arXiv:2302.01064v1 [physics.flu-dyn] 2 Feb 2023

壳层模型中湍流的隐藏尺度不变性：从强迫尺度到耗散尺度

Alexei A. Mailybaev[1]

[1]纯应用数学研究所（*IMPA*），里约热内卢，巴西*

间歇性是理解充分发展流体动力学湍流小尺度动力学的核心障碍之一。现代研究方法主要基于帕里西和弗里施提出的多重分形理论，但该理论属于现象学理论。近期研究表明，间歇性可能与隐藏尺度不变性有关。后者是一种新的统计尺度变换对称性，在运动方程的重标度（投影）表述中不会被破坏。在本文中，我们研究一种湍流壳层模型，并描述隐藏对称性如何贯穿所有尺度，包括惯性区间以及向强迫区间和耗散区间的过渡。在惯性区间中，我们从隐藏对称性推导出反常标度律。随后，我们展示了在广泛的耗散尺度范围内，复杂的耗散区间形态如何受到间歇性重标度雷诺数的控制。采用一类特殊的耗散模型可以消除这种耗散间歇性。对于这类模型，隐藏尺度不变性在惯性区间和耗散区间内均得以恢复。总之，本文提出的方法从运动方程的隐藏标度对称性推导出多重分形理论及其若干基本结论。

I. 引言

在充分发展流体动力学湍流的平稳统计中，传统上将大尺度的强迫区间、极小尺度的耗散区间，以及两者之间的惯性区间区分开来 [14]。在惯性区间的尺度上，强迫和黏性力都可以忽略不计。这些区域的描述依赖于基础纳维–斯托克斯方程的尺度不变性。在不存在物理边界（或远离物理边界）的情况下，这些对称性表述为

$$t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \nu \quad \mapsto \quad \lambda^{1-h}t,\ \lambda\mathbf{x},\ \lambda^{h}\mathbf{u},\ \lambda^{1+h}\nu, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t)$ 是速度场，ν 是运动黏度。关系式（1）定义了一族由两个实参数 $\lambda > 0$ 和 $h \in \mathbb{R}$ 决定的时空尺度变换对称性。湍流理论面临的主要难题之一是，所有标度对称性（1）在

* alexei@impa.br

平稳统计中均遭到破坏，这与柯尔莫哥洛夫 1941 年理论（K41）最初依赖于 $h = 1/3$ [14, 18] 的自相似性假设相悖。

观测到的惯性区间统计特性表明，速度涨落的矩 δu_ℓ依赖于尺度 ℓ，呈幂律 $\langle \delta u_\ell^p \rangle \propto \ell^{\zeta_p}$形式。这些关系中的标度指数 ζ_p 对 p呈非线性依赖，这正是小尺度间歇性的表现。这种（所谓的反常）标度同样影响耗散区间 [15]的很大一部分。观测到的间歇性可以由帕里西–弗里施多重分形理论 [14, 33]成功描述，该理论将不同的分形维数分别与式（1）中的不同指数 h 联系起来。然而，这一理论属于现象学理论，即它并非由运动方程推导而来。

截至目前，三维不可压缩纳维–斯托克斯系统尚无法在极大雷诺数下进行数值模拟；例如参见 [17]。因此，人们高度重视简化的（玩具）模型，将其作为检验理论思想的试验场。壳层模型 [4, 16, 31]就是这样一类模型，能够成功描述湍流的间歇性特征；关于这一方向的一些相关研究，可参见 [2, 3, 12, 24, 36] 。在本文中，我们聚焦于最流行的壳层模型之一——Sabra 模型 [22]。

近期研究表明，结构函数的反常标度可由隐藏标度对称性的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征模态产生 [27]。这种新对称性对应于以动力学重标度速度和时间表示的理想流体动力学方程。从几何角度看，重标度过程是相空间中的一种投影，使新的对称性得以显现。与被破坏的标度对称性 (1) 不同，数值证据表明，在 Navier–Stokes 系统 [29] 和壳层模型 [25]中，惯性区间内都恢复了隐藏尺度不变性。新兴的隐藏对称性形式体系自然地将可追溯至柯尔莫哥洛夫 [2, 12, 19] 的自相似性思想与帕里西和弗里施的多重分形性 [28, 33]统一起来。

本文报告了这一方向上的进一步进展。首先，我们揭示了标度律的更多细节，包括隐藏对称性与反常耗散及多重分形谱之间的关系。然而，我们的核心目标是分析惯性区间与耗散区间（或强迫区间）之间的转变。我们认为，这种转变受隐藏对称态及其稳定性控制。例如，向强迫区间的转变由一个指数衰减模态所支配。耗散区间的情况则大不相同，因为重标度表述中的黏性项具有间歇性。这导致隐藏对称性在很大范围的尺度上逐渐破缺。最后，我们表明，间歇性耗散是运动方程中特定（黏性）耗散项造成的假象。我们引入了一类带有黏性截断的模型，在这类模型中，隐藏对称性可以

延伸至所有小尺度，包括耗散尺度。作为这种对称性的应用，我们推导出一种结构函数的函数形式，该形式在所有小尺度上均成立，涵盖惯性区间和耗散区间。

我们的总体结论是，隐藏对称性的概念为充分发展湍流的小尺度分析提供了坚实的理论基础。这种方法重新表述了 Kolmogorov 最初的思想（并验证了其新形式）：其中，$h = 1/3$标度对称性被隐藏尺度不变性所取代。

我们首先在第二节介绍 Sabra 壳层模型及其重标度版本。第三节定义并验证惯性区间中的隐藏标度对称性，并研究其对结构函数、能量通量和大偏差的影响。第四节运用隐藏对称性研究从强迫区间和耗散区间向惯性区间的过渡。第五节介绍一类黏性截断壳层模型，它们在耗散尺度上具有扩展形式的隐藏尺度不变性。最后，我们讨论所得结果及其对 Navier–Stokes 系统的适用性。一些技术性推导汇集在附录中。

II. 壳层模型及其重标度表示

湍流壳层模型使用空间尺度的几何序列 $\ell_n = 2^{-n}\ell_0$ 来模拟 Navier–Stokes 流，其中 ℓ_0 是积分尺度，n 是整数壳层编号。因此，大尺度对应于接近零的壳层编号，而小尺度则对应较大的壳层编号。相应的波数定义为 $k_n = 1/\ell_n = 2^n k_0$。不同尺度上的速度涨落 $\delta u(\ell_n)$ 由复变量 $u_n \in \mathbb{C}$ 表示，这些变量称为壳层速度。我们用$u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 表示完整的（双无限）状态向量。

A. 壳层模型方程与标度对称性

我们考虑积分尺度上的恒定强迫，并通过边界条件表示

$$u_0(t) \equiv u_0 > 0, \quad u_n(t) \equiv 0 \quad \text{for} \quad n < 0, \tag{2}$$

其中 u_0 是一个正实常数。Sabra 壳层模型 [22]的表述为 s

$$\frac{du_n}{dt} = k_0 \mathcal{B}_n[u] - \nu k_n^2 u_n, \quad n > 0, \tag{3}$$

其中 $\mathcal{B}_n[u]$是定义如下的二次型

$$\mathcal{B}_n[u] = i2^n \left(2u_{n+2}u_{n+1}^* - \frac{u_{n+1}u_{n-1}^*}{2} + \frac{u_{n-1}u_{n-2}}{4} \right), \tag{4}$$

且 $\nu \geq 0$ 是黏性参数。方程 (3) 中的二次项模拟了 Navier–Stokes 系统中的对流项和压力项。其设计旨在使壳层模型具有两个无黏不变量：能量 $\mathcal{E}[u] = \frac{1}{2}\sum_n |u_n|^2$ 和螺旋度 $\mathcal{H}[u] = \sum_n (-1)^n k_n |u_n|^2$，这与三维理想流体中的不变量类似 [22]。

无量纲雷诺数定义为 $\mathrm{R} = u_0 \ell_0 / \nu$。本文描述充分发展湍流状态，即雷诺数非常大时的平稳（长时间）统计特性。所谓非常大，是指 R 及其对数都很大。我们指出，极限 $\mathrm{R} \to \infty$ 通常作为黏度较小 $\nu \to 0$ 且 ℓ_0 和 u_0固定时的极限来研究。

可以看出，方程 (3)–(4) 在如下形式的时空缩放下保持不变

$$t,\ u_n,\ \nu \quad \mapsto \quad 2^{1-h}t,\ 2^h u_{n+1},\ 2^{1+h}\nu. \tag{5}$$

这里，指数 $h \in \mathbb{R}$ 定义了时间缩放的任意因子 2^{1-h}，而壳层编号的平移模拟了空间缩放，因为 $\ell_{n+1} = \ell_n/2$。因此，变换 (5) 生成了一个时空缩放对称群（空间上离散、时间上连续），类似于纳维–斯托克斯方程的时空尺度变换对称性 (1)。这些对称性在积分尺度 ℓ_0 处被边界条件 (2)破坏。

B. 重标度速度与时间

本文所发展的理论基于隐藏标度对称性。这种对称性不同于且弱于对称性 (5)，也就是说，即使所有对称性 (5) 都被破坏，它仍能在统计意义上恢复。如下文所述，当运动方程用重标度（投影）变量表示时，这种新的对称性便会出现。

我们固定一个参考壳层编号 $m \geq 0$。定义相应的状态依赖的速度振幅 $\mathcal{A}_m[u]$和时间尺度（周转时间） $\mathcal{T}_m[u]$为

$$\mathcal{A}_m[u] = \sqrt{\sum_{j\geq 0} \alpha^j |u_{m-j}|^2}, \quad \mathcal{T}_m[u] = \frac{\ell_m}{\mathcal{A}_m[u]}. \tag{6}$$

在这个表达式中，前因子 α^j 的作用是抑制远距离尺度（远大于 ℓ_m）的贡献，并确保振幅严格为正。正如我们在

第 IIIG 节所示，就我们的所有用途而言，选择 $0 < \alpha < 0.4$就足够了。我们在数值模拟中使用 $\alpha = 1/8$ 。

现在，我们以参考壳层 m 为基准对所有变量进行归一化；参见式 (6)。由此得到新的重标度速度 $U_N^{(m)}$，它们是内禀时间 $\tau_{(m)}$的函数，而该时间由下式隐式定义：

$$U_N^{(m)} = \frac{u_{m+N}}{\mathcal{A}_m[u]}, \quad d\tau^{(m)} = \frac{dt}{\mathcal{T}_m[u]}, \tag{7}$$

初始时刻 $\tau_{(m)}= 0$对应于 $t = 0$。我们将完整的（双无限）重标度状态记为 $U_{(m)}= \left(U_N^{(m)}\right)_{N\in\mathbb{Z}}$。

对于 $m = 0$ 和边界条件 (2)，我们得到 $\mathcal{A}_m[u] = u_0$ ，重标度变量则化为通常的无量纲形式 $U_N^{(0)} = u_N/u_0$ 和 $\tau_{(0)}= tu_0/\ell_0$。将式 (6)–(7) 用于 $m + 1$ ，可得

$$\mathcal{A}_{m+1}[u] = \sqrt{|u_{m+1}|^2 + \sum_{j\geq 1} \alpha^j |u_{m+1-j}|^2} = \sqrt{|u_{m+1}|^2 + \alpha\mathcal{A}_m^2[u]} = \mathcal{A}_m[u]\sqrt{\alpha + \left|U_1^{(m)}\right|^2} \tag{8}$$

因此，相应地有以下表达式

$$U_N^{(m+1)} = \frac{U_{N+1}^{(m)}}{\sqrt{\alpha + \left|U_1^{(m)}\right|^2}}, \quad d\tau^{(m+1)} = 2\sqrt{\alpha + \left|U_1^{(m)}\right|^2}\, d\tau^{(m)} \tag{9}$$

它们给出了不同参考壳层对应的重标度变量之间的关系。

利用式 (6)–(7) 可以验证，重标度速度满足恒等式

$$\mathcal{A}_0[U^{(m)}] = \sqrt{\sum_{j\geq 0} \alpha^j \left|U_{-j}^{(m)}\right|^2} = 1. \tag{10}$$

因此，速度变量的变换 (7) 可视为投影到超曲面 (10) 上；有关此类投影的一般理论（它们与时间缩放有关），请参见 [27] 。特别是，将原始速度 u 乘以任意正因子，都不会改变重标度速度 $U^{(m)}$。因此，这种重标度不可逆：无法仅用 $U^{(m)}$ 表示 u 。

我们指出，（6）中对 $\mathcal{A}_m[u]$ 的具体选择并非特别重要。事实上，对于一大类关于 $\mathcal{A}_m[u]$ 的正齐次尺度不变表达式，都可以写出隐藏对称性的等价表述；更多细节请参见 [27] 。

C. 重标度方程

进行变换（7）后，壳层模型方程（3）可写为以下形式（推导过程见 [11, 28] 和附录 VIIA）

$$\begin{aligned}\frac{dU_N^{(m)}}{d\tau^{(m)}} &= \mathcal{B}_N[U^{(m)}] - U_N^{(m)} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^j \mathrm{Re}\left(U_{-j}^{(m)*} \mathcal{B}_{-j}[U^{(m)}]\right) \\ &\quad - \frac{U_N}{\mathrm{R}_m[u]}\left(4^N - \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^j 4^{-j} |U_{-j}|^2\right), \quad N > -m.\end{aligned} \tag{11}$$

这里，Re(·) 表示实部，二次项 $\mathcal{B}_N[U]$ 由式（4）给出，我们将局部雷诺数引入为

$$\mathrm{R}_m[u] = \frac{\mathcal{A}_m[u]\ell_m}{\nu}. \tag{12}$$

An边界条件（2）的类似变换得到（见附录 VII A）

$$U_{-m}^{(m)} = \sqrt{\alpha^{-m} - \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^{j-m} \left|U_{-j}^{(m)}\right|^2}, \quad U_N^{(m)} = 0 \quad \text{for} \quad N < -m. \tag{13}$$

方程（11）–（13）定义了一个速度 $U_N^{(m)}$关于 $\tau^{(m)}$ 的重标度系统。注意，$\mathrm{R}_m[u]$ 并未用 $U^{(m)}$表示，即该重标度系统的黏性项并未用重标度变量表示。

III. 惯性区间中的间歇性

在对充分发展湍流的经典描述中，强迫仅作用于量级为 ℓ_0 的大尺度（强迫区间），而黏性效应只有在极小尺度（耗散区间）才变得显著 [14]。介于两者之间的尺度构成所谓的惯性区间，在此区间内，强迫和黏性效应都可以忽略不计。本节将确立惯性区间中的隐藏尺度不变性，并表明间歇性现象是这种新对称性的结果。因此，我们自然地将惯性区间认定为隐藏对称性在统计意义上恢复的尺度范围。随后，边界条件和黏性项会在强迫区间和耗散区间的尺度上破坏隐藏对称性。惯性区间的确切范围将在稍后的第四节中通过分析隐藏对称性破缺推导得出。这里先给出这一结果，并将惯性区间的尺度 ℓ_n 定义为

$$\mathrm{R}^{-\frac{1}{1+h_{\max}}} \ll \frac{\ell_n}{\ell_0} \ll 1, \tag{14}$$

其中，指数 $1/(1+h_{\max}) \approx 0.58$ 对应于隐藏对称态的最大 H¨older 指数 $h_{\max}$。

A. 隐藏尺度不变性

在本节中，我们假设所考虑的所有壳层编号都属于惯性区间。因此，我们忽略系统 (2)–(4) 中的黏性效应和强迫（边界）效应。我们将由此得到的方程组称为理想壳层模型，其形式为

$$\frac{du_n}{dt} = k_0 \mathcal{B}_n[u], \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

该系统模拟理想流体的欧拉方程。它的标度对称性形式如下

$$t,\ u_n \mapsto 2^{1-h} t,\ 2^h u_{n+1} \tag{16}$$

对任意 $h \in \mathbb{R}$ 均成立，这些对称性由式 (5) 得出，其中忽略了关于黏度的关系。

将系统 (15) 转换为重标度变量 (7) 的方程，得到 s

$$\frac{dU_N}{d\tau} = \mathcal{B}_N[U] - U_N \sum_{j\geq 0} \alpha^j \mathrm{Re}\left(U_{-j}^* \mathcal{B}_{-j}[U]\right), \quad N \in \mathbb{Z}, \tag{17}$$

