arXiv:2302.01081v2 [math.AG] 1 Oct 2024

k-非整环值几何点空间

by

阿马蒂亚·戈斯瓦米

摘要。——本文旨在研究含零因子的代数集的拓扑性质。我们在 k-代数的真理想集合上赋予一种子基拓扑，由此得到的新“k-空间”是相应 Zariski 空间的推广。我们证明，k-空间是 T_0, 拟紧的、谱的且连通的。此外，我们还研究此类 k-空间之间的连续映射。最后，我们提出一个问题：能否构造一种 k-空间的层，使之类似于仿射概形。

1. 引言

在 [2], Grothendieck 的引言中，他描述了如何从多项式方程组出发，得到素理想谱（也称为几何点）。简而言之，过程如下。

设 k 是一个带幺元的交换环。令 $P_I = k[(x_i)_{i\in I}]$ 为以不定元 x_i 为变量、系数取自 k 的多项式环，I 为一个指标集（不一定有限）。设 $S = \{p_j\}_{j\in J}$ 是 P_I 中的一个多项式组，其中指标集 J 也不一定有限。k-代数 A 的一个元素 $a = (a_i)_{i\in I}$ 称为该多项式组 S 的一个解，若对于所有 $j \in J$，都有 $p_j(a) = 0$。

如果 Alg_k 和 Sets 分别表示 k-代数范畴和集合范畴，那么一个函子

$$\mathcal{V}_S : \mathbb{A}\mathrm{lg}_k \to \mathbb{S}\mathrm{ets}$$

当且仅当 $\mathcal{V}_S$ 可表时，才表示某个由系数属于 k 的多项式方程组成的方程组 S 的解；也就是说，$\mathcal{V}_S$ 同构于某个 Alg_k 中对象 A 所对应的 $\mathcal{R}_A$。反过来，对于 Alg_k 中的每个对象 A，可表函子 $\mathcal{R}_A$ 同构于某个 $\mathcal{V}_S$。函子 $\mathcal{R}_A$ 称为由 A 表示的 k 上仿射代数空间。仿射代数空间范畴 Aff_k 以可表函子 $\mathcal{R}_A$（A 是 Alg_k 中的对象）为对象，态射定义为自然变换，即它们是诱导映射

$$\mu(f) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}\mathrm{lg}_k}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}\mathrm{lg}_k}(A', B)$$

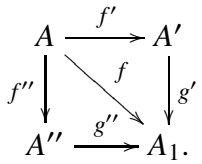
由 Alg_k 中的态射 $f : A' \to A$ 得到。A′-值点是一个 k-代数同态 $f : A \to A'$，也就是说，f 是集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}\mathrm{lg}_k}(A, A')$ 中的一个元素。如果我们将 A′ 限定为 Alg_k 的全子范畴 Field_k 中的对象，那么 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}\mathrm{lg}_k}(A, A')$ 中的元素就称为几何点。

2020 年数学主题分类。——14A20；14A99；16D25。关键词与短语。——几何点；连通性；谱空间。

我们如下定义几何点之间的等价关系。若存在第三个几何点 $f: A \to A_1$，以及 k-代数态射 $g': A' \to A_1$ 和 $g'': A'' \to A_1$，使得两个几何点 $f': A \to A'$ 和 $f'': A \to A''$ 满足下述条件，则称它们等价：

$$f = g'' \circ f'' = g' \circ f' \tag{1}$$

也就是说，下面的图表可交换：



由于g'和g''都是单态射，我们注意到，条件（1）等价于 $\ker f' = \ker f''$。因此，上述关系的等价类与A的素理想一一对应。现在，几何点与一个k-代数A的素理想之间存在一一对应关系。一个k-代数A的轨迹就是几何点的等价类。

A 的谱（记作 Spec A）定义为 A 的素理想集合，也就是说，$X = \operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ 是 } A \text{ 的素理想}\}$。对于 $S = \{\mathfrak{p}_j\}_{j \in J}$ 是 P_I 的一个多项式组的情形，令 $\mathcal{V}(S)$ 表示 Spec A 中由下式定义的子集

$$\mathcal{V}(S) = \{\text{set of loci of } u \in \mathcal{R}_A(A') \mid f_i(u) = 0, \forall_{i \in I} f_i \in S\},$$

