arXiv:2302.01087v2 [math.PR] 7 Feb 2023

布朗运动随机指数为鞅的簇展开证明

STEVEN D MILLER

Abstract. 设 $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是一个光滑连续的实函数，且 $\psi\in L^2(\mathbb{R}^+)$。令 $B(t)$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的标准布朗运动，其中$dB(t)=\xi(t)dt$ 且 $t\in\mathbb{R}^+$。过程 $\xi(t)$ 是高斯白噪声，其期望为 $E\ \xi(t)=0$，协方差为 $E\ \xi(t)\xi(s)=\delta(t-s)$。Dolean-Dades 随机指数 $Z(t)$ 是描述几何布朗运动的线性随机微分方程的解，使得 $dZ(t)=\psi(t)Z(t)dB(t)=\psi(t)Z(t)\xi(t)dt$。利用簇展开方法以及 $\xi(t)$ 的矩生成函数和累积量生成函数，可以证明 $Z(t)$ 是一个鞅。文中重述了 $Z(t)$ 为真鞅所需满足的原始诺维科夫判据，并且该判据恰好得到满足，即

$$\mathbf{E}Z(t)=\mathbf{E}\exp\left(\int_o^t\psi(u)dB(u)-\frac{1}{2}\int_0^t|\psi(u)|^2du\right)=1$$

前提是对所有 $t>0$，$\exp\left(\int_0^t|\psi(u)|^2du\right)<\infty$。然而，若$\phi(t)=\int_0^t|\psi(u)|^2du$ 单调递增且对所有 $p>1$ 都是次鞅，则 $E\left[|Z(t)|^p\right]=\exp(\frac{1}{2}p(p-1)\phi(t))$ 。

1. 引言

设 $B(t)$ 是相对于概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的标准布朗运动，且令$\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 为光滑连续实函数 [1]。随机分析中的一个经典问题是证明 Dolean-Dades 随机指数

$$Z(t)=\exp\left(\int_o^t\psi(u)dB(u)-\frac{1}{2}\int_0^t|\psi(u)|^2du\right) \tag{1.1}$$

$$Z(0)=0 \tag{1.2}$$

是真鞅 [2]。DDSE 是几何布朗运动 [1] 的精确解

$$dZ(t)=\psi(t)Z(t)\ \xi(t)dt\equiv\psi(t)Z(t)\ dB(t) \tag{1.3}$$

其中 $dB(t)=\xi(t)dt$ ，且 $\xi(t)$ 是高斯白噪声。该解具有如下伊藤随机积分表示

$$Z(t)=\int_0^t\psi(u)Z(u)dB(u) \tag{1.4}$$

显式解 (1.1) 是通过对 $\log Z(t)$ 作伊藤展开而得到的 [1] 。证明 $Z(t)$ 是真鞅实际上是一个颇为困难且微妙的问题，并且与其他定理和结果 [2-7] 有关。形如 (1.4) 的伊藤积分并不总是鞅。关于 $Z(t)$ 是真鞅的著名充要条件，归功于 Novikov [2] 以及 Kazamaki [5]。诺维科夫判据为

$$\mathbf{E}Z(t)=\mathbf{E}\exp\left(\int_o^t\psi(u)dB(u)-\frac{1}{2}\int_0^t|\psi(u)|^2du\right)=1 \tag{1.5}$$

以及该界

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t|\psi(u)|^2du\right)<\infty,\ \forall t>0 \tag{1.6}$$

或等价地 $\frac{1}{2}\|\psi\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du < \infty$。函数 ψ 也可以是关于 $\omega \in \Omega$ 的随机过程$\psi(t,\omega)$，且满足诺维科夫判据 [6]

$$\mathbf{E}Z(t) = \mathbf{E}\exp\left(\int_o^t \psi(u,\omega)dB(u,\omega) - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u,\omega)|^2 du\right) = 1 \tag{1.7}$$

and

$$\mathbf{E}\left\{\exp\left(\int_0^t |\psi(u,\omega)|^2 du\right)\right\} < \infty,\ \forall t > 0 \tag{1.8}$$

本文仅考虑 (1.5)，并给出一个简短的新证明，以确立 $Z(t)$ 是鞅。通过簇展开方法，并利用矩生成函数和累积量生成函数，确立了精确的判据 (1.5) 和 (1.6)。

