arXiv:2302.01085v1 [math.DG] 2 Feb 2023

# 常平均曲率与 Willmore 型半球面的叶状结构条件存在性

Jan-Henrik Metsch *

2023年2月3日

**摘要**

我们研究半径较小的半球面 $\lambda$，它们位于光滑有界区域的边界上，并与边界正交相交。尽管已知，在区域边界平均曲率的非退化临界点 $p$ 附近，存在常平均曲率和 Willmore 型半球面族，但对于这两种情形，尚不清楚它们是否构成 $p$某个去心邻域的叶状结构。我们证明这并非必然成立，并根据边界的几何性质建立一个判据，以确定相应曲面能否构成这样的叶状结构。这种或许令人意外的条件性叶状结构现象，在密切相关的黎曼情形中并不存在；在那里，叶状结构必然存在。我们说明这种无条件的叶状结构如何源于对称性考量，以及这些考量为何不适用于“区域情形”。

## 1 引言

正则曲面 $f:\Sigma\to\mathbb{R}^3$ 的面积和*Willmore*能量分别定义为

$$A[f]:=\int_\Sigma d\mu_f \quad \text{and} \quad \mathcal{W}[f]:=\frac{1}{4}\int_\Sigma H[f]^2 d\mu_f.$$

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一个光滑有界域，并令 $S:=\partial\Omega$。我们考虑如下类

$$\mathcal{M}(S):=\left\{\phi\in C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^2_+,\mathbb{R}^3)\text{ immersed}\;\middle|\;\phi(\partial\mathbb{S}^2_+)\subset S,\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta}=N^S\circ\phi\right\}$$

沿边界与 $S$ 正交相交的浸入曲面。这里，$\eta$ 和 $N^S$ 分别表示 $\mathbb{S}^2_+$ 和 $\Omega$ 沿各自边界的内单位法向量。我们用 $\mathcal{M}_\lambda(S)$ 表示

*通讯作者：J.-H. Metsch，德国弗赖堡大学数学系（jan.metsch@math.uni-freiburg.de）2020年数学主题分类：主要分类：53C42，58J32；次要分类：47J07，53C12 关键词：叶状分解，Willmore 泛函，常平均曲率曲面，几何偏微分方程，非线性边值问题，隐函数定理

面积为 $2\pi\lambda^2$ 的曲面子类。在他们的文章 [1], 中，Alessandroni 和 Kuwert 研究了类 $\mathcal{M}_\lambda$ 中 Willmore 能量的临界点。具体而言 $\phi \in \mathcal{M}_\lambda(S)$ 是临界的，当

$$\begin{aligned} W[\phi] &= \alpha H[\phi] && \text{in } \mathbb{S}^2_+, \\ \frac{\partial H}{\partial \eta} + h^S(\nu,\nu)H &= 0 && \text{on } \partial\mathbb{S}^2_+. \end{aligned} \tag{1.1}$$

这里 $W$ 是标量Willmore算子， $H$ 是标量平均曲率， $\nu$ 是 $\phi$的法向量，且 $\alpha$ 是一个拉格朗日乘子。满足方程（1.1）的曲面称为*Willmore* 型曲面。Alessandroni 和 Kuwert 构造了临界曲面 $\phi \in \mathcal{M}_\lambda(S)$，当$\lambda \leq \lambda_0(\Omega)$ 足够小时，并分析了这些曲面在极限 $\lambda \to 0^+$下的行为。他们证明:

**(1)** 对于 $\lambda \to 0^+$，临界曲面只能集中在区域边界平均曲率 $H^S$ 的临界点处。

（2）给定一个非退化临界点 $p \in S$，对于 $H^S$，存在 $\lambda_0 > 0$，一个邻域 $U$，以及 $p$一条光滑曲线 $\gamma: [0,\lambda_0) \to S$ 满足 $\gamma(0) = p$ 且为临界曲面， $\phi^\lambda$ 其 黎曼重心——即 $S$ 上的一种中心点（见 [1]中的附录1）—— $C[\phi^\lambda]$ 使得

$$\begin{matrix} \phi \in \mathcal{M}_\lambda(S) \text{ critical} \\ C[\phi] \in U \end{matrix} \iff \phi = \phi_\lambda \text{ and } C[\phi] = \gamma(\lambda).$$

一个密切相关的问题是对常平均曲率半球的研究。我们记

$$\mathcal{N}(S) := \left\{ \phi \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2_+, \mathbb{R}^3) \text{ immersed} \;\middle|\; \phi(\partial\mathbb{S}^2_+) \subset S, \; \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = N^S \circ \phi \right\}$$

曲面 $\phi \in \mathcal{N}(S)$ 与边界 $S$ 一起围成一个区域，我们将其体积记为 $V[\phi]$。我们将满足 $V[\phi] = \frac{2}{3}\pi\lambda^3$ 的所有 $\phi \in \mathcal{N}(S)$ 所构成的子类记为 $\mathcal{N}_\lambda(S)$。在其文章 [2] 中，Bellettini 和 Fusco 研究了类 $\mathcal{N}_\lambda(S)$ 内面积 $A$ 的临界点——也就是满足以下方程的解

$$H[\phi] = \alpha \tag{1.2}$$

其中 $\alpha$ 是一个拉格朗日乘子。满足方程 (1.2) 的曲面被称为常平均曲率曲面。正如在 Willmore 情形中一样，Bellettini 和 Fusco 构造了临界曲面 $\phi \in \mathcal{N}_\lambda(S)$，其中 $\lambda \leq \lambda_0(\Omega)$ 取较小值，并分析了它们在 $\lambda \to 0^+$ 极限下的行为。概括他们的结果，他们建立了命题 (2) 的类比表述：给定 $H^S$ 的一个非退化临界点 $p \in S$，存在 $\lambda_0 > 0$、 $p$ 的一个邻域 $U$ 、一条光滑曲线 $\gamma: [0,\lambda_0) \to S$，满足 $\gamma(0) = p$，并且其重心为 $C[\phi^\lambda] = \gamma(\lambda)$ 的临界 $\phi^\lambda$，使得

$$\begin{matrix} \phi \in \mathcal{N}_\lambda(S) \text{ critical} \\ C[\phi] \in U \end{matrix} \iff \phi = \phi_\lambda \text{ and } C[\phi] = \gamma(\lambda). \tag{1.3}$$

这两项结果以及推导它们的分析，与研究黎曼流形 $M$ 中嵌入的常平均曲率球面和 Willmore 型球面时所得的结果类似。对于 Willmore 情形和 CMC 情形，当区域的

平均曲率 $H^S$ 替换为环境流形的标量曲率 Sc时，命题 (1) 的对应结论成立。在 Willmore 情形中，这一结果最初由 Laurain 和 Mondino 在 [12] 中确立，并由 Lamm、Metzger 和 Schulze 在 [7]中验证。在 CMC 情形中，该结果归功于 Laurain [11]。构造靠近测地球面的面积约束 Willmore 曲面的工作始于 Mattuschka [13]。本文推导了命题 (2) 的对应结论，同样将 $H^S \to$Sc作为替换项。黎曼情形下命题 (1.3) 的对应结论，则再次以 Sc代替 $H^S$，归功于 Ye [21]。

在 CMC 情形和 Willmore 情形中，我们还知道，在 Sc 的一个非退化点 $p$ 附近，与 $p$ 相邻的临界曲面可构成 $p$的一个邻域 $U$ 的叶状分解。这类结果最早由 Ye 在 [21], 中开创，他研究了 CMC 情形。将他的方法应用于 Willmore 情形后，Ikoma、Malchiodi、Mondino 和 Lamm，以及 Metzger、Schulze 分别在 [5]和[10] 中首次同时构造了 Willmore 型曲面的局部叶状结构。本文探讨上述“区域情形”中是否也成立这一结论。或许令人意外的是，我们证明这两种情形存在定性差异:

**定理 1.1** (Willmore 情形). 设$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为一个光滑有界区域，且 $S := \partial\Omega$。记 $S$ 的高斯曲率为 $K^S$，标量平均曲率为 $H^S := \vec{H}^S \cdot N^S$。设 $H^S$ 的一个非退化临界点为 $p \in S$，并令 $v_0 := \frac{1}{2}\left|\left(\nabla^2 H^S(p)\right)^{-1} \nabla K^S(p)\right|$。

1. 若 $v_0 < 1$，则存在 $\lambda_0 > 0$ 和 $p$ 在 $\Omega$ 中的一个邻域 $U$，使得对于 $\lambda \in (0, \lambda_0)$，*Willmore* 型曲面 $\phi^{\gamma(\lambda),\lambda} \in \mathcal{M}_\lambda(S)$ 构成一个叶状分解 $U \setminus \{p\}$。

2. 若 $v_0 > 1$，则对于 $\Omega$ 中 $p$ 的任意邻域 $U$，均不成立：$U \setminus \{p\}$ 由 *Willmore* 型曲面 $\phi_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda(S)$构成叶状分解。

类似地，对于 CMC 情形，我们证明以下定理:

**定理 1.2** (CMC 情形)。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为一个光滑有界区域，且 $S := \partial\Omega$。记 $S$ 的高斯曲率为 $K^S$，标量平均曲率为 $H^S := \vec{H}^S \cdot N^S$。设 $p \in S$ 是 $H^S$ 的一个非退化临界点，并令 $v_0 := \frac{1}{3}\left|\left(\nabla^2 H^S(p)\right)^{-1} \nabla K^S(p)\right|$。

1. 若 $v_0 < 1$，则存在 $\lambda_0 > 0$ 以及 $p$ 在$\Omega$ 中的一个邻域 $U$，使得对于 $\lambda \in (0, \lambda_0)$，*Willmore* 型曲面 $\phi^{\gamma(\lambda),\lambda} \in \mathcal{N}_\lambda(S)$ 构成一个叶状分解 $U \setminus \{p\}$。

2. 若 $v_0 > 1$，则对于$\Omega$ 中 $p$的任意邻域 $U$， $U \setminus \{p\}$ 都不可能由常平均曲率曲面 $\phi_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda(S)$构成叶状分解。

通过显式构造，我们还验证了定理 1.1 和 1.2 $v_0$ 中的参数可以取遍 $[0, \infty)$，这尤其意味着两个定理中的两种情形都是可能的。

在黎曼情形下，叶状分解无条件存在，这是因为式 (2) 中的曲线满足 $\dot{\gamma}(0) = 0$。采用这一术语，Hofmeister 首先在她的硕士论文 [3]中证明了这一点。在小节 3.3 中，我们将通过对称性论证展示 $\dot{\gamma}(0) = 0$ 在黎曼情形下如何成立。我们还将说明，这一对称性论证

并不适用于我们在此研究的“区域情形”。

Willmore型曲面和常平均曲率曲面在文献中都已得到广泛讨论。除前文提及的文章外，我们还推荐阅读[3], [5], [10] 和 [16] ，其中介绍了在黎曼流形中构造Willmore型球面的方法。文献 [17]介绍了针对共形威尔莫尔泛函的类似方法。除前文提及的 [21],外，我们还推荐阅读[19] ，其中介绍了在黎曼流形中构造CMC球面的方法。关于附着于区域边界的半球面的研究，源自Belletini和Fusco前述的文章 [2] ；Alessandroni和Kuwert在文献 [1]中将其推广到威尔莫尔泛函。上述所有工作的积分方法都属于Lyapunov-Schmidt约化，这一方法最早由Ye在前文提及的文章[21]中提出。关于通过Lyapunov-Schmidt约化构造小型Willmore型球面的综述，请读者参阅 [4]。通过直接法构造面积约束的临界Willmore球面，见文献 [8]。另一类叶状分解则是用Willmore型曲面或常平均曲率曲面为渐近平坦流形的渐近区域构造叶状分解；Willmore情形见 [9] ，而常平均曲率情形见[22] 。最后需要指出，预印本 [18] 与我们的结果相悖。

定理 1.1 和1.2的证明，本质上分别依赖于建立以下关于 Willmore 能量和面积泛函的展开式。给定一个重心为 $a \in S$ 的临界曲面 $\phi^{a,\lambda} \in \mathcal{M}_\lambda(S)$ 或 $\mathcal{N}_\lambda(S)$，我们证明

$$\mathcal{W}[\phi^{a,\lambda}] = 2\pi - \lambda\pi H^S(a) + \frac{1}{2}\pi\left(K^S(a) + \left(\ln(2) - \frac{3}{2}\right)H^S(a)^2\right)\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3), \tag{1.4}$$

$$\mathcal{A}[\phi^{a,\lambda}] = \lambda^2\left(2\pi - \lambda\frac{\pi}{4}H^S(a) + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{6}K^S(a) - \frac{35}{192}H^S(a)^2\right)\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)\right). \tag{1.5}$$

建立这些展开式的主要难点在于，曲面 $\phi^{a,\lambda}$ 仅由隐函数定理隐式定义。为建立方程（1.4）和（1.5），我们通过分别对方程（1.1）和（1.2）进行线性化，并随后求解所得的线性偏微分方程，明确计算 $\phi^{a,\lambda}$ 相对于缩放半球面 $\lambda\mathbb{S}^2_+$ 的首个非平凡偏差。因此，建立（1.4）和（1.5）实际上完全归结为一项明确的计算，我们通过机器计算完成该计算。

本文结构如下：第2 节介绍记号和恰当的定义。第3节概述了 [1]中所发展的 Willmore 型半球面构造。此外，我们说明了如何将 [1] 中的推理推广到常平均曲率曲面和黎曼情形。最后，我们说明上述黎曼情形中的对称性论证为何不适用于此处。第4 节在假设方程（1.4）和（1.5）成立的前提下，给出定理1.1 和1.2 的证明。此外，我们证明定理1.1 和1.2 中的两种情形都可能出现。第5节概述方程（1.4）和（1.5）的推导过程。相关计算中有很大一部分借助 Mathematica [20]完成。计算细节见附录。Mathematica 笔记本作为补充材料提供。

## 2 预备知识

下文中，设 $\alpha \in (0,1)$ 为固定但任意的。此外

$$\mathbb{R}^3_+ := \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; x_3 \geq 0 \,\}$$
$$\mathbb{S}^2_+ := \{\, (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; \omega_3 \geq 0 \text{ and } \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1 \,\}.$$

### 2.1 术语

设 $\tilde{g}$ 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的度量，当 $l \in \mathbb{N}$ 足够大时，它在 $C^l$ 中接近欧几里得度量 $\delta$。考虑一个适当光滑的浸入 $f\colon \mathbb{S}^2_+ \to (\mathbb{R}^3, \tilde{g})$，并令 $g := f^*\tilde{g}$。我们将相对于 $\tilde{g}$ 的 $f$ 的内法向量（在欧几里得空间中的圆半球上为 $-\omega$）记为 $\tilde{\nu}$，其内余法向量（在欧几里得空间中的圆半球上为 $e_3$）记为 $\tilde{\eta}$。定义 $f$ 的平均曲率 $H[f, \tilde{g}]$，并约定在欧几里得空间中的圆半球上 $H = 2$。令 $h^0$ 表示 $f$ 的无迹第二基本形式，并令 $\mathrm{Ric}_{\tilde{g}}$ 表示 $(\mathbb{R}^3, \tilde{g})$ 的里奇张量。于是，标量威尔莫尔梯度为

$$W[f, \tilde{g}] := \frac{1}{2}\left(\Delta_g H + (|h^0|^2 + \mathrm{Ric}_{\tilde{g}}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}))H\right). \tag{2.1}$$

证明见 [1] 中的定理1，并注意以下约定上的差异：我们在 $1/2$ 的定义中纳入了 $W$。给定一个在重参数化下不变的函数 $F[f, \tilde{g}]$（例如面积 $A$），我们将沿法丛的 $L^2(g)$-梯度记为 $\nabla F[f, \tilde{g}]$。也就是说，对于 $\psi\colon \mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}$

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} F[f + s\psi\tilde{\nu}, \tilde{g}] = \int_{\mathbb{S}^2_+} \nabla F[f, \tilde{g}]\psi d\mu_g.$$

例如 ，将包含映射记为 $\mathbb{S}^2_+ \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ by $f_0$，我们有 $\nabla A[f_0, \delta] = -H[f_0, \delta] = -2$ .

$\mathbb{S}^2$ 上的标准拉普拉斯算子总记为 $\Delta$。

设 $r\colon \mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{S}^2_+$ 表示反射 $r(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (-\omega_1, -\omega_2, \omega_3)$。若函数$u\colon \mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}$ 满足 $u \circ r = u$，则称其为偶函数；若满足 $u \circ r = -u$，则称其为奇函数。

**微分**

若 $f\colon A_1 \times \ldots \times A_k \to B$ 是可微映射，则用 $D_i f$ 表示关于第 $i$个分量的导数。例如

$$D_1 f(a_1, \ldots, a_k)v := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a_1 + tv, a_2, \ldots, a_k).$$

二阶导数记作 $D^2$。例如

$$D_1^2 f(a,b)(v,w) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(a+tv+sw, b) \text{ or } D^2_{1,2} f(a,b)(v,w) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(a+tv, b+sw).$$

**求和约定**
我们采用以下求和约定。每个重复指标都表示求和。若指标为拉丁字母，则取值为 $i=1$、2；若为希腊字母，则取值为 $\mu=1$、2、3。

## 2.2 在边界处放大

在本小节中，我们回顾构造[1] 中所达到的临界曲面的设定，并整理本文所需的重要公式。详情请参阅 [1]。设$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个光滑有界区域，并将沿 $S$ 的内法向量记为: $= \partial\Omega$ 记作 $N^S$。设 $a \in S$ 和$b_1$， $b_2 \in T_aS$ 是 $T_aS$的标准正交基。

对于 $r>0$，令 $D_r := \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < r \,\}$。存在 $r_0 = r_0(S) > 0$、 $a$ 的一个邻域 $U \subset S$ 以及一个光滑函数 $\varphi^a : D_{r_0} \to \mathbb{R}$，使得

$$f^a : D_{r_0} \to S,\ f^p(x) := p + x_1 b_1 + x_2 b_2 + \varphi^a(x) N^S(a)$$

是 $U$ 的参数化。 $\varphi^a$ 满足 $\varphi^a(0) = 0, D\varphi^a = 0$ ，并且满足估计 s

$$|\varphi^a(x)| \le C(\Omega)|x|^2 \quad \text{and} \quad |D\varphi^a(x)| \le C(\Omega)|x|.$$

在适当缩小 $U$ 和 $r_0$后，我们可以将 $f^a$ 延拓为一个微分同胚

$$F^a : D_{r_0}(0) \times (-r_0, r_0) \to \mathrm{im}(F^a) \subset \mathbb{R}^3,\ F^a(x,z) := f^a(x) + zN^S(a).$$

由 $S$ 的紧致性可知，半径 $r_0$ 可以对所有 $a \in S$ 统一选取。令 $\lambda_0(S) > 0$ ，使得 $2\lambda_0 < r_0$。那么，对于 $\lambda \le \lambda_0$，以下映射定义良好:

$$F^{a,\lambda} : \bar{D}_2(0) \times [-2,2] \to \mathbb{R}^3,\ F^{a,\lambda}(x,z) := F^a(\lambda x, \lambda z)$$

最后，我们引入缩放拉回度量

$$\tilde{g}^{a,\lambda} := \frac{1}{\lambda^2} \left(F^{a,\lambda}\right)^* \delta. \tag{2.2}$$

利用 $\Omega \in C^\infty$，[1] 中推导方程 (3.7) 的讨论可知，$\|\tilde{g}^{a,\ \lambda} - \delta\|_{C^k(\bar{B}_2(0)\times[-2,2])} \le C(k)$ $\lambda$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