其中 $f_i(u)$ 由 $f_i(u) = u(f_i)$ 定义。根据上述对 $\mathcal{V}(S)$ 的定义，我们立即看到

$$\mathcal{V}(S) = \{\mathfrak{p} \in X \mid S \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

由上可知，为了得到 Spec A，我们使用了 Alg_k 的全子范畴 Field_k。

如果我们去掉对 k-代数的这一“限制”，得到的便是一个谱 $\mathrm{Idl}A$，它包含 A 的所有理想（而非素理想）。这使我们能够研究在任意 k-代数（不一定是域）中有解的多项式方程。由于 $A \notin \operatorname{Spec} A$，我们也将 A 的所有真理想构成的集合 $\mathrm{Spi}A$ 视为我们的“广义”谱，并在其上赋予一种拓扑，称之为 k-空间。我们选择记号 $\mathrm{Spi}\,A$，是为了与格罗滕迪克A 的极大理想所用的记号 $\mathrm{Spm}A$ 保持“协调”，如 Grothendieck[2]所述。一个k-空间是 Zariski 空间（即，赋予 Zariski 拓扑的 $\operatorname{Spec}A$）的推广。本文旨在研究 k-空间的拓扑性质，并同时将其与 Zariski 空间进行比较。

2. k-空间

为了构造一个k-空间，我们使用命题2.2中定义的两个映射。类似的映射也出现在我们取整环上的多项式的值时（以便在 Spec$A$上赋予 Zariski 拓扑）。在讨论这些映射的性质之前，先来看一个与我们当前情境相关的例子。

例 2.1. — 我们考虑一个具有k-零因子的代数及其代数集。表1 中列出的多项式均为最低次数。

$\mathbb{Z}_4$的子集	多项式	$\mathbb{Z}_4$的代数集	多项式
$\emptyset$	$\mathbb{Z}_4\backslash\{0\}$	$\emptyset$	1
$\{0\}$	$\{ax\}$	$\{0\}$	x
$\{1\}$	$\{轴+b \mid a+b=0\}$	$\{1\}$	$x+3$
$\{2\}$	$\{轴+b \mid 2a+b=0\}$	$\{2\}$	$(x+2)$
$\{3\}$	$\{轴+b \mid 3a+b=0\}$	$\{3\}$	$x+1$
$\{0,1\}$	$\{ax^2+bx+c \mid a+b=0, c=0\}$	$\{0,1\}$	$x(x+3)$
$\{0,2\}$	$\{a^2+b+c \mid 2b=0, c=0\}$	$\{0,2\}$	$x(x+2)$
$\{0,3\}$	$\{ax^2+bx+c \mid a+3b=0, c=0\}$	$\{0,3\}$	$x(x+1)$
$\{1,2\}$	$\{ax^2+bx+c \mid a-b=0, 2a+c=0\}$	$\{1,2\}$	$(x+3)(x+2)$
$\{1,3\}$	$\{ax^2+bx+c \mid 2b=0, 2a+2c=0\}$	$\{1,3\}$	$(x+3)(x+1)$
$\{2,3\}$	$\{ax^2+bx+c \mid a+b=0, 2b+c=0\}$	$\{2,3\}$	$(x+2)(x+1)$
$\{0,1,2\}$	$\{ax^2+bx+c \mid a+b=0, 2b=0\}$	$\{0,1,2\}$	$x(x+3)(x+2)$
$\{0,1,3\}$	$\{ax^2+bx+c \mid a+b=0, 2b=0\}$	$\{0,1,3\}$	$x(x+3)(x+1)$
$\{0,2,3\}$	$\{ax^2+bx+c \mid a+b=0, 2b=0\}$	$\{0,2,3\}$	$x(x+2)(x+1)$
$\{1,2,3\}$	$\{轴^2+轴+c \mid a+b=0, 2b=0\}$	$\{1,2,3\}$	$(x+3)(x+2)(x+1)$
$\mathbb{Z}_4$	$\{轴+b \mid a=0, b=0\}$	$\mathbb{Z}_4$	$x(x+3)(x+2)(x+1)$

