像是 $p\colon E \to Z$ 的一个 $C^k$向量子丛 $\hat{}p\colon \hat{}E \to Z$，满足 $E = \hat{}E \oplus K$。根据构造，限制 $\alpha|_{\hat{E}}\colon \hat{}E \to V(h)$是 $C^{k-1}$ 同构。

设 $f\colon U \to Z$是由 $f(x) = F(x,\ t_0)$对所有 $x \in U$定义的 $h\colon Z \to X$的一个$\mathcal{C}^k$截面。$\hat{}$ 记 $p_f\colon E_f \to U$为向量丛 $\hat{}p\colon E \to Z$在映射 $f$下的拉回。回忆一下， $p_f\colon \hat{} E_f \to U$ 是一个$\mathcal{C}^k$向量丛，其中

$$\hat{E}_f \coloneqq \{(x,v) \in U \times \hat{E} : f(x) = \hat{p}(v)\}, \quad p_f(x,v) = x.$$

注意

$$s_f\colon E_f \to Z, \quad s_f(x,v) = s(v)$$

是一个$\mathcal{C}^k$ 映射。

设 $x \in U_0$。纤维（$\hat{}E_f$）$_x$中的零向量是（$x$， $0_{f(x)}$），其中 $0_{f(x)}$是纤维 $\hat{}\ E_{f(x)}$中的零向量。由于 $s_f(x,\ 0_{f(x)}) = s(0_{f(x)}) = f(x)$，可知 $s_f$在零截面 $Z(\hat{}E_f)$ 与 $f(U)$ 之间诱导了一个$\mathcal{C}^k$微分同胚。此外，导数

$$d_{(x,0_{f(x)})}s_f\colon T_{(x,0_{f(x)})}\hat{E}_f \to T_{f(x)}Z$$

是一个同构，因为

$$d_{0_z}s|_{\hat{E}_z} = \alpha|_{\hat{E}_z}\colon \hat{E}_z \to V(h)_z$$

对所有 $z \in Z$，它都是一个同构。因此， $s_f$ 在点（$x, 0_{f(x)}$）处是局部微分同胚。于是，由 $[18, (12.7)]$, 可知，存在零截面$Z(\hat{}E_f)$的一个开邻域 $M \subseteq \hat{}E_f$，以及 $f(U)$ 的一个开邻域 $N \subset Z$，使得限制 $\sigma\colon M \to N$of$s_f\colon \hat{} E_f \to Z$ 是一个 $\mathsf{C}^k$ 微分同胚。由于 $U_0$ 是 $U$ 的紧子集，我们可以在 $[0,1]$ 中选取 $t_0$的一个开邻域 $I_0$，使得对所有 $t \in I_0$， $F_t(U_0)$ $\subseteq N$。因此，对于每个 $t \in I_0$，都存在唯一的 $\mathsf{C}^k$ 映射 $\zeta_t\colon U_0 \to \hat{}E_f$，满足 $\zeta_t(U_0) \subseteq M$ 且对所有 $x \in U_0$都有 $F_t(x) = \sigma(\zeta_t(x))$。我们有 $\zeta_t(x) = (\alpha_t(x)\ \xi_t(x))$，其中 $\alpha_t\colon U_0 \to U$ 和 $\xi_t\colon U_0 \to \hat{}E \subseteq E$是 $\mathsf{C}^k$ 映射，且

$$f(\alpha_t(x)) = \hat{p}(\xi_t(x)) = p(\xi_t(x)) \quad \text{and} \quad s(\xi_t(x)) = F_t(x).$$

由定义 3.2(i)， $s(\xi_t(x)) \in h^{-1}(h(p(\xi_t(x))))$，因此

$$h(s(\xi_t(x))) = h(f(\alpha_t(x))) = \alpha_t(x).$$

另一方面，

$$h(s(\xi_t(x))) = h(F_t(x)) = x.$$

因此， $\alpha_t(x) = x$。由此可得， $\zeta_t\colon U_0 \to \hat{}E_f$ 是向量丛 $p_f\colon \hat{} E_f \to X$ 在 $U_0$ 上的一个 $\mathcal{C}^k$ 截面。显然， $\zeta_{t_0}(U_0) \subseteq Z(\hat{}E_f)$。此外，映射

$$\zeta\colon U_0 \times I_0 \to \hat{E}_f, \quad (x,t) \mapsto \zeta_t(x)$$

是连续的。注意， $\zeta(x,\ t) = (x,\ \xi(x,\ t))$，其中

$$\xi\colon U_0 \times I_0 \to \hat{E} \subseteq E, \quad (x,t) \mapsto \xi_t(x)$$