该式由式 (11) 得出，其中略去了黏性项，并在求和中采用了边界（大尺度）极限。这里我们还（暂时）略去了上标 (m)，以强调重标度理想系统 (17) 不依赖于参考壳层的选择。因此，该系统具有一种对应于参考壳层平移的对称性：

$$m \mapsto m+1. \tag{18}$$

该对称性的显式形式可由关系式（9）导出：

$$U,\ \tau \ \mapsto\ \hat{U},\ \hat{\tau}, \tag{19}$$

其中，新的重标度状态ˆ $U = \left(\hat{U}_N\right)_{N\in\mathbb{Z}}$和时间ˆ$\tau$定义为

$$\hat{U}_N = \frac{U_{N+1}}{\sqrt{\alpha + |U_1|^2}}, \quad d\hat{\tau} = 2\sqrt{\alpha + |U_1|^2}\, d\tau. \tag{20}$$

在附录 VII B 中，我们明确证明了系统（17）关于变换（19）–（20）保持不变。这就是我们所称的隐藏标度对称性。

变换（19）–（20）的重要性质在于，它定义了一种统计对称性 [27]。重标度系统的统计性质通过重标度时间 τ 计算，并且可以使用平均可观测量（测试函数） $\varphi(U)$ 进行检验，形式如下

$$\langle \varphi(U) \rangle_\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(U(\tau))\, d\tau = \int \varphi(U)\, d\mu(U). \tag{21}$$

最后一个表达式包含统计稳态的概率测度 $d\mu(U)$。隐藏对称性变换 (19)–(20) 会改变统计特性，即将平稳概率测度 $\mu \mapsto \hat{}\mu$ 变换为另一测度。将 (19) 中的状态变换记为 $U = G(U)$，则利用标准动力系统分析，新的测度可表示为 [9]：

$$\hat{\mu} = G_\sharp \bar{\mu}, \quad d\bar{\mu}(U) = \frac{\sqrt{\alpha + |U_1|^2}}{\langle \sqrt{\alpha + |U_1|^2} \rangle_\mu}\, d\mu(U). \tag{22}$$

第一个表达式中的推前对应于状态的变化，而第二个表达式则反映了时间的变化；更多详情及精确的数学表述见 [27] 。如果概率测度在隐藏对称性变换下保持不变，我们就称隐藏对称性在统计意义上得以恢复。根据构造，这一性质意味着统计自相似性：重标度状态 $U^{(m)}$ 关于时间 $\tau^{(m)}$ 的统计特性不依赖于参考壳层 m。

变换 (19)–(20) 不依赖于参数 h ，因此它不等同于任何一种原有的标度对称性 (16)。特别是，即使所有原有的标度对称性 (16) 都被破坏，隐藏对称性仍可能在统计稳态下得以恢复。一般理论见 [25]，解析示例见 [26] 。对 [25, 28] 的数值模拟以及我们下文的结果，都有力支持以下猜想：在惯性区间内，重标度变量的统计特性恢复了隐藏对称性。下面我们将假设这一性质成立，并分析其对湍流动力学的影响。

B. 柯尔莫哥洛夫乘子的普适性

我们回到使用上标（m）表示重标度变量。在本小节中，我们考虑受 Kolmogorov 的思想 1962 [19]启发而提出的所谓柯尔莫哥洛夫乘子。对于壳层模型，这些乘子被定义为 [2, 12]中的比值 $|u_n/u_{n-1}|$ 。这些研究报告的数值结果表明，乘子的单时统计在惯性区间内与壳层编号 n 无关，这种普适性促成了隐藏对称性的首次表述 [25]。根据定义（7），乘子可用重标度变量表示为

变量

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \left|\frac{U_N^{(m)}}{U_{N-1}^{(m)}}\right|, \quad n = m + N. \tag{23}$$

作为统计隐藏对称性的结果，比例 $|U_N^{(m)}/U_{(m)N-1}|$ 作为 $\tau^{(m)}$ 的函数时，其统计性质不依赖于参考壳层 m。利用这一自相似性，可以证明乘子关于原始时间 t [29]的单时统计具有普适性（但多时统计不具有普适性）。

为满足我们的需要，我们将柯尔莫哥洛夫乘子推广定义为速度幅值之比： $\mathcal{A}_n[u]/\mathcal{A}_{n-1}[u]$。与式（23）相比，这一定义有若干优点，例如可以避免分母为零导致的问题。取 $n = m + N$，我们将广义乘子表示为重标度速度（7）的函数（见附录 VII C）：

$$\frac{\mathcal{A}_n[u]}{\mathcal{A}_{n-1}[u]} = \mathcal{X}_N[U^{(m)}], \quad n = m + N, \tag{24}$$

其中，函数 $\mathcal{X}_N[U]$ 定义为

$$\mathcal{X}_N[U] = \sqrt{\alpha + \frac{\alpha|U_N|^2}{\sum_{j\geq 1}\alpha^j|U_{N-j}|^2}}. \tag{25}$$

注意，所有 $\mathcal{X}_N[U] \geq \sqrt{\alpha}$。

我们通过对壳层模型（2）–（4）进行长时间数值模拟（$\mathrm{R} = 10^{10}$），数值验证了乘子（24）的统计隐藏尺度不变性；数值模拟的详情见附录 VII D。图 1(a) 展示了乘子 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$的概率密度函数（概率密度函数）准确地重合，其中选取了惯性区间（14）中部的壳层 $m = 7$、……、12。图 1(b) 展示了乘子 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}(\tau_{(m)})]$和 $x_1' = \mathcal{X}_1[U_{(m)}(\tau_{(m)}+1)]$ 在重标度时间间隔 $\Delta\tau_{(m)} = 1$ 处的双时联合概率密度函数也呈现类似的重合。我们强调，使用重标度时间 $\tau^{(m)}$ 对于多时统计的普适性至关重要。对于以原始时间 t为自变量的乘子，这种普适性并不成立。

C. 结构函数与标度律

结构函数是分析充分发展湍流间歇性的传统可观测量 [14]。对于壳层模型，结构函数通常定义为时间平均速度矩， $\langle|u_n|^p\rangle_t$ 对于 $p \in \mathbb{R}$。然而，这些平均值在 $p \leq -2$ 时会发散。在本小节中，我们考虑由式（6）给出的速度幅值矩 $\mathcal{A}_m[u]$ ，它们不会发散。其他形式的定义见第三节 E。

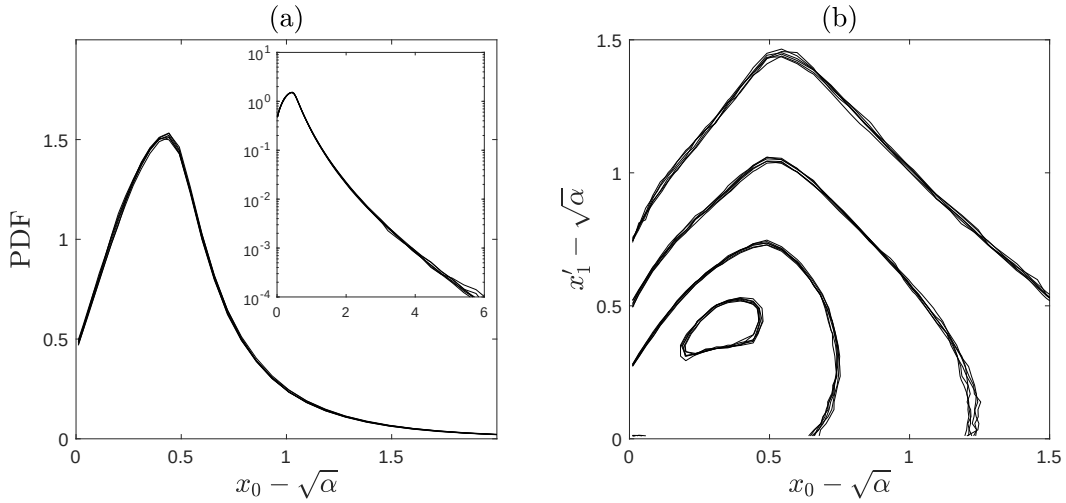

图1。（a）在惯性区间中部计算得到的壳层 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$ $m = 7$、.....、12 的乘子概率密度函数塌缩；插图以对数纵轴显示相同的图形。（b）乘子 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}(\tau_{(m)})]$ 和 $x_1' = \mathcal{X}_1[U_{(m)}(\tau_{(m)}+1)]$ 的联合双时概率密度函数等值线塌缩，其中 $m = 7$、.....、12。结果采用 $\mathrm{R} = 10^{10}$ 和 $T = 10^4$ 的数值模拟。为方便起见，我们从乘子坐标轴中减去了最小值 $\sqrt{\alpha}$ 。

—

我们将结构函数定义为

$$S_p(\ell_m) = \langle \mathcal{A}_m^p[u] \rangle_t \,, \quad p \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

其中， $\langle\cdot\rangle_t$ 表示关于时间 $t \geq 0$ 的平均值。数值检验表明，在 $t = 0$ 处，这些平均值不依赖于（一般的）初始条件。此外，结构函数显示出精确的幂律标度

$$S_p(\ell_m) \propto \ell_m^{\zeta_p} \tag{27}$$

对于正阶和负阶，在惯性区间内均如此 p ，如图2(a)所示。我们指出，采用惯性区间的适当定义（14）会提高测得指数 ζ_p的精度，正如我们稍后在第四节 B 中所解释的。指数 p对.....的非线性依赖关系，如图2(b)所示，是间歇性 [4, 14, 22]的显著特征。这一性质意味着，所有原有的标度对称性（16）在平稳统计中都被破坏了。特别是，间歇性破坏了 K41 预测 $\zeta_p^{\mathrm{K41}} = p/3$。因此，指数 ζ_p 被称为反常指数。

D. 从隐藏对称性推导反常指数

按照前文 [27, 28]，中给出的推导，我们现在证明，结构函数（27）的反常幂律标度源于隐藏尺度不变性。首先

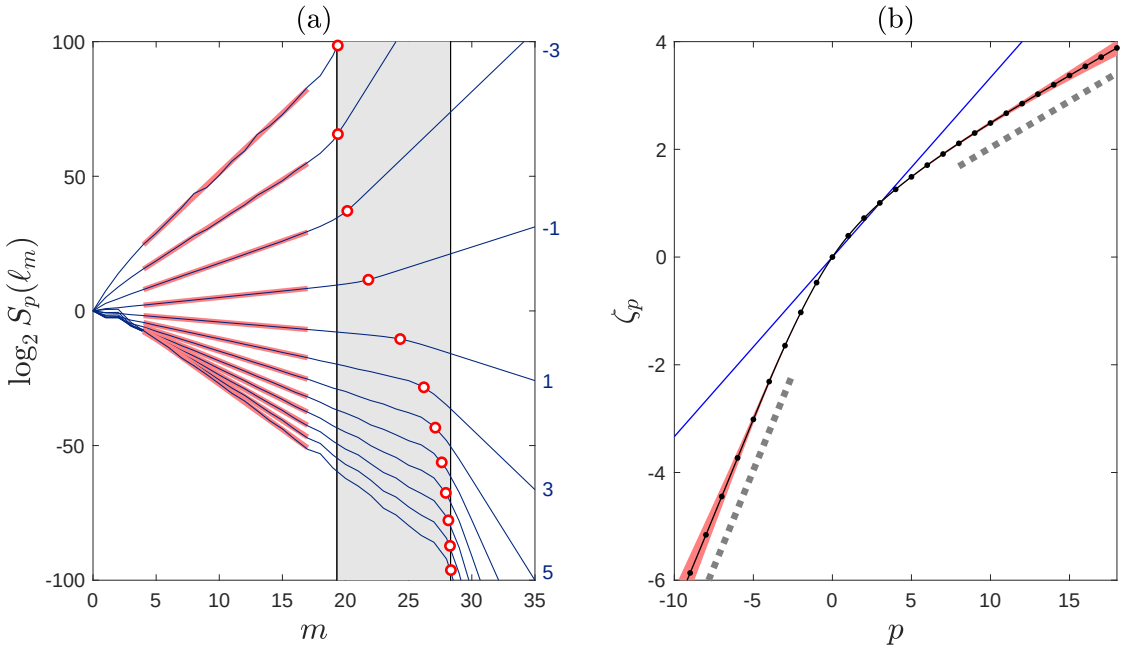

图2。（a）奇数阶 $p=-7$、-5、.....、15 的结构函数 $S_p(\ell_m)=\langle \mathcal{A}_m^p[u]\rangle_t$ 的对数。粗红线表示惯性区间内的幂律关系 $S_p(\ell_m)\propto \ell_m^{\zeta_p}$。灰色区域对应间歇耗散区间（74）。红色圆圈标示依赖于 p 的截断尺度（76）。（b）在区间 $-10\le p\le 18$ 内以步长 $\Delta p=0.2$计算的反常指数 ζ_p。阴影区域表示误差界，蓝线对应 K41 线性依赖关系 $p/3$。虚线表示在大负值和大正值 p处的斜率 $h_{\max}$ 和 $h_{\min}$。结果基于 $\mathrm{R}=10^{10}$ 和$T=5\times 10^4$ 条件下的数值模拟。

这一步，我们用乘子表示结构函数。回顾乘子的定义（24），我们将速度幅值表示为以下乘积

$$\mathcal{A}_m[u]=u_0\prod_{j=0}^{m-1}\mathcal{X}_{-j}[U^{(m)}], \tag{28}$$

其中我们使用了由（6）和（2）得到的 $\mathcal{A}_0[u]=u_0$。将原始时间平均$\langle\cdot\rangle_t$ 改为关于重标度时间 $\tau^{(m)}\ge 0$ 的平均值 $\langle\cdot\rangle_{\tau^{(m)}}$ 后，可将结构函数（26）表示为（推导见附录 VIIE）

$$S_p(\ell_m)=u_0^p\frac{\left\langle\left(\prod_{j=0}^{m-1}\mathcal{X}_{-j}[U^{(m)}]\right)^{p-1}\right\rangle_{\tau^{(m)}}}{\left\langle\left(\prod_{j=0}^{m-1}\mathcal{X}_{-j}[U^{(m)}]\right)^{-1}\right\rangle_{\tau^{(m)}}}. \tag{29}$$

接下来，我们将时间平均表示为相应概率测度下的积分。为此，我们用下标 $\ominus$ 和 $-$ 表示序列

$$\mathbf{x}_\ominus=(x_0,x_{-1},x_{-2},\ldots),\quad \mathbf{x}_-=(x_{-1},x_{-2},\ldots). \tag{30}$$

设 $d\mu^{(m)}(\mathbf{x}_\ominus)$ 是一个概率测度，用于描述乘子$\mathbf{x}_\ominus = \boldsymbol{\mathcal{X}}_\ominus[U^{(m)}]$ 关于 $\tau^{(m)}$ 的统计。将乘积表示为

$$\prod_{j=0}^{m-1} \mathcal{X}_{-j}[U^{(m)}] = \prod_{j=0}^{m-1} x_{-j} \tag{31}$$

并利用遍历性假设，将式 (29) 写成如下形式

$$S_p(\ell_m) = u_0^p \frac{\int \left(\prod_{j=0}^{m-1} x_{-j}\right)^{p-1} d\mu^{(m)}(\mathbf{x}_\ominus)}{\int \left(\prod_{j=0}^{m-1} x_{-j}\right)^{-1} d\mu^{(m)}(\mathbf{x}_\ominus)}. \tag{32}$$

为便于进一步分析，可将此表达式写为

$$S_p(\ell_m) = u_0^p \int d\mu_p^{(m)}, \tag{33}$$

其中， $d\mu_p^{(m)}$是一个正测度（通常不是概率测度），定义如下

$$d\mu_p^{(m)}(\mathbf{x}_\ominus) = \frac{1}{c_m}\Big(\prod_{j=0}^{m-1} x_{-j}\Big)^{p-1} d\mu^{(m)}(\mathbf{x}_\ominus), \quad c_m = \int \Big(\prod_{j=0}^{m-1} x_{-j}\Big)^{-1} d\mu^{(m)}(\mathbf{x}_\ominus). \tag{34}$$

我们的目标现在是建立不同 m 对应的测度 $d\mu_p^{(m)}$ 之间的关系。设 $p^{(m)}(x_1|\mathbf{x}_\ominus)$ 是在乘子 $\mathbf{x}_\ominus = \boldsymbol{\mathcal{X}}_\ominus[U^{(m)}]$ 取给定值时， $x_1 = \mathcal{X}_{(m)1}$ $[U_{(m)}]$ 的条件概率密度。那么，乘子 $\mathbf{x}_\ominus = \boldsymbol{\mathcal{X}}_\ominus[U^{(m+1)}]$ 的概率测度 $d\mu_p^{(m+1)}(\mathbf{x}_\ominus)$ 可写为（推导见附录 VII E）

$$d\mu_p^{(m+1)}(\mathbf{x}_\ominus) = x_0^p\, p^{(m)}(x_0|\mathbf{x}_-)\, dx_0\, d\mu_p^{(m)}(\mathbf{x}_-). \tag{35}$$