表 1： $\mathbb{Z}_4$的代数集

命题 2.2。— 定义映射 $\mathrm{Spi}A \to \mathfrak{P}(A)$ 如下：

$$\mathcal{V}(\{x\}) = \{\mathfrak{a} \in \mathrm{Spi}\,A \mid x \in \mathfrak{a}\}, \quad \mathcal{I}(S) = \cap\{\mathfrak{s} \mid \mathfrak{s} \in S\},$$

其中 $S \subseteq \mathrm{Spi}\,A$。 这里，P(A) 表示 A 的幂集。于是 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{I}$ 满足以下性质 *s.*

1. $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S \rangle)$，其中 $\langle S \rangle$ 是由子集 S 生成的 A 的理想。2. 映射 $\mathcal{V}$ 是反序且满射的。3. 若 a 是 A 的非根理想，则 $\mathcal{V}(a) \subsetneq \mathcal{V}(\sqrt{a})$ 当且仅当 A 有非零零因子。4. 对于 A 的任意两个理想 a、b，我们有

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

5. 对于集合族 $\{\mathcal{V}(a_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$，我们有 $\mathrm{T}_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{V}(a_\alpha) = \mathcal{V}(\mathrm{P}_{\alpha\in\Gamma} a_\alpha)$。6. $\mathcal{V}(a) = \mathrm{Spi}\,A$ 当且仅当 $a = o$，其中 o 是 A 的零理想。若 $\mathcal{V}(a) = \emptyset$，则 $a = A$。7. 对于 A 的任意两个理想 a、b，若 $b \subseteq \sqrt{a}$，则 $\mathcal{V}(\sqrt{a}) \subseteq \mathcal{V}(b)$。8. 映射 $\mathcal{I}$ 是反序且满射的。9. $\mathcal{I}(\emptyset) = A$ 且 $\mathcal{I}(S_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda) = \mathrm{T}_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{I}(T_\lambda)$。10. 若 T 是 Spi A 的子集且 a 是 A 的理想，则 $\mathcal{I}\mathcal{V}(a) \supseteq a$，且 $\mathcal{V}\mathcal{I}(T) = T$。11. 集合族 $\mathcal{C}_\mathcal{V} = \{\mathcal{V}(a) \mid a \in \mathrm{Idl}(A)\}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathcal{V}\mathcal{I}} = \{\mathcal{V}\mathcal{I}(S) \mid S \in \mathcal{P}(\mathrm{Spi}\,A)\}$ 相同，其中 Idl A 表示 A 的所有理想在包含关系下构成的偏序集。

注 2.3。——注意，对于 Spec*A* 以及 A 的任意理想，我们总能在（3）和（4）中得到等式。注意，对于 Spec*A*，我们总有： $\mathcal{I}\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$，即 a 的根（参见 命题 2.2 （10））

2.1. k-拓扑。——对于 Spec A，集合 $\{\mathcal{V}(a)\}_{a\in \mathrm{Idl}\,A}$ 在有限并下封闭，从而在 Spec A 上得到通常的 Zariski 拓扑。但对于 Spi A，这一闭包性质不成立（见定理 2.2(4)）。然而，作为一个子基，$\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ 或等价地由 $\mathcal{C}_{\mathcal{V}\mathfrak{J}}$（见命题 2.2（11））在 Spi A 上诱导出唯一的拓扑，我们称之为 k-拓扑。我们将相应的拓扑空间记为（Spi A，$\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$），简记为 k-空间。滥用记号时，我们也将该空间记为 Spi A。当我们将 Spi A 限制到 Spec A 时，k-拓扑与 Zariski 拓扑重合。注意，Dube & Goswami [1]已经对环的各种理想类上的类似拓扑进行了研究。

众所周知，Zariski 空间是拟紧的。k-空间也具有同样的性质。在证明中，我们将使用亚历山大子基定理。

命题 2.4。— k-空间是拟紧的。

证明。— 设 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 k-空间 SpiA 的一族子基闭集，满足 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha = \emptyset$。设 $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 A 的一族理想，使得 $\forall \alpha \in \Lambda, K_\alpha = \mathcal{V}(s_\alpha)$。由于

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{V}(s_\alpha) = \mathcal{V}\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} s_\alpha\right),$$