是一个连续映射，且对于所有 $(x,\ t) \in U_0 \times I_0$， $p(\xi(x,\ t)) = f(x) = F(x,\ t_0)$。根据构造，映射 $\xi$ 满足条件 (3.4.1)–(3.4.4)。 □

关键引理如下。

引理 *3.5.* 假设记号 *3.1* 中的浸没 $h\colon Z \to X$ 是 $k$-可变形的，其中 $k$ 是非负整数或 $k=\infty$。设 $U$ 是 $X$ 的一个开子集，且 $F\colon U\times[0,1]\to Z$ 是 $h\colon Z\to X$ 的 $C^k$ 截面的一个同伦。设 $U_0$ 是 $X$ 的一个开子集，其闭包 $U_0$ 是紧的，且包含于 $U$。那么存在一个支配的 $k$-*regulous* 喷射（$E,p,s$），对应于 $h\colon Z\to X$，以及一个连续映射 $\xi\colon U_0\times[0,1]\to E$，使得 $p\colon E=Z\times\mathbb{R}^n\to Z$ 是乘积向量丛，并且对所有 $(x,t)\in U_0\times[0,1]$，都有 $\xi(x,t)=(F(x,0)\ \eta(x,t))$，其中映射 $\eta\colon U_0\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$ 满足

(3.5.1) $\eta(x,0)=0$ 对所有 $x\in U_0$ 均成立，

(3.5.2) $s(F(x,0),\eta(x,t))=F(x,t)$ *for all* $(x,t)\in U_0\times[0,1]$,

(3.5.3) 对于每个 $t\in[0,1]$，映射 $U_0\to\mathbb{R}^n$, $x\mapsto\eta(x,t)$ 属于 $C^k$ 类。

证明。 由引理 3.3，浸没 $h\colon Z\to X$ 存在一个支配的 $k$-regulous 喷射 $\tilde{}$ $\tilde{}(E,\tilde{p},\tilde{s})$，使得 $\tilde{p}\colon E=Z\times\mathbb{R}^m\to Z$ 是乘积向量丛。由引理 3.4 以及区间 $[0,1]$ 的紧致性（参见紧致度量空间 [17, 第 28 页上的 Lebesgue 引理，引理 9.11]），存在 $[0,1]$ 的一个划分 $0=t_0<t_1<\cdots<t_r=1$，使得对于每个 $i=1,\dots,r$，都存在连续映射 $\xi^i\colon U_0\times[t_{i-1},t_i]\to\tilde{E}$，满足以下性质：

- $\xi^i(x,t)=(F(x,t_{i-1})\ \eta^i(x,t))$ 对所有 $(x,t)\in U_0\times[t_{i-1},t_i]$,
- $\eta^i(x,t_{i-1})=0$ 对所有 $x\in U_0$,
- $\tilde{s}(F(x,t_{i-1})\ \eta^i(x,t))=F(x,t)$ 对所有 $(x,t)\in U_0\times[t_{i-1},t_i]$,
- 对于每个 $t\in[t_{i-1},t_i]$，映射 $U_0\to\mathbb{R}^m$, $x\mapsto\eta^i(x,t)$ 属于类 $C^k$.

对于 $i=1,\dots,r$，我们递归地定义一个支配的 $k$-regulous 喷射 $(E^{(i)},p^{(i)},s^{(i)})$，其定义在$h$ 上：$Z\to X$ 通过

$$(E^{(i)},p^{(i)},s^{(i)})=(\tilde{E},\tilde{p},\tilde{s})\quad\text{if } i=1,$$

而对于 $i\geq 2$，我们要求

$$p^{(i)}\colon E^{(i)}=Z\times(\mathbb{R}^m)^i\to Z$$

作为乘积向量丛，并令

$$s^{(i)}\colon E^{(i)}\to Z,\quad s^{(i)}(z,v_1,\dots,v_i)=s^{(1)}(s^{(i-1)}(z,v_1,\dots,v_{i-1}),v_i),$$

其中 $z\in Z$和 $v_1,\dots,v_i\in\mathbb{R}^m$（映射 $s^{(i)}$ 由推论 2.3 可知是 $k$-regulous）.