这里， $\mu_p^{(m)}(\mathbf{x}_-)$ 表示测度 $\mu_p^{(m)}(\mathbf{x}_\ominus)$ 经变量$\mathbf{x}_\ominus = (x_0, x_{-1}, \ldots) \mapsto \mathbf{x}_- = (x_{-1}, x_{-2}, \ldots)$ 的变换（平移）所得的像测度。引入作用于测度空间 $d\mu(\mathbf{x}_\ominus)$ 上的线性算子 $\mathcal{L}_p^{(m)}[d\mu]$ 很方便，其定义如下

$$d\mu' = \mathcal{L}_p^{(m)}[d\mu], \quad d\mu'(\mathbf{x}_\ominus) = x_0^p\, p^{(m)}(x_0|\mathbf{x}_-)\, dx_0\, d\mu(\mathbf{x}_-). \tag{36}$$

于是，式（35）可简洁地写为

$$d\mu_p^{(m+1)} = \mathcal{L}_p^{(m)}[d\mu_p^{(m)}]. \tag{37}$$

对该公式进行迭代可得

$$d\mu_p^{(m)} = \mathcal{L}_p^{(m-1)} \circ \mathcal{L}_p^{(m-2)} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_p^{(1)}[d\mu_p^{(1)}]. \tag{38}$$

到目前为止，推导都是一般性的。现在我们利用隐藏尺度不变性的性质。它意味着惯性区中的乘子统计不依赖于参考壳层

$m_\circ$ 特别是，这种独立性适用于条件概率密度 $p^{(m)}$ ，因此也适用于线性算子 $\mathcal{L}_p^{(m)}$，即

$$p^{(m)}(x_1|\mathbf{x}_\ominus) \approx \rho(x_1|\mathbf{x}_\ominus), \quad \mathcal{L}_p^{(m)} \approx \Lambda_p. \tag{39}$$

这里， $\rho(x_1|\mathbf{x}_\ominus)$ 是隐藏对称条件密度， Λ_p 是由式（36）表示的相应算子，其形式为

$$d\mu' = \Lambda_p[d\mu], \quad d\mu'(\mathbf{x}_\ominus) = x_0^p\, \rho(x_0|\mathbf{x}_-)\, dx_0\, d\mu(\mathbf{x}_-). \tag{40}$$

根据对 [2, 12, 25]，的数值研究，远处壳层的乘子在统计上相互独立（远处壳层编号之间的相关性呈指数衰减）。因此，密度 $\rho(x_1|\mathbf{x}_\ominus)$ 和算子 Λ_p 均可通过将序列 $\mathbf{x}_\ominus$ 截断为有限个相邻乘子 [28] 来近似。

最后，我们注意到线性算子 Λ_p 是正的（将正测度映射为正测度）。因此，其谱半径由一个实正（Perron–Frobenius）特征值 λ_p 给出，该特征值满足特征值问题 [10, 20, 27]

$$\Lambda_p[d\nu_p] = \lambda_p\, d\nu_p. \tag{41}$$

特征向量 $d\nu_p(\mathbf{x}_\ominus)$ 是一个正测度，其定义仅差一个正因子；我们通过条件 $\int d\nu_p = 1$ 对其进行归一化。在非退化假设下（即严格正性和紧性，见第 19 节。5]），Perron-Frobenius 特征值 λ_p 大于其余所有特征值的绝对值。因此，对于较大的 m，惯性区间内的测度（38）具有如下渐近形式

$$d\mu_p^{(m)} \approx C_p \lambda_p^m\, d\nu_p, \tag{42}$$

其中系数 C_p 不依赖于 $m_\circ$ 将表达式（42）代入式（33），并令 $\ell_m = 2^{-m}\ell_0$，即可得到结构函数的渐近幂律：

$$S_p(\ell_m) \approx C_p u_0^p \left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^{\zeta_p}, \quad \zeta_p = -\log_2 \lambda_p. \tag{43}$$

我们推导出标度指数 ζ_p 与 Perron-Frobenius 特征值 λ_p之间的关系。一般而言，该关系给出的指数会随阶数 p非线性变化，即间歇性 [26,27]。此外，我们的推导表明，标度律在渐近意义下是精确的，也就是说，前因子C_p 是不依赖于 m的常数。图 3 通过数值结果验证了这一性质。根据式（38），前因子 C_p 由小 m处的统计特性决定。因此，它们取决于强迫条件。

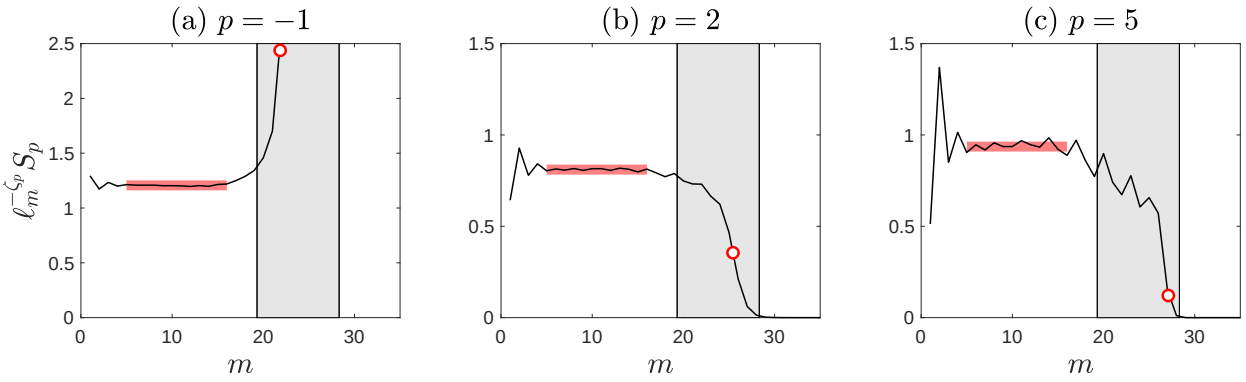

图 3. 补偿结构函数 $\ell_m^{-\zeta_p} S_p$ 随壳层编号 m 的变化曲线，其中 $p = -1$，2，5。这些图确认，公式（43）中的前因子 C_p 在惯性区间内（粗红线所示）为常数，但在间歇耗散区间（灰色区域）内会发生变化。红色圆圈标出依赖于p的截断尺度（76）。结果采用 R $= 10^{10}$ 和 $T = 5 \times 10^4$ 的数值模拟。

我们已通过数值计算确认了乘子的隐藏尺度不变性，这些乘子决定了普适线性算子（40）。接下来需要验证由 Perron-Frobenius 特征模（41）给出的关系（42）和（43）。为此，回顾$\mathbf{x}_\ominus = (x_0, \mathbf{x}_-)$，我们计算边缘密度

$$f_p(x_0) = \int d\nu_p(\mathbf{x}_\ominus)\, d\mathbf{x}_-, \tag{44}$$

其中，测度 $d\nu_p$ 根据公式（42）–（43）近似为

$$d\nu_p \approx \frac{1}{C_p} \left(\frac{\ell_m}{\ell_0} \right)^{-\zeta_p} d\mu_p^{(m)}. \tag{45}$$

通过证明密度 $f_p(x_0)$ 在惯性区间内与 m 无关（对任意固定阶数 p），即可验证公式（41）–（43）。密度 $f_p(x_0)$ 的计算方法见附录 VII D，结果展示于图 4(a-e)，对应 $p = -2$，-1，2，4，6。每个面板均显示惯性区间中部壳层 $m = 8$、……、13 的六条曲线。这些曲线高度吻合，为我们的理论提供了有力的数值支持；其他数值检验见 [28]。为突出吻合的高质量，同一面板中的插图展示了若将公式（45）中的 ζ_p 替换为 K41 指数 $p/3$，密度将如何发散。

E. 广义结构函数的标度

这里我们将之前的结果推广到一类更广泛的可观测量。考虑由整数 $m \in \mathbb{Z}$索引的一列实值（不一定为正）函数 $\Psi_m[u]$。我们假设

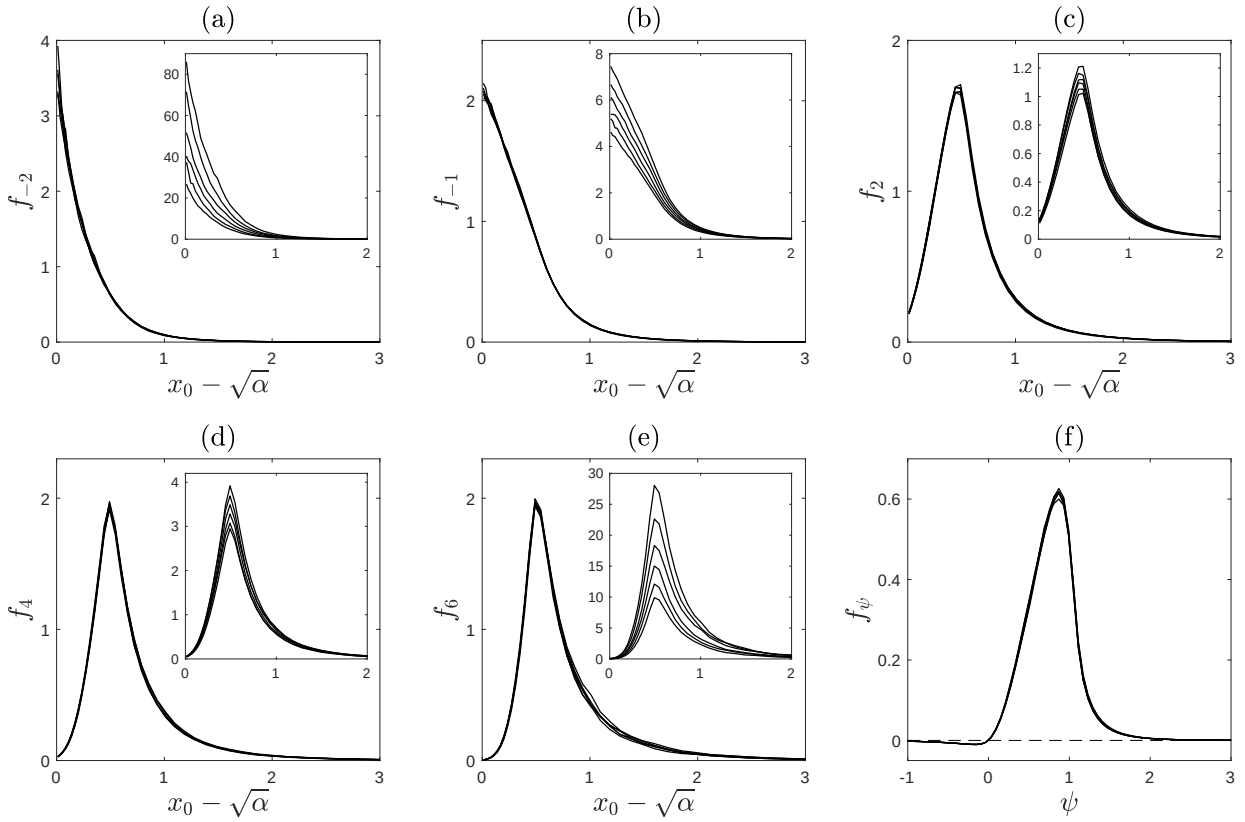

图 4。（a–e）由公式（44）得到的边缘密度 $f_p(x_0)$，对应于 $p = -2,\ -1$、2、4 和 6。每个面板展示了参考壳层 $m = 8$、.....、13 的六个边缘密度如何塌缩。插图显示，若将公式（45）中的反常指数 ζ_p 替换为 K41 值 $p/3$，相同边缘密度会发散。（f）由公式（56）给出的边缘密度 $f_\psi(\psi)$ 对于 $m = 8$、.....、13 的塌缩。结果基于 $\mathrm{R} = 10^{10}$ 和 $T = 5 \times 10^4$ 的数值模拟。

这些函数具有给定次数 p的正齐次性 :

$$\Psi_m[au] = a^p \Psi_m[u], \quad a > 0, \tag{46}$$

并满足尺度不变性条件:

$$\Psi_m[u] = \Psi_{m-1}[u'], \quad u' = \left(u'_n\right)_{n\in\mathbb{Z}} = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}\,. \tag{47}$$

阶数为 p 的广义结构函数定义为时间平均值

$$S_\psi(\ell_m) = \langle \Psi_m[u] \rangle_t. \tag{48}$$

例如，标准结构函数 $\langle |u_m|^p \rangle_t$ for $\Psi_m[u] = |u_m|^p$ 以及 $\Psi_m[u] = \mathcal{A}_m^p[u]$的结构函数 (26) 都是这样的例子。下一节 IIIF 将讨论另一个重要例子，它与能量通量有关。

现在，我们利用上一节的结果推导广义结构函数的渐近幂律。将公式 (48) 变换为重标度变量后，可得以下表达式（见附录 VII E）

$$S_\psi(\ell_m) = u_0^p \int \psi p_\psi^{(m)}(\psi|\mathbf{x}_\ominus)\, d\psi\, d\mu_p^{(m)}(\mathbf{x}_\ominus), \tag{49}$$

其中，测度 $d\mu_p^{(m)}(\mathbf{x}_\ominus)$ 在式（34）中定义，而 $p_\psi^{(m)}(\psi|\mathbf{x}_\ominus)$ 表示变量 $\psi = \Psi_0[U^{(m)}]$ 在给定乘子 $\mathbf{x}_\ominus = \boldsymbol{\mathcal{X}}_\ominus[U^{(m)}]$ 取值条件下的条件概率密度。隐藏尺度不变性意味着这些密度

$$p_\psi^{(m)}(\psi|\mathbf{x}_\ominus) \approx \rho_\psi(\psi|\mathbf{x}_\ominus) \tag{50}$$

在惯性区间内不依赖于参考壳层 m。结合这一性质以及式（42）、（43）和（49），可得

$$S_\psi(\ell_m) \approx I_\psi C_p u_0^p \left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^{\zeta_p}, \quad I_\psi = \int \psi \rho_\psi(\psi|\mathbf{x}_\ominus)\, d\psi\, d\nu_p(\mathbf{x}_\ominus), \tag{51}$$

前提是积分 I_ψ 有限且非零。

我们指出，式（51）不仅给出标度律，还给出了一个前因子；对于给定阶数 p 的所有广义结构函数，其指数 ζ_p 和依赖于外力的系数 C_p 均相同。我们想强调非退化条件的重要性：$0 < |I_\psi| < \infty$。例如，在结构函数的标准定义中，取 $\Psi_m[u] = |u_m|^p$，则式（51）给出 $\langle |u_m|^p \rangle_t \propto \ell_m^{\zeta_p}$。然而，这一关系不适用于 $p \le -2$，因为相应的积分 I_ψ 和结构函数发散。如果 $I_\psi = 0$，那么式（51）中的幂律便消失。不过，$S_\psi(\ell_m)$ 的渐近幂律标度仍可能存在：它可以与线性算子 Λ_p 中仅次于 Perron-Frobenius 主模态的下一主导模态相关；参见式（38）和（39）。如果 $C_p = 0$，这一论证同样适用，而这种情况可能出现在某种特殊形式的外力作用下。

最后，我们提一下文献[5, 23, 30]中研究的积分多时刻关联函数。我们预计，对标度律的广义刻画还可以进一步扩展到此类可观测量。

F. 反常耗散的隐藏对称性

作为广义结构函数的另一个例子，我们来考察能量通量。将惯性区间方程 (15) 两边乘以 u_n^* 并取实部，利用 (4) 进行一些初等变换后，可推导出局部能量平衡

$$\frac{d}{dt}\frac{|u_n|^2}{2} = \Pi_n - \Pi_{n+1}. \tag{52}$$

这里， Π_n 是从壳层 $n-1$ 到 n 的能量通量，其定义为

$$\Pi_n[u] = k_n \operatorname{Im}\left(u_{n+1}u_n^* u_{n-1}^* + \frac{u_n u_{n-1}^* u_{n-2}^*}{4}\right). \tag{53}$$

可以看出， $\Psi_m[u] = \Pi_m[u]/k_m$ 是一个满足条件 (46) 和 (47) 的 $p=3$ 阶广义结构函数。

利用式 (51) 和 $p=3$ ，我们得到

$$\langle \Pi_m[u]\rangle_t = k_m \langle \Psi_m[u]\rangle_t \approx I_\psi C_3 \frac{u_0^3}{\ell_0}\left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^{\zeta_3-1}, \tag{54}$$