我们得到 $\mathcal{V}(\sum_{\alpha\in\Lambda} s_\alpha) = \emptyset$，而由命题 2.2 (6) 可知 $\sum_{\alpha\in\Lambda} s_\alpha = A$。于是，特别地，我们得到 $1 = \sum_{\alpha_i\in\Lambda} s_{\alpha_i}$，其中 $s_{\alpha_i} \in s_{\alpha_i}$ 且 $s_{\alpha_i}, 0$，$i = = 1, \ldots, n$。这意味着 $A = \sum_{i=1}^{n} s_{\alpha_i}$。因此，$\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} = \emptyset$，故由亚历山大子基定理，Spi A 是拟紧的。□

Since $\mathcal{V}(a)$ $\mathcal{V}(a')$ 对于 Idl A 中任意两个不同的元素 a 和 a′，我们立即得到

命题 2.5。— 每个 k-空间都是 T_0。

已知 $\{\mathcal{V}(p) \mid p \in \mathrm{Spec}A\}$ 正好是 Zariski 空间的不可约闭子集。对于 k-空间，情况更加有趣。

定理 2.6。— k-空间的每个非空次基闭子集都是不可约的 .

证明。— 由于对于 k-空间 Spi A 的每个非空次基闭子集 $\mathcal{V}(a)$，理想 a 也属于 Spi A，因此只需证明对于每个 $a \in$ Spi A，都有 $\mathcal{V}(a) = \mathcal{C}l(a)$。注意，$\mathcal{C}l(a)$ 是包含 a 的最小闭集，而 $\mathcal{V}(a)$ 是一个闭集，使得 $a \in$ Spi A。因此，$\mathcal{C}l(a) \subseteq \mathcal{V}(a)$。为证明反向包含关系，先考虑以下情形：$\mathcal{C}l(a) =$ Spi A。由于

$$\mathrm{Spi}\,A = \mathcal{C}\ell(\mathfrak{a}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Spi}\,A,$$

我们得到 $\mathcal{V}(a) = \mathcal{C}l(a)$。现在，设 $\mathcal{C}l(a)$，Spi A。对于 $\mathcal{C}l(a)$，存在一个指标集 Ω，使得对每个 $\alpha \in \Omega$，都有一个正整数 n_α 和一个 $_{\alpha 1}, \ldots, a_{\alpha n_\alpha} \in A$ 的理想格，使得

$$\mathcal{C}\ell(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\alpha\in\Omega}\left(\bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_{\alpha i})\right).$$

由于根据假设，$\mathcal{C}l(a)$，Spi A，不失一般性，假设对于每个 α，$S^{n_\alpha}{}_{i=1}{}^{\mathcal{V}}(a_{\alpha i})$ $\emptyset$。因此，对于每个 α，$a \in S^{n_\alpha}{}_{i=1}{}^{\mathcal{V}}(a_{\alpha i})$，由此我们得到

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_{\alpha i}),$$

即，$\mathcal{V}(a) \subseteq \mathcal{C}l(a)$，由此证明完毕。 □

Zariski 空间 SpecA 连通，当且仅当 k-代数 A 不含任何非平凡幂等元。对于 k-空间，情况则简单得多。

定理 2.7。——每个 k-空间 SpiA 都是连通的。

证明。——由于命题 2.2 (6) 表明，Spi$A$ $= \mathcal{V}(\mathfrak{o})$ 且不可约性意味着连通性，故所需结论立即由定理 2.6 得出。 □

众所周知，每个诺特空间都可以表示为有限个非空不可约闭子集的并。对于 k-空间 Spi A，无论 A 是否为诺特的，这种表示总是成立，因此 Spi A 也是诺特空间。这是因为 $\mathcal{V}$(o) 在 Spi A 中是不可约的。

接下来，我们希望证明，每个 k-空间的非空不可约闭子集都有唯一的泛点。为此，注意到若 K 是拓扑空间 X 的不可约闭子集，且 $\mathcal{S}$ 是 X 的闭子基，则众所周知（参见 Harris [3, §7.2]），K 是 $\mathcal{S}$ 中各元素的交。对于k-空间，结论更强。换言之，定理 2.6 的逆命题也成立。