## 2.3 近似半球面

对于上述描述的 $\Omega$ 以及 $S = \partial\Omega$，我们考虑以下类别:

$$\mathcal{M}^{4,\alpha}(S) := \{\, \phi \in C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^2_+, \mathbb{R}^3) \mid \text{immersed, } \phi(\partial\mathbb{S}^2_+) \subset S \text{ and } \phi \perp S \text{ along } \partial\mathbb{S}^2_+ \,\},$$
$$\mathcal{N}^{2,\alpha}(S) := \{\, \phi \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2_+, \mathbb{R}^3) \mid \text{immersed, } \phi(\partial\mathbb{S}^2_+) \subset S \text{ and } \phi \perp S \text{ along } \partial\mathbb{S}^2_+ \,\}.$$

我们感兴趣的曲面 $\phi \in \mathcal{M}^{4,\alpha}(S)$ $\mathcal{N}^{2,\alpha}(S)$ 的原型分别通过选取一个 $C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^2_+)$ $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2_+)$-小的图函数 $u$ 来构造: $\mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}$ 并考虑

$$F^{a,\lambda} \circ f_u \quad \text{where} \quad f_u : \mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}^3,\ f_u(\omega) := (1 + u(\omega))\omega. \tag{2.3}$$

这类曲面称为近似半球面。与研究这些近似半球面密切相关的是对配备度量 $\tilde{g}^{a,\lambda}$ 的 $f_u$ 中曲面进行分析。在下文中，我们汇总这些曲面的一些性质。为了使这些性质成立，我们要求$\|u\|_{C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^2_+)} < \theta_0$ 或$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2_+)} < \theta_0$，并且 $\lambda < \lambda_0$，其中 $\lambda_0$ 和 $\theta_0$ 是仅依赖于 $S$ 的界。

曲面 $F^{a,\lambda}\circ f_u$均为浸入的。若要分别属于类 $\mathcal{M}^{4,\alpha}(S)$ 或 $\mathcal{N}^{2,\alpha}(S)$，则$f_u$ 必须与 $\mathbb{R}^2\times 0$正交相交 $\tilde{g}^{a,\lambda}$；若内单位法向量$\tilde{\nu}[u,\tilde{g}^{a,\lambda}]$ 沿 $\tilde{\nu}^3[u,\tilde{g}^{a,\lambda}]=0$ 满足 $\partial\mathbb{S}^2_+$ (参见 [1] 中的引理 3)。对于一般的背景度量$\tilde{g}$， [1] 中证明了以下公式：

$$\tilde{\nu}[u,\tilde{g}](\omega) = -\frac{\omega - g^{ij}\tilde{g}(\omega,\partial_i f_u)\partial_j f_u}{\sqrt{\tilde{g}(\omega,\omega) - g^{ij}\tilde{g}(\omega,\partial_i f_u)\tilde{g}(\omega,\partial_j f_u)}} \tag{2.4}$$

曲面 $F^{a,\lambda}\circ f_u$ 的曲面面积定义良好，并满足

$$A[F^{a,\lambda}\circ f_u] = \lambda^2 A[f_u,\tilde{g}^{a,\lambda}].$$

此外，曲面 $\phi := F^{a,\lambda}\circ f_u$ 将 $\Omega$ 分为较大的外部区域和较小的内部区域，分别记为 $\Omega_\phi$。我们将 $\phi$ 的体积 定义为

$$V[\phi] = V[F^{a,\lambda}\circ f_u] = |\Omega_\phi|.$$

类似地， $f_u$ 将 $\mathbb{R}^3_+$ 分为较大的外部区域和较小的内部区域 $\Omega_u$。若 $\tilde{g}$ 是 $\mathbb{R}^3_+$上的度量，则令

$$V[f_u,\tilde{g}] := \int_{\Omega_u}\sqrt{\det\tilde{g}}d^3x \quad \text{so that} \quad V[F^{a,\lambda}\circ f_u] = \lambda^3 V[f_u,\tilde{g}^{a,\lambda}].$$

存在一个非线性投影 $C$，它将 $F^{a,\lambda}\circ f_u$映射到一个点 $C[F^{a,\lambda}\circ f_u]\in S$，我们称其为曲面的（黎曼）重心。对于附着于 $\mathbb{R}^2$的圆半球，这一定义与原点重合。类似地，可以构造一个浸入的类似投影 $C:\mathbb{S}^2_+\to(\mathbb{R}^3,\tilde{g})$ 到 $\mathbb{R}^2$。这两个投影满足

$$C[F^{a,\lambda}\circ f_u] = F^{a,\lambda}[C[f_u,\tilde{g}^{a,\lambda}]]. \tag{2.5}$$

黎曼重心的概念最初由 Karcher 提出 [6]。我们采用 [1], 中引入的局部版本的一个小变体，该版本见 [15]的附录 D。最后，我们指出，在 [15], 附录 D 中还证明，对于足够小的 $\lambda_0$ 和 $\theta_0$，每个 $\phi = F^{a,\lambda}\circ f_{\tilde{u}}$都可以以其重心为参数化基准。也就是说，存在一种形式为 $\phi = F^{C[\phi],\lambda}\circ f_{\tilde{u}}$的参数化。参数化取决于在 $C[\phi]$ 处选取的标准正交标架，但一旦标架固定，它就是唯一的。对于较小的 $\lambda>0$，我们定义

$$\mathcal{M}^{4,\alpha}_\lambda(S) := \left\{\phi\in\mathcal{M}^{4,\alpha}(S)\;\middle|\;\begin{array}{l}\phi \text{ is of the form in Equation (2.3), parameterized}\\ \text{over its barycenter and } A[\phi]=2\pi\lambda^2\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{N}^{2,\alpha}_\lambda(S) := \left\{\phi\in\mathcal{N}^{2,\alpha}(S)\;\middle|\;\begin{array}{l}\phi \text{ is of the form in Equation (2.3), parameterized}\\ \text{over its barycenter and } V[\phi]=\frac{2}{3}\pi\lambda^3\end{array}\right\}.$$

最后，我们指出，对于面积等泛函，我们通常写作 $A[u,\tilde{g}] := A[f_u,\tilde{g}]$ 以及$\nabla A[u,\tilde{g}] := \nabla A[f_u,\tilde{g}] = -H[f_u,\tilde{g}] =: -H[u,\tilde{g}]$。

# 3 临界曲面的构造

本节中，我们概述 Alessandroni 和 Kuwert 构造 Willmore 型曲面的论证 [1] 。随后，我们说明如何将他们的论证调整到 CMC 情形，并对相关的黎曼问题作一些评论。

## 3.1 Willmore 型曲面的构造

为求解方程（1.1），我们取试探解 $\phi = F^{a,\lambda} \circ f_u$。利用微分同胚 $F^{a,\lambda}$ 将（1.1）拉回到（$\mathbb{R}^3_+, \tilde{g}^{a,\lambda}$）中，得到方程

$$\begin{cases} W[u, \tilde{g}^{a,\lambda}] = \alpha H[u, \tilde{g}^{a,\lambda}], \\ B[u, \tilde{g}^{a,\lambda}] = 0, \\ A[u, \tilde{g}^{a,\lambda}] = 2\pi. \end{cases} \tag{3.1}$$

$B$ 汇集了 $\phi$ 与 $S$ 正交相交的边界条件，以及（1.1）中的三阶条件。按照 [1], ，它由下式给出[1]

$$B[u, \tilde{g}^{a,\lambda}] = (B_1[u, \tilde{g}^{a,\lambda}], B_2[u, \tilde{g}^{a,\lambda}]) := \left( \omega_3 - g^{ij} \tilde{g}^{a,\lambda}(\omega, \partial_i f_u) \partial_j f_u^3, \frac{\partial H}{\partial \tilde{\eta}} + H \tilde{h}^{\mathbb{R}^2}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}) \right). \tag{3.2}$$

的思想是，对于任意接近欧几里得度量 $\tilde{g}$ 的抽象背景度量 $\delta$，利用隐函数定理求解（3.1），从而得到 $u = u[\tilde{g}]$。然而，由于欧几里得空间中 Willmore 能量的平移和缩放不变性，线性化算子具有一个核。为克服这一问题，通过规定重心为 $C[\phi] = a$，或在拉回图景下对于抽象背景度量规定重心为 $C[u, \tilde{g}] = 0$，对试探解进行修正。这就导出了问题

$$\begin{cases} W[u, \tilde{g}] = \alpha H[u, \tilde{g}] + \beta_i \nabla C^i[u, \tilde{g}], \\ B[u, \tilde{g}] = 0, \\ A[u, \tilde{g}] = 2\pi, \\ C[u, \tilde{g}] = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

新的拉格朗日乘子反映了新增约束。两个约束$A = 2\pi$ 和 $C = 0$ 固定了线性化算子的核。在 [1], 中的引理 6 证明了此时可以应用隐函数定理，从而得到唯一解

$$(u, \alpha, \beta_i) = (u[\tilde{g}], \alpha[\tilde{g}], \beta_i[\tilde{g}]) \text{ in a neighbourhood of } (0,0,0,0) \in C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^2_+) \times \mathbb{R}^3.$$

特别地，取 $\tilde{g}^{a,\lambda}$ 为 $\tilde{g}$，即可得到以下定理。该定理概述了引理 6、命题 1、定理 2，以及其在 [1] 中的前述讨论：

[1]注意到第一个分量的定义略有不同。不过，这两种定义是等价的 t.

定理 *3.1.* 设 $\Omega \in C^\infty$ 为有界区域。存在 $\lambda_0(\Omega)$ 以及 $(0,0,0) \in C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^2_+) \times \mathbb{R}^3$ 的一个邻域，使得对于每个 $a \in S$ 和 $\lambda \le \lambda_0$，都存在方程 (3.3) 的唯一解 $(u^{a,\lambda}, \alpha^{a,\lambda}, \beta^{a,\lambda}_{,i}) \in U$。此外，映射

$$S \times [0, \lambda_0(S)] \ni (a, \lambda) \mapsto (u^{a,\lambda}, \alpha^{a,\lambda}, \beta_i^{a,\lambda}) \in U$$

是光滑的。此外，$u^{a,\lambda} \in C^\infty(\mathbb{S}^2_+)$ 且对所有 $k \ge 4$

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}} \le C(\Omega, k)\lambda. \tag{3.4}$$

对于充分小的 $a \in S$ 和 $\lambda > 0$，曲面

$$\phi^{a,\lambda} := F^{a,\lambda} \circ f_{u^{a,\lambda}} \tag{3.5}$$

现在是方程 (1.1) 的候选解。然而，定理 $u^{a,\lambda}$ 所得的解3.1 通常不是问题 (3.1) 的解，因为通常 $\beta^{a,\lambda}_{,i} \neq 0$。为分别求得方程 (1.1) 或 (3.1) 的解，需要研究约化泛函

$$\bar{\mathcal{W}} : S \times [0, \lambda_0) \to \mathbb{R}, \ (a, \lambda) \mapsto \mathcal{W}[\phi^{a,\lambda}] = \mathcal{W}[u^{a,\lambda}, \tilde{g}^{a,\lambda}].$$

我们转述文献[1]中的定理 2:

**定理 3.2.** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个光滑有界区域，且 $S := \partial\Omega$。那么，对于 $\lambda \in [0, \lambda_0]$ 点 $a \in S$ 是 $\bar{\mathcal{W}}(\cdot, \lambda)$ 的临界点，当且仅当 $\phi^{a,\lambda}$ 是方程(1.1) 的解；等价地，$u^{a,\lambda}$是问题(3.1)的解。

接下来，我们概述如何证明[1]中临界点的存在性。$S = \partial\Omega$ 的标量平均曲率定义为 $H^S := \vec{H}^S \cdot N^S$其中内单位法向量为 $N^S$。在 [1], 中的方程 (3.10) 中，展开式

$$\bar{\mathcal{W}}[a, \lambda] = 2\pi - \pi H^S(a)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{3.6}$$

由此推导得出。利用这一结果，可以建立以下定理:

**定理 3.3**。设$\Omega$ 为光滑有界区域，且 $p \in S = \partial\Omega$ 是 $H^S$的一个非退化临界点。存在 $\lambda_0(S) > 0$、$p$ 的一个邻域 $U \subset S$ 以及一条光滑曲线$\gamma : [0, \lambda_0) \to S$，使得 $\gamma(0) = p$，并且每个 $\phi^{\gamma(\lambda),\lambda}$ 都是 $\mathcal{M}^{4,\alpha}_{,\lambda}(S)$中的 $\mathcal{W}$ 的临界点。此外，对于 $\lambda < \lambda_0$，这些是 $\mathcal{M}^{4,\alpha}_{,\lambda}(S)$ 中重心位于 $U$的 $\mathcal{W}$ 的唯一临界点。

## 3.2 常平均曲率曲面的构造

带有体积约束的常平均曲率半球面的最初构造见于 Bellettini 和 Fusco 的文章 [2]。不过，本文并未沿用他们的构造，而是采用 Alessandroni 和 Kuwert 的策略 [1]。将试探解 $\phi = F^{a,\lambda} \circ f_u$ 代入 (1.2) 可得到以下问题:

$$\begin{cases} H[u, \tilde{g}^{a,\lambda}] = \alpha, \\ B_1[u, \tilde{g}^{a,\lambda}] = 0, \\ V[u, \tilde{g}^{a,\lambda}] = \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases} \tag{3.7}$$

同样，主要思路是利用隐函数定理，求出 $u$ 关于抽象背景度量 $\tilde{g}$ 的函数，而最终我们可以选择 $\tilde{g}^{a,\lambda}$。但这仍然行不通，因为线性化算子存在一个核，该核与面积泛函在平移下的不变性有关（在欧氏情形中）。为了解决这一问题，我们采用相同的策略并研究

$$\begin{cases} H[u,\tilde{g}] = \alpha + \beta_i \nabla C^i[u,\tilde{g}], \\ B_1[u,\tilde{g}] = 0, \\ V[u,\tilde{g}] = \dfrac{2\pi}{3}, \\ C^i[u,\tilde{g}] = 0 \quad \text{for } i = 1,2. \end{cases} \tag{3.8}$$

完全类似于定理 3.1，可以证明以下定理：

**定理 *3.4.*** 设 $\Omega \in C^\infty$ 为一个有界区域。存在 $\lambda_0(\Omega)$ 和 $(0,0,0)$ 的一个邻域 $U \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2_+) \times \mathbb{R}^3$，使得对每个 $p \in S$ 和 $\lambda \le \lambda_0$，方程 *(3.8)* 都存在唯一解 $(u^{a,\lambda}, \alpha^{a,\lambda}, \beta^{a,\lambda}_i) \in U$。此外，映射

$$S \times [0, \lambda_0(S)] \ni (a,\lambda) \mapsto (u^{a,\lambda}, \alpha^{a,\lambda}, \beta_i^{a,\lambda}) \in U$$

是光滑的。此外，$u^{a,\lambda} \in C^\infty(\mathbb{S}^2_+)$ 且对所有 $k \ge 2$

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}} \le C(\Omega,k)\lambda. \tag{3.9}$$

此外，其余分析与 [1]十分相似。首先，将曲面

$$\phi^{a,\lambda} := F^{a,\lambda} \circ f_{u^{a,\lambda}}. \tag{3.10}$$

引入为方程 (1.2) 的一个候选解。为得到一个解，接下来研究约化泛函

$$\bar{A}(a,\lambda) := A[\phi^{a,\lambda}] = \lambda^2 A[u^{a,\lambda}, \tilde{g}^{a,\lambda}].$$

按照 [1], 中定理 2 的证明，可以建立以下类似的定理：

**定理 3.5**。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个光滑有界区域，且 $S := \partial\Omega$。那么对于 $\lambda \in [0,\lambda_0]$，点 $a \in S$ 是 $\bar{A}(\cdot,\lambda)$ 的临界点，当且仅当 $\phi^{a,\lambda}$ 满足 (1.2)，或者等价地，$u^{a,\lambda}$ 满足问题 (3.7)。

在附录 5.2中，我们建立了以下展开式，它是常平均曲率情形下方程的对应结果： (3.6)

$$A[\phi^{a,\lambda}] = \lambda^2 A[u^{a,\lambda}, \tilde{g}^{a,\lambda}] = \lambda^2 \left(2\pi - \frac{\pi}{4} H^S(a)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)\right) \tag{3.11}$$

利用方程（3.11），我们可以沿用 [1] 中定理 3 的证明，得到以下结果。

**定理 3.6**。 设 $\Omega$ 是一个光滑有界区域，且 $p \in S = \partial\Omega$ 是 $H^S$ 的一个非退化临界点。存在 $\lambda_0(S) > 0$、一个 $p$ 的邻域 $U \subset S$，以及一条光滑曲线 $\gamma\colon [0,\lambda_0) \to S$，使得 $\gamma(0) = p$，并且每个 $\phi^{\gamma(\lambda),\lambda}$ 都是 $\mathcal{N}^2$ 中 $A$ 的临界点，$_\lambda{}^\alpha(S)$。此外，对于 $\lambda < \lambda_0$，这些是 $\mathcal{N}^2$ 中 $A$ 的唯一临界点，$_\lambda{}^\alpha(S)$，且其重心位于 $U$ 中。

这一结果已由 Bellettini 和 Fusco 在 [2] 中建立。参见其文章中的注 1.4 和推论 5.6。

### 3.3 与黎曼情形的关键区别

构造面积或 Willmore 泛函临界点的分析可以调整为在黎曼流形 $M$近似球面 上进行 $M$。对于 Willmore 泛函，Mattuschkas 的博士论文 [13]中$^{\lambda}$ 给出了相关内容。现在我们考虑的不是 $F^{a,\lambda}$，而是

$$\mathcal{F}^{a,\lambda} : \bar{B}_2(0) \to M,\ \mathcal{F}^{a,\lambda}(x) := \exp_a(\lambda x_\mu b_\mu) \quad b_\mu\text{: any orthonormal frame of } T_aM. \tag{3.12}$$

对于一个 $C^{4,\alpha}$-小的图函数 $u$: $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$，我们接下来考虑一个近似球面

$$\mathcal{F}^{a,\lambda} \circ f_u \quad \text{where} \quad f_u : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f_u(\omega) := (1 + u(\omega))\omega. \tag{3.13}$$

类比于类 $\mathcal{M}^{4,\alpha}_{,\lambda}(S)$，我们定义

$$\mathcal{M}^{4,\alpha}_{\lambda}(M) := \{\, \phi \text{ of the form (3.13)} \mid A[\phi] = 4\pi\lambda^2 \,\}.$$

定理 3.1 的类似结果——即，具有指定重心的临界点的存在性——在 [13]中作为定理 1.0.1 得到证明。将具有指定重心 $a$ 的面积 $4\pi\lambda^2$ 的临界点记为 $\Phi^{a,\lambda}$，并以 Sc 表示 $M$ 的标量曲率，则 Willmore 能量有如下展开式：

$$\mathcal{W}[\Phi^{a,\lambda}] = 4\pi - \frac{2\pi}{3}\lambda^2 \operatorname{Sc}(a) + 0 \cdot \lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{3.14}$$

这并未在 [13], 中证明，而是由 Ikoma、Malchiodi 和 Mondino 在 [5] 中证明的——不过他们采用的方法与我们在小节 2.2中介绍的方法不同。基于这一展开式，可以证明定理 3.3 的如下类似结果：

**定理 3.7.** 设 $p \in M$ 是 Sc的一个非退化临界点。存在 $\lambda_0(M) > 0$、$p$ 的一个邻域 $U$ 以及一条光滑曲线 $\gamma$: $[0, \lambda_0) \to M$，使得 $\gamma(0) = p$，并且每个 $\Phi^{\gamma(\lambda),\lambda}$ 都是 $\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{M}^{4,\alpha}_{,\lambda}(M)$中的一个临界点。此外，对于 $\lambda < \lambda_0$，这些是 $\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{M}^{4,\alpha}_{,\lambda}(M)$ 中重心位于 $U$的唯一临界点。