其中我们表示了 $k_m = 1/\ell_m$。如果 $I_\psi C_3 \neq 0$，那么 $\zeta_3 = 1$ 是唯一满足由式 (52) 得出的条件 $\langle \Pi_m[u]\rangle_t = \langle \Pi_{m+1}[u]\rangle_t$ 的指数。这一事实以耗散异常 [13], 之名广为人知，它意味着能量的平均通量趋近于一个渐近值

$$\langle \Pi_m[u]\rangle_t \approx \frac{I_\psi C_3 u_0^3}{\ell_0} \tag{55}$$

该值位于惯性区间内，且与雷诺数无关。

我们验证 通过考察函数，在数值上检验隐藏对称性性质 (50) s

$$f_\psi(\psi) = \int \psi \rho_\psi(\psi|\mathbf{x}_\ominus)\, d\nu_3(\mathbf{x}_\ominus), \tag{56}$$

其中， ρ_ψ 和 $d\nu_3$ 分别利用 $p_\psi^{(m)}$ 和公式（45）与 $\zeta_3 = 1$进行近似；更多详情见附录 VII D。图 4(f) 展示了针对不同 m计算得到的函数 $f_\psi(\psi)$。这些函数的精确塌缩验证了我们基于隐藏对称性得出的结论，并给出了 $I_\psi = \int f_\psi\, d\psi \approx 0.41$。后者使能量通量（55）取正值。

G. 大偏差理论与多重分形性

我们推导结构函数反常幂律的方法，与马尔可夫过程 [2, 12, 14]的大偏差理论有许多共同之处。对除以 m的乘法关系（28）取对数后，这种类比便显而易见。经过简单运算，可得

$$W_m = -\frac{1}{m}\log_2 \frac{\mathcal{A}_m[u]}{u_0} = \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_m}{m}, \tag{57}$$

其中

$$w_n = -\log_2 \mathcal{X}_{n-m}[U^{(m)}] = -\log_2 \frac{\mathcal{A}_n[u]}{\mathcal{A}_{n-1}[u]} \tag{58}$$

是乘子 (24) 的负对数。将 w_1、……、w_m 视为随机变量，可知 W_n 是它们的样本均值。隐藏对称性假设 (39) 表明，在给定 w_m、w_{m-1}、…… 的条件下，下一个变量 w_{m+1} 的概率不依赖于 m。此外，这些变量在相距较远的壳层上会变得统计独立 [2, 12, 28]。因此，序列w_1、w_2、…… 具有广义马尔可夫链的性质。不过请注意，隐藏尺度不变性有一个内在特征，使其区别于马尔可夫链：变化 $m \mapsto m+1$还必须伴随重标度时间 $\tau^{(m)} \mapsto \tau^{(m+1)}$的变化。

现在，我们将帕里西–弗里施湍流多重分形（现象学）理论推导为一种源自隐藏尺度不变性的大偏差理论。事实上，结合式（57）与结构函数（26）的幂律标度（43），可得

$$\frac{\langle \mathcal{A}_m^p[u] \rangle_t}{u_0^p} = \left\langle 2^{-mpW_m} \right\rangle_t \approx 2^{-m\zeta_p} C_p. \tag{59}$$

为方便起见，这里采用以 2 为底的指数函数，并回顾 $\ell_m/\ell_0 = 2^{-m}$。速度幅值 $\mathcal{A}_m[u]$ 的关键性质是，它们对所有 $p \in \mathbb{R}$定义了指数 ζ_p；见图2。在这种情况下，可以应用 G¨artner–Ellis 定理；参见 [35, §3.3.1] 和附录 VII F。该定理给出了大 m 情形下的大偏差原理，其概率表述为

$$P\left(W_m \in [h, h+dh]\right) \approx 2^{-mJ(h)}\, dh. \tag{60}$$

这里，J（h）是速率（克拉默）函数，定义为

$$J(h) = \sup_{p \in \mathbb{R}} \left(\zeta_p - ph\right). \tag{61}$$

由于 ζ_p 是关于 p的凹函数，关系式（61）可隐式地解为

$$h = \frac{d\zeta_p}{dp}, \quad J = \zeta_p - p\,\frac{d\zeta_p}{dp}. \tag{62}$$

（61）的逆式为（见附录 VII F）

$$\zeta_p = \inf_{h \in \mathbb{R}} \left(ph + J(h)\right). \tag{63}$$

利用关系式（57）和 $\ell_m/\ell_0 = 2^{-m}$，我们得到

$$W_m = h \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_m[u] = u_0 \left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^h. \tag{64}$$

于是，大偏差原理（60）可（不那么形式化地）写作

$$\mathcal{A}_m[u] \sim u_0 \left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^h \quad \text{with probability} \quad P \sim \left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^{J(h)}. \tag{65}$$

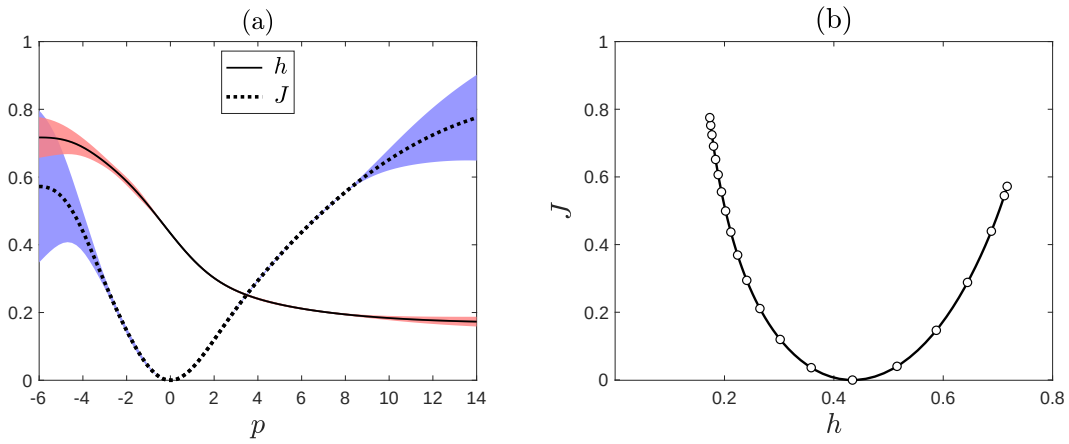

图5. (a) 式（62）给出的标度指数 h 和分形余维 J 随 p的变化。阴影区域表示误差界。(b) 得到的函数 $J(h)$。圆圈对应 $p = -6, \ldots, 14$ 的整数值。结果采用 $\mathrm{R} = 10^{10}$ 和 $T = 5 \times 10^4$下的数值模拟。

如果将 $J(h)$ 视为与标度律 $\mathcal{A}_m[u] \propto \ell_m^h$ 对应子集的（分形）余维，那么便可得到多重分形理论。事实上，如同在多重分形模型 [14, 33]，中，人们将 $\mathcal{A}_m[u]$ 的平均矩表示为

$$\langle \mathcal{A}_m^p[u] \rangle_t \sim u_0^p \int \left(\frac{\ell_m}{\ell_0} \right)^{ph + J(h)} d\mu(h), \tag{66}$$

其中，指数 ph 和 $J(h)$ 分别来自式（65）中的速度幅值和概率，而 $d\mu(h)$ 衡量不同 h的贡献。于是，幂律 $\langle \mathcal{A}_m^p[u] \rangle_t \propto \ell_m^{\zeta_p}$ 由式（63）给出的最小指数 $ph + J(h)$ 决定。

图5(a)展示了利用图2(b)中的指数对表达式（62）进行数值计算所得的曲线，图5(b)给出了由此得到的函数 $J(h)$。对于较大的（负阶和正阶）阶数 p，面板(a)中所示的误差估计会变大。需要指出的是，这些误差不仅源于统计涨落，也源于强迫区和耗散区中出现的振荡；参见第四节。尽管较大的误差妨碍了对高阶数的分析，图2(b)表明，对于较大的 $|p|$， ζ_p 的渐近依赖关系呈线性。这意味着，对应于有限速率 $J(h)$ 的指数 h 具有有限的下限和上限。我们通过数值方法估计它们为

$$h_{\min} \le h \le h_{\max}, \quad h_{\min} \approx 0.173 \pm 0.015, \quad h_{\max} \approx 0.72 \pm 0.06. \tag{67}$$

使用公式（65）中的指数 $h_{\max}$ ，可以得到速度幅值在

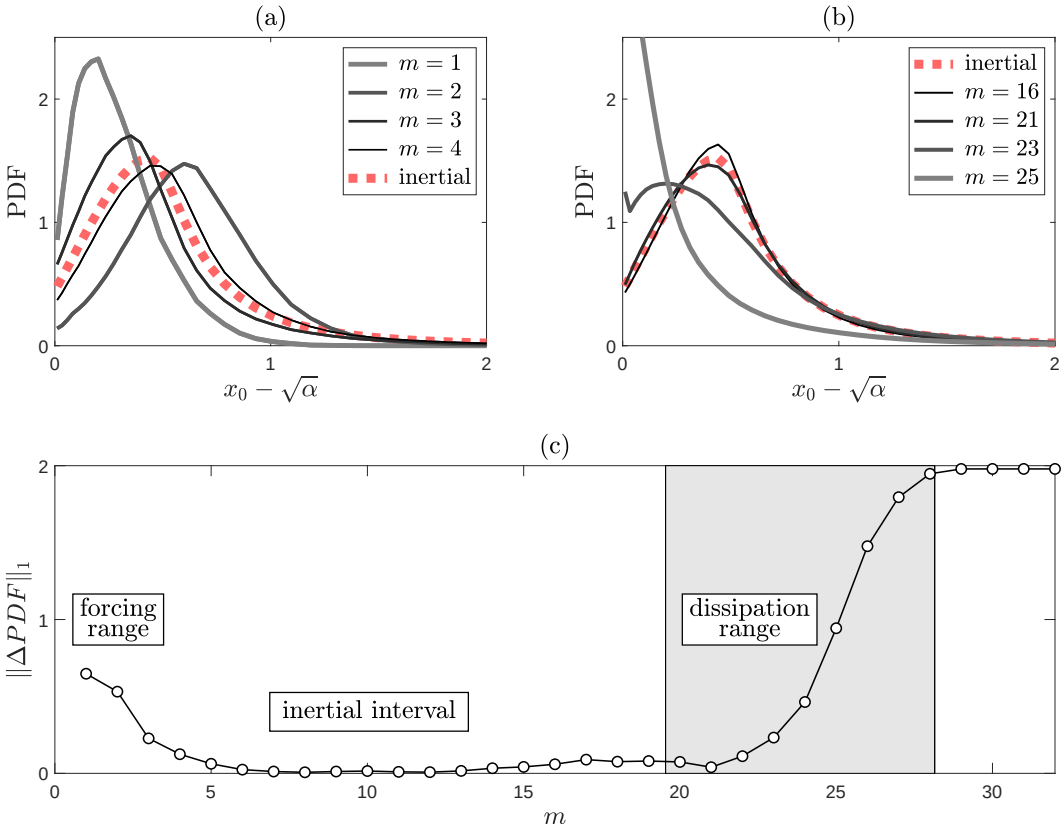

图 6. （a）强迫区间和（b）耗散区间内各壳层的乘子概率密度函数 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$ 相对于隐藏对称形式（红色虚点线）的偏离。（c）壳层 m 处乘子概率密度函数与隐藏对称概率密度函数之差的 L^1-范数。结果采用 $\mathrm{R} = 10^{10}$ 和 $T = 10^4$ 的数值模拟。

惯性区间内的最陡衰减形式

$$|u_m| \sim \mathcal{A}_m[u] \sim u_0 \left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^{h_{\max}} = u_0 2^{-m h_{\max}}. \tag{68}$$

由此可知，对于任意 $\alpha < 4^{-h_{\max}} \approx 0.37$，关于 j 的求和（出现在方程（6）及其他类似表达式中）在惯性区间内均呈指数收敛。请注意，我们的数值模拟采用 $\alpha = 1/8$。

IV. 破　　坏耗散与强迫导致的隐藏对称性

本节研究小尺度上的耗散和大尺度上的强迫如何破坏隐藏尺度不变性。为开展这项研究，我们将不同参考壳层 m处的乘子概率密度函数$x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$ 视为可观测量。图 6 展示了大强迫尺度（图 a）和小耗散尺度（图 b）下的这些概率密度函数，并将其与惯性区间中的隐藏对称概率密度函数进行了比较。可以看到，随着参考壳层逐渐移

出惯性区间，概率密度函数之间的差异逐渐增大。为了呈现整体图景，我们在图（c）中给出了壳层 m 处的概率密度函数与惯性区间中的隐藏对称概率密度函数之差的 L^1 范数（绝对值积分）。可以看到，在体现隐藏对称统计的惯性区间内，该范数为零。本节下面将分别分析隐藏对称性如何在其左侧（强迫侧）和右侧（耗散侧）遭到破坏。

A. 强迫区间

数值模拟已知，对于非常大的雷诺数，大尺度统计取决于强迫（在我们的情形中由参数为 ℓ_0 和 u_0的边界条件给出），但不取决于黏度。对于重标度表述也能得出类似结论，其中边界条件具有形式 (13)。图 7 确认，乘子的概率密度函数随 R $\to \infty$而收敛。图 8(a) 展示了另一种收敛：随着参考壳层 m增大，乘子的概率密度函数趋近于隐藏对称形式。从图 8(b) 的同一图像（纵向对数刻度）可知，在区域 $2 \le m \le 8$内，收敛关于 m呈指数形式：

$$\|\Delta\, PDF\|_1 \propto 2^{-\zeta_F m} \propto \ell_m^{\zeta_F}, \quad \zeta_F \approx 1.1. \tag{69}$$

关系式 (69) 为理解强迫区间中观测到的统计性质提供了一种自然解释。具体而言，从尺度 ℓ_0 处的边界态向小尺度 $\ell_m \ll \ell_0$处稳定的隐藏对称态转变时，指数衰减具有一个主导（最慢）模态，其李雅普诺夫指数为 $-\zeta_F$。要从理论上理解这一转变，需要建立一致的隐藏对称态稳定性理论；发展该理论将是一个有趣的后续研究方向。

最后，我们来考察由结构函数 $S_p(\ell_m) = \langle \mathcal{A}_m^p[u] \rangle_t$ 表征的原始壳层速度统计量。我们在第三节 D 中证明，惯性区间内的幂律（ 43 ）源于两个极限：乘子统计量收敛到隐藏对称态（ 39 ），随后测度 $d\mu_p^{(m)}$ 收敛到佩龙-弗罗贝尼乌斯态（42）。因此，从强迫端开始，结构函数向幂律的收敛是一个复杂过程；若要更深入地理解这一过程，就需要运用上一段提到的稳定性理论。我们通过绘制渐近关系（43）中的偏差来展示这一收敛过程，其定义为 $\ell_m^{-\zeta_p} S_p - C_p$，其中我们使用了 $\ell_0 = u_0 = 1$。图 9 展示了 $p = 2$,3,4 的此类曲线，并同时给出图 8(b) 中的指数模态（虚线）。

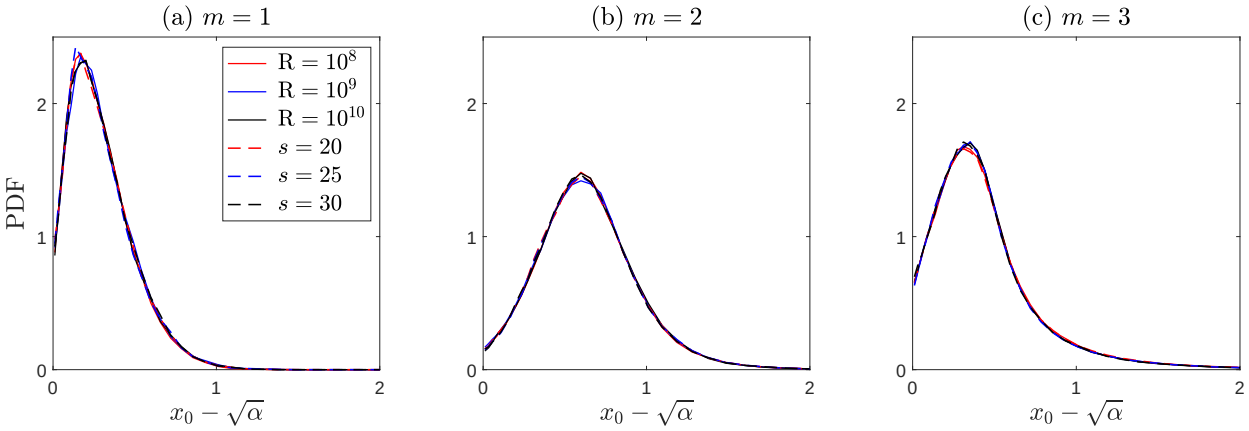

图 7. 强迫区间中参考壳层 $m = 1$、2、3 的乘子 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$ 概率密度函数的塌缩。每个面板中的六条曲线分别对应 R $= 10^8$、10^9、10^{10} 和 $T = 10^4$ 时的数值模拟，以及第五节中讨论的 $s = 20$、25、30 黏性截断模型。