引理 2.8。——若 K 是 k-空间 Spi A 的非空不可约闭子集，则对于某个 a $\in$ Spi A，有 K $= \mathcal{V}$(a)。

命题 2.9。——每个 k-空间都是清醒的。

证明。——由引理 2.8 可知，Spi A 的每个非空不可约闭子集都具有 $\mathcal{V}$(a) 的形式，其中 a $\in$ Spi A。设 $\mathcal{V}$(a) 是 Spi A 的一个非空不可约闭子集。由于 a $\in \mathcal{V}$(a)，我们有 $\mathcal{C}$l(a) $\subseteq \mathcal{V}$(a)。因此，要证明 $\mathcal{V}$(a) 具有泛点，现在只需证明 $\mathcal{C}$l(a) $\supseteq \mathcal{V}$(a)。由于 $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ 是 Spi A 的闭子基，由引理 2.6 可得所需的包含关系。此外，根据命题 2.5，每个 k-空间都是 T_0。因此，泛点是唯一的。□

根据 Hochster [4], ，如果一个拓扑空间是谱的，当且仅当它是拟紧、清醒的，并且存在一个由拟紧开子空间构成且对有限交封闭的基。文献 [4] 还证明了 Zariski 空间是谱空间。我们希望证明k-空间也是谱空间，而且我们的证明不依赖可构造拓扑，也无需验证是否存在一个由拟紧开子空间构成且对有限交封闭的基。证明的关键是以下命题

Lem命题 2.10。——谱空间的拟紧、清醒开子空间是谱空间 *l.*

证明。——设 S 是谱空间 X 的拟紧、清醒开子空间。由于 S 是拟紧且清醒的，只需证明 $\mathcal{O}_S$ S 的紧开子集构成一个对有限交封闭的拓扑基。显然，S 的子集 T 在 S 中开，当且仅当 T 在 X 中开，因此，S 的子集 T 属于 $\mathcal{O}_S$，当且仅当 T 属于 $\mathcal{O}_X$。现在利用这些事实，我们作如下论证。

设 U 是 S 的一个开子集。由于 U 在 X 中也是开集，因此存在 $\mathcal{U}$ 的某个子集 $\mathcal{O}_X$，使得 U $= \cup \mathcal{U}$。然而，$\mathcal{U}$ 中的每个元素都是 U 的子集，因此也是 S 的子集，并且属于 $\mathcal{O}_S$。因此，S 的每个开子集都可以表示为 S 的紧开子集之并。现在只需证明 $\mathcal{O}_S$ 对有限交封闭，而这直接由 $\mathcal{O}_X$ 对有限交封闭这一事实得出。□

定理 2.11. — 每个 k-空间都是谱空间。

证明. — 众所周知（参见 Priestley [5, 定理 4.2]），赋予 k-拓扑的集合 A 的理想格是谱空间。现在，若将 $\mathcal{V}$ 的定义域扩展为 A 的理想格，那么只需在证明中对记号作一些常规调整，便容易看出定理 2.6 仍然成立。此外，我们有 $\{A\} = \mathcal{V}(A) = \mathcal{C}l(A)$，因此 A 的理想格\Spi A 是闭的，这意味着 Spi A 是开的。所需结论现由引理 2.10、命题 2.4 和命题 2.9 得出。□

有了 k-空间之后，自然会考虑这些空间之间的连续映射。利用连续性的子基闭集表述，我们可以得到以下性质。

命题 2.12。— 设 ϕ: A $\to$A′ 是一个 k-代数同态，且 b $\in$Spi A′。那么

1. 映射 ϕ^*: Spi A′ $\to$Spi A 定义为 $\phi^*(b) = f^{-1}(b)$，是连续的；2. 如果 ϕ 是满射，那么 k-空间 Spi A′ 与 k-空间 Spi A 的闭子空间 $\mathcal{V}(\ker\phi)$ 同胚；3. 像 ϕ^*(Spi A′) 在 Spi A 中稠密，当且仅当

$$\ker\phi \subseteq \bigcap_{\mathfrak{s}\in \operatorname{Spi} A} \mathfrak{s};$$

4. 如果 A_S 是 k-代数 A 在乘法封闭子集 S 上的局部化，那么存在一个从 k-空间 Spi(R_S) 到 k-空间的闭连续单射映射

$$(\operatorname{Spi} A)_S := \{\mathfrak{s} \in \operatorname{Spi} A \mid \mathfrak{s} \cap S = \emptyset\}.$$