曲面 $\Phi^{a,\lambda}$ 在非退化临界点 $p$ 处为 Sc 的某个邻域构成叶状分解，这一事实源于

$$\dot{\gamma}(0) = 0. \tag{3.15}$$

这一事实与方程（ $\lambda^3$ 项系数为零密切相关3.14）。我们将在定理 1.1 的证明中，或者更具体地说，在引理4.3的证明中解释这种联系。为建立方程（3.15）， [5] 的作者利用了各种几何量展开式中的某些对称性。详情请参见 [5]中的引理 5.1。

现在我们给出一种建立（3.15）的另一种论证。关键在于研究，当我们不使用标准正交标架 $b_\mu$，而改用另一个标架$b'_\mu$时，曲面 $\Phi^{a,\lambda}$ 如何变化，其中该标架与旧标架通过 $b'_\mu = T_{\mu\nu}b_\nu$ 相关，且 $T \in \mathbb{O}(3)$。将使用这一新标架构造的曲面记为 $\Phi^{T,a,\lambda}$ 并沿用 [1] 中引理 10 的论证，可以相对容易地证明

$$\Phi^{T,a,\lambda} = \Phi^{a,\lambda} \circ T \quad \text{where we also use } T \text{ as a map } T : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2.$$

也就是说， $\Phi^{a,\lambda}$ 仅通过重新参数化发生变化，因此 $\Phi^{a,\lambda}$ 与 $\Phi^{T,a,\lambda}$ 描述的是同一个几何曲面。接下来，我们回顾一下，对于给定的 $a \in M$，曲面 $\Phi^{a,\lambda}$ 由隐函数定理对所有 $\lambda \in [0, \lambda_0)$ 构造得到。然而，将其限制为 $\lambda \geq 0$ 并非必要；事实上，对于 $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$，也可以构造曲面 $\Phi^{a,\lambda}$。注意，在方程 (3.12) 和 (3.13) 中改变 $\lambda \to -\lambda$，等价于通过矩阵 $-\mathrm{Id}_3$改变标架。因此

$$\Phi^{a,-\lambda} = \Phi^{-\mathrm{Id}_3,a,\lambda} = \Phi^{a,\lambda} \circ (-\mathrm{Id}_3). \tag{3.16}$$

E利用 Willmore能量在重参数化下的不变性，我们得到 n

$$\bar{\mathcal{W}}(a,-\lambda) = \mathcal{W}[\Phi^{a,-\lambda}] = \mathcal{W}[\Phi^{a,\lambda} \circ (-\mathrm{Id}_3)] = \mathcal{W}[\Phi^{a,\lambda}] = \bar{\mathcal{W}}(a,\lambda). \tag{3.17}$$

这一恒等式已经确保公式 (3.14) 中的 $\lambda^3$-系数消失。然而，我们无需借助公式 (3.14) 的展开式即可推导出公式 (3.15)。为此，我们首先注意到，定理 3.7 同样可以扩展为允许 $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$，从而给出一条曲线 $\gamma \in C^\infty((-\lambda_0, \lambda_0)\ M)$，使得在 $\mathcal{M}^4$ 内、$_\lambda{}^\alpha(M)$ 的所有临界点中，重心位于 $U$ 的临界点只有 $\Phi^{\gamma(\lambda),\lambda}$。利用公式 (3.16)，我们得到对于 $\lambda > 0$

$$\Phi^{\gamma(-\lambda),-\lambda} = \Phi^{\gamma(-\lambda),\lambda} \circ (-\mathrm{Id}_3).$$

因此 $\Phi^{\gamma(-\lambda),\ \lambda}$ 是临界的。根据定理 3.7中的唯一性陈述可知，存在一个 $\mathbb{S}^2$ 的重参数化 $\kappa$，使得 $\Phi^{\gamma(-\lambda),\ \lambda} = \Phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda} \circ \kappa$，因此由黎曼重心在重参数化下的不变性

$$\gamma(-\lambda) = C[\Phi^{\gamma(-\lambda),\lambda}] = C[\Phi^{\gamma(\lambda),\lambda} \circ \kappa] = \gamma(\lambda)$$

由此可立即推出方程（3.15）。

**区域情形下的不适用性**

上述论证不适用于光滑有界区域 Ω 的边界 $S$ 上的半球面。回顾一下，近似半球面具有如下形式

$$F^{a,\lambda}[(1+u(\omega))\omega] = a + \lambda(1+u(\omega))(\omega_i b_i + \omega_3 N^S(a)) + \varphi^a[\lambda(1+u(\omega))\omega_i e_i]N^S(a)$$

我们看到，改变 $\lambda \to -\lambda$ 不仅会翻转所选的标架 $b_i$，还会翻转法向量 $N^S$（$a$）——从而使其由内法向量变为外法向量。因此，曲面会从位于区域 Ω内部变为位于其外部。

因此，在当前情形下，允许 $\lambda$ 取负值并使用对称性论证并不可行。这一问题的迹象已体现在展开式（3.6）中，其中包含 $\lambda$ 的偶次幂和奇次幂项——类似（3.17）的恒等式本可以排除这些项。事实上，我们证明

$$\bar{\mathcal{W}}(a,\lambda) = 2\pi - \pi H^S(a)\lambda + \frac{1}{2}\pi\left(K^S(a) + \left(\ln(2) - \frac{3}{2}\right)H^S(a)^2\right)\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

这一事实表明， $\lambda^2$系数不为零，实质上蕴含了定理1.1。

# 4 主定理的证明

下文中，令 $K^S$ 表示 $S$的高斯曲率， $N^S$ 表示沿着 $S$ 的指向内侧的法向量场，而 $H^S$ : $= \vec{H}^S \cdot N^S$ 表示 $S$的标量平均曲率。定理1.1和1.2 的证明基于以下引理:

**引理 4.1** （Willmore 能量展开）。 设 $a \in S$， $\lambda \in [0, \lambda_0)$ 并考虑方程 $\phi^{a,\lambda}$ （3.5）中的临界点。那么

$$\mathcal{W}[\phi^{a,\lambda}] = 2\pi - \lambda\pi H^S(a) + \frac{1}{2}\pi\left(K^S(a) + \left(\ln(2) - \frac{3}{2}\right)H^S(a)^2\right)\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{4.1}$$

**引理 4.2** （面积展开）。 设 $a \in S$， $\lambda \in [0, \lambda_0)$ 并考虑方程 $\phi^{a,\lambda}$ （3.10）中的临界点。那么

$$\mathcal{A}[\phi^{a,\lambda}] = \lambda^2\left(2\pi - \lambda\frac{\pi}{4}H^S(a) + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{6}K^S(a) - \frac{35}{192}H^S(a)^2\right)\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)\right). \tag{4.2}$$

利用方程（4.1）和（4.2），我们可以从定理 $\gamma'$（0）3.3和3.6中推导出一个显式公式。

**引理** **4.3.** 设 $p \in S$ 是 $H^S$ 和 $\gamma$ 中的一个非退化临界点，如定理 *3.3*所述。 $n$

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{1}{2}\left(\nabla^2 H^S(p)\right)^{-1}\nabla K^S(p).$$

证明。考察定理 3.3 （见 [1] 中的定理 3）的证明可知， $\gamma$ 的存在性是通过研究

$$v(a,\lambda) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\nabla_1\bar{\mathcal{W}}[a,\lambda] & , \text{ for } \lambda \neq 0, \\ \left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}\nabla_1\mathcal{W}[a,\lambda], & \text{for } \lambda = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

我们回顾 $\bar{\mathcal{W}}[a,\lambda]$ : $= \mathcal{W}[\phi^{a,\lambda}]$ 是一个满足 $\bar{\mathcal{W}}[a,0] \equiv 2\pi$ 的光滑函数。因此 $\nabla_1\bar{\mathcal{W}}[a,0] \equiv 0$，并且我们可以写成

$$v(a,\lambda) = \frac{1}{\lambda}(\nabla_1\bar{\mathcal{W}}[a,\lambda] - \nabla_1\bar{\mathcal{W}}[a,0]) = \int_0^1 (\partial_2\nabla_1\bar{\mathcal{W}})(a,\lambda s)ds.$$

因此 $v$ 是光滑的，并且利用方程 (4.1)，我们得到 $v(a, 0) = -\pi\nabla H^S(a)$，从而 $\nabla_1 v(p,0) = -\pi\nabla_1^2 H^S(p)$。显然 $v(p, 0) = 0$，并且由于 $p$ 是非退化的， $\nabla_1 v(p,0)$ 是可逆的。隐函数定理给出一个 $\lambda_0 > 0$、 $p$ 的一个邻域 $U$ 以及一条 $C^\infty$ 光滑曲线 $\gamma$ : $[0, \lambda_0) \to S$，满足 $\gamma(0) = p$ 且

$$v(a,\lambda) = 0 \text{ for } \lambda < \lambda_0 \text{ and } a \in U \quad \Leftrightarrow \quad a = \gamma(\lambda).$$

特别地，这就证明了定理 3.3。根据构造 $v(\gamma(\lambda)\ \lambda) = 0$。对 $\lambda$ 在 $\lambda = 0$ 处求导，并利用方程 ( 4.1)可得

$$\pi\nabla^2 H^S(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = -\nabla_1 v(\gamma(0),0)\dot{\gamma}(0) = \left.\frac{\partial v(p,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = \frac{\pi}{2}\nabla K^S(p).$$

□

续　通过相同的论证，我们为常平均曲率情形建立了以下类似引理 .

**Lem引理 4.4**。设 $p \in S$ 是 $H^S$ 中的一个非退化点，且 $\gamma$ 如定理 3.6所述。那么

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{1}{3}\left(\nabla^2 H^S(p)\right)^{-1} \nabla K^S(p).$$

引理 4.3 和4.4 实质上蕴含了定理1.1 和1.2。下面简要给出直观论证。考虑曲面 $\phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda}$。利用微分同胚 $F^p$，我们可以将它们拉回到 $\mathbb{R}^3_+$，从而得到本质上具有以下形式的曲面

$$\Phi^0_\lambda : \mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}^3_+,\ \Phi^0_\lambda(\omega) := \lambda v_0 e_1 + \lambda\omega$$

其中 $v_0$ 分别由引理 4.3 和 4.4 给出。容易看出，当 $v_0 < 1$时，这些曲面两两不相交；而当 $v_0 > 1$ 时，则并非如此。对此，图示或许最为直观：

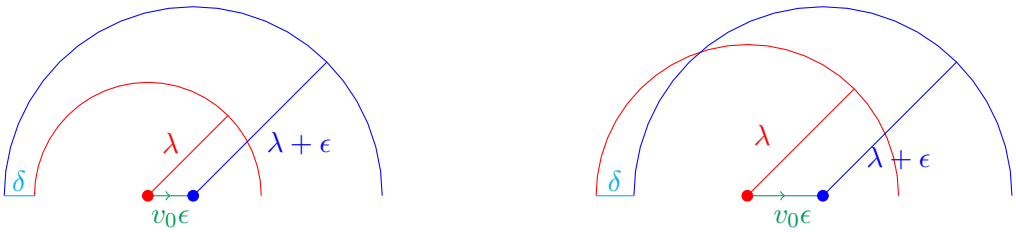


图 1：未扰动情形下的叶状性质

蓝色圆的最左端点位于 $v_0(\lambda+\epsilon) - (\lambda+\epsilon)$，红色圆的最左端点则位于 $\lambda v_0 - \lambda$。因此，它们的有向距离为 $\delta = \lambda - (\lambda+\epsilon) + v_0\epsilon = (v_0 - 1)\epsilon$。所以，若 $v_0 > 1$（右图），圆向右移动得如此之快，以至于不同半径的圆会相交；而在 $v_0 < 1$ （左图）中则不会发生这种情况。在下面的定理中，我们将使这一直观论证严谨化。

**定理 4.5**。设 Ω 是一个光滑有界区域，$p \in S = \partial\Omega$ 是 $H^S$的一个非退化临界点，$\phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda}$ 表示定理 3.3 中的 *Willmore* 型曲面，并令 $v_0 := |\dot{\gamma}(0)|$。

*1.* 若 $v_0 < 1$，则存在 $\lambda_0(v) > 0$ 以及 $p$ 在Ω 中的一个邻域 $U$，使得曲面$(\phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda})_{0<\lambda<\lambda_0}$构成 $U\setminus\{p\}$的叶状分解。*2.* 若 $v_0 > 1$，则对于 $p$ 在Ω 中的任何邻域 $U$ 及 $\lambda_0 > 0$，曲面$(\phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda})_{0<\lambda<\lambda_0}$都不可能构成 $U\setminus\{p\}$的叶状分解。

由于靠近 $p$的面积约束 Willmore 曲面恰好是曲面 $\phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda}$ 因此可推知，在第二种情况下，不可能存在其他面积约束 Willmore 曲面的叶状分解。

在小节 4.1中，我们证明这两种情况都是可能的。

证明。在整个证明过程中，$R(\lambda,\omega)$ 表示定义在 $\lambda$ 和 $\omega$ 上的一个光滑函数，它可能随行而变。设 $U$ 是 $p$ 和 $b_1$ 的一个小邻域，$b_2\colon U\to TS$ 满足对所有 $a\in U$，$(b_1(a)\ b_2(a))$ 都是 $T_aS$ 的一个标准正交基。此外，我们可以假设 $\dot\gamma(0)=v_0b_1(p)$，其中 $v_0\in[0,\infty)$。记 $b_3(a):=N^S(a)$，于是对于足够小的 $\lambda>0$

$$\phi^{\gamma(\lambda),\lambda}=\gamma(\lambda)+\lambda(1+u^{\gamma(\lambda),\lambda}(\omega))\omega_\mu b_\mu(\gamma(\lambda))+\varphi^{\gamma(\lambda)}(\lambda(1+u^{\gamma(\lambda),\lambda}(\omega))\omega_ie_i)b_3(\gamma(\lambda)).\tag{4.4}$$

首先，我们利用泰勒公式写出

$$\gamma(\lambda)=p+\lambda\dot\gamma(0)+\lambda^2\int_0^1\gamma''(\lambda s)(1-s)ds=p+\lambda\dot\gamma(0)+\lambda^2R(\lambda,\omega).\tag{4.5}$$

回顾定理 3.1，定义 $u\colon\ [0,\lambda_0]\to C^4,\ ^\alpha(\mathbb{S}^2_+)$ 为 $u(t)\colon=u^{\gamma(\lambda),\ t}$。由定理 3.1，$u$ 是光滑的，并满足 $u(0)=0$。因此

$$\lambda u^{\gamma(\lambda),\lambda}=\lambda(u(\lambda)-u(0))=\lambda^2\int_0^1u'(\lambda s)ds=\lambda^2R(\lambda,\omega).\tag{4.6}$$

接下来，利用 $\varphi^a(0)=0$ 和 $\nabla\varphi^a(0)=0$，我们用类似的论证推导出

$$\varphi^p(\lambda\omega_ie_i)b_3(p)=\lambda^2R(\lambda,\omega)\quad\text{ and }\quad\varphi^{\gamma(\lambda)}(\lambda(1+u^{\gamma(\lambda),\lambda}(\omega))\omega_ie_i)b_3(\gamma(\lambda))=\lambda^2R(\lambda,\omega).\tag{4.7}$$

最后，我们利用 $\gamma(0)=p$ 写出

$$\lambda b_\mu(\gamma(\lambda))=\lambda b_\mu(p)+\lambda^2\int_0^1\nabla_{\dot\gamma(s\lambda)}b_\mu(\gamma(s\lambda))ds=\lambda b_\mu(p)+\lambda^2R(\lambda,\omega).\tag{4.8}$$

将方程 (4.5)、(4.6)、(4.7) 和 (4.8) 代入方程 (4.4)，得到

$$\phi^{\gamma(\lambda),\lambda}(\omega)=p+\lambda\dot\gamma(0)+\lambda\omega_\mu b_\mu(p)+\lambda^2R[\lambda,\omega]=F^p[\lambda v_0e_1+\lambda\omega_\mu e_\mu]+\lambda^2R(\lambda,\omega).$$

由于 $F^p$ 是光滑的微分同胚，我们推得

$$(F^p)^{-1}\left(\phi^{\gamma(\lambda),\lambda}\right)=\lambda v_0e_1+\lambda\omega+\lambda^2R(\lambda,\omega).$$

定理 A 表明，当 $v_0<1$ 时，曲面 $(F^p)^{-1}\left(\Phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda}\right)$ 在 0 的某个删除邻域中构成叶状分解；而当 $v_0>1$ 时则不成立。由于 $F^p$ 是一个微分同胚，定理得证。

□

沿用基本相同的论证，我们得到：

**定理 4.6**。设 $\Omega$ 是一个光滑有界区域，$p\in S=\partial\Omega$ 是 $H^S$的一个非退化临界点，$\phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda}$ 表示定理 *3.6* 中的常平均曲率曲面，并令 $v_0\colon=|\dot\gamma(0)|$。

¯*1.* 若 $v_0<1$，则存在 $\lambda_0(v)>0$ 以及 $p$ 在 $\Omega$ 中的一个邻域 $U$，使得曲面$(\phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda})_{0<\lambda<\lambda_0}$在 $U\setminus\{p\}$ 中构成叶状分解。¯*2.* 若 $v_0>1$，则对于 $\Omega$ 中 $p$ 的任意邻域 $U$ 以及 $\lambda_0>0$，曲面$(\phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda})_{0<\lambda<\lambda_0}$均不可能在 $U\setminus\{p\}$ 中构成叶状分解。

再次说明，靠近 $p$ 的体积约束常平均曲面恰好是曲面 $\phi^{\gamma(\lambda),\ \lambda}$ 由此可知，在第二种情形下，不可能存在其他体积约束常平均曲面叶状分解。

### 4.1 两种情形的构造

我们通过显式构造证明，定理 4.5 和 4.6 中的两种情形均有可能。令$D_r(0)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的开球，其半径为 $r$，球心为 0。对于 $u \in C^\infty(\bar{D}_1(0)$ ，我们考虑由下列图像定义的曲面

$$\Phi_u : \bar{D}_1(0) \to \mathbb{R}^3,\ \Phi_u(x,y) := (x,y,u(x,y)). \tag{4.9}$$

对于任意这样的曲面，都存在一个光滑有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 使得 $\Phi_u(\bar{D}_{\frac{1}{2}}(0)) \subset \partial\Omega =: S$。令 $p := \Phi(0,0)$，并假设 $p$ 是一个非退化临界点， $S$的平均曲率为 $H^S$ 。也就是说

$$\nabla H^S(p) = 0 \quad \text{and} \quad \nabla^2 H^S(p) \text{ is invertible.}$$

记 $S$ 的高斯曲率为 $K^S$，定义

$$v_0 := \left(\nabla^2 H^S(p)\right)^{-1} \nabla K^S(p) \in T_pS.$$

我们使用由 $\Phi_u$ 在方程（4.9）中定义的局部坐标系。于是

$$\left(\nabla^2 H^S\right)_{ij} g^{ik} v_0^j = g^{kj}\partial_j K^S.$$

一般而言，协变海森矩阵的坐标为 $(\nabla^2 H^S)_{ij} = \partial_{ij} H^S - \Gamma^k{}_{ij}\partial_k H^S$。然而，由于 $(0,0)$ 是 $H^S$的临界点，我们有

$$\nabla^2 H^S(0,0) = \begin{bmatrix} \partial_{xx} H^S(0,0) & \partial_{xy} H^S(0,0) \\ \partial_{xy} H^S(0,0) & \partial_{yy} H^S(0,0) \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