特别地，$(E,p,s):=(E^{(r)},p^{(r)},s^{(r)})$ 是 $h\colon Z\to X$ 的一个支配的 $k$-regulous 喷射。注意，$p\colon E=Z\times\mathbb{R}^n\to Z$是乘积向量丛，且 $\mathbb{R}^n=(\mathbb{R}^m)^r$。现在，考虑一个映射

$$\xi\colon U_0\times[0,1]\to E,\quad \xi(x,t)=(F(x,0),\eta(x,t)),$$

其中 $\eta\colon U_0\times[0,1]\to\mathbb{R}^n=(\mathbb{R}^m)^r$ 定义为

$$\eta(x,t)=(\eta^1(x,t),0,\dots,0)$$

对所有 $(x,t)\in U_0\times[t_0,t_1]$，并且

$$\eta(x,t)=(\eta^1(x,t_1),\dots,\eta^{i-1}(x,t_{i-1}),\eta^i(x,t),0,\dots,0)$$

对所有 $(x,t)\in U_0\times[t_{i-1},t_i]$ 且 $i=2,\dots,r$。容易验证，$\eta$是定义良好的连续映射，并满足 (3.5.1)–(3.5.3)。 □

现在我们准备证明以下关于截面的逼近结果。

**定理 3.6.** 假设记号 *3.1* 中的浸没 $h\colon Z \to X$ 是 $k$-可变形的，其中 $k$ 是非负整数或 $k=\infty$。令 $U$ 为 $X$ 的一个开子集，并令 $f\colon U \to Z$ 为 $h\colon Z \to X$ 的一个 $\mathcal{C}^k$ 截面，它通过 $\mathcal{C}^k$ 截面与全局 $k$-正则截面 $f_0\colon X \to Z$ 的限制 $f_0|_U$ 同伦。那么， $f$ 可以由全局 $k$-正则截面逼近。

证明. 令 $F\colon U \times [0,1] \to Z$ 为一条由 $\mathcal{C}^k$ 截面组成的同伦，使得 $F_0 = f_0|_U$ 和 $F_1 = f$。令 $U_0$ 为 $X$ 的一个开子集，其闭包 $U_0$ 是紧的且包含于 $U$ 中，并令 $(E, p, s)$, $\xi\colon U_0 \times [0,1] \to E$, $\xi(x,t) = (F(x,0)\ \eta(x,t))$, $\eta\colon U_0 \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 如引理 3.5 所述。特别地，我们有

$$s(f_0(x), \eta(x,1)) = s(F(x,0), \eta(x,1)) = F(x,1) = f(x) \quad \text{for all } x \in U_0.$$

根据魏尔斯特拉斯逼近定理，存在正则映射 $\beta\colon X \to \mathbb{R}^n$ ，使得限制 $\beta|_{U_0}$ 在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下可任意逼近 $\mathcal{C}^k$ 映射 $\eta_1\colon U_0 \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \eta(x,1)$。接着

$$g\colon X \to Z, \quad x \mapsto s(f_0(x), \beta(x))$$

是一个 $k$-regulous 映射（由推论 2.3 可知），使得 $g|_{U_0}$ 在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下接近 $f|_{U_0}$ 。此外，根据定义 3.2(i)， $g\colon X \to Z$ 是 $h\colon Z \to X$ 的截面。由于 $U_0$ 是任意选取的，证明完成。 □

我们还有定理 3.6 的如下变体。

**定理 3.7**。 假设记号 *3.1* 中的浸没 $h\colon Z \to X$ 是可变形的。设 $\mathcal{X}$ 是 $X$ 的一个分层，且 $k$ 是一个正整数或 $k=\infty$。设 $U$ 是 $X$ 的一个开子集，并设 $f\colon U \to Z$ 是 $h\colon Z \to X$ 的一个 $\mathcal{C}^k$ 截面，它与全局 $(k, \mathcal{X})$-正则截面 $f_0\colon X \to Z$ 的限制 $f_0|_U$ 通过 $\mathcal{C}^k$ 截面同伦。则 $f$ 可在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下由全局 $(k, \mathcal{X})$-正则截面逼近。

证明。 令 $F\colon U \times [0,1] \to Z$ 为一个 $\mathcal{C}^k$ 截面的同伦，使得 $F_0 = f_0|_U$ 和 $F_1 = f$。令 $U_0$ 为 $X$ 的一个开子集，其闭包 $U_0$ 是紧的且包含于 $U$ 中，并令 $(E, p, s)$, $\xi\colon U_0 \times [0,1] \to E$, $\xi(x,t) = (F(x,0)\ \eta(x,t))$, $\eta\colon U_0 \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 如引理 3.5 中所述（取 $k=\infty$，此时 $s\colon E \to X$ 是正则映射）。特别地，我们有

$$s(f_0(x), \eta(x,1)) = s(F(x,0), \eta(x,1)) = F(x,1) = f(x) \quad \text{for all } x \in U_0.$$