几何布朗运动自然地出现在随机指数增长问题中：这类增长是指某个感兴趣的量呈指数增长，但增长过程中带有随机乘数和/或各次增长突增之间的随机等待时间。这类过程在自然界和人类构建的系统中无处不在：持续培养基中的细菌生长；核裂变和细胞分裂；胚胎生物学和癌症生物学中的组织生长；病毒性流行病；金融市场和泡沫，以及布莱克-斯科尔斯期权定价模型；互联网增长和社交媒体病毒式传播帖子的扩散；种群与灭绝动态；计算机处理能力的摩尔定律；以及极早期宇宙伴随随机涨落的暴胀扩张 [8-17]。噪声既可以促进随机指数增长，也可以使种群走向灭绝 [8,11,12]。

关于随机增长的大多数此类模型都聚焦于几何布朗运动的随机微分方程，因为它可以通过强解精确求解。假设一个系统通过简单的线性常微分方程 $dX(t) = \alpha X(t)dt$ 演化，并呈指数变化，那么 $X(t) = X(0)\exp(\alpha t)$。如果 $\alpha > 0$，系统就会指数增长，并且 $X(t) \to \infty$ 当 $t \to \infty$；如果 $\alpha < 0$，系统就会呈指数衰减或崩溃，以致 $X(t) \to 0$ 当 $t \to \infty$。当 $\alpha = 0$ 时，系统稳定或静止。如果系统受到白噪声的随机扰动（加性），那么

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \psi(t)X(t)\xi(t)dt \equiv \alpha X(t)dt + \psi(t)X(t)dB(t) \tag{1.9}$$

此随机微分方程存在强解 [1]。给定任意 C^2-泛函 $f(X(t))$，伊藤引理为

$$\begin{aligned} df(X(t)) &= \nabla_X f(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\nabla_X^2 f(X(t))d[X,X](t) \\ &= \nabla_X f(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\nabla_X^2 f(X(t))|\psi(t)|^2 dt \\ &= \nabla_X f(X(t))\big\{\alpha X(t)dt + \psi(t)X(t)dB(t)\big\} + \frac{1}{2}\nabla_X^2 f(X(t))|\psi(t)|^2 dt \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中 $\nabla_X = d/dX(t)$ 且 $\nabla_X^2 = d^2/dX(t)^2$。利用 $f(X(t)) = \log X(t)$

$$\begin{aligned} dU(t) \equiv d\log X(t) &= \frac{1}{X(t)}dX(t) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{|X(t)|^2}\right)|\psi(t)|^2|X(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{X(t)}\big\{\alpha X(t)dt + \psi(t)X(t)dB(t)\big\} - \frac{1}{2}\psi(t)|^2 dt \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}|\psi(t)|^2\right)dt + \psi(t)dB(t) \end{aligned} \tag{1.11}$$

那么解为

$$X(t) = X(0)\exp(\alpha t)\exp\left(\int_0^t \psi(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) = \exp(\alpha t)Z(t) \tag{1.12}$$

期望为

$$\mathbf{E}X(t) = X(0)\exp(\alpha t)\mathbf{E}\exp\left(\int_0^t \psi(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) = \exp(\alpha t)\mathbf{E}Z(t) \tag{1.13}$$

若 E$Z(t) = 1$，则其为 E$X(t) = \exp(\alpha t)$。因此，$Z(t)$的鞅性质值得关注，并可确保在任意有限时间 $t > 0$ 内都不会发生爆炸。

2. Main theorem and proof utilising a cluster expansion method

2.1. 初步定义与引理。证明之前，我们先给出以下初步定义与引理。证明采用簇展开方法 [**18-21**]。

定义 2.1. 白噪声（非正式地）定义为一个零均值高斯过程 ξ，其协方差为 E $\xi(t)\xi(s) = \delta(t-s)$，期望为 E$\xi(t) = 0$。标量或内积 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ in$L^2(\mathbb{R})$ 可定义为

$$\langle \psi, \phi \rangle = \mathbf{E}\big\langle \psi, \xi \big\rangle \big\langle \phi, \xi \big\rangle = \iint \psi(s)\phi(t)\mathbf{E}\ \xi(s)\xi(t)dsdt = \iint \psi(s)\phi(t)\delta(t-s)dsdt \tag{2.1}$$

Then

$$\langle \psi, \psi \rangle = \mathbf{E}\big\langle \psi, \xi \big\rangle \big\langle \psi, \xi \big\rangle = \iint \psi(s)\psi(t)\mathbf{E}\ \xi(s)\xi(t)dsdt = \iint \psi(s)\psi(t)\delta(t-s)dsdt \tag{2.2}$$