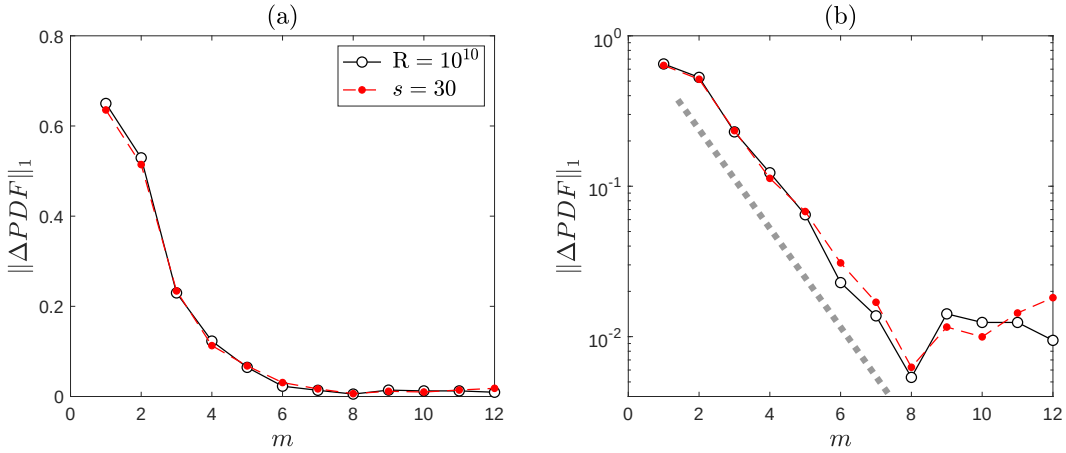

图 8. 壳层 $m = 1$、……、12 处乘子 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$ 的概率密度函数与隐藏对称概率密度函数之差的 L^1-范数：(a) 线性纵轴；(b) 对数纵轴。实线对应 R$= 10^{10}$，虚线对应 $s = 30$ 的黏性截断模型。灰色点线表示指数关系。

B. 间歇性耗散区间

惯性区间的自相似性体现在重标度表述（11）中。现在我们来考察黏性耗散在该系统中的作用。事实证明，重标度后的黏性项既不局限于特定壳层，也无法用重标度变量写成封闭形式。后者是因为间歇雷诺数（12）与振幅 $\mathcal{A}_m[u]$ 成正比。由此导致耗散区间的结构十分复杂，而我们现在

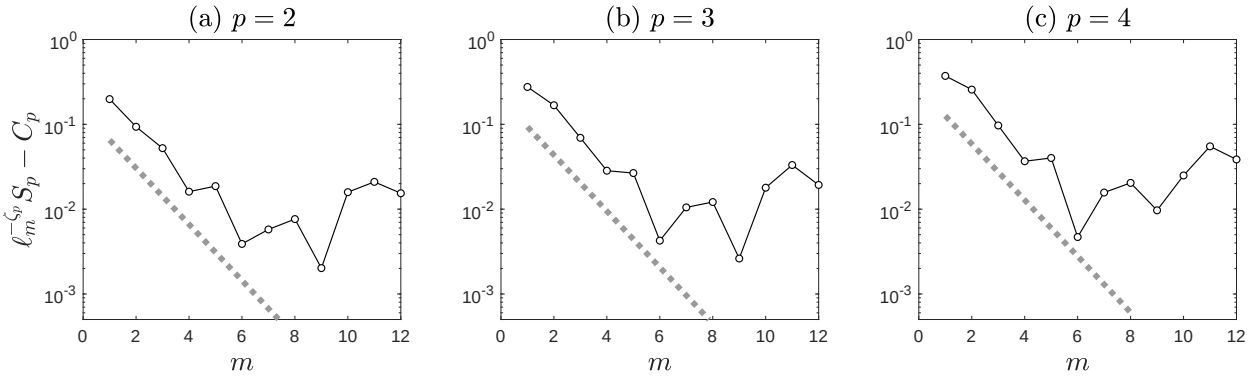

图 9. 强迫区间内结构函数偏离幂律的情况， $p = 2$、3、4，纵轴为对数刻度。虚线表示指数模态 $\propto 2^{-\zeta_F m}$。

描述。

重标度表述通过将参考壳层 m 设定在感兴趣的尺度上来构造。然后，局部统计用时间 $\tau(m)$ 和变量 $U_N^{(m)}$ 来描述，其中指标 N取零或适中的值。第三节中讨论的隐藏自相似性是在假设式（11）中的黏性项可忽略的情况下成立的，也就是说，局部雷诺数

$$\mathrm{R}_m[u] = \frac{\mathcal{A}_m[u]\ell_m}{\nu} \gg 1 \tag{70}$$

由式（12）给出，且数值较大。将大偏差原理中式（65）代入式（70），得到

$$\mathrm{R}_m[u] \sim \frac{\ell_m u_0}{\nu}\left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^h = \mathrm{R}\left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^{1+h} \quad \text{with probability} \quad P \sim \left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^{J(h)}, \tag{71}$$

其中 $\mathrm{R} = \ell_0 u_0/\nu$。回想一下，指数 h 在有限区间（67）内变化。因此，结合式（70）和式（71），可知对于以下尺度，耗散效应在所有时刻都可忽略

$$\frac{\ell_m}{\ell_0} \gg \mathrm{R}^{-1/(1+h_{\max})} \tag{72}$$

其中 $1/(1+h_{\max}) \approx 0.58$。同样，对于极小尺度，耗散效应始终占主导地位

$$\frac{\ell_m}{\ell_0} \ll \mathrm{R}^{-1/(1+h_{\max})} \tag{73}$$

其中 $1/(1+h_{\min}) \approx 0.85$。

我们来考虑这一范围

$$\mathrm{R}^{-\frac{1}{1+h_{\min}}} \lesssim \frac{\ell_m}{\ell_0} \lesssim \mathrm{R}^{-\frac{1}{1+h_{\max}}}, \tag{74}$$

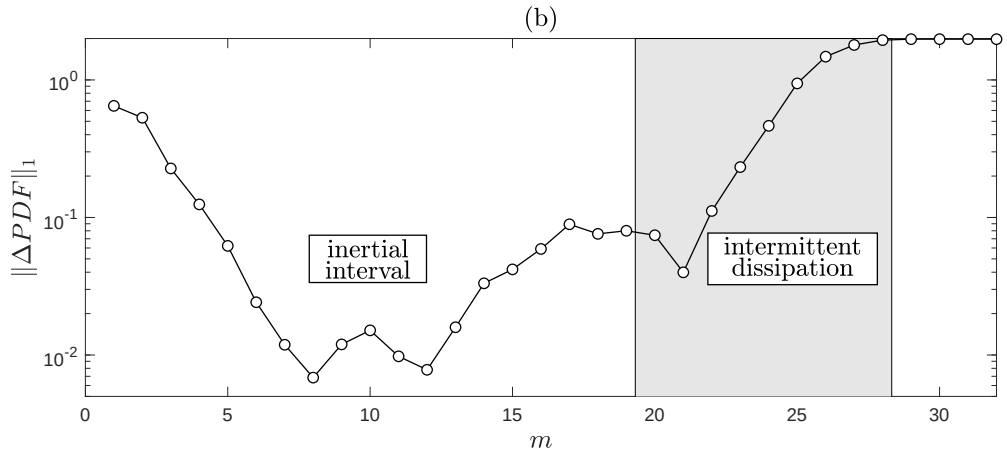

图 10. 壳层 m 处乘子 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$ 的概率密度函数与隐藏对称概率密度函数之间的差异，以纵向对数刻度呈现。结果基于 $\mathrm{R} = 10^{10}$ 和 $T = 10^4$ 的模拟。

它将耗散可以忽略不计的较大尺度 (72) 与耗散占主导的极小尺度 (72) 分隔开来。在该范围的尺度上，局部雷诺数 (71) 以一定概率为小或为大，也就是说，黏性耗散呈现间歇性 [15]。因此，我们将尺度 (74) 称为间歇耗散区间。这种耗散间歇性的一个后果是，隐藏对称性在整个范围 (74) 内逐渐被打破。图 6(c) 中乘子统计 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$ 的结果确实证实了这一点：乘子概率密度函数与隐藏对称概率密度函数之间的差异，在灰色区域 (74) 内从零持续增大至一个常数。小尺度 (73) 处达到的常数为 2，因为乘子分布趋近于带有 $x_0 \approx 0$ 的狄拉克δ函数。图 10 展示了同一图像，但采用纵向对数刻度。从图 6(c) 和图 10 均可看出，在尺度$\ell_m/\ell_0 \sim \mathrm{R}^{-1/(1+h_{\max})}$ ($m \approx 19$)处，与隐藏对称态的偏离仍相当明显。要最终恢复隐藏对称统计，还需要额外几个壳层，例如图 10 中的 $14 \le m \le 18$ 。

我们的分析提出了对惯性区间的一种自然定义：它是一个尺度范围，在这个范围内，隐藏尺度不变性在统计意义上得以恢复。在小尺度下，隐藏对称性条件由式（72）给出。因此，我们将惯性区间确定为尺度（14），正如第三节开头所述。

C. 间歇耗散区间中的结构函数

现在，我们来研究原始速度统计中的黏性效应，并通过结构函数 $S_p(\ell_m)$对其进行观测。在这方面，我们的分析类似于 [8, 15] 中提出的对中间耗散区间的现象学描述。我们指出，尽管“间歇”耗散区间与“中间”耗散区间这两个概念密切相关，但前者指的是隐藏对称性的破缺，而后者指的是（并取决于）结构函数的特定阶数 p 。

根据 [15], ，我们观察到，给定阶数 p 的结构函数 (66) 的主要贡献来自如下形式的振幅涨落 (65)：

$$\mathcal{A}_m[u] \sim u_0 \left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^{H(p)}, \quad H(p) = \frac{d\zeta_p}{dp}. \tag{75}$$

这里， $h = H(p)$ 给出了最小指数 $ph + J(h)$，这是由凹函数 ζ_p 的方程 (62) 和 (63) 得出的。由方程 (70) 和 (71) 可知，当涨落满足 $h = H(p)$ 时，黏性项可以忽略，条件是

$$\ell_m \gg \eta(p) = \mathrm{R}^{-\frac{1}{1+H(p)}} \ell_0. \tag{76}$$

该条件定义了一族黏性截断尺度 $\ell_m \sim \eta(p)$，它们取决于结构函数的阶数 p 。这些截断尺度在图 2(a)中清晰可见，对应于幂律依赖关系 $S_p(\ell_m) \propto \ell_m^{\zeta_p}$ 的失效。在更小的尺度 $\ell_m \ll \eta(p)$（更大的壳层编号）上，壳层速度以快得多的速率 [15] 衰减至零。在方程 (6) 的求和中忽略这些速度后，可以证明，我们的结构函数具有单分形幂律标度 $S_p(\ell_m) = \langle \mathcal{A}_m^p[u] \rangle_t \propto \alpha^{pm/2}$ ，适用于 $\ell_m \ll \eta(p)$；见图2(a)。

幂律延伸至截断尺度（76）的情况只能是近似的。事实上，这一推导假设不同 h 的涨落（65）彼此独立，但实际情况很可能并非如此。因此，我们预期，隐藏对称性的逐渐破缺会影响间歇耗散区间（74）内所有尺度上的所有结构函数。图 3 证实了这一观点。可以看到，黏性效应改变了幂律（43）的前因子 C_p ，使其在区间（74）内偏离常数值。截断（76）标记了一个尺度，在该尺度上，偏差变得足够大，足以压过幂律依赖关系。

总之，我们精确定义了惯性区间，即尺度范围（14）；在该范围内，隐藏对称性在统计意义上得以恢复。强迫区间中的隐藏对称性破缺与（非常大的）雷诺数无关，而收敛

到隐藏对称态的过程随壳层编号呈指数形式。小尺度上的隐藏对称性会在间歇耗散区间（74）中逐渐破缺，并受间歇波动的局部雷诺数（70）控制。尽管结构函数的幂律似乎延伸至惯性区间之外，直至依阶数而定的截断（76），但黏性项会显著改变其前因子。这一点具有实际意义：与在延伸至截断尺度（76）的较大区间内相比，在与 p 无关的尺度范围（14）内估算指数 ζ_p更为准确；见图2。虽然我们的分析揭示了耗散区间的复杂性与隐藏自相似性密切相关，但对耗散尺度的详细分析仍超出我们目前方法的范围。不过，我们将在下一节展示，采用另一种耗散模型可以理解耗散区间。

V. 隐藏对称耗散

我们在第三节和第四节中已经证明，雷诺数极大时的平稳统计受重标度（投影）表述的隐藏标度对称性支配。隐藏自相似性在惯性区（14）中得以恢复，而在强迫区间和耗散区间中则遭到破坏。从惯性区间向耗散区间的转变机制十分复杂，因为重标度表述中出现的局部雷诺数具有间歇性。本节将介绍一类壳层模型的耗散修正，其重标度表述不具有间歇性。在这些系统中，隐藏尺度不变性可以推广到涵盖所有小尺度（包括惯性尺度和耗散尺度）的形式。这种扩展自相似性有助于深入理解充分发展湍流的小尺度动力学，并具有潜在的实际应用价值，例如开发有效的耗散闭合。此外，这种自相似性还与柯尔莫哥洛夫的 K41 理论十分相似：该理论中带有$h = 1/3$ 的破缺标度对称性（5）被恢复的隐藏尺度不变性所取代。

A. 带黏性截断的模型

我们从一个特定模型入手，该模型通过修改系统 (3) 中的黏性项构造而成。首先，我们在尺度 ℓ_s 处设置一个锐利截断：

$$u_n \equiv 0 \quad \text{for} \quad n > s. \tag{77}$$

对于 $n \leq 0$，我们保留相同的边界条件 (2)。对于其余壳层，我们考虑以下方程：

$$\frac{du_n}{dt} = k_0 \mathcal{B}_n^{(s)}[u], \quad n = 1, \dots, s, \tag{78}$$

其中，我们引入二次项 $\mathcal{B}_n^{(s)}[u]$，将定义（4）扩展为

$$\mathcal{B}_n^{(s)}[u] = \mathcal{B}_n[u] + \begin{cases} -2^n |u_n| u_n, & n = s-1, s; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{79}$$

在这个新模型中，耗散项 $-2^n |u_n| u_n$ 被加入最后两个壳层的方程中，即 $s-1$ 和 s。其余关于 $n = 1, \dots, s-2$ 的方程具有理想（无黏）形式（15）。

可以验证能量平衡方程

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \Pi_1 - k_{s-1} |u_{s-1}|^3 - k_s |u_s|^3, \tag{80}$$

其中，$\mathcal{E}[u] = \frac{1}{2} \sum |u_n|^2$ 是总能量。这里，$\Pi_1[u] = k_1 \operatorname{Im}(u_2 u_1^* u_0)$ 是从壳层 $n = 0$ 到壳层 1 的能量通量，由边界条件（2）产生；参见方程（52）和（53）。项 $-k_{s-1} |u_{s-1}|^3 - k_s |u_s|^3$ 描述截断壳层 $s-1$ 和 s 上的能量耗散。

可以检查，我们新模型的方程（78）–（79）在时空尺度变换下保持不变

$$t, \; u_n, \; s \quad \mapsto \quad 2^{1-h} t, \; 2^h u_{n+1}, \; s-1 \tag{81}$$

对于任意 $h \in \mathbb{R}$。这一关系类似于对称性 (5)，但以截断位移 $s \mapsto s-1$ 取代黏度缩放。对称性 (81) 在积分尺度 ℓ_0 处被边界条件 (2) 破坏。

B. 扩展的隐藏尺度不变性

让我们使用带有 $n = m + N$ 的重标度变量 (7) 对方程 (78)–(79) 进行变换。与第 II C 节和附录 VII A 类似，在区间 $0 < m + N \leq s$ 内，可以推导出

$$\frac{dU_N^{(m)}}{d\tau^{(m)}} = \mathcal{B}_N^{(S)}[U^{(m)}] - U_N^{(m)} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^j \operatorname{Re}\left(U_{-j}^{(m)*} \mathcal{B}_{-j}^{(S)}[U^{(m)}] \right), \quad -m < N \leq S, \tag{82}$$