根据魏尔斯特拉斯逼近定理，存在正则映射 $\beta\colon X \to \mathbb{R}^n$ ，使得限制 $\beta|_{U_0}$ 与 $\mathcal{C}^k$ 映射 $\eta_1\colon U_0 \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \eta(x,1)$ 任意接近（在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑中）。于是

$$g\colon X \to Z, \quad x \mapsto s(f_0(x), \beta(x))$$

是一个 $(k, \mathcal{X})$-正则映射，且 $g|_{U_0}$ 在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下接近 $f|_{U_0}$。此外，根据定义 3.2(i)， $g\colon X \to Z$ 是 $h\colon Z \to X$ 的一个截面。由于 $U_0$ 是以任意方式选取的，证明完毕。 □

最　　取 $U = X$ 可得到定理 3.6 和 3.7 的重要特例。

# 4 应用

为了讨论定理 3.6 和 3.7 的应用，我们需要以下观察。

**引理 4.1.** 设 $X$、$Y$ 为非奇异实代数簇，且 $k$ 为正整数或 $k=\infty$。假设簇 $Y$ 是 $k$-可变形的。那么典范投影

$$h\colon X\times Y\to X,\quad (x,y)\mapsto x$$

是 $k$-可变形浸没。

证明. 设 $(E,p,s)$ 是 $Y$ 的支配 $k$-regulous 喷射。我们得到 $h$ 的支配 $k$-$\tilde{}$ regulous 喷射 $(E,\tilde{p},\tilde{s})$：$X\times Y\to X$ 令

$$\begin{aligned}&\tilde{E}=\{((x,y),v)\in(X\times Y)\times E : y=p(v)\},\\&\tilde{p}\colon \tilde{E}\to X\times Y,\quad ((x,y),v)\mapsto(x,y),\\&\tilde{s}\colon \tilde{E}\to X\times Y,\quad ((x,y),v)\mapsto(x,s(v)).\end{aligned}$$

□

**定理 4.2.** 设 $X$、$Y$ 为非奇异实代数簇，且 $k$ 为正整数或 $k=\infty$。假设簇 $Y$ 是 $k$-可变形的。那么，对于 $\mathcal{C}^k$ 映射 $f\colon X\to Y$，以下条件等价：

(a) $f$ 可由 $k$-*regulous* 映射在 $\mathcal{C}^k$ 拓扑下逼近。

(b) $f$ 与一个 $k$-*regulous* 映射同伦。

证明。</*style*>由于 变形收缩到某个紧子集 *Corollary 9.3.*，因此 *(a)(b)* 成立；并且从 到 的任意两个在紧开拓扑下足够接近的连续映射都是同伦的（后一断言在 是任意$\mathcal{C}^\infty$ 流形时也成立）。

还需证明 (b)⇒(a)。为此，设 $\Phi\colon X\times[0,1]\to Y$ 是一个同伦，使得 $\Phi_0$ 是一个 $k$-regulous 映射，且 $\Phi_1=f$。我们可以假设 $\Phi$ 是一个 $\mathcal{C}^k$ 映射，参见 [55,Proposition 10.22 and its proof]。根据引理 4.1，典范投影 $h\colon X\times Y\to X$ 是 $k$-可变形的。由于

$$F\colon X\times[0,1]\to X\times Y,\quad (x,t)\mapsto(x,\Phi(x,t))$$

这是 $h\colon X\times Y\to X$ 的 $\mathcal{C}^k$ 截面之间的同伦，因此由定理 3.6 可知，$\mathcal{C}^k$ 截面

$$X\to X\times Y,\quad x\mapsto(x,f(x))$$

可由 $k$-regulous 截面在$\mathcal{C}^k$ 拓扑下逼近，因此 (a) 成立。 □

定理 *1.2* 的证明。 由推论 2.14 可知，簇 $Y$ 是 $k$-可变形的，因此只需应用定理 4.2。

□

定理 4.2 不仅蕴含定理 1.2，实际上还具有更一般的适用范围。事实上，正如例 2.6 中所述，如果 $G$ 是线性实代数群，那么任何良好的 $G$-空间 $Y$ 都是可变形簇。不过，$Y$ 也可能不是有理的。Olivier Benoist 和 Olivier Wittenberg 曾分别向我提及这一事实。