因此， $v_0$ 在坐标 $\Phi_u$ 中的分量 $v_{0,\ x}$ 和 $v_{0,\ y}$ 为

$$\vec{v_0} := \begin{bmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{xx} H^S(0,0) & \partial_{xy} H^S(0,0) \\ \partial_{xy} H^S(0,0) & \partial_{yy} H^S(0,0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \partial_x K(0,0) \\ \partial_y K(0,0) \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

最后，我们 将分量向量 $\vec{v_0}$ 的欧几里得范数与 $v_0$的范数联系起来。记

$$v_0 = v_{0,x} \frac{\partial \Phi_u}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} + v_{0,y} \frac{\partial \Phi_u}{\partial y}\bigg|_{(0,0)},$$

于是显然可得

$$\begin{aligned} |v_0|^2 &= v_{0,x}^2 \left(1 + (\partial_x u(0,0))^2\right) + v_{0,y}^2 \left(1 + (\partial_y u(0,0))^2\right) + 2 v_{0,x} v_{0,y} \partial_x u(0,0) \partial_y u(0,0) \\ &= v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2 + (v_{0,x}\partial_x u(0,0) + v_{0,y}\partial_y u(0,0))^2. \end{aligned}$$

这表明以下两个不等式:

$$|\vec{v_0}| \le |v_0| \le |\vec{v_0}| \sqrt{1 + |\nabla u(0,0)|^2} \tag{4.12}$$

以下计算均使用 Mathematica 执行（参见附录 C）。令 $a$，$c_1$ 和$c_2$ 表示实参数。我们考虑函数

$$u(x,y) = ax + ay + xy - c_1x^3 - c_2y^3. \tag{4.13}$$

不难验证

$$\left.\frac{\partial H^S}{\partial x}\right|_{x=y=0} = -\frac{2(a - a^3 + 3c_1 + 9a^2c_1 + 6a^4c_1)}{(1+2a^2)^{\frac{5}{2}}},$$
$$\left.\frac{\partial H^S}{\partial y}\right|_{x=y=0} = -\frac{2(a - a^3 + 3c_2 + 9a^2c_2 + 6a^4c_2)}{(1+2a^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

要求 (0, 0) 是 $H^S$ 的临界点，可得关于 $c_1$ 和 $c_2$ 的线性方程，其解为

$$c_1 = c_2 = \frac{-a + a^3}{3 + 9a^2 + 6a^4}. \tag{4.14}$$

从现在起，我们选取 $c_1$ 和 $c_2$，如方程（4.14）所示。利用方程（4.10）并计算高斯曲率的梯度，得到:

$$\nabla^2 H^S(0,0) = -\frac{2}{(1+2a^2)^{\frac{7}{2}}}\begin{bmatrix} \frac{a^2(-5-20a^2+a^4)}{1+a^2} & 1+4a^2+a^4 \\ 1+4a^2+a^4 & \frac{a^2(-5-20a^2+a^4)}{1+a^2} \end{bmatrix}$$
$$\nabla K^S(0,0) = \frac{4a}{(1+2a^2)^3}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

限制在 $a > 0$ 上，不难验证

$$|\vec{v}_0| = \left|(\nabla^2 H^S(0,0))^{-1}\nabla K^S(0,0)\right| = \left|-\frac{2a(1+a^2)\sqrt{1+2a^2}}{1-15a^4+2a^6}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right|$$
$$= \frac{2a(1+a^2)\sqrt{2(1+2a^2)}}{|1-15a^4+2a^6|}. \tag{4.15}$$

对于 $a = 0$，我们得到 $\vec{v}_0 = 0$，并由方程（4.12）可知 $v_0 = 0$。这就证明了定理 4.5 和 4.6中的第一种情形。接下来注意到，多项式 $p(x) = 1 - 15x^4 + 2x^6$有唯一的零点 $\xi \in (.5,.52)$。因此 $|\vec{v}_0| \to \infty$ 对于 $a \to \xi^+$成立，这就证明了两个定理中的第二种情形。

# 5 第 4.1 节和第 4.2 节展开式的概要

令 $h$ 表示 $S = \partial\Omega$ 的第二基本形式，$a \in S$ 并令 $(b_1, b_2)$ 为 $T_aS$ 由 Weingarten 算子的特征向量构成的标准正交基。我们考虑如下参数化

$$f^a : U \subset \mathbb{R}^2 \to S,\ f[a,x] := a + x_ib_i + \varphi^a(x)N^S(a)$$

来自小节 2.2。 $f^a(0) = a$ 第一基本形式和第二基本形式具有如下矩阵表示:

$$g_{ij}(0) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad h_{ij}(0) = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \\ & \kappa_2 \end{bmatrix}$$

这里 $\kappa_1$ 和 $\kappa_2$ 表示 Weingarten 算子的特征值。 $S$的平均曲率和高斯曲率公式如下:

$$H^S(a) = \kappa_1 + \kappa_2 \quad \text{and} \quad K^S(a) = \kappa_1\kappa_2$$

我们简记 $\tilde{g}(\lambda) := \tilde{g}^{a,\lambda}$。在 [1] (第 3 节) 中，已证明

$$\tilde{g}'(0) = \begin{bmatrix} & & \kappa_1 x_1 \\ & & \kappa_2 x_2 \\ \kappa_1 x_1 & \kappa_2 x_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

### 5.1 定理 4.1 的证明

考虑方程（3.6）中已在 [1], 得到的展开式，只需计算

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0} \mathcal{W}[\phi^{a,\lambda}] = \frac{d^2}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0} \mathcal{W}[u(a,\lambda), \tilde{g}^{a,\lambda}]$$

为证明引理 4.1。我们简记 $u(\lambda) := u(a, \lambda)$ 并写作

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0} \mathcal{W}[u(\lambda), \tilde{g}(\lambda)] = D_1\mathcal{W}[0,\delta]u''(0) + D_2\mathcal{W}[0,\delta]\tilde{g}''(0) + \frac{d^2}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0} \mathcal{W}[\lambda u'(0), \delta + \lambda\tilde{g}'(0)]. \tag{5.2}$$

最后一项可通过推导 $\tilde{g}'(0)$ 和 $u'(0)$ 的显式公式来计算。 $\tilde{g}'(0)$ 由方程（5.1）给出。函数 $u'(0)$ 可通过解析方法计算（见附录 B.4），其表达式为

$$u'(0)(\omega) = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{4}\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{1+\omega_3} + (\kappa_1 + \kappa_2)\left[1 - \ln(2) + \frac{\ln(1+\omega_3)}{2} - \frac{3}{4}\omega_3\right] - \frac{\kappa_1\omega_1^2 + \kappa_2\omega_2^2}{2}\omega_3. \tag{5.3}$$

利用这两个公式， $\mathcal{W}[\lambda u'(0)\ \delta + \lambda\tilde{g}'(0)]$ 原则上是一个完全显式的对象。直接进行机器计算可得

$$D_1^2\mathcal{W}[0,\delta][u'(0), u'(0)] = -\frac{8\pi}{7}K^S(a) + \left(\frac{863}{280} - \ln(8)\right)\pi H^S(a)^2, \tag{5.4}$$

$$D_{12}^2\mathcal{W}[0,\delta][u'(0), \tilde{g}'(0)] = \frac{23\pi}{14}K^S(a) - \frac{291}{560}\pi H^S(a)^2, \tag{5.5}$$

$$D_2^2\mathcal{W}[0,\delta][\tilde{g}'(0), \tilde{g}'(0)] = \frac{4\pi}{21}K^S(a) + \frac{16\pi}{35}H^S(a)^2. \tag{5.6}$$

T方程（5.2）中的前两项在附录 B.6 中计算得出，结果为

$$D_1\mathcal{W}[0,\delta]u''(0) = 4\pi(\ln(2)-1)H^S(a)^2, \tag{5.7}$$

$$D_2\mathcal{W}[0,\delta]\tilde{g}''(0) = -\frac{4\pi}{3}K^S(a). \tag{5.8}$$

结合方程 (5.2) 和 (5.4)-(5.8) 得到

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0}\mathcal{W}[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = \pi K^S(a) + \pi\left(\ln(2)-\frac{3}{2}\right)H^S(a)^2$$

因此由引理 4.1。

## 5.2 定理 4.2 的证明

设 $a \in S$。我们简记 $u(\lambda) := u(a,\lambda)$，并建立如下展开式

$$\mathcal{A}[\phi^{a,\lambda}] = \lambda^2 A[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = \lambda^2\left(2\pi - \lambda\frac{\pi}{4}H^S(a) + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{6}K^S(a) - \frac{35}{192}H^S(a)^2\right)\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)\right)$$

通过证明以下两个公式:

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}A[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = -\frac{\pi}{4}H^S(a) \tag{5.9}$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0}A[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = \pi\left(\frac{1}{6}K^S(a) - \frac{35}{192}H^S(a)^2\right) \tag{5.10}$$

为此，我们写作

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}A[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = D_1A[0,\delta]u'(0) + D_2A[0,\delta]\tilde{g}'(0), \tag{5.11}$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0}A[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = D_1A[0,\delta]u''(0) + D_2A[0,\delta]\tilde{g}''(0) + \frac{d^2}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0}A[\lambda u'(0),\delta+\lambda\tilde{g}'(0)]. \tag{5.12}$$

在方程（B.37）和（B.50）中，我们在附录中证明了

$$D_1A[0,\delta]u'(0) = 0 \quad \text{and} \quad D_2A[0,\delta]\tilde{g}'(0) = -\frac{\pi}{4}H^S(a). \tag{5.13}$$

这两个恒等式已经证明了方程（5.9）。接下来，我们讨论方程（5.10）。方程方程（5.10）中的最后一项，可以通过推导 $\tilde{g}'(0)$和 $u'(0)$的显式公式来计算。 $\tilde{g}'(0)$ 由方程（5.1）给出。在附录 B.3 中，我们证明 $u'(0)$ 由下式给出

$$u'(0)(\omega) = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{4}\left(\frac{3}{4}-\omega_3\right) + \frac{\kappa_1-\kappa_2}{4}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{3}\frac{2-3\omega_3+\omega_3^3}{(1-\omega_3^2)^2} - \frac{1}{2}\omega_3(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2). \tag{5.14}$$

利用方程（5.1）中的 $\tilde{g}'(0)$ 以及方程（5.14）中的 $u'(0)$，以下计算可以交由机器完成：

$$D^2_{12}A[0,\delta](u'(0),\tilde{g}'(0)) = \frac{5\pi}{14}K^S(a) - \frac{579\pi}{2240}H^S(a)^2 \tag{5.15}$$

$$D^2_{1}A[0,\delta](u'(0),u'(0)) = -\left(\frac{31}{270}+\frac{4}{9}\ln(2)\right)K^S(a)\pi + \left(\frac{2201}{8640}+\frac{\ln(2)}{9}\right)H^S(a)^2 \tag{5.16}$$

$$D^2_{2}A[0,\delta](\tilde{g}'(0),\tilde{g}'(0)) = \frac{64\pi}{105}K^S(a) - \frac{4\pi}{21}H^S(a)^2 \tag{5.17}$$

在附录 B.5 中，我们计算

$$D_2A[0,\delta]\tilde{g}''(0) = -\frac{4\pi}{5}K^S(a) + \frac{4\pi}{15}H^S(a)^2, \tag{5.18}$$

$$D_1A[0,\delta]u''(0) = \left(\frac{113}{30240}-\frac{\ln(2)}{9}\right)\pi H^S(a)^2 + \left(-\frac{229}{945}+\frac{4}{9}\ln(2)\right)\pi K^S(a). \tag{5.19}$$

结合方程 (5.15)、(5.16)、(5.17)、(5.18) 和 (5.19) 得到引理 4.2。

# A 抽象叶状分解论证

**定理 A.1.** 令 $v \in [0,\infty)$、$\Lambda > 0$ 和 $f \in C^\infty([0,\Lambda)\times\mathbb{S}^2_+,\mathbb{R}^3_+)$ 满足 $f[\lambda,\partial\mathbb{S}^2_+] \subset \mathbb{R}^2\times 0$。我们令

$$\phi_\lambda(\omega) := \lambda v e_1 + \lambda\omega + \lambda^2 f[\lambda,\omega]. \tag{A.1}$$

若 $v \in [0,1)$，则存在 $0$ 的一个邻域 $U \subset \mathbb{R}^3_+$ 以及 $\lambda_0 \in (0,\ \Lambda)$，使得曲面 $(\phi_\lambda)_{0<\lambda<\lambda_0}$ 构成 $U\setminus\{0\}$ 的光滑叶状分解。若 $v > 1$，则无论如何选择 $U$ 和 $\lambda_0$，上述结论都不成立。事实上，对于任意 $\lambda_0 > 0$，都存在 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_0$，使得$\mathrm{im}(\phi_{\lambda_1}) \cap \mathrm{im}(\phi_{\lambda_2}) \neq \emptyset$。

定理 A.1 的证明分为若干个引理。

引理 *A.2.* 存在 $\lambda_0 > 0$，使得对于 $\lambda \in (0,\lambda_0)$，映射 $\phi_\lambda$ 是单射。对于这样的 $\lambda$，曲面 $\phi_\lambda$ 被 $\mathbb{R}^3_+$ 分为有界的内部区域 $\mathcal{I}_\lambda$、无界的外部区域 $\mathcal{E}_\lambda$ 以及边界 $S_\lambda := \mathrm{im}(\phi_\lambda)$。此外，如果 $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3_+$ 是连续的，且 $c(0) \in \mathcal{I}_\lambda$，$c(1) \in \mathcal{E}(\lambda)$，则存在 $t \in (0,1)$，使得 $c(t) \in S_\lambda$。

证明。当 $\lambda$ 足够小时，映射 $\phi_\lambda(\omega)$ 是单射，因为 $|D_2 f| \le C$。事实上，$\phi_\lambda(\omega) = \phi_\lambda(\bar{\omega})$ 蕴含

$$\lambda|\omega-\bar{\omega}| = \lambda^2|f[\lambda,\omega]-f[\lambda,\bar{\omega}]| \le C\lambda^2|\omega-\bar{\omega}|.$$

我们将沿 $x_3 = 0$ 的反射记为 $R(x,y,z) := (x,y,-z)$，并定义

$$\bar{\phi}_\lambda : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \bar{\phi}(\omega) := \begin{cases} \phi(\omega) \text{ for } \omega \in \mathbb{S}^2_+, \\ R(\phi(R(\omega))) \text{ for } \omega \notin \mathbb{S}^2_+. \end{cases}$$

显然，$\bar{\phi}$ 是单射且连续的。由于 $\mathbb{S}^2$ 是紧的，$\bar{\phi}$ 是映射到其像上的同胚。Jordan-Brouwer 分离定理（例如参见[14]，推论 5.24）蕴含：

$\bar{\phi}_\lambda(\mathbb{S}^2)$将 $\mathbb{R}^3$ 分为有界的内部和无界的外部区域。我们分别将它们记为 int($\phi_\lambda$) 和 ext($\phi_\lambda$)。将其代入即可得到引理。

$$\mathcal{I}_\lambda := \mathrm{int}(\bar{\phi}_\lambda) \cap [z \geq 0] \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_\lambda := \mathrm{ext}(\bar{\phi}_\lambda) \cap [z \geq 0].$$

$c$ 与 $S_\lambda$ 的交点是 Jordan-Brouwer 分离定理的直接推论。

□

引理 *A.3*。设 $v \in [0,1)$ 、 $\phi_\lambda$ 如公式 *(A.1)* 所示， $\theta_0 \in \mathbb{S}^2_+$ 并考虑射线 $\mathbb{R}^+_0\theta_0$。存在 $\lambda_0\ (v) > 0$ ，使得对于所有 $\lambda \in (0, \lambda_0]$ 都存在唯一的交点$t\ (\lambda, \theta_0)\ \theta_0 \in S_\lambda \cap \mathbb{R}^+_0\theta_0$。根据引理 *A.2*，进而存在唯一的 $\omega\ (\lambda, \theta_0) \in \mathbb{S}^2_+$，使得$t\ (\lambda, \theta_0)\ \theta_0 = f_\lambda\ (\omega\ (\lambda, \theta_0))$ 。映射 $(\lambda, \theta_0) \mapsto (t\ (\lambda, \theta_0)\ \omega\ (\lambda, \theta_0))$ 是光滑的。

证明。 由引理 A.2 可得交点的存在性。接下来我们证明唯一性。设

$$t\theta_0 = \lambda v e_1 + \lambda\omega + \lambda^2 f[\lambda, \omega] \quad \text{and} \quad \bar{t}\theta_0 = \lambda v e_1 + \lambda\bar{\omega} + \lambda^2 f[\lambda, \bar{\omega}]. \tag{A.2}$$

由于 $f$ 是光滑的，我们有 $|f| + |D_2 f| \leq C$，因此当 $\lambda_0$ 足够小时

$$|t| \leq C\lambda,\ |\bar{t}| \leq C\lambda \quad \text{and} \quad |t - \bar{t}| \geq \lambda|\omega - \bar{\omega}| - \lambda^2|f[\lambda, \omega] - f[\lambda, \bar{\omega}]| \geq \frac{1}{2}\lambda|\omega - \bar{\omega}|. \tag{A.3}$$

方程 (A.2) 给出

$$\lambda^2 = (t\theta_0 - \lambda v e_1 - \lambda^2 f[\lambda, \omega])^2 = t^2 - 2t(\lambda v e_1 + \lambda^2 f[\lambda, \omega]) \cdot \theta_0 + \lambda^2 v^2 + \lambda^3 R[\lambda, \omega], \tag{A.4}$$

$$\lambda^2 = (\bar{t}\theta_0 - \lambda v e_1 - \lambda^2 f[\lambda, \bar{\omega}])^2 = \bar{t}^2 - 2\bar{t}(\lambda v e_1 + \lambda^2 f[\lambda, \bar{\omega}]) \cdot \theta_0 + \lambda^2 v^2 + \lambda^3 R[\lambda, \bar{\omega}]. \tag{A.5}$$

这里 $R$ 是 $\lambda$ 上的光滑函数，且 $\omega$。方程 (A.4) 是关于 $t$的二次方程。利用 $t \geq 0$和 $v \in [0,1)$，我们推得，当 $\lambda$足够小时，存在 $C(v) \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} t - \lambda v e_1 \cdot \theta_0 =& \lambda^2 f[\lambda, \omega] + \sqrt{(\lambda v e_1 \cdot \theta_0 + \lambda^2 f[\lambda, \omega])^2 + \lambda^2(1 - v^2 - \lambda R[\lambda, \omega])} \\ \geq& \lambda^2 f[\lambda, \omega] + \lambda\sqrt{1 - v^2 - \lambda R[\lambda, \omega]} \\ \geq& \lambda\sqrt{1 - v^2 - C\lambda} - C\lambda^2 \\ \geq& C(v)\lambda. \end{aligned} \tag{A.6}$$

可以对 $\bar{t}$推导出相应的估计。将 (A.4) 与 (A.5) 相减，并利用估计式 (A.6)，得到

$$\begin{aligned} & \left|2t\lambda^2 f[\lambda, \omega] - 2\bar{t}\lambda^2 f[\lambda, \bar{\omega}] + \lambda^3 R[\lambda, \bar{\omega}] - \lambda^3 R[\lambda, \omega]\right| \\ \geq& |t - \bar{t}|\ \ |t + \bar{t} - 2\lambda v e_1 \cdot \theta_0| \\ \geq& C(v)\lambda|t - \bar{t}|. \end{aligned} \tag{A.7}$$