即

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int |\psi(s)|^2 ds = \|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \tag{2.3}$$

噪声 ξ 可表示为定义在任意包含 L$^2(\mathbb{R})$ 的分布空间上的高斯随机过程。若 $\psi \in$ L$^2(\mathbb{R})$，则形如 $\int \psi(s)\xi(s)ds$ 的随机积分是良定义的。若ψ 是 $[0,t]$ 上的示性函数，则过程 $B(t) = \int_0^t \xi(s)ds$ 是布朗运动，且$dB(t) = \xi(t)dt$。

定义 2.2. 给定一个时间有序集合 $(t_1, \ldots t_m) \in (0, T)$，其中 $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{m-1} < t_m$，白噪声 $\xi(t)$ 的 m 阶矩和累积量定义为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbb{T}}\mathbf{E}\ \xi(t_1) \otimes \ldots \otimes \xi(t_m) &= \overrightarrow{\mathbb{T}}\mathbf{E}\prod_{q=1}^{m}\xi(t_q) \\ \overrightarrow{\mathbb{T}}\mathbf{C}\ \xi(t_1) \otimes \ldots \otimes \xi(t_m) &= \overrightarrow{\mathbb{T}}\mathbf{C}\prod_{q=1}^{m}\xi(t_q) \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $\mathbb{T}$是一个“时间排序算子”。例如，若 $t_1 < t_2 < t_3$且 $f(t)$ 是 t 的函数，则 $\overrightarrow{\mathbb{T}} f(t_2)f(t_1)f(t_3 = f(t_1)f(t_2)f(t_3)$。由于 $\xi(t)$ 是高斯变量，它完全由前两个矩确定，所有 $m \geq 3$ 阶及以上的累积量均为零，因此

$$\left\{ \overrightarrow{\mathbb{T}}\mathbf{C}\prod_{q=1}^{m}\xi(t_q) \right\}_{m\geq 3} = 0 \tag{2.5}$$

例如，对于高斯过程，二阶累积量在二阶情况下等同于二阶矩

$$\mathbf{C}\xi(t_1)\xi(t_2) = \mathbf{E}\ \xi(t_1)\xi(t_2) - \mathbf{E}\ \xi(t_1)\mathbf{E}\ \xi(t_2) = \mathbf{E}\xi(t_1)\xi(t_2) = \delta(t_2 - t_1) \tag{2.6}$$

定义 2.3。白噪声 $\xi(t)$ 的矩生成函数（MGF） $\mathscr{M}[\xi(t)]$ 和累积量生成函数 [CGF] $\mathscr{C}[\xi(t)]$ 定义如下

$$\mathscr{M}[\xi(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \int_0^t ... \int_0^{t_{m-1}} dt_1 ... dt_m \overrightarrow{\mathbb{T}} \mathbf{E} \prod_{q=1}^{m} \xi(t_q) \tag{2.7}$$

$$\mathscr{C}[\xi(t)] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \int_0^t ... \int_0^{t_{m-1}} dt_1 ... dt_m \overrightarrow{\mathbb{T}} \mathbf{C} \prod_{q=1}^{m} \xi(t_q) \tag{2.8}$$

其中 β 是任意实常数。需要注意的是，(2.8) 中的求和从 $m = 1$ 开始，而不是从 $m = 0$ 开始，并且

$$\overrightarrow{\mathbb{T}} \mathbf{E} \prod_{q=1}^{m} \xi(t_q) \neq \overrightarrow{\mathbb{T}} \prod_{q=1}^{m} \mathbf{E} \xi(t_q) \tag{2.9}$$

$$\overrightarrow{\mathbb{T}} \mathbf{C} \prod_{q=1}^{m} \xi(t_q) \neq \overrightarrow{\mathbb{T}} \prod_{q=1}^{m} \mathbf{C} \xi(t_q) \tag{2.10}$$

方程 (2.7) 和 (2.8) 也可以写成

$$\mathscr{M}[\xi(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \int \mathbf{D}_m[t_1 ... t_m] \overrightarrow{\mathbb{T}} \mathbf{E} \prod_{q=1}^{m} \xi(t_q) \tag{2.11}$$

$$\mathscr{C}[\xi(t)] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \int \mathbf{D}_m[t_1 ... t_m] \overrightarrow{\mathbb{T}} \mathbf{C} \prod_{q=1}^{m} \xi(t_q) \tag{2.12}$$