**定理 4.3.** 设 $X$、$Y$ 是非奇异实代数簇，$X$ 是 $X$ 的一个分层，且 $k$ 是正整数或 $k=\infty$。假设簇 $Y$ 可变形。那么，对于一个 $\mathcal{C}^k$ 映射 $f\colon X\to Y$，以下条件等价：

(a) $f$ 可由$(k, X)$-正则映射逼近。(b) $f$ 与一个$(k,$
$X)$- 正则映射同伦。

证明。 我们仿照定理 4.2 的证明，使用定理 3.7 而非定理 3.6。

□

正如例 2.6 中所述，单位球面是可塑簇，因此定理 4.3 立即推出如下结论。

**推论 4.4**。 设 $X$ 是非奇异实代数簇，$X$ 是 $X$ 的一个分层，$p$ 是非负整数，且 $k$ 是正整数或 $k=\infty$。那么，对于 $C^k$ 映射 $f\colon X \to \mathbb{S}^p$，以下条件等价:

（a） $f$ 可以由 （$k$，$X$）-正则映射逼近。

（b） $f$ 与一个 （$k$，$X$）-正则映射同伦。 □

接下来，我们证明第 1 节中宣布的关于由良好 $k$-regulous 映射进行逼近的结果。

定理 1.6 的证明。(a)⇒(b)。只需证明，任意 nice $k$-regulous 映射$g\colon X \to \mathbb{S}^p$ 都可以在 $C^k$ 拓扑下用适配的 $C^\infty$ 映射逼近。根据 Sard 定理，对于映射 $g|_{X\setminus P(g)}\colon X\setminus P(g) \to \mathbb{S}^p$，存在一个正则值 $y \in \mathbb{S}^p \setminus g(P(g))$。利用单位分解和径向投影 $\mathbb{R}^{p+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{S}^p$，我们很容易构造出一个 $C^\infty$映射 $\tilde{g}\colon X \to \mathbb{S}^p$，它在 $C^k$ 拓扑下任意接近 $g$，并且满足 $\tilde{g}^{-1}(y) = g^{-1}(y)$，且在 $g^{-1}(y)$ 的某个邻域内$\tilde{g} = g$。根据构造， $\tilde{g}^{-1}(y)$ 是 $X$ 的非奇异扎里斯基局部闭子集，因此映射 $\tilde{g}$ 是适配的。

(b)⇒(a)。我们的论证基于推论 4.4，因此为处理情形 $k=0$，我们选取一个整数 $l > k$。不妨设 $C^\infty$ 映射 $f$ 是适配的。令 $y_0 \in \mathbb{S}^p$ 为 $f$ 的一个正则值，使得 $f^{-1}(y_0)$ 是 $X$ 的非奇异扎里斯基局部闭子集。根据 $[40,$ 定理 2.4 和 2.5$]$,，存在一个 nice $l$-regulous 映射 $\varphi$: $X \to \mathbb{S}^p$，与 $f$ 同伦，并满足 $\varphi^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0)$ 以及 $\varphi(P(\varphi)) \subseteq \{-y_0\}$。显然，

$$f(P(\varphi)) \subset \mathbb{S}^p \setminus \{y_0\}.$$

利用引理 2.2(ii)，我们选取 $X$ 的一个分层 X，使得 $X\setminus P(\varphi)$ 是 X 中的一层，且映射 $\varphi$ 是 (l, X)-正则的。根据推论 4.4， $f$ 可由 (l, X)-正则映射在 $C^l$ 拓扑下逼近。因此， $f$ 可由 (k, X)-正则映射在 $C^k$ 拓扑下逼近。若 $\tilde{f}$: $X \to \mathbb{S}^p$ 是一个在 $C^k$ 拓扑下接近 $f$ 的 (k, X)-正则映射，则