E通过加上并减去 $2t\lambda^2 f[\lambda, \bar{\omega}]$ 估计方程 (A.7) 的首项，可得 s

$$C(v)\lambda|t - \bar{t}| \leq C\lambda^2|t - \bar{t}| + C|t|\lambda^2|\omega - \bar{\omega}| + C\lambda^3|\omega - \bar{\omega}|.$$

对于 $\lambda$ 足够小的情形，我们可以将 $\lambda^2|t-\bar{t}|$ 吸收到左边。利用 $|t| \leq C\lambda$，我们得到 $\lambda|t-\bar{t}| \leq C\lambda^3|\omega-\bar{\omega}|$。结合方程 (A.3)，可推出 $\frac{1}{2}\lambda|\bar{\omega}-\omega| \leq C\lambda^2|\omega-\bar{\omega}|$，这表明 $\omega=\bar{\omega}$ 对于足够小的 $\lambda_0$。由于 $|t-\bar{t}| \leq C\lambda^2|\omega-\bar{\omega}|$，我们还得到 $t=\bar{t}$。

现在我们证明 $(t,\ \omega)$ 关于 $\lambda$ 正则依赖。令 $\lambda_* > 0$、$\theta_{0*} \in \mathbb{S}^2_+$ 和 $(t_*,\ \omega_*)$ 为下式的唯一解

$$t\theta_{0*} - \lambda_* v e_1 - \lambda_*\omega - \lambda_*^2 f[\lambda_*, \omega] = 0. \tag{A.8}$$

我们通过证明 $\theta_{0*} \notin T_{\omega_*}\mathbb{S}^2_+$ 来说明 $\theta_{0*}\cdot\omega_* \neq 0$。事实上，将方程（A.8）与 $\omega_*$ 相乘可知，当 $\lambda_*$ 充分小时

$$t_*\theta_{0*}\cdot\omega_* = \lambda_* + \lambda_* v e_1\cdot\omega_* + \lambda_*^2 f[\lambda_*,\omega_*]\cdot\omega_* \geq \lambda_*(1-v) - C\lambda_*^2 > 0.$$

我们考虑光滑映射

$$\mathcal{G} : [0,\infty)\times\mathbb{S}^2_+\times[0,\lambda_0)\times\mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}^3,\ \mathcal{G}(t,\omega,\lambda,\theta_0) := t\theta_0 - \lambda v e_1 - \lambda\omega - \lambda^2 f[\lambda,\omega].$$

显然，$\mathcal{G}(t_*,\omega_*,\lambda_*,\theta_{0*}) = 0$。现在我们证明 $D_{1,\ 2}\mathcal{G}[t_*,0,\lambda_*,\theta_{0*}]$ 是可逆的。为此，我们计算

$$\begin{aligned} D_{1,2}\mathcal{G}[t_*,0,\lambda_*,\theta_{0*}](\lambda_* s,\xi) =& \lambda_* s\theta_{0*} - \lambda_*\xi - \lambda_*^2 D_2 f[\lambda_*,\omega_*]\xi \\ =& \lambda_*\left(s\theta_{0*} - \xi - \lambda_* D_2 f[\lambda_*,\omega_*]\xi\right). \end{aligned}$$

映射 $\mathbb{R}\times T_{\omega_*}\mathbb{S}^2_+ \ni (s,\xi) \mapsto s\theta_{0*} - \xi \in \mathbb{R}^3$ 是可逆线性映射，因为 $\theta_0 \notin T_{\omega_*}\mathbb{S}^2_+$。因此，当 $\lambda_*$ 足够小时，算子 $D_{1,\ 2}\mathcal{G}[t_*,0,\lambda_*]$ 也是可逆的。根据隐函数定理，映射 $(\lambda,\theta_0) \mapsto (\omega(\lambda,\theta_0)\ t(\lambda,\theta_0))$ 是局部光滑的，因而也是整体光滑的。 □

**引理 A.4** (叶状分解情形)。令 $v \in [0,1)$ 和 $\phi_\lambda$ 如方程 (A.1)所示。存在$\lambda_0(v) > 0$使得 $\mathcal{I}_{\lambda_0}\setminus\{0\}$ 可由 $S_\lambda$ 叶状分解，且 $\lambda \in (0,\lambda_0)$。

证明。首先，我们声称，对于 $v\in[0,1)$，存在 $\lambda_0(v) > 0$，使得对于所有 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_0$，都有 $\mathrm{im}\,\phi_{\lambda_1} \cap \mathrm{im}\ \phi_{\lambda_2} = \emptyset$。事实上，假设 $\omega,\bar{\omega}\in\mathbb{S}^2_+$ 和 $\epsilon > 0$

$$\lambda v e_1 + \lambda\omega + \lambda^2 f[\lambda,\omega] = (\lambda+\epsilon)v e_1 + (\lambda+\epsilon)\bar{\omega} + (\lambda+\epsilon)^2 f[\lambda+\epsilon,\bar{\omega}]. \tag{A.9}$$

利用 $f$ 的光滑性，我们推导出

$$\begin{aligned} \lambda &= |\lambda\omega| \\ &\geq |\epsilon v e_1 + (\lambda+\epsilon)\bar{\omega}| - |(\lambda+\epsilon)^2 f[\lambda+\epsilon,\bar{\omega}] - \lambda^2 f[\lambda,\omega]| \\ &\geq \lambda + \epsilon - \epsilon v - C|(\lambda+\epsilon)^2 - \lambda^2| - C\lambda^2|\omega-\bar{\omega}| \\ &\geq \lambda + \epsilon - \epsilon v - C(\lambda\epsilon+\epsilon^2) - C\lambda^2|\omega-\bar{\omega}| \\ &\geq \lambda + \epsilon(1-v-C\lambda-C\epsilon) - C\lambda^2|\omega-\bar{\omega}|. \end{aligned} \tag{A.10}$$

接下来，我们利用方程（A.9）进行估计

$$\begin{aligned}\lambda|\omega-\bar{\omega}| &\le (1+v)\epsilon + |(\lambda+\epsilon)^2 f[\lambda+\epsilon,\bar{\omega}] - \lambda^2 f[\lambda,\omega]| \\ &\le (1+v)\epsilon + |(\lambda+\epsilon)^2-\lambda^2|\ |f[\lambda+\epsilon,\bar{\omega}]| + \lambda^2|f[\lambda+\epsilon,\bar{\omega}] - f[\lambda,\omega]| \\ &\le (1+v)\epsilon + C(\lambda\epsilon+\epsilon^2) + C\lambda^2(|\omega-\bar{\omega}|+\epsilon) \\ &\le (1+v)\epsilon + C(\lambda\epsilon+\epsilon^2) + C\lambda^2|\omega-\bar{\omega}|.\end{aligned}$$

选取 $\lambda_0$ 足够小，我们就可以将 $\lambda^2|\omega-\bar{\omega}|$ 移到左侧，得到 $\lambda|\omega-\bar{\omega}| \le C\epsilon$ 从而$\lambda^2|\omega-\bar{\omega}| \le C\lambda\epsilon$。代入估计式（A.10）可得

$$\lambda \ge \lambda + \epsilon(1-v-C\lambda-C\epsilon).$$

我们有估计式 $\lambda \le \lambda_0$ 和 $\epsilon \le \lambda+\epsilon \le \lambda_0$。由于 $v\in[0,1)$，我们可以选取 $\lambda_0$ 足够小，使得 $1-v-2C\lambda_0 > c_1(v) > 0$。于是得到 $\lambda \ge \lambda + \epsilon c_1$，从而 $\epsilon = 0$，这就证明了所述结论。

从现在起，令 $\lambda_0(v) > 0$ 足够小，使曲面 $\phi_\lambda$ 在 $\lambda < \lambda_0$ 时互不相交，并且引理 A.3 适用。我们声称 $\mathcal{I}_{\lambda_0}\setminus\{0\} = \bigcup_{\lambda<\lambda_0} \operatorname{im}\phi_\lambda$。为证明这一点，取一点 $0\neq p\in\mathcal{I}_{\lambda_0}$ 并定义 $\theta_0 := \frac{p}{|p|}$。引理 A.3 给出一个映射 $t:(0,\lambda_0]\to\mathbb{R}^+_0$使得 $\mathbb{R}^+_0\theta_0\cap S_\lambda = \{t(\lambda)\theta_0\}$。

$t(\lambda_0) > |p|$。为说明这一点，我们首先注意到 $t\theta_0\in\mathcal{E}_\lambda$ 对 $t\to\infty$成立。因此，对所有 $t\ge t(\lambda_0)$，都有 $t\theta_0\in\mathcal{E}_\lambda$。现在，若 $t(\lambda_0)\le|p|$ 成立，则我们会得到 $p=|p|\theta_0\in\mathcal{E}_\lambda$，但 $p\in\mathcal{I}_{\lambda_0}$。由于当 $\lambda\to0^+$ 时，$S_\lambda$ 收缩到原点，我们还可推得，当 $\lambda\to0^+$时，$t(\lambda)\to0$。于是，映射 $t$ 的连续性保证存在 $\lambda\in(0,\lambda_0)$，使得 $t(\lambda)=|p|$。因此，对于某个 $\lambda\in(0,\lambda_0)$，有 $p=t(\lambda)\theta_0\in S_\lambda=\operatorname{im}(\phi_\lambda)$。

我们已证明，对所有 $p\in\mathcal{I}_{\lambda_0}\setminus\{0\}$，都存在唯一的 $\lambda\in(0,\lambda_0)$，使得 $p\in S_\lambda$。换言之，映射

$$\mathcal{F}:(0,\lambda_0)\times\mathbb{S}^2_+\to\mathcal{I}_{\lambda_0}\setminus\{0\},\ (\lambda,\omega)\mapsto\phi_\lambda(\omega)$$

是光滑且双射的。我们断言 $\mathcal{F}$ 是一个微分同胚。一旦证明这一点，$\mathbb{S}^2_+$ 的任意图册都能提供 $\mathcal{I}_{\lambda_0}\setminus\{0\}$的一个叶状图册。首先注意，对于任意 $\omega\in\mathbb{S}^2_+$，向量$\omega+ve_1\notin T_\omega\mathbb{S}^2_+$ 作为 $\omega\cdot(\omega+ve_1)\ge1-|v|>0$。因此，线性映射

$$\mathbb{R}\times T_\omega\mathbb{S}^2_+\to\mathbb{R}^3,\ (s,\xi)\mapsto s(\omega+ve_1)+\xi \quad \text{is a linear isomorphism.}$$

我们计算

$$\begin{aligned}D\mathcal{F}(\lambda,\omega)(\lambda s,\xi) =& \lambda s(ve_1+\omega)+\lambda\xi+\lambda^2D_2f[\lambda,\omega]\xi+2\lambda^2sf[\lambda,\omega]+\lambda^3D_1f[\lambda,\xi]s \\ =& \lambda\left[s(ve_1+\omega)+\xi+\lambda\left(D_2f[\lambda,\omega]\xi+2sf[\lambda,\omega]+\lambda^2D_1f[\lambda,\xi]s\right)\right].\end{aligned}$$

因此，当 $\lambda>0$ 足够小时，$D\mathcal{F}(\lambda,\omega):\mathbb{R}\times T_\omega\mathbb{S}^2_+\to\mathbb{R}^3$ 是一个同构。因此，$\mathcal{F}$ 是局部微分同胚，并且由于 $\mathcal{F}$ 是双射，它也是整体微分同胚。 □

最后，我们证明，对于 $v > 1$，曲面 $\phi_\lambda$ 不能构成 0 的任何去心邻域的叶状分解。

**引理 A.5.** 设 $v > 1$ 和 $\phi_\lambda$ 如方程 (A.1)所示。那么，对于任意 $\lambda_0 > 0$，都存在$\lambda_1 > 0$ 和 $\epsilon > 0$，使得 $0 < \lambda_1 < \lambda_1 + \epsilon < \lambda_0$ 且 $\operatorname{im}\phi_{\lambda_1} \cap \operatorname{im}\phi_{\lambda_1+\epsilon} \neq \emptyset$。特别地，对于任意 $\lambda_0 > 0$，曲面 $(S_\lambda)_{\lambda\in(0,\lambda_0)}$ 都不能构成叶状分解。

要理解下面的证明，最好回想一下我们在图 1. 中考虑的“未扰动”情形。

证明。令 $\lambda_0 > 0$ 和 $\lambda_1 < \frac{1}{3}\lambda_0$ 稍后确定。我们设 $\epsilon := \frac{\lambda_1}{v-1}$，并假设选取的 $\lambda_1(v)$ 足够小，使得 $\lambda_1 + \epsilon < \lambda_0$。对于 $\vartheta \in [0,1]$，我们考虑由$c_\vartheta(\omega) := \lambda_1 v e_1 + \lambda_1\omega + f[\vartheta\lambda_1, \omega]$定义的曲线 $c_\vartheta : \partial\mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}^2$。与引理 A.2 的证明一样，我们看到，当 $\lambda_1$ 足够小时，$c_\vartheta$是单射，因此将 $\mathbb{R}^2$ 分成内部区域 $U(\vartheta)$ 和外部区域$\mathcal{U}(\vartheta)$。令

$$p_\pm(\lambda) := \phi_\lambda(\pm e_1) = \lambda v e_1 \pm \lambda e_1 + \lambda^2 f[\lambda, \pm e_1],$$

我们希望证明，当 $\lambda_1$ 足够小时，我们有 $p_-(\lambda_1 + \epsilon) \in U(1)$。首先，我们证明$p_-(\lambda_1 + \epsilon) \in U(0) = \lambda_1 v e_1 + \lambda D_1(0)$，其中 $D_1(0) := \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \,\}$。事实上，当 $\lambda_1(v)$ 足够小时，结合 $\epsilon$ 的定义，我们计算得

$$\begin{aligned} |p_-(\lambda_1 + \epsilon) - \lambda_1 v e_1| &= |\epsilon v e_1 - (\lambda_1 + \epsilon)e_1 + (\lambda_1 + \epsilon)^2 f[\lambda_1 + \epsilon, -e_1]| \\ &\le |\lambda_1 + \epsilon - \epsilon v| + C(\lambda_1 + \epsilon)^2 \\ &\le C(v)\lambda_1^2 \\ &< \lambda_1. \end{aligned}$$

接下来，我们证明，对于所有 $\vartheta \in [0,1]$，$p_-(\lambda_1 + \epsilon)$ 到边界 $\partial U(\vartheta) = \operatorname{im}(c_\vartheta)$ 的距离都有一个一致的正下界。由此可得 $p_-(\lambda_1 + \epsilon) \in U(1)$。事实上，对于任意$\omega \in \partial\mathbb{S}^2_+$ 且 $\lambda_1$ 足够小，我们估计得

$$\begin{aligned} &|c_\vartheta(\omega) - p_-(\lambda_1 + \epsilon)| \\ =&|\lambda_1 v e_1 + \lambda_1\omega + \vartheta^2\lambda_1^2 f[\vartheta\lambda_1, \omega] - (\lambda_1 + \epsilon)v e_1 + (\lambda_1 + \epsilon)e_1 - (\lambda_1 + \epsilon)^2 f[\lambda_1 + \epsilon, -e_1]| \\ \ge&|\lambda_1\omega - \epsilon v e_1 + (\lambda_1 + \epsilon)e_1| - C(v)\lambda_1^2 \\ \overset{(!)}{=}&|\lambda_1\omega| - C(v)\lambda_1^2 \\ \ge&\frac{\lambda_1}{2}. \end{aligned} \tag{A.11}$$

为验证 (!)，我们使用了 $\epsilon$ 的定义。假设 $p_-(\lambda_1+\epsilon) \notin U(1)$，则存在 $\vartheta \in (0,1]$ 使得 $p_-(\lambda_1+\epsilon) \in \operatorname{im}(c_\vartheta)$，这由估计式 (A.11) 可知不可能。类似的论证表明 $p_+(\lambda_1 + \epsilon) \in \tilde{U}(1)$。现在令 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^2_+$ 为满足 $\gamma(0) = -e_1$ 且 $\gamma(1) = e_1$ 的任意连续曲线，并考虑 $\Gamma(t) := \phi_{\lambda_1+\epsilon}(\gamma(t))$。于是 $\Gamma(0) = p_-(\lambda_1 + \epsilon) \in U(0) \subset \mathcal{I}_{\lambda_1}$，且$\Gamma(1) = p_+(\lambda_1 + \epsilon) \in U(1) \subset \mathcal{E}_{\lambda_1}$。由引理 A.2，存在满足 $\Gamma(t_0) \in S_{\lambda_1}$ 的 $t_0 \in (0,1)$。当然，我们也有 $\Gamma(t_0) \in S_{\lambda_1+\epsilon}$，由此即得该引理。 □

# B 计算

下文中，我们将经常提及机器计算。所有这些计算均使用 Mathematica 完成 [20] （见附录 C）。我们将带注释的代码作为补充材料提供。

## B.1 一般公式

在本小节中，令 $\phi: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2_+$ 为一个局部参数化。我们考虑一个函数$\varphi$: $\mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}$，它通常属于 $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2_+)$，但在 Willmore 情形下有时甚至属于 $C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^2_+)$，并设 $f_\varphi: \mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}^3$，$f_\varphi(\omega) := (1+\varphi(\omega))\omega$。令 $q$ 表示定义在 $\mathbb{R}^3$上的一个光滑对称矩阵，使得 $\tilde{g} := \delta + \epsilon q$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的背景度量，并且当 $\epsilon$较小时，该度量接近欧几里得度量 $\delta$。

**第一基本形式**
相对于背景度量 $\tilde{g}$， $f_\varphi$ 的第一基本形式为

$$g_{ij} = g_{ij}[\varphi, \tilde{g}] = \tilde{g}((1+\varphi)\partial_i\phi + \partial_i\varphi\phi, (1+\varphi)\partial_j\phi + \partial_j\varphi\phi).$$

由此得到以下两个公式:

$$D_1 g_{ij}[0,\delta]\varphi = 2\varphi\langle\partial_i\phi, \partial_j\phi\rangle \tag{B.1}$$
$$D_1^2 g_{ij}[0,\delta](\varphi,\varphi) = 2\left(\varphi^2\langle\partial_i\phi, \partial_j\phi\rangle + \partial_i\varphi\partial_j\varphi\right) \tag{B.2}$$
$$D_2 g_{ij}[0,\delta]q = q(\partial_i\phi, \partial_j\phi) \tag{B.3}$$

诱导曲面测度 $d\mu[\varphi,\tilde{g}] = \sqrt{\det g}d^2x$ 满足

$$D_1 d\mu[0,\delta]\varphi = 2\varphi d\mu_{\mathbb{S}^2}, \tag{B.4}$$
$$D_1^2 d\mu[0,\delta](\varphi,\varphi) = \left(|\nabla\varphi|^2 + 2\varphi^2\right) d\mu_{\mathbb{S}^2}, \tag{B.5}$$
$$D_2 d\mu[0,\delta]q = \frac{1}{2}g^{ij}q(\partial_i\phi,\partial_j\phi)d\mu_{\mathbb{S}^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathbb{S}^2} q d\mu_{\mathbb{S}^2}. \tag{B.6}$$

方程 (B.5)的证明
我们设 $g := g[\epsilon\varphi,\delta]$，且 $g_0 := g[0,\delta]$，并计算

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{d\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0} d\mu_g &= \left.\frac{d^2}{d\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0}\sqrt{\det g}d^2x \\ &= \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left[\frac{1}{2\sqrt{\det g}}\frac{d}{d\epsilon}\det g d^2x\right] \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{\det g_0}^3}\left(\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\det g\right)^2 d^2x + \frac{1}{2\sqrt{\det g_0}}\left.\frac{d^2}{d\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0}\det g d^2x.\end{aligned} \tag{B.7}$$