其中 $\int \mathbf{D}_m[t] = \int ... \int dt_1 ... dt_m$ 是一个“路径积分”。取 $\beta = +1$

$$\mathscr{M}[\xi(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \mathbf{D}_m[t_1 ... t_m] \overrightarrow{\mathbb{T}} \mathbf{E} \prod_{q=1}^{m} \xi(t_q) \tag{2.13}$$

$$\mathscr{C}[\xi(t)] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \mathbf{D}_m[t_1 ... t_m] \overrightarrow{\mathbb{T}} \mathbf{C} \prod_{q=1}^{m} \xi(t_q) \tag{2.14}$$

引理 2.4. 矩母函数与累积量生成函数之间的关系为

$$\log \mathscr{M}[\xi(t)] = \mathscr{C}[\xi(t)] \tag{2.15}$$

因此

$$\mathscr{M}[\xi(t)] = \exp\left(\mathscr{C}[\xi(t)]\right) \tag{2.16}$$

因此

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \mathbf{D}_m[t_1 ... t_m] \overrightarrow{\mathbb{T}} \mathbf{E} \prod_{q=1}^{m} \xi(t_q) \tag{2.17}$$

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \mathbf{D}_m[t_1 ... t_m] \overrightarrow{\mathbb{T}} \mathbf{C} \prod_{q=1}^{m} \xi(t_q) \right) \tag{2.18}$$

命题 2.5。给定 $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 和白噪声 $\xi(t)$，则对所有 $t > 0$，定义高斯噪声或随机函数

$$\Xi(t) = \psi(t) \xi(t) \tag{2.19}$$

则 $\mathbf{E}\Xi(t) = 0$ 且

$$\mathbf{E}\ \Xi(t)\Xi(s) = \psi(t)\psi(s)\mathbf{E}\ \xi(t)\xi(s) = \psi(t)\psi(s)\delta(t-s) \tag{2.20}$$

引理 2.6. 给定 $\Xi(t) = \psi(t)\xi(t)$，则对任意 $t_2 > t_1$ 以及 $(t_1, t_2) \in (0, t)$

$$\langle \psi, \psi \rangle \equiv \int_0^t \int_0^{t_1} \mathbf{E}\ \Xi(t_1)\Xi(t_2)dt_1dt_2 = \int_0^t |\psi(t_1)|^2 dt_1 = \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R})} \tag{2.21}$$

证明。利用狄拉克 δ 函数的筛选性质

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^{t_1} \mathbf{E}\ \Xi(t_1)\Xi(t_2)dt_1dt_2 \\
&= \int_0^t \int_0^{t_1} \psi(t_1)\psi(t_2)\mathbf{E}\ \Xi(t_1)\Xi(t_2)dt_1dt_2 \\
&= \int_0^t \psi(t_1) \left| \int_0^{t_1} \psi(t_2)\delta(t_2 - t_1)dt_2 \right| dt_1 \\
&= \int_0^t \psi(t_1)\psi(t_1)dt_1 = \int_0^t |\psi(t_1)|^2 dt_1 \equiv \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^+)}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

□

命题 2.7. 给定 $\Xi(t) = \beta(t)\xi(t)$，则 Dolean-Dades 随机指数 $Z(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned}
Z(t) &= \exp\left(\int_0^t \psi(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du \right) \\
&= \exp\left(\int_0^t \psi(u)\xi(u)du - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du \right) \\
&= \exp\left(\int_0^t \Xi(u)du - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du \right)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

2.2. 主定理。主定理及其证明如下:

定理 2.8. 随机指数 $Z(t)$是真鞅，当且仅当

$$\mathbf{E}Z(t)\} = \mathbf{E}\exp\left(\int_0^t \psi(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du \right) = 1 \tag{2.24}$$

并且要求

$$\exp(\|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du \right) < \infty,\ \forall t > 0 \tag{2.25}$$

证明。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Z(t) &= \mathbf{E}\exp\left(\int_0^t \psi(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du \right) \\
&= \mathbf{E}\exp\left(\int_0^t \psi(u)\xi(u)du - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du \right) \\
&= \mathbf{E}\exp\left(\int_0^t \Xi(u)du - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du \right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du \right) \mathbf{E}\exp\left(\int_0^t \Xi(u)du \right)
\end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) \mathbf{E}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_0^t dt_1 ... \int_0^{t_{m-1}} dt_m \prod_{q=1}^{m}\Xi(t_q)$$

$$\equiv \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) \mathbf{E}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int \mathbf{D}_m[t_1...t_m]\prod_{q=1}^{m}\Xi(t_q)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int \mathbf{D}_m[t_1...t_m]\mathbf{E}\prod_{q=1}^{m}\Xi(t_q) \tag{2.26}$$