~ ~ ~f(P(φ)) ⊂ S^p \ {y_0}。由于 P(f) ⊆ P(φ)，映射 f 是 k-regulous 且良好的，因此 (a) 成立。

(c)由⇒(b)推出。证明中不妨设映射 $f$ 是弱适配的。设 $z_0 \in \mathbb{S}^p$ 是 $f$ 的一个正则值，使得 $X$ 中的 $C^\infty$ 子流形 $f^{-1}(z_0)$ 具有弱代数逼近。由此可知， $f^{-1}(z_0)$ 可通过任意小的 $C^\infty$ 同伦，在 $X$ 中同伦等价于 $X$ 的一个非奇异扎里斯基局部闭子集 $Z$。这种同伦可以延拓为 $X$ 的一个 $C^\infty$ 环境同伦，且在空间 $C^\infty(X, X)$ 中接近 $X$ 的恒等映射，参见 $[32,$ 第 179 页，$180]$。因此，存在一个 $C^\infty$ 微分同胚 $\sigma\colon X \to X$，使得 $\sigma(f^{-1}(z_0)) = Z$，且复合映射 $f \circ \sigma^{-1}$ 在 $C^k$ 拓扑下接近 $f$。根据构造， $z_0$ 是 $C^\infty$ 映射 $f \circ \sigma^{-1}$ 的一个正则值，并且 $(f \circ \sigma^{-1})^{-1}(z_0) = Z$。因此，映射 $f \circ \sigma^{-1}$ 是适配的，证毕。

证明完成，因为蕴含关系 (b)⇒(c) 显而易见。 □

*Pr*定理 *1.9* 的证明。 (d)⇒(a)。设 $M$ 为 $X$中的一个紧$\mathcal{C}^\infty$ 子流形，wit h

$$2\dim M + 1 \leq \dim X,$$

使包含映射 $i$: $M$ , $\to X$ 的无定向配边类是代数的，也就是说，它可由一个从紧致非奇异实代数簇到 $X$ 的正则映射表示。根据 Benoist 定理 [2, 定理 2.7]， $M$ 在 $X$ 中存在代数逼近，也就是说，对于空间 $\mathcal{U}$ $i$ 的每个邻域，在空间 $\mathcal{C}^\infty(M,\ X)$ 中都存在一个 $\mathcal{C}^\infty$ 嵌入 $e$: $M \to X$，且其值位于 $\mathcal{U}$ 中，使得 $e(M)$ 是 $X$ 的非奇异 Zariski 闭子集（特别地，$M$ 在 $X$ 中存在弱代数逼近）。

现在假设 (d) 成立。根据 Sard 定理，存在 $f$ 的一个正则值 $y \in \mathbb{S}^p$。众所周知，由 $X$ 中的 $\mathcal{C}^\infty$ 子流形$f^{-1}(y)$ 表示的 $\mathbb{Z}/2$-同调类，是上同调类 $f^*(\sigma_p) \in H^p(X;\ \mathbb{Z}/2)$ 的庞加莱对偶，参见 [16, 命题 2.15]。因此，根据 [50,引理 2.3], ，包含映射 $f^{-1}(y) \to X$ 的无定向配边类是代数的。于是，根据上文提到的 Benoist 定理，$\mathcal{C}^\infty$ 子流形 $f^{-1}(y)$ 在 $X$ 中存在代数逼近。因此，$\mathcal{C}^\infty$ 映射 $f$ 是弱适配的，所以根据定理 1.6，条件 (a) 成立。

(c)⇒(d)。设 $g$: $X \to \mathbb{S}^p$ 是一个与 $f$ 同伦的良好 regulous 映射。取映射 $g|_{X\setminus P(g)}$: $X \setminus P(g) \to \mathbb{S}^p$ 的正则值 $z \in \mathbb{S}^p \setminus g(P(g))$。显然， $X$ 中的紧 $\mathcal{C}^\infty$ 子流形 $g^{-1}(z)$ 是一个非奇异扎里斯基局部闭子集。由 $g^{-1}(z)$ 表示的 $\mathbb{Z}/2$-同调类与上同调类 $g^*(\sigma_p) \in H^p(X;\ \mathbb{Z}/2)$ 庞加莱对偶。我们有 $f^*(\sigma_p) = g^*(\sigma_p)$，因为映射 $f, g$ 同伦。由此可知，上同调类 $f^*(\sigma_p)$ 是适配的，因此 (d) 成立。

由于蕴含关系 (a)⇒(b) 和 (b)⇒(c) 显然，证明完成。 □

**致谢**。 作者部分工作得到了波兰国家科学中心的支持，资助编号 2018/31/B/ST1/01059。

# 参考文献

[1] S. Akbulut 和 H. King, 《用代数集逼近子流形及纳什猜想的一个解》, 《数学发明》107（1992）, 87–97。[2] O. Benoist, 《实代数簇实点集非奇异的子簇》, arXiv:2005.06424, 即将在《几何与拓扑》发表。[3] O. Benoist 和 O. Wittenberg, 《紧逼近性质》, 《纯粹与应用数学杂志》776（2021）, 151–200。[4] M. Bilski、W. Kucharz、A. Valette 和 G. Valette, 《向量丛与 regulous 映射》, 《数学杂志》275（2013）, 403–418。[5] J. Bochnak、M. Coste 和 M.-F. Roy, 《实代数几何》, 《数学与相关领域成果丛书》第36卷, 施普林格, 1998。[6] J. Bochnak 和 W. Kucharz, 《映入球面的映射的代数逼近》, 《密歇根数学杂志》34（1987）, 119–125。[7] J. Bochnak 和 W. Kucharz, 《由代数映射实现同伦类》, 《纯粹与应用数学杂志》377（1987）, 159–169。