利用方程（B.1），我们首先计算

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\det g = \det(g_0)g_0^{ij}\left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \det(g_0)g_0^{ij}2\varphi\cdot(g_0)_{ij} = 4\det(g_0)\varphi. \tag{B.8}$$

B由方程（B.1）可得 $g=(1+2\epsilon\varphi)g_0+\mathcal{O}(\epsilon^2)$。再利用方程（B.2），我们得 et

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}\det g &= \det(g_0)g_0^{ij}\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}+\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}\det\left[g_0+\epsilon\frac{\partial g}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\right]\\ &=\det(g_0)g_0^{ij}2\left(\varphi^2\cdot(g_0)_{ij}+\partial_i\varphi\partial_j\varphi\right)+\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}\det((1+2\epsilon\varphi)g_0)\\ &=\det(g_0)\left(4\varphi^2+2|\nabla\varphi|^2\right)+\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}(1+2\epsilon\varphi)^2\det(g_0)\\ &=\det(g_0)\left(12\varphi^2+2|\nabla\varphi|^2\right).\end{aligned}\tag{B.9}$$

将方程 (B.8) 和 (B.9) 代入方程 (B.7)，可得方程 (B.5)。 □

**法向量**
令 $\tilde{\nu}[\varphi,\tilde{g}]$ 表示相对于背景度量 $\tilde{g}$、沿着 $f_\varphi$ 的内单位法向量。以下公式成立：

$$D_1\tilde{\nu}[0,\delta]\varphi=g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\phi\tag{B.10}$$
$$\langle D_1^2\tilde{\nu}[0,\delta](\varphi,\varphi),\omega\rangle=|\nabla\varphi|^2\tag{B.11}$$
$$D_2\tilde{\nu}[0,\delta]q=g^{ij}q(\phi,\partial_i\phi)\partial_j\phi+\frac{1}{2}q(\phi,\phi)\phi\tag{B.12}$$

关于方程 (B.12) 的证明，请参见 [1] 中引理 7 的证明。

方程 (B.10)和 (B.11)的证明
为证明方程 (B.10)，注意到

$$\langle\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta],\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta]\rangle\equiv 1\quad\text{and so}\quad\langle\tilde{\nu}[0,\delta],\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta]\rangle=0.$$

因此，$D_1\tilde{\nu}[0,\delta]\varphi$ 是切向的。回顾一下，$\tilde{\nu}[0,\delta]=-\omega=-\phi$。我们有

$$\langle\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta],\partial_i f_{\epsilon\varphi}\rangle\equiv 0\quad\text{and so}\quad\langle\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta],\partial_i\phi\rangle=\langle\phi,\partial_i\varphi\phi+\varphi\partial_i\phi\rangle=\partial_i\varphi.$$

这是方程（B.10）。要得到方程（B.11），我们对恒等式 $\langle\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta],\ \tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta]\rangle\equiv 1$ 关于 $\epsilon$ 求两次导数，并在 $\epsilon=0$处求值。利用 $\nu[0,\delta]=-\phi$ 和方程（B.10），得到

$$\begin{aligned}2\langle\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta],\phi\rangle=&2\langle\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta],\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta]\rangle\\ =&2g^{ab}g^{kl}\partial_a\varphi\partial_k\varphi\langle\partial_b\phi,\partial_l\phi\rangle\\ =&g^{ak}\partial_a\varphi\partial_l\varphi\\ =&2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$ □

**平均曲率**

平均曲率满足

$$D_1 H[0,\delta]\varphi = -(\Delta+2)\varphi, \tag{B.13}$$

$$D_1^2 H[0,\delta](\varphi,\varphi) = 4\varphi\Delta\varphi + 4\varphi^2, \tag{B.14}$$

$$D_2 H[0,\delta]q = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2}\,\nabla\,{}_\omega q - \mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2}\,\nabla . q(\omega,\cdot) + q(\omega,\omega) - \mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2}\,q. \tag{B.15}$$

方程 (B.15) 应理解为 $(D_2 H[0,\delta]q)(\omega) = \ldots$，其证明见[1]。

方程 (B.13)和 (B.14) 的证明

我们假设 $\phi$ 是 $\mathbb{S}^2_+$的近似欧几里得参数化。也就是说，它满足 $g_{ij}(0) = \langle\partial_i\phi(0)\ \partial_j\phi(0)\rangle = \delta_{ij}$且 $\partial_i g_{ab}(0) = 0$。由此可得 $\langle\partial_{ij}\phi,\partial_b\phi\rangle(0) = 0$，因此

$$\partial_{ij}\phi(0) = \langle\partial_{ij}\phi,\phi\rangle(0)\phi(0) = -\langle\partial_i\phi,\partial_j\phi\rangle(0)\phi(0) = -\delta_{ij}\phi(0).$$

在以下所有计算中，我们将省略记号中的‘$(0)$’。利用方程 (B.1)，我们计算得

$$\left.\frac{\partial g^{ij}[\epsilon\varphi,\delta]}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -g^{ia}[0,\delta]g^{jb}[0,\delta]\left.\frac{\partial g_{ab}[\epsilon\varphi,\delta]}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -2\varphi\delta_{ij}. \tag{B.16}$$

N此外，利用 $\partial_{ij}\phi = -\delta_{ij}\phi$，$\langle\phi,\ \partial_i\phi\rangle = 0$，$\tilde{\nu}[0,\delta] = -\phi$ 以及方程 (B.10)，我们计算得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\langle\partial_{ij}[(1+\epsilon\varphi)\phi],\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta]\rangle =& \langle\partial_{ij}\varphi\phi + \varphi\partial_{ij}\phi + \partial_i\varphi\partial_j\phi + \partial_j\varphi\partial_i\phi, -\phi\rangle + \langle\partial_{ij}\phi,\partial_a\varphi\partial_a\phi\rangle\\ =& -\partial_{ij}\varphi + \delta_{ij}\varphi.\end{aligned} \tag{B.17}$$

由于采用近似欧几里得坐标，我们有 $\partial_{ii}\varphi = \Delta\varphi$。结合方程（B.16）和（B.17），计算得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} H[\epsilon\varphi,\delta] =& \left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left[g^{ij}[\epsilon\varphi,\delta]\langle\partial_{ij}[(1+\epsilon\varphi)\phi],\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta]\rangle\right]\\ =& \left.\frac{\partial g^{ij}[\epsilon\varphi,\delta]}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\langle\partial_{ij}\phi,-\phi\rangle + \delta_{ij}\left(-\partial_{ij}\varphi + \delta_{ij}\varphi\right)\\ =& -2\varphi\delta_{ij}\delta_{ij} - \partial_{ii}\varphi + 2\varphi\\ =& -(\Delta+2)\varphi.\end{aligned}$$

因此，方程（B.13）得证。为建立方程（B.14），我们计算

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0} H[\epsilon\varphi,\delta] =& \left.\frac{\partial^2 g^{ij}[\epsilon\varphi,\delta]}{\partial\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0}\langle\partial_{ij}\phi,-\phi\rangle + \delta_{ij}\left.\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0}\langle\partial_{ij}\left[(1+\epsilon\varphi)\phi\right],\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta]\rangle\\ &+ 2\left.\frac{\partial g^{ij}[\epsilon\varphi,\delta]}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\langle\partial_{ij}\left[(1+\epsilon\varphi)\phi\right],\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta]\rangle.\end{aligned} \tag{B.18}$$

首先，结合方程（B.16）和（B.17），我们得到

$$2\frac{\partial g^{ij}[\epsilon\varphi,\delta]}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\langle\partial_{ij}\left[(1+\epsilon\varphi)\phi\right],\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta]\rangle=-4\varphi\delta_{ij}(\delta_{ij}\varphi-\partial_{ij}\varphi)=-8\varphi^2+4\varphi\Delta\varphi. \tag{B.19}$$

注意到 $\langle\partial_{ij}\phi,\ -\phi\rangle=\delta_{ij}$并且 $g_{ij}[0,\delta]=\delta_{ij}$。利用这些关系以及方程（B.1）和（B.2），可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g^{ij}[\epsilon\varphi,\delta]}{\partial\epsilon^2}\bigg|_{\epsilon=0}\langle\partial_{ij}\phi,-\phi\rangle=&\delta_{ij}\left[2\left(\frac{\partial g[\epsilon\varphi,\delta]}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\right)^2_{ij}-\frac{\partial^2 g_{ij}[\epsilon\varphi,\delta]}{\partial\epsilon^2}\right]\\=&\delta_{ij}(8\varphi^2\delta_{ij}-2\varphi^2\delta_{ij}-2\partial_i\varphi\partial_j\varphi)\\=&12\varphi^2-2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned} \tag{B.20}$$

最后，注意到 $\partial_\epsilon^2 f_{\epsilon\varphi}=0$，$\langle\phi,\ \partial_i\phi\rangle=0$ 以及 $\partial_{ij}\phi=-\delta_{ij}\phi$。利用这些公式以及方程（B.10）和（B.11），可计算得

$$\begin{aligned}\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}\bigg|_{\epsilon=0}\langle\partial_{ij}[(1+\epsilon\varphi)\phi],\tilde{\nu}[\epsilon\varphi,\delta]\rangle=&2\langle\partial_{ii}(\varphi\phi),D_1\tilde{\nu}[0,\delta]\varphi\rangle+\langle\partial_{ii}\phi,D_1^2\tilde{\nu}[0,\delta](\varphi,\varphi)\rangle\\=&2\langle\partial_{ii}\varphi\phi+\varphi\partial_{ii}\phi+2\partial_i\varphi\partial_i\phi,\partial_a\varphi\partial_a\phi\rangle-\delta_{ii}\langle\phi,D_1^2\tilde{\nu}[0,\delta](\varphi,\varphi)\rangle\\=&2\langle 2\partial_i\varphi\partial_i\phi,\partial_a\varphi\partial_a\phi\rangle-\delta_{ii}\langle\phi,D_1^2\tilde{\nu}[0,\delta](\varphi,\varphi)\rangle\\=&4|\nabla\varphi|^2-2|\nabla\varphi|^2\\=&2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned} \tag{B.21}$$

将方程（B.19）、（B.20）和（B.21）代入方程（B.18），得到

$$\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}\bigg|_{\epsilon=0}H[\epsilon\varphi,\delta]=12\varphi^2-2|\nabla\varphi|^2+2|\nabla\varphi|^2-8\varphi^2+4\varphi\Delta\varphi=4(\varphi\Delta\varphi+\varphi^2),$$

这正是方程（B.14）。 □

**Willmore能量与Willmore算子**

方程（B.4）、（B.6）、（B.13）、（B.15）以及 $H[0,\delta]=2$ 推出

$$D_2\mathcal{W}[0,\delta]q=\int_{\mathbb{S}^2_+}-\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathbb{S}^2}q+q(\omega,\omega)-\operatorname{tr}_{\mathbb{S}^2}\nabla.q(\cdot,\omega)+\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathbb{S}^2}\nabla_\omega q d\mu_{\mathbb{S}^2}, \tag{B.22}$$

$$D_1\mathcal{W}[0,\delta]\varphi=-\int_{\mathbb{S}^2_+}\Delta\varphi d\mu_{\mathbb{S}^2}=\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}dS. \tag{B.23}$$

最后一个公式由高斯定理得出，并回顾 $\eta=\tilde{\eta}[0,\delta]$ 是沿着 $\partial\mathbb{S}^2_+$的内法向量。根据方程（2.1）中 Willmore 算子的定义，$H[0,\delta]=2,\ \ h^0[0,\delta]=0$ 以及 $\mathrm{Ric}_\delta=0$，我们可以利用方程（B.13）和（B.15）得到

$$D_1W[0,\delta]\varphi=-\frac{1}{2}\Delta(\Delta+2)\varphi, \tag{B.24}$$

$$D_2W[0,\delta]q=\frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathbb{S}^2}\nabla_{\ \omega}q-\operatorname{tr}_{\mathbb{S}^2}\nabla.q(\omega,\cdot)+q(\omega,\omega)-\operatorname{tr}_{\mathbb{S}^2}q\right)+(D\,\mathrm{Ric}[\delta]q)(\omega,\omega). \tag{B.25}$$

最　　方程（B.25）中的 t 项与我们无关，因为所考虑的度量都是平坦的　　t.

**面积、重心与体积**
方程（B.4）和（B.6）意味着

$$D_1 A[0,\delta]\varphi = 2\int_{\mathbb{S}^2_+} \varphi d\mu_{\mathbb{S}^2} \quad \text{and} \quad D_2 A[0,\delta]q = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2_+} \mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2}\, q d\mu_{\mathbb{S}^2}. \tag{B.26}$$

关于重心的变分，参见[1]中的公式（5.4）。这里，$L^2$相对于指向内部的法向量的梯度为 $-\frac{3}{2\pi}\omega_i$。由于 $\frac{\partial}{\partial\epsilon} f_{\epsilon\varphi} = \varphi\omega = -\varphi\nu[0,\delta]$，这意味着

$$D_1 C^i[0,\delta]\varphi = \frac{3}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^2_+} \omega_i \varphi d\mu_{\mathbb{S}^2} \quad \text{for } i = 1,2. \tag{B.27}$$

记 $\Omega_\varphi$ 为 $\mathbb{R}^3_+$ 中由 $f_\varphi$ 的图像围成的区域。因此，特别地 $\Omega_0 = B_1^+(0)$。体积泛函定义为

$$V[\varphi,\tilde{g}] = \int_{\Omega_\varphi} \sqrt{\det \tilde{g}} d^3x \quad \text{and in particular} \quad V[0,\tilde{g}] = \int_{B_1^+(0)} \sqrt{\det \tilde{g}} d^3x. \tag{B.28}$$

以下公式成立：

$$D_1 V[0,\delta]\varphi = \int_{\mathbb{S}^2_+} \varphi d\mu_{\mathbb{S}^2} \quad \text{and} \quad D_1^2 V[0,\delta](\varphi,\varphi) = 2\int_{\mathbb{S}^2_+} \varphi^2 d\mu_{\mathbb{S}^2} \tag{B.29}$$

$$D_2 V[0,\delta]q = \frac{1}{2}\int_{B_1^+(0)} \mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\, q d^3x \tag{B.30}$$

方程 (B.30) 可由方程 (B.28) 中的第二个公式推出。为从方程 (B.29) 得到两个恒等式，我们利用当 $\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2_+)}$ 足够小时，且 $\tilde{g} = \delta$ 时，有

$$V[\varphi,\delta] = \int_{\mathbb{S}^2_+}\int_0^{1+\varphi(\omega)} r^2 dr d\mu_{\mathbb{S}^2} = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{S}^2_+} (1+\varphi(\omega))^3 d\mu_{\mathbb{S}^2}.$$

**边界条件**
方程 (3.2) 中的边界算子为

$$B[\varphi,\tilde{g}] = (B_1[\varphi,\tilde{g}], B_2[\varphi,\tilde{g}]) := \left(\omega_3 - g^{ij}\tilde{g}(\omega,\partial_i f_\varphi)\partial_j f^3_\varphi, \frac{\partial H}{\partial\tilde{\eta}} + H\tilde{h}^{\mathbb{R}^2}(\tilde{\nu},\tilde{\nu})\right).$$

我们记 $\eta := \tilde{\eta}[0,\delta]$。利用 $\nabla\omega_3 = \eta$ 沿着 $\partial\mathbb{S}^2_+$ 以及 $\langle\omega,\partial_i f_0\rangle = 0$，可以很容易验证

$$D_1 B_1[0,\delta]\varphi = -g^{ij}\langle\omega,\partial_i\varphi\omega\rangle\partial_j\phi_3 = -g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\phi_3 = -\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \tag{B.31}$$

$$D_2 B_1[0,\delta]q = -g^{ij}q(\omega,\partial_i\phi)\partial_j\phi_3 = -g^{ij}q_{\mu\nu}\partial_i\phi_\mu\phi_\nu\partial_j\phi_3 = -q_{a3}\omega_a. \tag{B.32}$$

接下来，我们对 $B$的第二个分量重复相同的分析。首先，我们使用 $\tilde{h}^{\mathbb{R}^2} \equiv 0$ 来处理$\tilde{g} = \delta$, $H[0, \delta] = 2$ 以及方程 (B.13) 得到

$$D_1 B_2[0,\delta]\varphi = \frac{\partial}{\partial\eta} D_1 H[0,\delta]\varphi = -\frac{\partial}{\partial\eta}(\Delta + 2)\varphi, \tag{B.33}$$

$$D_2 B_2[0,\delta]q = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(D_2 H[0,\delta]q\right) + H[0,\delta]\tilde{\nu}[0,\delta]^i \tilde{\nu}[0,\delta]^j D_2 \tilde{h}^{\mathbb{R}^2}_{ij}[\delta]q. \tag{B.34}$$

记 沿着 $\mathbb{R}^2 \times 0$ 指向 $\mathbb{R}^3_+$ 内部的内法向量记为 $\tilde{\nu}_{\mathbb{R}^2}$，我们需要考虑 r

$$\tilde{h}^{\mathbb{R}^2}_{ij} = \tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_{e_i} e_j, \tilde{\nu}_{\mathbb{R}^2}) = \tilde{g}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{ij}\tilde{\nu}^{\beta}$$

其中 $\Gamma^{\alpha}_{ij}$ 表示相对于 $\tilde{g}$ 的克里斯托费尔符号。由于对于 $\tilde{g} = \delta$， $\Gamma^{\alpha}_{ij} \equiv 0$ 和 $\tilde{\nu}^{\mathbb{R}^2} = e_3$，我们有

$$D_2 \tilde{h}^{\mathbb{R}^2}_{ij}[\delta]q = \frac{1}{2}(\partial_i q_{j3} + \partial_j q_{i3} - \partial_3 q_{ij}).$$

将其以及方程（B.15）代入方程（B.34），并利用 $\tilde{\nu}[0,\delta] = -\omega$ 以及$H[0,\delta] = 2$，得到

$$\begin{aligned} D_2 B_2[0,\delta]q =& \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathbb{S}^2}\nabla_\omega q - \operatorname{tr}_{\mathbb{S}^2}\nabla_\cdot q(\omega,\cdot) + q(\omega,\omega) - \operatorname{tr}_{\mathbb{S}^2} q\right) \\ &+ \omega_i\omega_j(\partial_i q_{j3} + \partial_j q_{i3} - \partial_3 q_{ij}). \end{aligned} \tag{B.35}$$

## B.2 具体背景度量的公式

在本小节中，我们针对具体的选取，对小节B.1 中的公式进行求值

$$q := \left.\frac{\partial \tilde{g}^{a,\lambda}}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = \begin{bmatrix} & & \kappa_1 x_1 \\ & & \kappa_2 x_2 \\ \kappa_1 x_1 & \kappa_2 x_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.36}$$

这正是我们在方程（5.1）中已经遇到过的。

**面积、重心与体积**

观察方程 (B.36) 可知 $\operatorname{tr}_{\mathbb{R}^3} q = 0$。因此，方程 (B.26) 推出

$$\begin{aligned} D_2 A[0,\delta]q =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2_+} \operatorname{tr}_{\mathbb{R}^3} q - q(\omega,\omega) d\mu_{\mathbb{S}^2} \\ =& -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2_+} 2(\kappa_1\omega_1^2 + \kappa_2\omega_2^2)\omega_3 d\mu_{\mathbb{S}^2} \\ =& -(\kappa_1+\kappa_2)\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2\omega_3 d\mu_{\mathbb{S}^2} \\ =& -\frac{\pi}{4}H^S(a). \end{aligned} \tag{B.37}$$

再次利用 $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3} q = 0$，我们可以使用方程 (B.30) 推导出

$$D_2 V[0,\delta]q = \frac{1}{2}\int_{B_1^+(0)} \mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\, q d^3x = 0. \tag{B.38}$$