然而，由（2.11）可得，矩母函数为

$$\mathscr{M}[\Xi(t)] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int \mathbf{D}_m[t_1...t_m]\mathbf{E}\prod_{q=1}^{m}\Xi(t_q) \tag{2.27}$$

因此（2.26）变为

$$\mathbf{E}Z(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\mathscr{M}[\Xi(t)] \tag{2.28}$$

现在利用引理（2.4）

$$\mathscr{M}[\Xi(t)] = \exp(\mathscr{C}[\Xi(t)]) \tag{2.29}$$

给定

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Z(t) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\mathscr{M}[\Xi(t)] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(\mathscr{C}[\Xi(t)]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int \mathbf{D}_m[t_1...t_m]\mathbf{C}\overrightarrow{\mathbb{T}}\prod_{q=1}^{m}\Xi(t_q)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int \mathbf{D}_m[t_1...t_m]\mathbf{C}\overrightarrow{\mathbb{T}}\prod_{q=1}^{m}\psi(t_q)\xi(t_q)\right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

现在，由于 $\xi(t)$ 是一个高斯过程，所有 $m \geq 3$ 阶累积量均为零，因此

$$\mathbf{C}\overrightarrow{\mathbb{T}}\left\{\prod_{q=1}^{m}\Xi(t_q)\right\}_{m\geq 3} = \mathbf{C}\overrightarrow{\mathbb{T}}\left\{\prod_{q=1}^{m}\psi(t_q)\xi(t_q)\right\}_{m\geq 3} = 0 \tag{2.31}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Z(t) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) \\
&\times \exp\left(\int \mathbf{D}_m[t_1]\psi(t_1)\mathbf{C}\xi(t_1)\} + \frac{1}{2}\int \mathbf{D}[t_1,t_2]\psi(t_1)\psi(t_2)\mathbf{C}\{\xi(t_1)\xi(t_2)\right) \\
&\equiv \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) \\
&\times \exp\left(\int_0^t dt_1\psi(t_1)\mathbf{C}\xi(t_1) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^{t_1} dt_1 dt_2\psi(t_1)\psi(t_2)\mathbf{C}\xi(t_1)\xi(t_2)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) \\
&\times \exp\left(\int_0^t dt_1\psi(t_1)\underbrace{\mathbf{E}\left\{\xi(t_1)\right\}}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^{t_1} dt_1 dt_2\psi(t_1)\psi(t_2)\mathbf{E}\ \xi(t_1)\xi(t_2)\right) \\
&\equiv \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^{t_1} dt_1 dt_2\psi(t_1)\psi(t_2)\mathbf{E}\ \xi(t_1)\xi(t_2)\right) \\
&\equiv \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^{t_1} dt_1 dt_2\psi(t_1)\psi(t_2)\delta(t_2-t_1)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t dt_1\psi(t_1)\left|\int_0^{t_1} dt_2\psi(t_2)\delta(t_2-t_1)\right|\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t dt_1\psi(t_1)\psi(t_1)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(t_1)|^2 dt_1\right) \\
&\equiv \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) \\
&\equiv \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du + \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) = 1
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

iff

$$
\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) < \infty \tag{2.33}
$$

这就是诺维科夫判据。若存在某个函数 $\psi(t)$ $\exists\ T>0$，使得 $\frac{1}{2}\int_0^T |\psi(u)|^2 du = \infty$，那么 $\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |\psi(u)|^2 du\right) = \infty$ 且 $\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T |\psi(u)|^2 du\right) = 0$，从而 $\mathrm{E}Z(t) = 0$。因此，在这些判据下，$Z(t)$ 是一个鞅，证明完毕。□

由此容易得出一个推论：对于所有 $p > 1$，若 $\phi(t) = \int_0^t |\psi(u)|^2 du$ 随 t 单调递增，则 $\mathbf{M}(t,p) = \mathrm{E}[|Z(t)|^p]$ 是一个次鞅。

推论 2.9。给定 $\mathrm{E}Z(t) = 1$，可得

$$
\mathbf{M}(t,p) = \mathbf{E}[|Z(t)|^p] = \exp\left(\tfrac{1}{2}[p(p-1)\phi(t)\right) \tag{2.34}
$$