[8]J. Bochnak 和 W. Kucharz，《映入偶数维
球面，《数学年刊》128（1988），415–433。[9] J. Bochnak 和 W. Kucharz，光滑流形的代数模型，《数学发明》97（1989），585–611。[10] J. Bochnak 和 W. Kucharz，椭圆曲线与实代数态射，《代数几何杂志》2（1993），635–666。[11] J. Bochnak 和 W. Kucharz，实代数簇之间映射的魏尔斯特拉斯逼近定理，《数学年刊》314（1999），601–612。[12] J. Bochnak 和 W. Kucharz，光滑映射的代数逼近，《雅盖隆大学数学学报》48（2010），9–40。[13] J. Bochnak、W. Kucharz 和 R. Silhol，实代数几何中的态射、线丛与模空间，《高等科学研究所数学出版物》86（1997），5–65。勘误见《高等科学研究所数学出版物》92（2000），195。[14] J. Bochnak 和 W. Kucharz，关于映入实齐性空间的映射的逼近，附录作者：J. Kollár，《纯粹与应用数学杂志》161（2022），111–134。[15] F. Bogomolov 和 C. Böhning，关于一致有理簇，载于：《拓扑学、几何学、可积系统与数学物理》，第234卷，美国数学会，2014，第33–48页。[16] A. Borel 和 A. Haefliger，解析空间的基本同调类，《法国数学会通报》89（1961），461–513。[17] G.E. Bredon，《拓扑学与几何学》，施普林格，1993。[18] T. Bröcker 和 K. Jänich，《微分拓扑学导论》，剑桥大学出版社，剑桥，1982。[19] A. Comessatti，关于实有理曲面的连通性，《纯粹与应用数学年刊》23（1914），215–283。[20] A. Czarnecki，regulous 函数的极大理想不是有限生成的，《纯粹与应用代数杂志》223（2019），1161–1166。[21] J. Fernando、G. Fichou、R. Quarez 和 C. Ueno，关于欧几里得空间的regulous像与正则像，《数学季刊》69（2018），1327–1351。[22] G. Fichou、J. Huisman、F. Mangolte 和 J.-P. Monnier，regulous 函数，《纯粹与应用数学杂志》718（2016），103–151。[23] G. Fichou、J.-P. Monnier 和 R. Quarez，经过一次爆破后变为正则的平面连续函数，《数学杂志》285（2017），287–323。[24] G. Fichou、J.-P. Monnier 和 R. Quarez，连续有理函数环的代入性质，《奇点——鹿儿岛 2017》，第五届法日越奇点研讨会论文集，第71–93页，世界科学出版社（2020）。

[25] G. Fichou、J.-P. Monnier 和 R. Quarez，实代数几何中的弱正规化与半正规化，《比萨高等师范学院科学年鉴》22（3）（2021），1511–1558。[26] G. Fichou、J.-P. Monnier 和 R. Quarez，实代数几何中的整闭包，《代数几何杂志》30（2021），253–285。[27] F. Forstnerič，《Stein流形与全纯映射：复分析中的同伦原理》，第二版，《数学与相关领域成果》56卷，施普林格，尚，2017。[28] R. Ghiloni，关于映入一般实代数簇的态射空间，《比萨高等师范学院科学年鉴》（第5辑）5（2006），419–438。[29] R. Ghiloni，实代数几何中的刚性与模空间，《数学年刊》335（2006），751–766。[30] R. Ghiloni，实代数流形上的二阶同调障碍，《拓扑学及其应用》154（2007），3090–3094。[31] M. Gromov，椭圆丛全纯截面的冈原原理，美国数学会杂志 2（1989），851–897。[32] M.W. Hirsch，《微分拓扑学》，GTM 33，施普林格，纽约，1997。[33] N.V. Ivanov，用实代数集逼近光滑流形，《俄罗斯数学调查》37:1（1982），1–59。[34] N. Joglar-Prieto，有理曲面与映入二维球面的正则映射，《数学杂志》234（2000），399–405。[35] N. Joglar-Prieto 和 F. Mangolte，实代数态射与二次德尔佩佐曲面，《代数几何杂志》13（2004），269–285。[36] J. Kollár，《实代数簇的拓扑》，载于：《数学当前进展，2000》，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2001，第197–231页。[37] J. Kollár、W. Kucharz 和 K. Kurdyka，曲线有理函数，《数学年刊》370（2018），39–69。[38] J. Kollár 和 K. Nowak，实代数簇和 $p$进代数簇上的连续有理函数，《数学杂志》279（2015），85–97。[39] W. Kucharz，映入有理实代数曲面的代数态射，《代数几何杂志》8（1999），369–379。[40] W. Kucharz，实代数几何中的有理映射，《几何学进展》9（2009），517–539。[41] W. Kucharz，光滑流形代数模型上的复循环，《数学年刊》346（2010），829–856。[42] W. Kucharz，正则有理映射与连续有理映射，《拓扑学及其应用》160（2013），1375–1378。[43] W. Kucharz，用连续有理映射逼近映入球面的映射，《欧洲数学会杂志》16（2014），1555–1569。