最后，我们参考 [15] 中的引理 6.1，得到以下结果：

$$D_2 C^i[0,\delta]q = 0 \quad \text{for } i = 1,2 \tag{B.39}$$

**平均曲率与 Willmore 算子**

按照 [1] 中引理 9 的证明，我们得到 $\mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2} \nabla_\omega q = \mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2} q = -q(\omega,\omega)$ 和 $\mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2} \nabla_\cdot q(\omega,\cdot) = \omega_3 H^S(a) - q(\omega,\omega)$。代入方程（B.15）得

$$D_2 H[0,\delta]q = \frac{5}{2}q(\omega,\omega) - \omega_3 H^S(a) = 5(\kappa_1\omega_1^2 + \kappa_2\omega_2^2)\omega_3 - \omega_3 H^S(a). \tag{B.40}$$

注意到 $\tilde{g}^{a,\lambda}$ 是欧几里得度量的一个缩放拉回，因此是平坦的。故 $\mathrm{Ric}_{\tilde{g}^{a,\lambda}} \equiv 0$。结合这一观察与方程（B.25）和（B.40）可得

$$D_2 W[0,\delta]q = \frac{1}{2}\Delta\left(5(\kappa_1\omega_1^2 + \kappa_2\omega_2^2)\omega_3 - H^S(a)\omega_3\right). \tag{B.41}$$

**边界算子**

将方程（ $q$ 中的 B.36）代入方程（B.32）得

$$D_2 B_1[0,\delta]q = -q_{13}\omega_1 - q_{23}\omega_2 = -(\kappa_1\omega_1^2 + \kappa_2\omega_2^2). \tag{B.42}$$

注意到 $\partial_i q_{j3} = \delta_{ij}\kappa_i$ 并且 $\partial_\eta \omega_3 = 1$。代入方程（B.35）得

$$\begin{aligned} D_2 B_2[0,\delta]\tilde{g}'(0) =& \frac{\partial}{\partial\eta}\left(5(\kappa_1\omega_1^2 + \kappa_2\omega_2^2)\omega_3 - H^S(a)\omega_3\right) + 2(\kappa_1\omega_1^2 + \kappa_2\omega_2^2) \\ =& 7(\kappa_1\omega_1^2 + \kappa_2\omega_2^2) - H^S(a). \end{aligned} \tag{B.43}$$

## B.3 显式解——CMC 情形

我们采用小节 5.2 中的记号。根据定义，唯一解 $u(\lambda) \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2_+)$ 以及拉格朗日参数 $\alpha(\lambda)$ 和 $\beta_i(\lambda)$ 满足以下问题：

$$H[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = \alpha(\lambda) + \beta_i(\lambda)\nabla C^i[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)], \tag{B.44}$$

$$B_1[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = 0, \tag{B.45}$$

$$V[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = \frac{2\pi}{3}, \tag{B.46}$$

$$C^i[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = 0 \quad \text{for } i = 1,2. \tag{B.47}$$

通过在 $\lambda = 0$ 处对这些方程求导，我们推导出关于 $u'(0)$ 的线性偏微分方程。首先，我们对方程（B.46）和（B.47）求导。为此，利用方程（B.27）、（B.29）、（B.38）和（B.39），可得

$$\int_{\mathbb{S}^2_+} u'(0) d\mu_{\mathbb{S}^2} = D_1 V[0,\delta]u'(0) = -D_2 V[0,\delta]\tilde{g}'(0) = 0, \tag{B.48}$$

$$\frac{3}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^2_+} u'(0)\omega_i d\mu_{\mathbb{S}^2} = D_1 C^i[0,\delta]u'(0) = -D_2 C^i[0,\delta]\tilde{g}'(0) = 0. \tag{B.49}$$

由于我们在其他地方也需要用到，我们特别指出，方程 (B.26) 和 (B.48) 还可推出

$$D_1 A[0,\delta]u'(0) = 2\int_{\mathbb{S}^2_+} u'(0) d\mu_{\mathbb{S}^2} = 0. \tag{B.50}$$

接下来, 我们对方程 (B.45) 求导。为此，我们利用方程 (B.31) 和 (B.42) 得到 t

$$\frac{\partial u'(0)}{\partial \eta} = -D_1 B_1[0,\delta]u'(0) = D_2 B_1[0,\delta]\tilde{g}'(0) = -\kappa_1\omega_1^2 - \kappa_2\omega_2^2. \tag{B.51}$$

最后，我们对方程 (B.44) 求导。为此，我们需要方程 (B.13) 和 (B.40)。此外，我们利用 $\beta_i(0) = 0$ 以及在方程 (B.27) 之前讨论过的 $\nabla C^i[0,\delta]$ 的公式来推出

$$\begin{aligned}(\Delta + 2)u'(0) =& - D_1 H[0,\delta]u'(0)\\ =& D_2 H[0,\delta]\tilde{g}'(0) - \alpha'(0) - \beta_i'(0)\nabla C^i[0,\delta]\\ =& 5(\kappa_1\omega_1^2 + \kappa_2\omega_2^2)\omega_3 - H^S(a)\omega_3 - \alpha'(0) + \frac{3}{2\pi}\beta_i'(0)\omega_i.\end{aligned} \tag{B.52}$$

T为了得到 $\alpha'(0)$的公式，我们进行积分。利用方程 (B.48) 和 (B.51)，得到 t

$$\begin{aligned}&-2\pi\alpha'(0) + 5(\kappa_1+\kappa_2)\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2\omega_3 d\mu_{\mathbb{S}^2} - H^S(a)\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_3 d\mu_{\mathbb{S}^2}\\ =& \int_{\mathbb{S}^2_+}\Delta u'(0) d\mu_{\mathbb{S}^2} + 2\int_{\mathbb{S}^2_+} u'(0) d\mu_{\mathbb{S}^2}\\ =& -\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\frac{\partial u'(0)}{\partial\eta} dS\\ =&(\kappa_1+\kappa_2)\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2 dS\\ =&\pi H^S(a).\end{aligned} \tag{B.53}$$

例如，利用球坐标很容易计算出

$$\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2\omega_3 d\mu_{\mathbb{S}^2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_3 d\mu_{\mathbb{S}^2} = \pi.$$

代入方程（B.53）可得

$$-2\pi\alpha'(0)+\frac{5\pi}{4}H^S(a)-\pi H^S(a)=\pi H^S(a)\quad\text{and so}\quad\alpha'(0)=-\frac{3}{8}H^S(a). \tag{B.54}$$

将方程 (B.52) 乘以 $\omega_1$，积分并应用高斯定理，得到

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2\pi}\beta_1'(0)\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2 d\mu_{\mathbb{S}^2}\\ =&2\int_{\mathbb{S}^2_+}u'(0)\omega_1 d\mu_{\mathbb{S}^2}+\int_{\mathbb{S}^2_+}\Delta u'(0)\omega_1 d\mu_{\mathbb{S}^2}\\ =&2\int_{\mathbb{S}^2_+}u'(0)\omega_1 d\mu_{\mathbb{S}^2}-\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\frac{\partial u'(0)}{\partial\eta}\omega_1-u'(0)\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}dS+\int_{\mathbb{S}^2_+}u'(0)\Delta\omega_1 d\mu_{\mathbb{S}^2}.\end{aligned}$$

利用 $\partial_\eta\omega_1=0$、 $\Delta\omega_1=-2\omega_1$ 和方程 (B.51) 可知 $\beta_1'(0)=0$，类似地可知 $\beta_2'(0)=0$。将这些结果和方程 (B.54) 代入方程 (B.52)，并结合方程 (B.49) 和 (B.51)，可知 $u'(0)$ 是以下方程的一个解

$$\begin{cases}(\Delta+2)u'(0)=5(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3-H^S(a)\omega_3+\dfrac{3}{8}H^S(a),\\ \dfrac{\partial u'(0)}{\partial\eta}=-\kappa_1\omega_1^2-\kappa_2\omega_2^2,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}^2_+}u'(0)\omega_i d\mu_{\mathbb{S}^2}=0\quad\text{for } i=1,2.\end{cases} \tag{B.55}$$

很容易看出，这个问题只有一个解；因此， $u'(0)$ 由 (B.55) 完全确定。因此，可以通过机器计算验证

$$u'(0)=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{4}\left(\frac{3}{4}-\omega_3\right)+\frac{\kappa_1-\kappa_2}{4}\left(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{3}\frac{2-3\omega_3+\omega_3^3}{(1-\omega_3^2)^2}\right)-\frac{1}{2}(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3. \tag{B.56}$$

**推导** $u'(0)$

下面概述方程 (B.56) 中公式的推导过程。首先，我们定义函数

$$f(\omega):=(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3\quad\text{which satisfies}\quad\frac{1}{2}(\Delta+2)f=H^S(a)\omega_3-5(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3.$$

这表明 $v:=u'(0)+\frac{1}{2}f$ 满足该问题

$$\begin{cases}(\Delta+2)v=\dfrac{3}{8}H^S(a),\\ \dfrac{\partial v}{\partial\eta}=-\dfrac{1}{2}(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2),\\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_i v d\mu_{\mathbb{S}^2}=0\quad\text{for } i=1,2.\end{cases}$$

我们将这个问题拆分为两个子问题，写作

$$v = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{4} v_1 + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{4} v_2 \tag{B.57}$$

其中， $v_1$ 和 $v_2$ 是以下问题的解：

$$\begin{cases} (\Delta + 2)v_1 = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial \eta} = -1, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}^2_+} \omega_i v_1 d\mu_{\mathbb{S}^2} = 0 \quad \text{for } i = 1, 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} (\Delta + 2)v_2 = 0, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \eta} = -(\omega_1^2 - \omega_2^2), \\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}^2_+} \omega_i v_2 d\mu_{\mathbb{S}^2} = 0 \quad \text{for } i = 1, 2. \end{cases}$$

通过采用以下两个试探解，可以求解这些问题：

$$v_1(\omega) = g_1(\omega_3) \quad \text{and} \quad v_2(\omega) = (\omega_1^2 - \omega_2^2) g_2(\omega_3)$$

这些试探解立即满足积分条件。此外，在球坐标下，它们将偏微分方程化为两个常微分方程，随后可显式求解。对于 $v_1$，这一点显而易见。对于 $v_2$，我们指出：

$$\Delta v_2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)(g_2'' + 5\cot\theta g_2' - 6g_2) \quad \text{and} \quad \frac{\partial v_2}{\partial \eta} = -(\omega_1^2 - \omega_2^2) g_2'(\frac{\pi}{2}).$$

请注意， $g_1$ 和 $g_2$ 对应的常微分方程均为二阶方程，但我们只有一个边界条件，因此这些问题似乎是不定的。然而，在两种情况下，其中一个齐次解都是奇异的；要求解光滑，就能得到唯一解。我们以 $v_1$为例说明。所得常微分方程为

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta g_1'(\theta) \right) + 2g_1(\theta) = \frac{3}{2}.$$

该方程的通解为

$$g_1(\theta) = \frac{3}{4} + c_1 \cos\theta + c_2 \left( \operatorname{artanh}(\cos\theta) - 1 \right).$$

$g_1$ 在 $\theta = 0$ 处是奇异的，除非 $c_2 = 0$。随后，我们可以通过要求满足以下条件来确定 $c_1$：

$$-1 = \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} g_1(\theta) = c_1.$$

回想一下，在球坐标中 $\cos\theta = \omega_3$，我们推得

$$v_1(\omega) = -\omega_3 + \frac{3}{4}. \tag{B.58}$$

对 $v_2$ 重复相同的分析可得

$$v_2(\omega) = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{3} \frac{2 - 3\omega_3 + \omega_3^3}{(1 - \omega_3^2)^2}. \tag{B.59}$$

回顾 B.56 方程中 $v$ 和 $f$ 的定义，并代入方程（B.57）、（B.58）和（B.59），即可得到该方程。

## B.4 显式解——Willmore 情形

我们使用 th 小节 5.1 中的记号。根据定义， $u(\lambda)$ 是该问题的唯一解

$$W[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = \alpha(\lambda)H[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] + \beta_i(\lambda)\nabla C^i[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)], \tag{B.60}$$
$$B[u(\lambda)\ \tilde{g}(\lambda)] = 0, \tag{B.61}$$
$$A[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = 2\pi, \tag{B.62}$$
$$C^i[u(\lambda),\tilde{g}(\lambda)] = 0 \quad \text{for } i = 1,2. \tag{B.63}$$

如同我们在小节 B.3 中所做的，我们通过对这些方程在 $u'(0)$ 处求导，推导出关于 $\lambda = 0$ 的线性偏微分方程。首先，我们对方程（B.62）和（B.63）求导。利用方程（B.26）、（B.27）、（B.37）和（B.39），我们推导得

$$2\int_{\mathbb{S}^2_+} u'(0)d\mu_{\mathbb{S}^2} = D_1A[0,\delta]u'(0) = -D_2A[0,\delta]\tilde{g}'(0) = \frac{\pi}{4}H^S(a), \tag{B.64}$$
$$\frac{3}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^2_+} u'(0)\omega_i d\mu_{\mathbb{S}^2} = D_1C^i[0,\delta]u'(0) = -D_2C[0,\delta]\tilde{g}'(0) = 0. \tag{B.65}$$

接下来，我们对边界条件求导。沿用推导方程（B.51）时的相同思路，我们先对方程（B.61）的第一分量求导，得到

$$\frac{\partial u'(0)}{\partial \eta} = -(\kappa_1\omega_1^2 + \kappa_2\omega_2^2). \tag{B.66}$$

接下来，我们对方程（B.61）的第二分量求导。利用方程（B.33）和（B.43），可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}(\Delta+2)u'(0) =& -D_1B_2[0,\delta]u'(0)\\ =& D_2B_2[0,\delta]\tilde{g}'(0)\\ =& 7(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2) - H^S(a).\end{aligned} \tag{B.67}$$

最后，我们对方程 (B.60) 求导。利用 $\alpha(0) = \beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$ 以及方程 (B.24) 和 (B.41)，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(\Delta+2)u'(0) =& -D_1W[0,\delta]u'(0)\\ =& D_2W[0,\delta]\tilde{g}'(0) - \alpha'(0)H[0,\delta] - \beta_i'(0)\nabla C^i[0,\delta]\\ =& \frac{1}{2}\Delta\left(5(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3 - \omega_3H^S(a)\right) - \alpha'(0)H[0,\delta] - \beta_i'(0)\nabla C^i[0,\delta].\end{aligned}$$

两边乘以 2，代入 $H[0,\delta] = 2$ 并使用我们刚才在方程 (B.27之前讨论过的 $\nabla C^i[0,\delta]$ 公式，可得

$$\Delta(\Delta+2)u'(0) = \Delta\left(5(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3 - \omega_3H^S(a)\right) - 4\alpha'(0) + \frac{3}{\pi}\beta_i'(0)\omega_i. \tag{B.68}$$

接下来，将方程 (B.68) 乘以 $\omega_1$ 并积分。代入方程 (B.66) 和 (B.67)，再利用 $\Delta\omega_1 = -2\omega_1$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{3}{\pi}\beta_1'(0)\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2 d\mu_{\mathbb{S}^2} =& \int_{\mathbb{S}^2_+}\Delta(\Delta+2)u'(0)\omega_1 d\mu_{\mathbb{S}^2}\\ =&2\int_{\mathbb{S}^2_+}\Delta u'(0)\omega_1 d\mu_{\mathbb{S}^2}+\int_{\mathbb{S}^2_+}\Delta^2 u'(0)\omega_1 d\mu_{\mathbb{S}^2}\\ =&-\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\frac{\partial\Delta u''(0)}{\partial\eta}\omega_1 dS\\ =&0.\end{aligned}$$

因此 $\beta_1'(0) = 0$ 同理 $\beta_2'(0) = 0$。为求出 $\alpha'(0)$，我们对方程（B.68）积分，并代入（B.67），得到

$$\begin{aligned}-8\pi\alpha'(0) =& \int_{\mathbb{S}^2_+}\Delta(\Delta+2)u'(0)d\mu_{\mathbb{S}^2}-\int_{\mathbb{S}^2_+}\Delta\left(5(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3-\omega_3 H^S(a)\right)d\mu_{\mathbb{S}^2}\\ =&-\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\frac{\partial}{\partial\eta}(\Delta+2)u'(0)dS+\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(5(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3-\omega_3 H^S(a)\right)dS\\ =&-\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\frac{\partial}{\partial\eta}(\Delta+2)u'(0)dS+\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}5(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)-H^S(a)dS\\ =&-2\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2 dS\\ =&-2H^S(a)\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2 dS\\ =&-2\pi H^S(a).\end{aligned}$$

将此结果以及 $\beta_1'(0) = \beta_2'(0) = 0$ 代入方程（B.68），得

$$\Delta(\Delta+2)u'(0) = \Delta\left(5(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3-\omega_3 H^S(a)\right)-H^S(a). \tag{B.69}$$

汇集方程（B.64）、（B.65）、（B.66）、（B.67）和（B.69）可知，$u'(0)$ 是下列问题的一个解：

$$\begin{cases}\Delta(\Delta+2)u'(0) = \Delta\left(5(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3-\omega_3 H^S(a)\right)-H^S(a),\\ \dfrac{\partial u'(0)}{\partial\eta} = -(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2),\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}(\Delta+2)u'(0) = 7(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)-H^S(a),\\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}^2_+}u'(0)d\mu_{\mathbb{S}^2} = \frac{\pi}{8}H^S(a),\\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}^2_+}u'(0)\omega_i d\mu_{\mathbb{S}^2} = 0 \quad \text{for } i=1,2.\end{cases} \tag{B.70}$$

容易看出，该问题只有一个解；因此， $u'(0)$ 完全由（B.70）确定。因此，通过机器计算可以验证

$$u'(0)=\frac{\kappa_1-\kappa_2}{4}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{1+\omega_3}+(\kappa_1+\kappa_2)\left[1-\ln(2)+\frac{\ln(1+\omega_3)}{2}-\frac{3}{4}\omega_3\right]-\frac{\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2}{2}\omega_3. \quad \text{(B.71)}$$

**$u'(0)$ 的推导**

我们采用与 CMC 情形相同的方法求得 $u'(0)$。首先引入$f(\omega):=(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2)\omega_3$并定义 $v:=u'(0)+\frac{1}{2}f$。 $v$满足以下问题

$$\begin{cases}\Delta(\Delta+2)v=-H^S(a),\\ \dfrac{\partial v}{\partial\eta}=-\dfrac{1}{2}(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2),\\ \dfrac{\partial(\Delta+2)v}{\partial\eta}=2(\kappa_1\omega_1^2+\kappa_2\omega_2^2),\\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}^2_+}v d\mu_{\mathbb{S}^2}=\frac{\pi}{4}H^S(a),\ \int_{\mathbb{S}^2_+}v\omega_i d\mu_{\mathbb{S}^2}=0.\end{cases}$$

为求解这个偏微分方程，我们采用如下试探解

$$v=(\kappa_1+\kappa_2)v_1+\frac{\kappa_1-\kappa_2}{4}v_2 \quad \text{(B.72)}$$

其中， $v_1$ 和 $v_2$ 是以下问题的解:

$$\begin{cases}\Delta(\Delta+2)v_1=-1,\\ \dfrac{\partial v_1}{\partial\eta}=-\dfrac{1}{4},\\ \dfrac{\partial(\Delta+2)v_1}{\partial\eta}=1,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}^2_+}v_1 d\mu_{\mathbb{S}^2}=\frac{\pi}{4},\ \int_{\mathbb{S}^2_+}v_1\omega_i d\mu_{\mathbb{S}^2}=0.\end{cases}\quad\text{and}\quad\begin{cases}\Delta(\Delta+2)v_2=0,\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial\eta}=-(\omega_1^2-\omega_2^2),\\ \dfrac{\partial(\Delta+2)v_2}{\partial\eta}=4(\omega_1^2-\omega_2^2),\\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}^2_+}v_2 d\mu_{\mathbb{S}^2}=0,\ \int_{\mathbb{S}^2_+}v_2\omega_i d\mu_{\mathbb{S}^2}=0.\end{cases}$$