证明。为证明（1），令 $\mathcal{V}$（$\mathfrak{a}$）为理想空间 Spi$A$的一个子基本闭集。注意到

$$(\phi^*)^{-1}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \{\mathfrak{b} \in \operatorname{Spi} A' \mid \phi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{b}\} = \mathcal{V}(\langle\phi(\mathfrak{a})\rangle),$$

因此映射 ϕ^* 连续。对于（2）中的同胚，注意到 $\ker\phi \subseteq \phi^{-1}$（$\mathfrak{b}$），换言之，$\phi^*$（$\mathfrak{b}$）$\in \mathcal{V}$（ker ϕ）。这意味着 im $\phi^* = \mathcal{V}$（kerϕ）。由于对所有$\mathfrak{b} \in \operatorname{Spi} A'$,

$$\phi(\phi^*(\mathfrak{b})) = \mathfrak{b} \cap \operatorname{im}\phi = \mathfrak{b},$$

映射 ϕ^* 是单射。为证明 ϕ^* 是闭映射，首先注意到，对于 SpiA′ 的任意子基本闭子集 $\mathcal{V}$(a)，有

$$\phi^*(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \phi^{-1}\{\mathfrak{i}' \in \operatorname{Spi} A' \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{i}'\} = \mathcal{V}(\phi^{-1}(\mathfrak{a})).$$

现在，若 K 是 Spi A′ 的闭子集，并且

$$K = \bigcap_{\alpha\in\Omega}\left(\bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_{i\alpha})\right),$$

then

$$\phi^*(K) = \phi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Omega}\left(\bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_{i\alpha})\right)\right) = \bigcap_{\alpha\in\Omega}\bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathcal{V}(\phi^{-1}(\mathfrak{a}_{i\alpha})),$$

SpiA 的一个闭子集。由于 ϕ^* 连续，证明得证。为证明 (3)，我们首先证明，对于所有理想 b $\in$ R′，有 $\mathcal{C}l(\phi^*(\mathcal{V}(b))) = \mathcal{V}(\phi^{-1}(b))$。为此，令 s $\in \phi^*(\mathcal{V}(b))$。这意味着 ϕ(s) $\in \mathcal{V}$(b)，也就是说 b $\subseteq \phi$(s)。换言之，s $\in \mathcal{V}(\phi^{-1}(b))$。另一方向的包含关系可由如下事实推出：$\phi^{-1}(\mathcal{V}(b)) = \mathcal{V}(\phi^{-1}(b))$。由于

$$\mathcal{C}\ell(\phi^*(\operatorname{Spi} A')) = \mathcal{V}(\phi^{-1}(\mathfrak{o})) = \mathcal{V}(\ker\phi),$$

闭子空间 $\mathcal{V}(\ker \phi)$ 等于 Spi A，当且仅当 $\ker \phi \subseteq \cap_{s\in \mathrm{Spi}\, A} s$。最后，为了证明 (4)，容易看出，由 $\phi(r) = r/1$ 定义的环同态 $\phi: A \to A_S$ 诱导出映射 $\phi^*: \mathrm{Spi}\, A_S \to \mathrm{Spi}\, A$，该映射由 $\phi^*(a) = \phi^{-1}(a)$ 定义。我们断言 $\phi^*(a) \cap S = \emptyset$。若不然，令 $s \in \phi^*(a) \cap S$。那么

$$\phi(s) \in \phi(\phi^{-1}(a) \cap S) = \phi(\phi^{-1}(a)) \cap \phi(S) = a \cap \phi(S),$$

从而 $\phi(s) \in a$。由于 $\phi(s)$ 是 A_S 中的单位元，这意味着 $a = A_S$，矛盾。因此，ϕ^* 确实是从 $\mathrm{Spi}\, A_S$ 到 $(\mathrm{Spi}\, A)_S$ 的映射。如果对于某些 $a、b \in \mathrm{Spi}\, A_S$，有 $\phi^*(a) = \phi^*(b)$，那么

$$a = \phi(\phi^{-1}(a)) = \phi(\phi^{-1}(b)) = b$$

表明 ϕ^* 是单射。映射 ϕ^*：$\mathrm{Spi} A_S \to \mathrm{Spi}\, A \backslash S$ 是连续的，这由（1）可知。由于 ϕ^*（$\mathcal{V}$（a））$= \mathcal{V}$（ϕ^{-1}（a））， 该映射 ϕ^* 也是闭映射。因此， ϕ^* 具有所需的性质。□

推论 2。 13. — k-空间 Spi (A/a) 同胚于 Spi A 的闭子空间 $\mathcal{V}(a)$.