其中我们引入了

$$S = s - m. \tag{83}$$

截断（77）意味着

$$U_N^{(m)} \equiv 0, \quad N > S. \tag{84}$$

在边界壳层处， $N \leq -m$，相同的条件 (13) 仍然成立。

考虑任意小尺度 ℓ_m 和 ℓ_{m+N}，它们满足条件

$$\ell_s \leq \ell_m \sim \ell_{m+N} \ll \ell_0. \tag{85}$$

然后，与第三节 A 中一样，可以忽略式 (82) 中指数收敛和的上限。这得到

$$\frac{dU_N}{d\tau} = \mathcal{B}_N^{(S)}[U] - U_N \sum_{j\geq 0} \alpha^j \mathrm{Re}\left(U_{-j}^* \mathcal{B}_{-j}^{(S)}[U]\right), \tag{86}$$

此外，为了简化隐藏对称性的引入，我们省略了上标 (m)。可以验证，式 (86) 在变换下保持不变

$$U_N,\ d\tau,\ S \ \mapsto\ \frac{U_{N+1}}{\sqrt{\alpha + |U_1|^2}},\ 2\sqrt{\alpha + |U_1|^2}\, d\tau,\ S. \tag{87}$$

这一不变性的推导遵循与附录 VII B 中相同的步骤。它对应于参考壳层 $m \mapsto m+1$ 与截断壳层 $s \mapsto s+1$同时发生变化，从而保持它们的差值 $S = s - m$ 不变。我们将变换 (87) 称为扩展隐对称性。这一对称性类似于 (19)–(20)，但它考虑了我们新模型中的耗散项和截断。因此，尽管扩展隐对称性由于边界条件在大尺度上仍然会被破坏，但它在小耗散尺度上不会被破坏。

对称性 (87) 的表述不依赖于指数 h，因此它是一种较弱的对称性：即使所有原始标度对称性 (81) 都被破坏，它仍可在统计意义上恢复。请注意，不同的截断壳层 s 定义了不同的方程组。因此，变换 (87) 将具有不同 s的不同模型的解联系起来。这与理想系统的隐藏对称性 (19)–(20) 不同，后者联系的是同一系统的解。

C. 乘子的小尺度统计

现在，我们通过数值验证，扩展隐对称性 (87) 在黏性截断模型的小尺度统计中得以恢复。我们将使用随时间变化的乘子 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$ 作为可观测量。对称性 (87) 表明，该乘子的概率密度函数仅通过壳层编号 s 与 m 之差 $S = s - m$ 依赖于这两个编号。这一性质在图11(a)中得到了验证，适用于

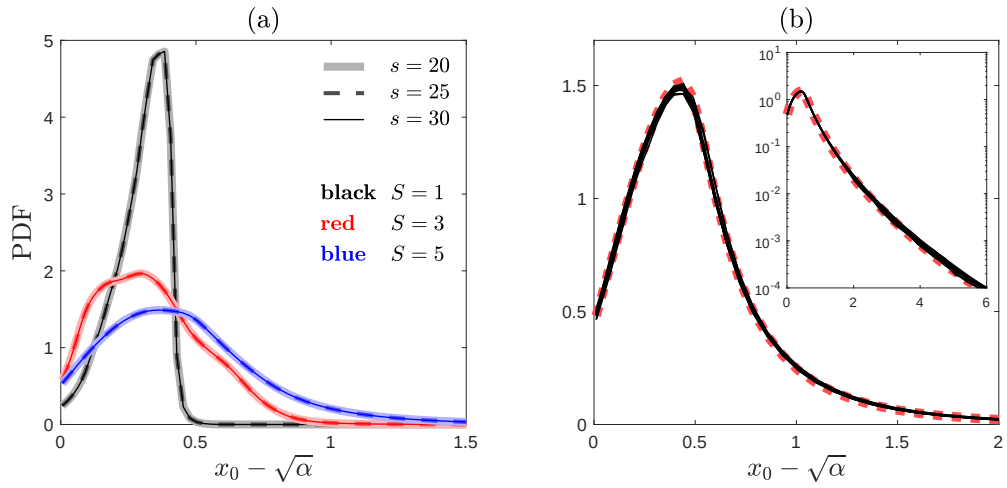

图11。(a) 扩展隐对称性的验证：乘子 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$ 的概率密度函数仅取决于差值 $S = s - m$。图中展示了三条曲线，截断尺度 $s = 20$，25，30分别对应各个 $S = 1$，3，5。(b) 乘子 $s = 30, m = 6$，……，15 和 $s = 25, m = 6$，……，10 的概率密度函数均塌缩到图1(a)中的惯性区间概率密度函数（红色点线）。插图展示了纵向对数刻度下的同一图形。

$S = 1$，3，5。随着 S 增大，壳层 m 处黏性截断 s 的影响减弱，概率密度函数在惯性区间趋于其隐藏对称形式。图11(b)证实了这一点。

让我们研究统计分布对 $S = s - m$ 的依赖关系。图12展示了任意 m 对应的乘子概率密度函数与惯性区间的隐藏对称概率密度函数之间的差异（用 L^1 范数测量）。结果针对不同的截断尺度 $s = 20$，25，30 给出，并分别表示为壳层编号 m （图a）以及 S （图b和c）的函数。图12(b、c)分别以线性和对数纵轴展示，表明在所有小尺度上都存在精确的自相似性，即在惯性区间和耗散区间内均如此。还可以看到，向惯性区间概率密度函数的衰减具有指数渐近形式

$$\|\Delta\, PDF\|_1 \propto 2^{-\zeta_D S}, \quad \zeta_D \approx 0.25. \tag{88}$$

如图 12(c) 中的点线所示。

对称性 (87) 在强迫区间的大尺度上被打破。在强迫区间内，统计特性与原始黏性壳层模型的统计特性一致，正如第 IV A 节所述，并由图 7 和图 8 验证。这表明大尺度统计不仅独立于截断尺度，也独立于特定的耗散机制。

总之，在我们的黏性截断模型中，平稳统计在小尺度上恢复了扩展隐对称性，在惯性区间和耗散区间内均是如此。远离强迫壳层和截断壳层时，分布会指数趋近于惯性

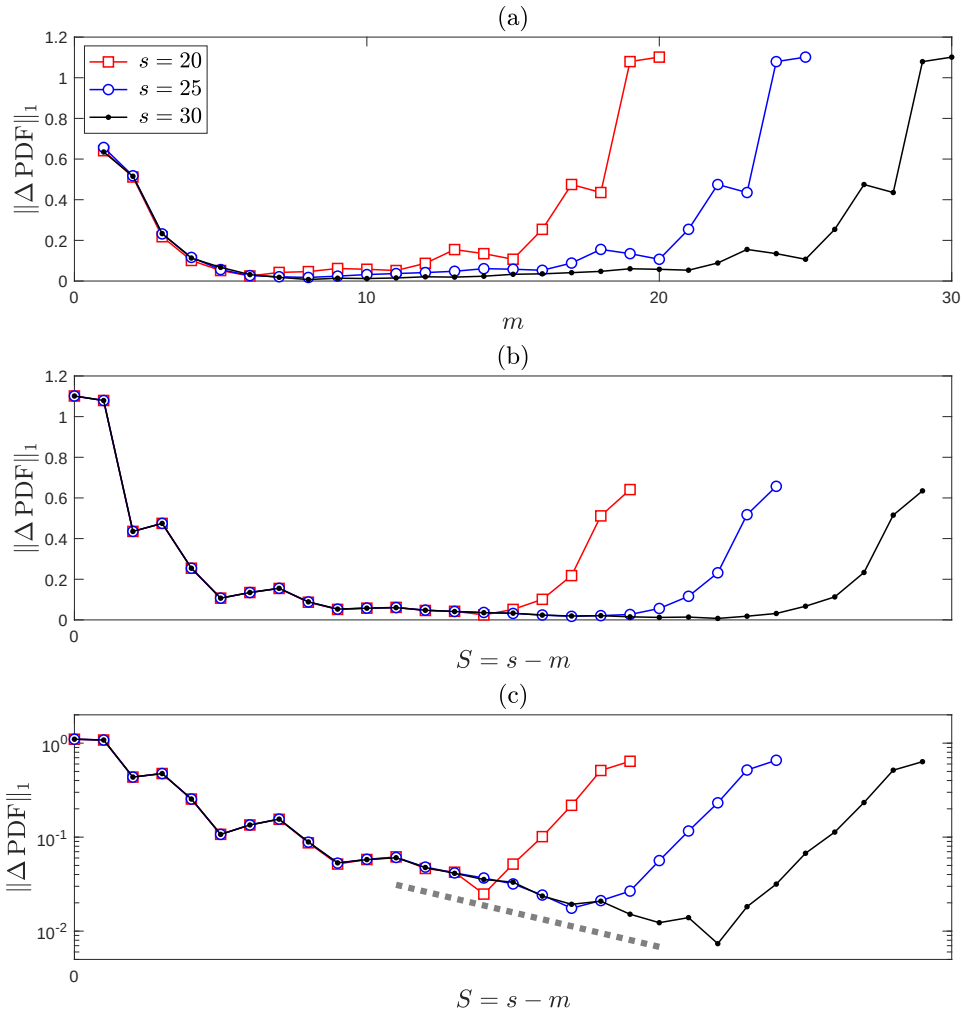

图 12. (a) 壳层 m 处乘子 $x_0 = \mathcal{X}_0[U^{(m)}]$ 的概率密度函数与惯性区间中部的隐藏对称概率密度函数之差。结果展示了截断壳层 $s = 20$，25，30。(b、c) 给出了相同图像随 $S = s - m$ 变化的曲线，分别采用垂直线性尺度和对数尺度。它们在惯性区间和耗散区均重合，证实了扩展隐对称性。虚线表示在较大的 S处，曲线指数收敛到惯性区间概率密度函数。

区间的普适分布。我们将惯性区间两侧的这些指数收敛解释为第三节所述稳定的隐藏对称态的主导扰动模态（左侧和右侧）。

D. 结构函数的自相似性

现在我们回到原始变量，分析小尺度下结构函数 $S_p(\ell_m) = \langle \mathcal{A}_m^p[u] \rangle_t$ 的标度。基于隐藏尺度不变性的表述和结论

在黏性截断模型的惯性区间内，第三节中的式（19）–（20）仍然成立。我们回顾一般公式（33）、（34）和（38），它们用重标度变量表示结构函数，并由佩龙–弗罗贝尼乌斯特征模态（41）所对应的隐藏尺度不变性（39）推出渐近幂律标度（43）。图13验证了具有反常指数 ζ_p 的幂律标度；在误差界内，这些指数与原始黏性模型图2中的结果一致。图14展示了第三节G所述的分形余维 $J(h)$，与原始壳层模型的图5相符。

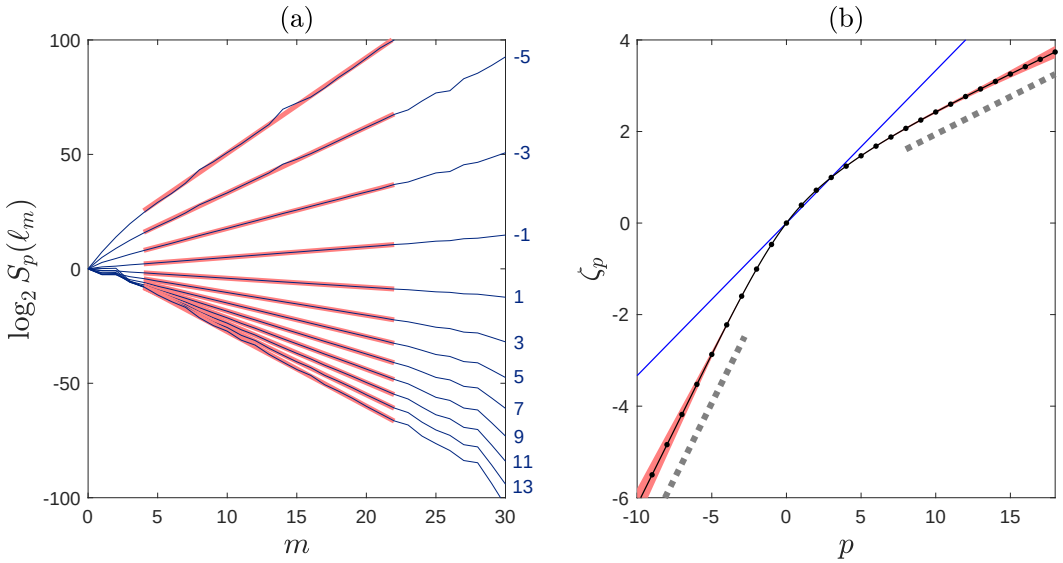

图 13. (a) 黏性截断模型中奇数阶 $p = -7, -5, \ldots, 15$ 的结构函数 $S_p(\ell_m) = \langle \mathcal{A}_m^p[u] \rangle_t$ 的对数，其中 $s = 30$。粗红线表示惯性区间内的幂律关系 $S_p(\ell_m) \propto \ell_m^{\zeta_p}$。(b) 在区间 $-10 \le p \le 18$ 内以步长 $\Delta p = 0.2$计算得到的反常指数 ζ_p。阴影区域表示误差界，蓝线对应 K41 线性依赖关系 $p/3$。虚线表示在较大的负值和正值 p处的斜率 $h_{\max}$ 和 $h_{\min}$。结果采用 $T = 2 \times 10^4$的数值模拟。

扩展隐对称性（87）并不限于惯性区间，它关联着不同截断尺度 s 下重标度变量的统计性质。下面说明，这种对称性蕴含了结构函数的标度关系，并且这些关系延伸至耗散区间。为此，我们引入一个足够大的整数 d，用于估算耗散区间内壳层的数量。根据扩展隐对称性，这个数量 d 不依赖于截断壳层 s。于是，耗散区间包含满足以下不等式的尺度 ℓ_m

$$\ell_s \le \ell_m \lesssim \ell_{s-d}, \tag{89}$$

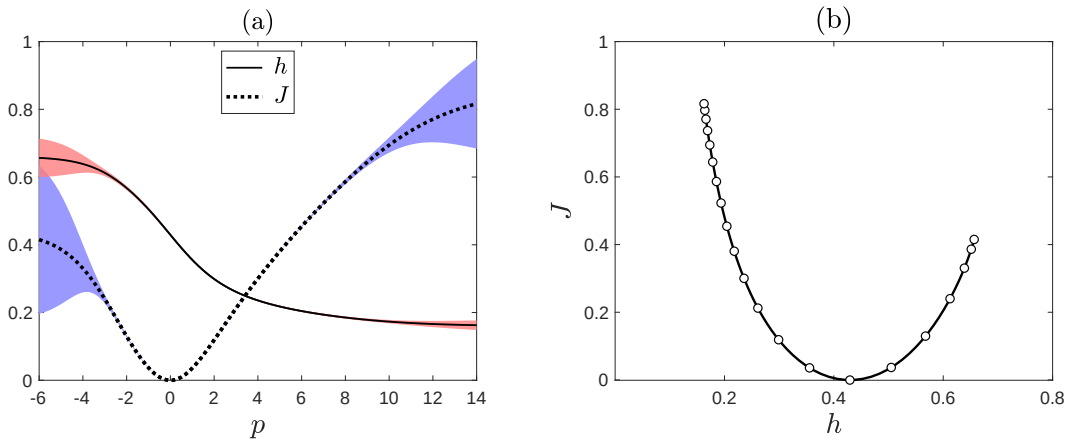

图 14. (a) 黏性截断模型中由式 (62) 给出的标度指数 h 和分形余维 J 随 p 的变化。阴影区域表示误差界。(b) 得到的函数 $J(h)$。圆圈对应 $p=-6$、.....、14 的整数值。结果采用了 $s=30$ 和 $T=2\times10^4$的数值模拟。

以及其余的小尺度

$$\ell_{s-d}\lesssim\ell_m\ll\ell_0 \tag{90}$$

属于惯性区间。

在惯性区间的尺度上，表达式 (42) 得出

$$d\mu_p^{(m)}\approx C_p\lambda_p^m\,d\nu_p. \tag{91}$$

这一关系不适用于耗散区间中更小的尺度，在这些尺度上，隐藏对称性 (19)–(20) 被破坏。不过，隐藏对称性的扩展形式 (87) 仍然成立。这意味着统计性质仅通过 m 与 s 之差 $S=s-m$依赖于它们。因此，在耗散区间 (89) 中，我们可以用以下关系替代式 (39)：

$$p^{(m)}(x_1|\mathbf{x}_\ominus)\approx\rho^{(S)}(x_1|\mathbf{x}_\ominus),\quad \mathcal{L}_p^{(m)}\approx\Lambda_p^{(S)}, \tag{92}$$