采用与求解 CMC 情形下对应方程相同的策略，我们得到 $v_1$ 和 $v_2$的以下解:

$$v_1(\omega)=1-\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(1+\omega_3)-\frac{3}{4}\omega_3\quad\text{and}\quad v_2(\omega)=\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{1+\omega_3} \quad \text{(B.73)}$$

回顾 $v$ 和 $f$的定义、试探解（B.72）以及方程（B.73）中的公式，我们得到方程（B.71）。

## B.5 二阶导数——CMC 情形

我们采用小节 5.2中的记号。第一步是对体积约束$V[u(\lambda)\ \tilde{g}(\lambda)]=2\pi/3$ 关于 $\lambda$ 求两次导数，并在 $\lambda=0$处求值。由此得到

$$\begin{aligned}0=&D_1V[0,\delta]u''(0)+D_2V[0,\delta]\tilde{g}''(0)\\&+D_1^2V[0,\delta](u'(0),u'(0))+D_2^2V[0,\delta](\tilde{g}'(0),\tilde{g}'(0))+2D_{12}^2V[0,\delta](u'(0),\tilde{g}'(0)).\end{aligned} \quad \text{(B.74)}$$

回顾一下，我们用 $(1+\epsilon u'(0))\omega$ 的图像所围成的内部区域表示为$\Omega_{\epsilon u'(0)}$ 并利用 $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\,\tilde{g}'(0)\ =0$（见方程 (5.1)），我们计算得

$$\begin{aligned}
D_{12}^2V[0,\delta](u'(0),\tilde{g}'(0)) =&\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\frac{d}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}V[\epsilon u'(0),\delta+\alpha\tilde{g}'(0)]\\
=&\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\left[\int_{\Omega_{\epsilon u'(0)}}\frac{d}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}\sqrt{\det(\delta+\alpha\tilde{g}'(0))}d^3x\right]\\
=&\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\left[\int_{\Omega_{\epsilon u'(0)}}\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\,\tilde{g}'(0)\right]d^3x\\
=&0.
\end{aligned}\tag{B.75}$$

接下来，我们需要 $\tilde{g}''(0)$的显式公式。该公式在 [15]的附录 A 中推导得出。采用我们选取的具体基，使得 $h_{ij}=\delta_{ij}\kappa_i$ 在点 $a$处，公式可简化为

$$\tilde{g}''(0)=\begin{bmatrix}2\kappa_1^2x_1^2 & 2\kappa_1\kappa_2x_1x_2 & \partial_1h_{ab}x_ax_b\\ 2\kappa_1\kappa_2x_1x_2 & 2\kappa_2^2x_2^2 & \partial_2h_{ab}x_ax_b\\ \partial_1h_{ab}x_ax_b & \partial_2h_{ab}x_ax_b & 0\end{bmatrix}.\tag{B.76}$$

这里 $\partial_ih_{ab}$ 表示第二基本形式关于基点的导数。观察方程（B.76），可得 $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\,\tilde{g}''(0)\ =2(\kappa_1^2x_1^2+\kappa_2^2x_2^2)$ 因此

$$D_2V[0,\delta]\tilde{g}''(0)=\frac{1}{2}\int_{B_1^+(0)}2(\kappa_1^2x_1^2+\kappa_2^2x_2^2)d^3x=\int_{B_1^+(0)}\kappa_1^2x_1^2+\kappa_2^2x_2^2d^3x.\tag{B.77}$$

暂且简记 $M_\epsilon:=\delta+\epsilon\tilde{g}'(0)$，利用 $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}(M_0^{-1}\tilde{g}'(0))\ =\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\,\tilde{g}'(0)\ =0$，我们计算得

$$\begin{aligned}
D_2^2V[0,\delta](\tilde{g}'(0),\tilde{g}'(0)) =&\frac{d^2}{d\epsilon^2}\bigg|_{\epsilon=0}V[0,M_\epsilon]\\
=&\frac{d^2}{d\epsilon^2}\bigg|_{\epsilon=0}\int_{B_1^+(0)}\sqrt{\det(M_\epsilon)}d^3x\\
=&\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\int_{B_1^+(0)}\frac{1}{2}\sqrt{\det(M_\epsilon)}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}(M_\epsilon^{-1}\tilde{g}'(0))d^3x\\
=&\frac{1}{2}\int_{B_1^+(0)}\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{\partial M_\epsilon^{-1}}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\tilde{g}'(0)\right]d^3x\\
=&-\frac{1}{2}\int_{B_1^+(0)}\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}(\tilde{g}'(0)^2)d^3x.
\end{aligned}\tag{B.78}$$

观察方程（5.1），并将无关的矩阵指标记为 $*$，可得

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}(\tilde{g}'(0)^2)=\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\begin{bmatrix}\kappa_1^2x_1^2 & * & *\\ * & \kappa_2^2x_2^2 & *\\ * & * & \kappa_1^2x_1^2+\kappa_2^2x_2^2\end{bmatrix}=2(\kappa_1^2x_1^2+\kappa_2^2x_2^2).$$

代入方程（B.78），并与方程（B.77）比较可得

$$D_2V[0,\delta]\tilde{g}''(0)+D_2^2V[0,\delta](\tilde{g}'(0),\tilde{g}'(0))=0. \tag{B.79}$$

将方程 (B.29)、(B.75) 和 (B.79) 代入方程 (B.74)，得到

$$\int_{\mathbb{S}^2_+}u''(0)d\mu_{\mathbb{S}^2}=D_1V[0,\delta]u''(0)=-D_1^2V[0,\delta](u'(0),u'(0))=-2\int_{\mathbb{S}^2_+}u'(0)^2d\mu_{\mathbb{S}^2}.$$

考虑方程 (B.26)，并使用方程 (B.56) 中 $u'(0)$ 的显式公式，我们通过机器计算得到

$$\begin{aligned}D_1A[0,\delta]u''(0)=&2\int_{\mathbb{S}^2_+}u''(0)d\mu_{\mathbb{S}^2}\\=&-4\int_{\mathbb{S}^2_+}u'(0)^2d\mu_{\mathbb{S}^2}\\=&\left(\frac{113}{30240}-\frac{\ln(2)}{9}\right)\pi H^S(a)^2+\left(-\frac{229}{945}+\frac{4}{9}\ln(2)\right)\pi K^S(a).\end{aligned}$$

这就是方程 (5.19。为证明方程 (5.18)，我们使用方程 (B.26)，并代入方程 (B.76) 中 $\tilde{g}''(0)$ 的公式。这得到

$$D_2A[0,\delta]\tilde{g}''(0)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2_+}\mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2}\,\tilde{g}''(0)d\mu_{\mathbb{S}^2}=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2_+}\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\,\tilde{g}''(0)-\tilde{g}''(0)(\omega,\omega)d\mu_{\mathbb{S}^2}. \tag{B.80}$$

考虑方程 (B.76)，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\,\tilde{g}''(0)&=2(\kappa_1^2x_1^2+\kappa_2^2x_2^2),\\\tilde{g}''(0)(x,x)&=2\kappa_1^2x_1^4+2\kappa_2^2x_2^4+4\kappa_1\kappa_2x_1^2x_2^2+\text{odd}.\end{aligned}$$

因此：

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2_+}\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\,\tilde{g}''(0)d\mu_{\mathbb{S}^2}=(\kappa_1^2+\kappa_2^2)\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2d\mu_{\mathbb{S}^2}=\frac{2\pi}{3}H^S(a)^2-\frac{4\pi}{3}K^S(a) \tag{B.81}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2_+}\tilde{g}''(0)(\omega,\omega)d\mu_{\mathbb{S}^2}=(\kappa_1^2+\kappa_2^2)\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_1^4d\mu_{\mathbb{S}^2}+2\kappa_1\kappa_2\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2\omega_2^2d\mu_{\mathbb{S}^2} \tag{B.82}$$

$$=\frac{2\pi}{5}H^S(a)^2-\frac{8\pi}{15}K^S(a) \tag{B.83}$$

将这些公式代入方程 (B.80)，可得方程 (5.18)。

## B.6 二阶导数——Willmore 情形

我们采用小节 5.1中的记号。首先，对第一个边界条件$B_1[u(\lambda)\ \tilde{g}(\lambda)]=0$ 关于 $\lambda$ 求两次导数，并在 $\lambda=0$处取值。利用方程 (B.31)，得到

$$\begin{aligned}0=&D_1B_1[0,\delta]u''(0)+D_2B_1[0,\delta]\tilde{g}''(0)+\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}B_1[\epsilon u'(0),\delta+\epsilon\tilde{g}'(0)]\\=&-\frac{\partial u''(0)}{\partial\eta}+D_2B_1[0,\delta]\tilde{g}''(0)+\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}B_1[\epsilon u'(0),\delta+\epsilon\tilde{g}'(0)].\end{aligned}$$

结合方程 (B.23)，我们推得

$$\begin{aligned}D_1\mathcal{W}[0,\delta]u''(0)=&\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\frac{\partial u''(0)}{\partial\eta}dS\\=&\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}D_2B_1[0,\delta]\tilde{g}''(0)+\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}B_1[\epsilon u'(0),\delta+\epsilon\tilde{g}'(0)]dS.\end{aligned}\tag{B.84}$$

利用方程 (B.32) 以及方程 ( $\tilde{g}''(0)$ 中的公式 (B.76)，可得 $D_2B_1[0,\delta]\tilde{g}''(0)=-\tilde{g}''(0)_{a3}\omega_a=-\partial_a h_{ij}\omega_a\omega_i\omega_j$。由于这是一个奇项，因此可得

$$\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}D_2B_1[0,\delta]\tilde{g}''(0)dS=0.\tag{B.85}$$

代入方程 (B.84)，并利用方程 ( $\tilde{g}'(0)$ 中的显式公式 (5.1)，以及方程 $u'(0)$ 中的显式公式 (B.71，我们可以用 Mathematica 计算

$$D_1\mathcal{W}[0,\delta]u''(0)=\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}B_1[\epsilon u'(0),\delta+\epsilon\tilde{g}'(0)]dS=4\pi H^S(a)^2(\ln(2)-1).$$

这就是方程 (5.7)。为推导方程 (5.8)，我们将 $q=\tilde{g}''(0)$简记为$q(t\omega)=t^2q(\omega)$，首先有，因此可推得 $\nabla_\omega q(\omega)=2q$。此外，我们使用 $\mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2}q=\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}q-q(\omega,\ \omega)$。代入方程 (B.22) 得

$$\begin{aligned}D_2\mathcal{W}[0,\delta]q=&\int_{\mathbb{S}^2_+}\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2}q+q(\omega,\omega)-\mathrm{tr}_{\mathbb{S}^2}\nabla.q(\cdot,\omega)d\mu_{\mathbb{S}^2}\\=&\int_{\mathbb{S}^2_+}\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}q+\frac{1}{2}q(\omega,\omega)-\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\nabla.q(\cdot,\omega)+\nabla_\omega q(\omega,\omega)d\mu_{\mathbb{S}^2}\\=&\int_{\mathbb{S}^2_+}\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}q+\frac{5}{2}q(\omega,\omega)-\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\nabla.q(\cdot,\omega)d\mu_{\mathbb{S}^2}.\end{aligned}\tag{B.86}$$

考虑方程（B.76），可得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3}\nabla.q(\cdot,x)=&\sum_{i=1}^{2}\partial_iq(e_i,x)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{\mu=1}^{3}\partial_iq_{i\mu}x_\mu=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\partial_iq_{ij}x_j+\mathrm{odd}\\=&4(\kappa_1^2x_1^2+\kappa_2^2x_2^2)+2\kappa_1\kappa_2(x_1^2+x_2^2)+\mathrm{odd}.\end{aligned}$$

利用这个公式，很容易验证

$$-\int_{\mathbb{S}^2_+} \mathrm{tr}_{\mathbb{R}^3} \nabla.q(\cdot,\omega)d\mu_{\mathbb{S}^2} = -4(\kappa_1^2+\kappa_2^2)\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2 d\mu_{\mathbb{S}^2} - 4\kappa_1\kappa_2\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega_1^2 d\mu_{\mathbb{S}^2}$$
$$= -\frac{8\pi}{3}H^S(a)^2 + \frac{8\pi}{3}K^S(a). \tag{B.87}$$

代入方程（B.81）、（B.83）和（B.87到方程（B.86可得方程（5.8）。

# C Mathematica 代码

补充文件包含以下带注释的 Mathematica 笔记本。

- **区域构造**

  （1）‘第 4.1 节 - 方程（4.17）的证明’

- **常平均曲率计算**

  (1) ‘公式（5.14）的证明——线性化常平均曲率方程’ (2) ‘公式（5.15）的证明’ (3) ‘方程（5.16）和（5.19）的证明’ (4) ‘公式（5.17）的证明’

- **Willmore 计算**

  (1) ‘公式（5.3）的检验——线性化 Willmore 方程’ (2) ‘公式（5.4）的证明’ (3) ‘公式（5.5）的证明’ (4) ‘公式（5.6）的证明’ (5) ‘公式（5.7）的证明’

**关于实现的一则说明**
在 Willmore 计算中，我们有时会遇到这样一项任务：实现曲面 $\phi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^3, \tilde{g})$ 的第二基本形式。为此，我们迅速推导出一个合适的表达式。

令 $\phi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^3, \tilde{g})$ 参数化一个曲面，并令 $\nu(x)$ 表示其内单位法向量。当 $\epsilon > 0$ 足够小时，

$$\Phi: \Omega \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(x,z) := \phi(x) + z\nu(x)$$

是到其像上的微分同胚。将 $z$ 记作 $x_3$，根据定义有

$$\begin{aligned} h_{ij}(x) =& \tilde{g}(\nabla_{\partial_i\phi}\partial_j\phi, \nu) \\ =& \tilde{g}(\nabla_{\partial_i\Phi}\partial_j\Phi, \nu)\Big|_{z=0} \\ =& \tilde{g}(\nabla_{\partial_i\Phi}\partial_j\Phi, \partial_3\Phi)\Big|_{z=0} \\ =& \Gamma^3{}_{ij}(x_1, x_2, 0). \end{aligned}$$

在坐标系 $\Phi$ 中

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \begin{bmatrix} \tilde{g}(\partial_i\phi(x) + z\partial_i\nu(x), \partial_j\phi(x) + z\partial_j\nu(x)) & z\tilde{g}(\partial_i\nu(x), \nu(x)) \\ z\tilde{g}(\partial_i\nu(x), \nu(x)) & 1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{g}\Big|_{z=0} &= \begin{bmatrix} \tilde{g}(\partial_i\phi(x), \partial_j\phi(x)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

这给出

$$\begin{aligned} h_{ij}(x) = \Gamma^3{}_{ij}(x, 0) =& -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=0} \tilde{g}_{\phi(x)+z\nu(x)}(\partial_i\phi(x) + z\partial_i\nu(x), \partial_j\phi(x) + z\partial_j\nu(x)) \\ =& -\frac{1}{2}\left(\nu^\mu\partial_\mu\tilde{g}_{\alpha\beta}\partial_i\phi(x)^\alpha\partial_j\phi(x)^\beta + \tilde{g}_{\alpha\beta}\partial_i\phi^\alpha\partial_j\tilde{\nu} + \tilde{g}_{\alpha\beta}\partial_j\phi^\alpha\partial_i\tilde{\nu}\right). \end{aligned} \tag{C.1}$$

在代码中，我们实现了该矩阵

$$\begin{aligned} &s_{ij} := \tilde{g}_{\phi(x)+z\nu(x)}(\partial_i\phi(x) + z\partial_i\nu(x), \partial_j\phi(x) + z\partial_j\nu(x)) \\ &\text{so that} \quad h_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=0} s_{ij}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

## 致谢

作者谨此感谢 Ernst Kuwert 提出这一有趣的课题，并感谢他进行的多次富有帮助的讨论。

## 参考文献

[1] Roberta Alessandroni 和 Ernst Kuwert。Willmore 泛函自由边界问题的局部解。《变分法与偏微分方程》，55(2):1–29，2016。

[2] Giovanni Bellettini 和 Giorgio Fusco。V= H - H 动力学的某些方面。《微分方程杂志》，157(1):206–246，1999。

[3] Valerie Hofmeister. 指定面积约束下Willmore泛函小球面类型临界点的存在性。硕士论文，2019。

[4] Norihisa Ikoma、Andrea Malchiodi 和 Andrea Mondino。在《守恒律偏微分方程的正则性与奇异性》中，〈黎曼三流形中面积受约束的小面积Willmore曲面：一种基于Lyapunov-Schmidt约化的方法〉，第31–50页。数理科学研究所（RIMS），京都，2017。[5] Norihisa Ikoma、Andrea Malchiodi 和 Andrea Mondino. 非退化标量曲率临界点附近的面积受约束威尔莫尔球面叶状结构。《国际数学研究通知》，2020(19):6539–6568，2020。[6] Hermann Karcher. 黎曼质心与磨光函数平滑。《纯粹与应用数学通讯》，30(5):509–541，1977。[7] Tobias Lamm 和 Jan Metzger. 黎曼流形中的小型Willmore型曲面，2010。[8] Tobias Lamm 和 Jan Metzger. 小面积约束下威尔莫尔泛函的极小化子。《庞加莱研究所年刊*C*辑：非线性分析》，30(3):497–518，2013。[9] Tobias Lamm、Jan Metzger 和 Felix Schulze. 渐近平坦流形上的Willmore型曲面叶状结构，2011。[10] Tobias Lamm、Jan Metzger 和 Felix Schulze. 流形的Willmore型曲面局部叶状结构。《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》，70(4):1639–1662，2020。[11] Paul Laurain. 三流形中 $CMC$ 曲面的集中。《国际数学研究通知》，2012(24):5585–5649，2012。[12] Paul Laurain 和 Andrea Mondino. 黎曼三流形中小威尔莫尔球面的集中。《分析与偏微分方程》，7(8):1901–1921，2014。[13] Marco Mattuschka. 黎曼流形中小泡的指定面积威尔莫尔流。博士论文，弗赖堡大学，2018。[14] Karl Heinz Mayer. 代数拓扑。Birkhäuser出版社，巴塞尔，1989。[15] Jan-Henrik Metsch. 小泡沿区域边界滑动时的保面积威尔莫尔流。预印本，2022。[16] Andrea Mondino. 关于威尔莫尔泛函临界点存在性的一些结果。《数学杂志》，266(3):583–622，2010。[17] Andrea Mondino. 共形威尔莫尔泛函：一种微扰方法。《几何分析杂志》，23(2):764–811，2013。[18] J. Fabio Montenegro. 自由边界常平均曲率叶片的叶状分解，2019。网址：https://arxiv.org/abs/1904.11867。[19] Frank Pacard 和 Xingwang Xu. 黎曼流形中的常平均曲率球面。《数学手稿》，128:275–295，2009年3月。

[20] Wolfram Research Inc. *Mathematica 11.1.1*，2017。网址：http://www.wolfram.com。[21] 叶如钢。常平均曲率球面叶状分解。《太平洋数学杂志》，147(2):381–396，1991。[22] 叶如钢。渐近平坦流形上的常平均曲率球面叶状分解。载于几何分析与变分法，第369–383页。国际出版社，马萨诸塞州剑桥，1996。