对所有 $p > 1$，如果 $\phi(t)) = \int_0^t |\psi(u)|^2 du$ 有界但随 t 单调递增，则它是次鞅。证明。

$$
\begin{aligned}
|Z(t)|^p &= \left(\exp\left|\int_0^t \psi(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\right|^p \\
&= \exp\left(p\int_0^t \psi(u)dB(u) - \frac{p}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) \\
&= \exp\left(-\frac{p}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(p\int_0^t \psi(u)dB(u)\right)
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

Then

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(t,p) =&\mathbf{E}[|Z(t)|^p] = \exp\left(-\frac{p}{2}\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\mathbf{E}\exp\left(p\int_0^t \psi(u)dB(u)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}p\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\exp\left(\frac{1}{2}p^2\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{2}p(p-1)\int_0^t |\psi(u)|^2 du\right) = \exp\left(\tfrac{1}{2}p(p-1)\phi(t)\right) \qquad (2.36)\end{aligned}$$

如果对所有 $t > t'$， $\phi(t) > \phi(t')$，那么 $\mathbf{M}(t,p) > \mathbf{M}(t',p)$，因此 $\mathbf{M}(t,p)$ 单调递增。由此，$\mathbf{M}(t,p)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上是次鞅。如果 $p = 1$，那么 $\mathbf{M}(t,1) = \mathrm{E}Z(t) = 1$。□

References

[1] Klebaner, F.C., 2012年。《随机微积分导论及其应用》。世界科学出版公司。[2] Novikov, A.A., 1973年。《关于随机积分的一个恒等式》。概率论及其应用，17(4)，第717-720页。[3] Girsanov, I.V., 1960年。《关于通过测度的绝对连续替换变换某一类随机过程》。概率论及其应用，5(3)，第285-301页。[4] Ershov, M.P., 1972年。《关于与扩散型过程相对应的测度的绝对连续性》。概率论及其应用，17(1)，第169-174页。[5] Kazamaki, N., 2006年。《连续指数鞅与BMO》。施普林格。[6] McKean, H.P., 1969年。《随机积分》（第353卷）。美国数学学会。[7] Wong, B.和Heyde, C.C., 2004年。《关于随机指数的鞅性质》。应用概率学杂志，41(3)，第654-664页。[8] Mao, X., 2007年。《随机微分方程及其应用》。爱思唯尔。[9] Halpin-Healy, T.和Zhang, Y.C., 1995年。《动力学粗化现象、随机增长、定向高分子及其他相关主题》。多学科统计力学的若干方面。《物理学报告》，254(4-6)，第215-414页。[10] Pirjol, D., Jafarpour, F.和Iyer-Biswas, S., 2017年。《随机指数增长的现象学》。《物理评论E》，95(6)，第062406页。[11] Wissel, C.和St¨ocker, S., 1991年。《随机影响导致的种群灭绝》。《理论种群生物学》，39(3)，第315-328页。[12] Keiding, N., 1975年。《随机环境中的种群灭绝与指数增长》。《理论种群生物学》，8(1)，第49-63页。[13] Furusawa, C.和Kaneko, K., 2000年。《多细胞性作为进化的必然条件而形成的复杂组织》。《人工生命》，6(4)，第265-281页。[14] Karatzas, I., Shreve, S.E., Karatzas, I.和Shreve, S.E., 1998年。《数理金融方法》（第39卷，第xvi+-407页）。纽约：施普林格。[15] Joshi, M.S.和Joshi, M.S., 2003年。《数理金融的概念与实践》（第1卷）。剑桥大学出版社。[16] Deng, F., Luo, Q., Mao, X.和Pang, S., 2008年。《噪声抑制或促进指数增长》。《系统与控制快报》，57(3)，第262-270页。[17] Albrecht, A., Steinhardt, P.J., Turner, M.S.和Wilczek, F., 1982年。《暴胀宇宙的再加热》。《物理评论快报》，48(20)，第1437页。[18] Fox, R.F., 1978年。《物理学中的高斯随机过程》。《物理学报告》，48(3)，第179-283页。[19] Fox, R.F., 1975年。《利用累积量方法建立的乘性随机过程广义理论》。《数学物理学杂志》，16(2)，第289-297页。[20] Van Kampen, N.G., 1992年。《物理学与化学中的随机过程》（第1卷）。爱思唯尔。[21] Van Kampen, N.G., 1976年。《随机微分方程》。《物理学报告》，24(3)，第171-228页。电子邮箱地址：stevendm@ed-alumni.net

Rytalix Capital