其中，我们引入了由 $S=s-m$ 编号的条件概率密度 $\rho^{(S)}$，线性算子 $\Lambda_p^{(S)}$由密度 $\rho^{(S)}$ 对应的式 (40) 给出。考虑耗散区间 (89) 中的一般关系 (38)。在尺度 $s-d$ 处使用式 (92)，再使用式 (91)，可得

$$\begin{aligned} d\mu_p^{(m)} &= \mathcal{L}_p^{(m-1)}\circ\mathcal{L}_p^{(m-2)}\circ\cdots\circ\mathcal{L}_p^{(s-d)}[d\mu_p^{(s-d)}] \\ &\approx C_p\lambda_p^{s-d}\Lambda_p^{(S+1)}\circ\Lambda_p^{(S+2)}\circ\cdots\circ\Lambda_p^{(d)}[d\nu_p] \\ &= C_p2^{-\zeta_p m}2^{-\zeta_p(S-d)}\Lambda_p^{(S+1)}\circ\Lambda_p^{(S+2)}\circ\cdots\circ\Lambda_p^{(d)}[d\nu_p], \end{aligned} \tag{93}$$

其中 $\zeta_p = -\log_2 \lambda_p$。将 (93) 代入式 (33)，并回想 $2^{-m} = \ell_m/\ell_0$ 和 $2^S = \ell_m/\ell_s$，即可得到最终表达式

$$S_p(\ell_m) \approx C_p u_0^p \left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^{\zeta_p} F_p\left(\frac{\ell_m}{\ell_s}\right), \quad \zeta_p = -\log_2 \lambda_p, \tag{94}$$

与函数

$$F_p\left(2^S\right) = \begin{cases} 2^{-\zeta_p(S-d)} \int \Lambda_p^{(S+1)} \circ \Lambda_p^{(S+2)} \circ \cdots \circ \Lambda_p^{(d)}[d\nu_p], & 0 \le S < d; \\ 1, & S \ge d. \end{cases} \tag{95}$$

此处我们还为 $S \ge d$ 指定了值 $F_p\left(2^S\right) = 1$，使得公式 (94) 在惯性区间内还原幂律 (43)。因此，表达式 (94) 描述了直至截断的小尺度上结构函数的普适形式。

可以看出，关系式 (94) 与 Kolmogorov 的 K41 理论中的公式 [14, 18]，有一定相似之处，该公式描述了能谱对波数和黏性微尺度的函数依赖关系。然而，K41 理论采用了标度对称性 (5)，其中 $h = 1/3$，而这种对称性在湍流统计中遭到破坏。相反，关系式 (94) 源自扩展隐对称性 (87)，后者在统计意义上得以恢复。

我们在图 15 中通过数值模拟验证关系式 (94)。此处，我们使用$s = 20$，25，30 的模拟，绘制补偿结构函数

$$\frac{1}{C_p u_0^p}\left(\frac{\ell_m}{\ell_0}\right)^{-\zeta_p} S_p(\ell_m) \approx F_p\left(\frac{\ell_m}{\ell_s}\right) \tag{96}$$

作为 $s - m = \log_2(\ell_m/\ell_s)$ 的函数。与（94）一致，可以观察到这些函数在耗散区间和惯性区间内都高度塌缩。只有在强迫区间内，这种塌缩才会被破坏；该区间位于每张图的右侧。

E. 隐藏对称耗散的一般形式

模型（77）–（79）只是具有扩展隐对称性（87）的一大类黏性截断模型中的一个具体例子。可以在 $\mathcal{B}_n^{(s)}[u]$ 中采用任意耗散项，只要它们具有与式（79）相同的标度性质。具体而言，这一条件可表述为正齐次性

$$\mathcal{B}_n^{(s)}[au] = a^2 \mathcal{B}_n^{(s)}[u], \quad a > 0, \tag{97}$$

以及标度关系

$$\mathcal{B}_n^{(s)}[u] = 2\mathcal{B}_{n-1}^{(s-1)}[u'], \quad u' = (u'_j)_{j\in\mathbb{Z}} = (u_{j+1})_{j\in\mathbb{Z}}. \tag{98}$$

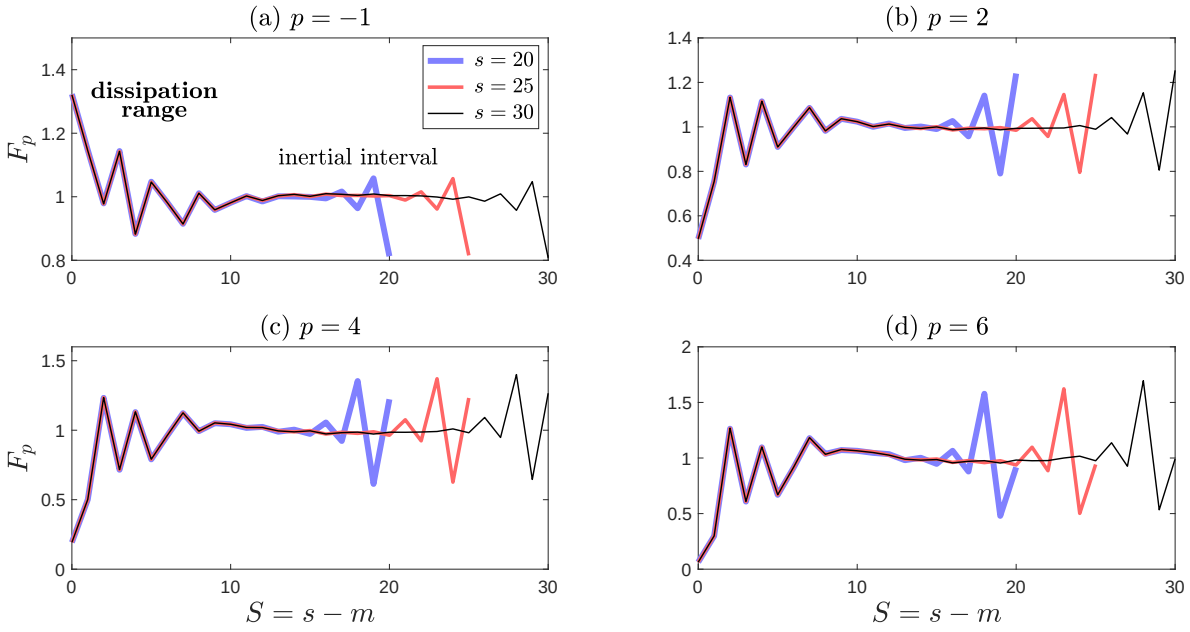

图 15. 截断尺度为 $s = 20$，25，30 时，阶数为 $p = -1$、2、4、6 的补偿结构函数 (96)。以 $S = s - m$ 为横轴，这些函数在耗散区间和惯性区间均塌缩。

可以验证，第 VB 节的推导仍然成立，并得到具有扩展隐对称性（87）的重标度表述（82）–（84）。

扩展隐对称性的恢复有助于今后的理论研究。例如，这类模型更便于对隐对称态进行更细致的分析。此外，这些模型为最优闭合提供了一个通用框架，该框架对于截断尺度具有普适性；近期沿这一方向的研究见 [7, 11, 32] 。

VI. 结论

本文阐述了隐藏标度对称性如何支配壳层模型中所有运动尺度上的湍流统计。当运动方程改写为新的速度和时间时，隐藏对称性便会显现，而这些量会被动态重标度。从几何角度看，这种重标度是相空间 [27] 中的一种投影。在本文中，我们假设给定的统计分布中恢复了隐藏对称性，这一点得到了数值模拟的有力支持。未来研究的一个重要方向是方程的构建（遵循 [12] 的思路）以及对隐藏对称统计进行稳定性分析。

本文分为三个部分。第一部分仅讨论惯性区间。这里我们回顾了先前的结果 [28] ，这些结果将结构函数的反常标度律与

隐藏对称统计所诱导的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征模态联系起来。我们将这些结果推广到了更广泛的一类可观测量。特别是，我们阐述了在隐藏对称框架下，向小尺度输送的恒定能量通量（耗散异常 [13]）如何涌现。此外，我们还表明，隐藏自相似性自然会导出大偏差理论，从而从第一原理出发，为帕里西–弗里施多重分形方法提供理论依据。

第二部分致力于探讨强迫和黏性耗散如何破坏隐藏对称性。在从强迫区间过渡到惯性区间的过程中，我们观察到了稳定隐藏对称态的一种指数衰减模态。由于重标度表述中的黏性项存在间歇性波动，耗散区间内隐藏对称性的破坏更为复杂。我们研究了这种间歇性如何影响结构函数的幂律和前因子。这种间歇性与 [15] 中提出的中间耗散区间概念密切相关。

第三部分中，我们证明重标度黏性项的间歇性并非普遍特征，而是黏性耗散模型造成的假象。我们引入了一种黏性截断模型，其中的耗散项经过了修改；对于该模型，隐藏对称性可延伸至耗散区间的所有尺度。这种对称性使结构函数呈现出自相似的函数形式，该形式在整个小尺度范围内均成立，也就是说，既适用于惯性区间，也适用于耗散区间。这一结果类似于柯尔莫哥洛夫最初提出的耗散区间自相似性，不过此处的表述针对的是统计恢复的隐藏对称性。

不可压缩 Navier–Stokes 系统中的隐藏对称性也有类似的表述，这一点既在一般理论框架 [27] 中得到展示，也通过明确推导 [29]得以证明。Navier–Stokes 系统的重标度表述结合了由时间尺度变换诱导的投影（用于壳层模型）与由伽利略对称性诱导的投影（等价于准拉格朗日描述 [1, 21]）。尽管重标度表述消除了惯性区间中的间歇性，重标度黏性项却变得具有间歇性 [29], ，与壳层模型中的情况相同。这一比较表明，本文为壳层模型提出的方法也适用于对三维不可压缩纳维–斯托克斯湍流进行类似研究。尤其是，能够在所有小尺度上恢复扩展隐对称性的改进黏性截断模型，或许有助于克服当前数值模拟的局限；我们提请读者参阅一项近期数值研究 [6] ，该研究从不同角度追求类似目标。

VII. 附录

A. 重标度方程（11）–（12）的推导

为简洁起见，省略上标（m），并利用式 (6)–(7)，可写为

$$\begin{aligned}\frac{dU_N}{d\tau} &= \mathcal{T}_m \frac{d}{dt}\frac{u_{m+N}}{\mathcal{A}_m} = \frac{1}{k_m\mathcal{A}_m^2}\frac{du_{m+N}}{dt} - \frac{u_{m+N}}{2k_m\mathcal{A}_m^4}\frac{d\mathcal{A}_m^2}{dt} \\ &= \frac{1}{k_m\mathcal{A}_m^2}\frac{du_{m+N}}{dt} - \frac{u_{m+N}}{k_m\mathcal{A}_m^4}\sum_{j\geq 0}\alpha^j \,\mathrm{Re}\left(u_{m-j}^*\frac{du_{m-j}}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{k_m\mathcal{A}_m^2}\frac{du_{m+N}}{dt} - \frac{U_N}{k_m\mathcal{A}_m^2}\sum_{j\geq 0}\alpha^j \,\mathrm{Re}\left(U_{-j}^*\frac{du_{m-j}}{dt}\right).\end{aligned} \tag{99}$$

利用式（2）–（3）中的 $k_m = 2^m k_0$，再利用式（4）、（7）和（12），可得

$$\frac{1}{k_m\mathcal{A}_m^2}\frac{du_{m+N}}{dt} = \frac{\mathcal{B}_{m+N}[u]}{2^m\mathcal{A}_m^2} - \frac{\nu k_m 4^N u_{m+N}}{\mathcal{A}_m^2} = \mathcal{B}_N[U] - \frac{\nu k_m}{\mathcal{A}_m}4^N U_N = \mathcal{B}_N[U] - \frac{4^N U_N}{\mathrm{R}_m[u]}. \tag{100}$$

将 $N \mapsto -j$ 替换为 $j \leq m-1$，可得类似表达式

$$\frac{1}{k_m\mathcal{A}_m^2}\frac{du_{m-j}}{dt} = \mathcal{B}_{-j}[U] - \frac{4^{-j}U_{-j}}{\mathrm{R}_m[u]}, \tag{101}$$

根据边界条件（2），含有 $j \geq m$ 的导数项为零。将表达式（100）和（101）代入式（99），可得重标度方程（11）。

由边界条件（2）和关系式（7）可立即推出，将 $U_N^{(m)} = 0$ 替换为 $N < -m$。利用条件（2）和式（6）的第一个关系式的平方，可将其表示为

$$u_0 = \sqrt{\alpha^{-m}\mathcal{A}_m^2[u] - \sum_{j=0}^{m-1}\alpha^{j-m}|u_{m-j}|^2}. \tag{102}$$

于是，剩余重标度速度 $U_{-m}^{(m)}$ 满足关系式 (7) 和 (102)：

$$U_{-m}^{(m)} = \frac{u_0}{\mathcal{A}_m[u]} = \sqrt{\alpha^{-m} - \sum_{j=0}^{m-1}\alpha^{j-m}\left(\frac{|u_{m-j}|}{\mathcal{A}_m[u]}\right)^2} = \sqrt{\alpha^{-m} - \sum_{j=0}^{m-1}\alpha^{j-m}\left|U_{-j}^{(m)}\right|^2}. \tag{103}$$

B. 隐藏标度对称性的推导

现在我们展示系统（17）关于隐藏标度变换（19）–（20）的不变性。利用（20）给出的新变量，可写为

$$\frac{d\hat{U}_N}{d\hat{\tau}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha+|U_1|^2}}\frac{d}{d\tau}\frac{U_{N+1}}{\sqrt{\alpha+|U_1|^2}} = \frac{1}{2(\alpha+|U_1|^2)}\frac{dU_{N+1}}{d\tau} - \frac{U_{N+1}}{2(\alpha+|U_1|^2)^2}\,\mathrm{Re}\left(U_1^*\frac{dU_1}{d\tau}\right). \tag{104}$$

代入（17）中的导数可得

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{U}_N}{d\hat{\tau}} &= \frac{1}{2(\alpha+|U_1|^2)}\left(\mathcal{B}_{N+1}[U]-U_{N+1}\sum_{j\geq 0}\alpha^j\mathrm{Re}\left(U_{-j}^*\mathcal{B}_{-j}[U]\right)\right)\\ &\quad -\frac{U_{N+1}}{2(\alpha+|U_1|^2)^2}\left(\mathrm{Re}\left(U_1^*\mathcal{B}_1[U]\right)-|U_1|^2\sum_{j\geq 0}\alpha^j\mathrm{Re}(U_{-j}^*\mathcal{B}_{-j}[U])\right) \qquad (105)\\ &= \frac{\mathcal{B}_{N+1}[U]}{2(\alpha+|U_1|^2)}-\frac{U_{N+1}}{2(\alpha+|U_1|^2)^2}\sum_{j\geq -1}\alpha^{j+1}\mathrm{Re}\left(U_{-j}^*\mathcal{B}_{-j}[U]\right).\end{aligned}$$

利用方程（20）和（4），并改变求和变量 $j'=j+1$，可得

$$\frac{d\hat{U}_N}{d\hat{\tau}}=\mathcal{B}_N[\hat{U}]-\hat{U}_N\sum_{j'\geq 0}\alpha^j\mathrm{Re}\left(\hat{U}_{-j'}^*\mathcal{B}_{-j'}[\hat{U}]\right), \qquad (106)$$

其形式与原方程（17）相同。

C. 广义乘子的表达式

利用方程（6），可推导得

$$\frac{\mathcal{A}_n[u]}{\mathcal{A}_{n-1}[u]}=\sqrt{\frac{\sum_{j\geq 0}\alpha^j|u_{n-j}|^2}{\sum_{j\geq 0}\alpha^j|u_{n-1-j}|^2}}=\sqrt{\frac{|u_n|^2+\sum_{j\geq 1}\alpha^j|u_{n-j}|^2}{\sum_{j\geq 1}\alpha^{j-1}|u_{n-j}|^2}}=\sqrt{\alpha+\frac{\alpha|u_n|^2}{\sum_{j\geq 1}\alpha^j|u_{n-j}|^2}}. \qquad (107)$$

将最后一个分数的分子和分母同时除以 $\mathcal{A}_m^2[u]$，并利用方程（7），可得

$$\frac{\mathcal{A}_n[u]}{\mathcal{A}_{n-1}[u]}=\sqrt{\alpha+\frac{\alpha|u_n|^2/\mathcal{A}_m^2[u]}{\sum_{j\geq 1}\alpha^j|u_{n-j}|^2/\mathcal{A}_m^2[u]}}=\sqrt{\alpha+\frac{\alpha\left|U_N^{(m)}\right|^2}{\sum_{j\geq 1}\alpha^j\left|U_{N-j}^{(m)}\right|^2}}=\mathcal{X}_N[U^{(m)}], \qquad (108)$$