注 2.14。— 根据命题 2.12，我们得到如下众所周知的结果：Zariski 空间 Spec$A$ 和 Spec$(A/\sqrt{0})$ 是典范同胚的，并且 $\phi^*(\mathrm{Spec}\, A')$ 在 Spec A 中稠密，当且仅当 $\ker \phi \subseteq \mathcal{V}(0)$。

3. 结论

诸如概形、代数空间等对代数簇的推广，仍未回答这样一个问题：当多项式方程在一个非整环的 k-代数上有解时，如何进行代数几何研究。引入零因子会立即给格罗滕迪克概形理论带来以下两个问题：

1. 代数集 $\{\mathcal{V}(a)\}_{a\in \mathrm{Idl}\, A}$ 不再构成 Zariski 拓扑；2. 我们无法得到局部环层。

这里提出的另一种拓扑（k-拓扑）解决了问题（1）。但我们不知道如何解决问题（2）。考虑 $\mathrm{Spi} A = A\backslash s$，对于某个 $s \in \mathrm{Spec} A$，此时 S 是一个乘法封闭集，因此我们可以在 A_S 处构造局部代数 S。但是，如果 $s \in \mathrm{Spi} A$，那么集合 S 就不一定是乘法封闭集。因此，在代数簇中引入零因子，可能需要采用完全不同的方法来研究几何对象的局部性质。

Table 2 总结了本文的主要结果，并将其与扎里斯基空间进行了比较。

EGA I	拟议的想法
域值多项式方程	k-代数值多项式方程
A 的素理想集合 Spec A	A 的真理想集合 Spi A
$\mathcal{V}(a) = \{p \in \text{Spec } A \mid a \subseteq p\}$	$\mathcal{V}(a) = \{s \in \text{Spi } A \mid a \subseteq s\}$
$\mathcal{V}(a) \cup \mathcal{V}(b) = \mathcal{V}(a \cap b) = \mathcal{V}(ab)$.	$\mathcal{V}(a) \cup \mathcal{V}(b) \subseteq \mathcal{V}(a \cap b) \subseteq \mathcal{V}(ab)$.
$\mathcal{V}(a) = \mathcal{V}(\sqrt{a})$	$\mathcal{V}(a) \supseteq \mathcal{V}(\sqrt{a})$
$\mathcal{IV}(a) = \sqrt{a}$	$\mathcal{IV}(a) \supseteq a$,
Zariski 拓扑	k-拓扑
紧致且 T_0	紧致且 T_0
$\{\mathcal{V}(p) \mid p \in \text{Spec } A\}$ 是不可约的	非空次基闭集是不可约的
清醒	清醒
谱	谱
Spec A 连通当且仅当 A 不含有任何非平凡幂等元	Spi A 始终连通

表 2：Zariski 空间与 k-空间

致谢

作者谨向匿名审稿人致以诚挚的谢意，感谢其认真审阅并提出宝贵意见，这些意见极大地改善了论文的呈现效果。

参考文献

[1] T. Dube 和 A. Goswami，《理想空间：环结构空间的扩展》，《代数与应用杂志》，22(11)，(2023)，2350245（18 页）。[2] A. Grothendieck，´代数几何原理´第一卷，施普林格出版社，柏林，1971 年。[3] D. Harris，普适拟紧 T_1 空间，《一般拓扑与应用》，3 (1973)，291–318。[4] M. Hochster，交换环中的素理想结构，《美国数学会汇刊》，142 (1969)，43–60。[5] H. A. Priestley，内在谱拓扑，载于：一般拓扑与应用论文集（纽约州法拉盛，1992），728，78–95，纽约科学院，纽约，1994。

阿马蒂亚·戈斯瓦米， [1] 约翰内斯堡大学数学与应用数学系，邮政信箱 524，奥克兰公园，2006，南非， [2] 国家理论与计算科学研究所（NITheCS），南非 • 电子邮箱：agoswami@uj.ac.za