[44] W. Kucharz, 《连续有理映射到单位二维球面》, 《巴塞尔数学档案》102（2014年）, 257–261。[45] W. Kucharz, 《关于分层代数向量丛的一些猜想》, 《奇点杂志》12（2015年）, 92–104。[46] W. Kucharz, 《连续有理映射到球面》, 《数学杂志》283（2016）, 1201–1215。[47] W. Kucharz, 《低秩分层代数向量丛》, 《巴塞尔数学档案》107（2016）, 239–249。[48] W. Kucharz, 《纳什规整函数》, 《波兰数学年刊》119（2017年）, 275–289。[49] W. Kucharz, 《关于连续有理函数》, 奇点——鹿儿岛2017, 《第五届法日越奇点研讨会论文集》, 第41–68页, 世界科学出版公司（2020年）。[50]W. Kucharz 和 K. Kurdyka, 《关于连续有理映射到球面的一些猜想》, 《拓扑学及其应用》208（2016）, 17–29。[51] W. Kucharz 和 K. Kurdyka, 《实代数曲面上的线性方程》, 《数学手稿》154（2017年）, 285–295。[52]W. Kucharz 和 M. Zieliński, 《规整向量丛》, 《数学通讯》291（2018年）, 2252–2271。[53] W. Kucharz 和 K. Kurdyka, 《分层代数向量丛》, 《纯粹与应用数学杂志》745（2018年）, 105–154。[54] W. Kucharz 和 K. Kurdyka, 《从连续有理函数到规整函数》, 《2018年里约热内卢国际数学家大会论文集》第二卷, 特邀报告, 第719–747页, 世界科学出版公司, 新泽西州哈肯萨克, 2018年。[55] J.M. Lee, 《光滑流形导论》, 施普林格, 2003年。[56] F. Mangolte, 《二维圆锥丛上的实代数态射》, 《几何学进展》6（2006）, 199–213。[57] F. Mangolte, 《实有理曲面》, 载于《实代数几何》, 《全景与综合》卷51, 2017年, 第1–26页。[58] F. Mangolte, 《实代数簇》, 施普林格数学专著, 施普林格国际出版公司（2020年）。[59] J.-P. Monnier, 《带有连续有理函数的半代数几何》, 《数学年刊》372（2018年）, 1041–1080。[60] Y. Ozan, 《实代数几何中的整有理映射》, 《密歇根数学杂志》42（1995）, 141–145。[61] Y. Ozan, 《带圆群作用的实代数簇的代数K理论》, 《纯粹与应用代数杂志》170（2002）, 287–293。[62] R. Silhol, 《实代数曲面》, 《数学讲义》卷1392, 施普林格, 柏林（1989年）。

[63] C.T.C. Wall，《微分拓扑学》，剑桥大学出版社，剑桥，2016。

[64] M. Zieliński，某些实代数映射的同伦性质，《同调、同伦及其应用》18（2016），287–294。

[65]M. Zieliński，利用 regulous 映射逼近球面间映射，《巴塞尔数学档案》110（2018年），29–34。

Wojciech Kucharz 雅盖隆大学数学与计算机科
学学院数学研究所 Łojasiewicza 6 30-348 克拉科
夫 波兰 电子邮箱:
Wojciech.Kucharz@im.uj.edu.pl