其中 $n=m+N$，最后一个表达式由定义（25）得到。

D. 数值模拟的详细信息

在壳层模型中，我们取 $\ell_0=u_0=1$ 并考虑 $\alpha=1/8$ 的重标度变量。数值模拟使用 MATLAB 求解器 [34]（原始黏性模型采用 ode15s，黏性截断模型采用 ode45）进行，容差设为 $RelTol=10^{-7}$ 和 $AbsTol=10^{-8}$。对于初始条件，我们采用类 K41 状态 $u_n=e^{-i\theta_n}k_n^{-1/3}$，并设置相互独立的随机相位 θ_n。跳过包含瞬态行为的初始时间区间 $\Delta t=20$ 后，我们使用在长时间区间 $t\in[0,T]$ 内获得的数据。在数值模拟中，我们通过对相应方程进行积分，评估不同参考壳层的重标度时间；这些方程利用定义（6）—（7）写成$d\tau^{(m)}/dt=k_m\mathcal{A}_m[u]$。

我们采用标准直方图方法计算统计性质，权重系数与时间步成正比。需要注意的是，重标度变量的统计量必须使用相应的时间 $\tau^{(m)}$ 进行计算。边缘密度 $f_p(x_0)$ 的计算针对测度 $d\mu_p^{(m)}$（$\mathbf{x}_\ominus$）进行，方法类似，但需额外加入由表达式（34）得到的权重系数。另一种方法来自对方程（26）和（33）的比较：可以在乘子 x_0 的每个分箱内，将量 $\mathcal{A}_m^p[u]\Delta t/(T\,\Delta x_0)$ 求和，以估计 $f_p(x_0)$；其中，Δt 是原始时间中的一个时间步，Δx_0 是分箱大小。类似的直方图方法也可用于根据（56）计算密度 $f_\psi(\psi)$。

图 2 和图 13 中的指数 ζ_p 是用最小二乘法计算的。误差估计为均方根偏差的四倍除以插值壳层的数量。我们强调，这类误差估计并不十分可靠，因为它们仅涉及统计涨落，而偏差也可能由强迫和耗散效应引起。

E. 用重标度变量表示的结构函数

我们将式 (26) 写为

$$S_p(k_m) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{A}_m^p[u]dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T \mathcal{A}_m^p[u]dt}{\int_0^T dt}. \tag{109}$$

经过式 (6)–(7) 中的时间变换 $dt = d\tau^{(m)}/(k_m\mathcal{A}_m)$ 后，我们得到

$$S_p(k_m) = \lim_{T^{(m)}\to\infty} \frac{\int_0^{T^{(m)}} \mathcal{A}_m^{p-1}[u]d\tau^{(m)}}{\int_0^{T^{(m)}} \mathcal{A}_m^{-1}[u]d\tau^{(m)}} = \frac{\langle \mathcal{A}_m^{p-1}[u]\rangle_{\tau^{(m)}}}{\langle \mathcal{A}_m^{-1}[u]\rangle_{\tau^{(m)}}}, \tag{110}$$

其中，极限 $\tau^{(m)} = T^{(m)}$ 对应于 $t = T$，而 $\mathcal{A}_m[u]$ 必须表示为 $\tau^{(m)}$ 的函数。对于后者，我们使用式 (28)，由此得到式 (29)。

根据定义，乘子 $x_1 = \mathcal{X}_1[U^{(m)}]$ 和 $\mathbf{x}_\ominus = \boldsymbol{\mathcal{X}}_\ominus[U^{(m)}]$ 的联合统计由概率测度给出

$$p^{(m)}(x_1|\mathbf{x}_\ominus)\,dx_1\,d\mu^{(m)}(\mathbf{x}_\ominus). \tag{111}$$

我们来求测度 $d\mu^{(m+1)}(\tilde{}\mathbf{x}_\ominus)$，它描述了乘子统计 $\tilde{}\mathbf{x}_\ominus = \boldsymbol{\mathcal{X}}_\ominus[U^{(m+1)}]$ 随时间 $\tau^{(m+1)}$变化的情况。时间 $\tau^{(m)}$和 $\tau^{(m+1)}$由方程 (6)、(7) 和 (24) 联系起来，如下所示

$$\frac{d\tau^{(m+1)}}{d\tau^{(m)}} = \frac{k_{m+1}\mathcal{A}_{m+1}[u]}{k_m\mathcal{A}_m[u]} = 2\mathcal{X}_1[U^{(m)}]. \tag{112}$$

因此，时间从 $\tau^{(m)}$变为 $\tau^{(m+1)}$会在概率测度中引入密度因子 $x_1/\langle\mathcal{X}_1[U^{(m)}]\rangle_{\tau^{(m)}}$；例如参见 [9, §10.3]。利用式 (24)，可推导出恒等式

$$\tilde{\mathbf{x}}_\ominus = (\tilde{x}_0, \tilde{\mathbf{x}}_-) = (x_1, \mathbf{x}_\ominus) \tag{113}$$

对于乘子 $\tilde{\mathbf{x}}_{\ominus} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\ominus}[U^{(m+1)}]$。利用这一关系以及式 (111) 中的时间因子，我们得到

$$d\mu^{(m+1)}(\tilde{\mathbf{x}}_{\ominus}) = \frac{x_1\, p^{(m)}(x_1|\mathbf{x}_{\ominus})}{\langle \mathcal{X}_1[U^{(m)}]\rangle_{\tau^{(m)}}}\, dx_1\, d\mu^{(m)}(\mathbf{x}_{\ominus}) = \frac{\tilde{x}_0\, p^{(m)}(\tilde{x}_0|\tilde{\mathbf{x}}_{-})}{\langle \mathcal{X}_1[U^{(m)}]\rangle_{\tau^{(m)}}}\, d\tilde{x}_0\, d\mu^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}_{-}). \tag{114}$$

利用公式 (34)、(114) 和 (113)，我们推导出表达式 (35) 如下

$$\begin{aligned} d\mu_p^{(m+1)}(\tilde{\mathbf{x}}_{\ominus}) &= \frac{\big(\prod_{j=0}^{m}\tilde{x}_{-j}\big)^{p-1}}{\int \big(\prod_{j=0}^{m}\tilde{x}_{-j}\big)^{-1} d\mu^{(m+1)}}\, d\mu^{(m+1)}(\tilde{\mathbf{x}}_{\ominus}) \\ &= \frac{\tilde{x}_0^{p}\, p^{(m)}(\tilde{x}_0|\tilde{\mathbf{x}}_{-})\,\big(\prod_{j=1}^{m}\tilde{x}_{-j}\big)^{p-1}}{\int p^{(m)}(\tilde{x}_0|\tilde{\mathbf{x}}_{-})\, d\tilde{x}_0\,\big(\prod_{j=1}^{m}\tilde{x}_{-j}\big)^{-1} d\mu^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}_{-})}\, d\tilde{x}_0\, d\mu^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}_{-}) \\ &= \tilde{x}_0^{p}\, p^{(m)}(\tilde{x}_0|\tilde{\mathbf{x}}_{-})\, d\tilde{x}_0\, \frac{\big(\prod_{j=1}^{m}\tilde{x}_{-j}\big)^{p-1}}{\int \big(\prod_{j=1}^{m}\tilde{x}_{-j}\big)^{-1} d\mu^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}_{-})}\, d\mu^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}_{-}) \\ &= \tilde{x}_0^{p}\, p^{(m)}(\tilde{x}_0|\tilde{\mathbf{x}}_{-})\, d\tilde{x}_0\, d\mu_p^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}_{-}), \end{aligned} \tag{115}$$

其中我们还使用了全概率条件 $\int p^{(m)}(\tilde{x}_0|\tilde{\mathbf{x}}_{-})\, d\tilde{x}_0 \equiv 1$。

现在考虑序列 $\Psi_m[u]$ 以及公式 (7) 中的重标度速度。利用关系式 (46) 与 $a = \mathcal{A}_m[u]$，并将关系式 (47) 迭代应用 m 次，可得

$$\Psi_m[u] = \Psi_0[U^{(m)}]\, \mathcal{A}_m^{p}[u]. \tag{116}$$

类似于在 (109)–(110) 中推导出的公式 (29)，可得

$$\langle \Psi_m[u]\rangle_t = \frac{\big\langle \Psi_0[U^{(m)}]\big(\prod_{j=0}^{m-1}\mathcal{X}_{-j}[U^{(m)}]\big)^{p-1}\big\rangle_{\tau^{(m)}}}{\big\langle \big(\prod_{j=0}^{m-1}\mathcal{X}_{-j}[U^{(m)}]\big)^{-1}\big\rangle_{\tau^{(m)}}}. \tag{117}$$

考虑测度

$$\rho_f^{(m)}(\psi|\mathbf{x}_{\ominus})\, d\psi\, d\mu_0^{(m)}(\mathbf{x}_{\ominus}) \tag{118}$$

它描述变量 $\psi = \Psi_0[U^{(m)}]$ 与 $\mathbf{x}_{\ominus} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\ominus}[U^{(m)}]$ 的联合统计。将此测度代入公式 (117)，得到关系式 (49)，其中测度 $d\mu_p^{(m)}(\mathbf{x}_{\ominus})$ 定义见 (34)。

F. 使用 G¨artner–Ellis 定理的推导

在 [3 中] 5, §3.3.1], G¨artner–Ellis 定理是在以下假设下表述的：

$$\lambda(k) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log\langle e^{mkX_m}\rangle \tag{119}$$

对所有 $k \in \mathbb{R}$ 都存在且可微，其中 X_m 是一列以正整数为索引 m 的实随机变量。则 X_m 满足如下形式的大偏差原理：

$$P(X_m \in [x, x+dx]) \sim e^{-mI(x)}dx, \tag{120}$$

其速率函数 $I(x)$ 由下式给出

$$I(x) = \sup_{k\in\mathbb{R}} \big(kx - \lambda(k)\big). \tag{121}$$

表达式 (121) 是勒让德变换，其众所周知的逆变换为

$$\lambda(k) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \big(kx - I(x)\big). \tag{122}$$

可以验证，若作如下对应，方程 (119)–(122) 可写成形式 (59)–(61) 和 (63)

$$k = p, \quad X_m = -W_m \log 2, \quad x = -h \log 2, \quad \lambda(k) = -\zeta_p \log 2, \quad I(x) = J(h) \log 2. \tag{123}$$

致谢。 作者感谢 Berengere Dubrulle、Dmytro Bandak、Luca Biferale 和 Simon Thalabard 提供的有益讨论。本研究得到 CNPq 项目 308721/2021-7 和 FAPERJ 项目 E-26/201.054/2022 的资助。

---

[1] V. I. Belinicher 和 V. S. L'vov. Fully developed hydrodynamic turbulence 的尺度不变理论。*Soviet Physics – JETP*, 66(2):303–313, 1987.[2] R. Benzi、L. Biferale 和 G. Parisi. 湍流级联模型中的间歇性。*Physica D*, 65(1-2):163–171, 1993.[3] R. Benzi、L. Biferale、M. Sbragaglia 和 F. Toschi. 湍流中的间歇性：计算壳层模型中的标度指数。*Physical Review E*, 68(4):046304, 2003.[4] L. Biferale. 湍流能量级联的壳层模型。*Ann. Rev. Fluid Mech.*, 35:441–468, 2003.[5] L. Biferale、G. Boffetta、A. Celani 和 F. Toschi. 湍流及湍流模型中的多时间、多尺度关联函数。*Physica D*, 127(3-4):187–197, 1999.[6] L. Biferale、F. Bonaccorso、M. Buzzicotti 和 K. P. Iyer. 惯性区湍流的自相似亚格子尺度模型及间歇性的精确测量。*Physical Review Letters*, 123(1):014503, 2019.[7] L. Biferale、A. A. Mailybaev 和 G. Parisi. 湍流壳层模型的最优亚格子方案。*Physical Review E*, 95(4):043108, 2017.[8] J. C. Bowman、C. R. Doering、B. Eckhardt、J. Davoudi、M. Roberts 和 J. Schumacher. 重新审视 GOY 模型中耗散、间歇性与螺旋度之间的联系。*Physica D: Nonlinear Phenomena*, 218(1):1–10, 2006.

[9] I. P. Cornfeld、S. V. Fomin 和 Y. G. Sinai. 遍历理论. Springer, 2012.[10] K. Deimling. 非线性泛函分析. Courier Corporation, 2010.[11] J. Domingues Lemos. 湍流模型时间相关闭合的数据驱动方法. 博士论文，IMPA，里约热内卢，2022年.[12] G. L. Eyink、S. Chen 和 Q. Chen. 湍流中的吉布斯假设。《统计物理学杂志》, 113(5-6):719–740, 2003.[13] G. L. Eyink 和 K. R. Sreenivasan. Onsager 与流体动力学湍流理论。《现代物理评论》, 78(1):87, 2006.[14] U. Frisch. 湍流：*A.N. Kolmogorov* 的遗产. 剑桥大学出版社，1995.[15] U. Frisch 和 M. Vergassola. 多重分形模型的预测：中间耗散区间。《欧洲物理快报》, 14:439–444, 1991.[16] E. B. Gledzer. 具有两个二次运动积分的流体动力学型系统。《苏联物理学文献汇编》, 18:216, 1973.[17] K. P. Iyer 、 G. P. Bewley 、 L. Biferale 、 K. R. Sreenivasan 和 P. K. Yeung. 各向同性湍流中调制幂律指数的振荡：实验与数值模拟的比较。*PhysicalReview Letters*, 126(25):254501, 2021.[18] A. N. Kolmogorov. 极大雷诺数下不可压缩黏性流体中湍流的局部结构。《苏联科学院院刊》, 30(4):299–303, 1941.[19] A. N. Kolmogorov. 对高雷诺数下黏性不可压缩流体中湍流局部结构的先前假设的修正。《流体力学杂志》, 13(1):82–85, 1962.[20] P. D. Lax. 线性代数及其应用. Wiley，新泽西州，2007.[21] V. S. L'vov. Fully developed hydrodynamic turbulence 的尺度不变理论——哈密顿方法。《物理学报告》, 207(1):1–47, 1991.[22] V. S. L'vov、E. Podivilov、A. Pomyalov、I. Procaccia 和 D. Vandembroucq. 改进的湍流壳层模型。《物理评论*E*辑》, 58(2):1811, 1998.[23] V. S. L'vov、E. Podivilov 和 I. Procaccia. 流体动力学湍流中的时间多重标度。*PhysicalReview E*, 55(6):7030, 1997.[24] V. S. L'vov 和 I. Procaccia. 湍流反常指数的解析计算：利用融合规则揭示小参数。*Physical Review E*, 62(6):8037, 2000.[25] A. A. Mailybaev. 壳层模型中间歇性湍流的隐藏尺度不变性。《物理评论：流体》, 6(1):L012601, 2021年.[26] A. A. Mailybaev. 可解的湍流间歇性壳层模型。《数学物理通讯》, 388:469–478, 2021年.[27] A. A. Mailybaev. 湍流中的隐藏时空对称性与间歇性。《非线性》, 35:3630–3679, 2022年.[28] A. A. Mailybaev. 壳层模型中的间歇性即隐藏自相似性。《物理评论：流体》, 7(3):034604, 2022年.

[29] A. A. Mailybaev 和 S. Thalabard。《纳维–斯托克斯湍流间歇性的隐藏尺度不变性》。英国皇家学会哲学汇刊 *A* 辑，380:20210098，2022年。[30] D. Mitra 和 R. Pandit。《流体湍流中动态多重标度的多样性》。《物理评论快报》，93(2):024501，2004年。[31] K. Ohkitani 和 M. Yamada。《充分发展湍流模型中能量级联过程的时间间歇性与局部李雅普诺夫分析》。《理论物理进展》，81(2):329–341，1989年。[32] G. Ortali、A. Corbetta、G. Rozza 和 F. Toschi。《迈向湍流闭合的数值证明》。*arXiv*预印本：*2202.09289*，2022年。[33] G. Parisi 和 U. Frisch。《关于充分发展湍流的奇异性结构》。载于 M. Ghil、R. Benzi 和 G. Parisi 编，《地球物理流体动力学中的可预测性》，第84–87页。North-Holland，阿姆斯特丹，1985年。[34] L. F. Shampine 和 M. W. Reichelt。《MATLAB 常微分方程套件》。《*SIAM*科学计算杂志》，18(1):1–22，1997年。[35] H. Touchette。《统计力学的大偏差方法》。《物理学报告》，478(1-3):1–69，2009年。[36] N. Vladimirova、M. Shavit 和 G. Falkovich。《斐波那契湍流》。《物理评论*X*》，11:021063，2021年。