arXiv:2302.01103v1 [math.AG] 2 Feb 2023

三角旗上的带框抛物线层

INDRANIL BISWAS 和 JACQUES HURTUBISE

Abstract. 我们考察结构群为 SU(n) $\subset$ SL($n,\mathbb{C}$) 时，三 puncture 球面上带框抛物层模空间的一种稠密定义的环面结构，该结构会退化为真正的环面结构。结合此前的退化结果，这些结论可推广至任意黎曼曲面的类似模空间。

Contents

1. 引言 1 2. 三孔球面上的带框抛物层模空间 3 3. 奥昆科夫体与环面退化 9 4. 分层与双有理等价 11 5. 哈密顿量与内爆截面 13 6. 丛模空间的退化 19 参考文献 20

1. Introduction

1992年，Jeffrey 和 Weitsman [JW], 展示了黎曼曲面基本群的 SU(2) 表示空间具有一个可积哈密顿系统，其哈密顿量连续且除一个小的子集外均光滑，并在一个开稠密集上给出环面作用；从某种意义上说，这是该空间上的一种“几乎环面”结构。该结构与曲面裤子分解（亦称“三孔球面分解”）所对应表示上的 Goldman 流相关。借助这一构造，他们通过计算矩多面体中的格点，以 Bohr-Sommerfeld 量子化的方式诠释了 Verlinde 公式， [Ve], 。

我们回顾一下，根据 Narasimhan 和 Seshadri 的定理， [NS], 基本群到 SU(n)（更一般地，到紧半单李群 G）的表示空间，还可以解释为配备全局体积形式的稳定全纯秩 n 向量丛空间（更一般地，是稳定主 $G_{\mathbb{C}}$-丛，其中 $G_{\mathbb{C}}$ 是 G的复化）。在模空间的全纯解释中

2000 年数学主题分类：14P99、53C07、32Q15。关键词和短语：稳定向量丛、代数曲线、带框抛物结构、三孔球面。

空间是稳定主 SL(2, $\mathbb{C}$) 丛的模空间，Verlinde 公式给出了模空间上自然行列式线丛各张量幂的截面空间的维数；如果该簇实际上是环面簇，根据环面簇的一般理论（例如 Fulton [Fu]），点数自然就对应于这个维数。因此，这仿佛意味着实际的模空间是另一个环面模空间的变形。如今，我们很幸运，能够参考一系列关于这类环面退化结构的优美成果，这些成果具有很强的普适性，既涵盖代数框架（参见 Anderson [An], Kaveh 和 Khovansky [KK] 的论文），也涵盖辛框架（参见 Harada 和 Kaveh [HK] 的论文）。

事实上，在我们的情形中，文献 [HJS1], [HJS2] 为 SU(2) 构造了一个合适的环面候选对象。在这些论文中，作者在穿孔黎曼曲面上构造了一个“带框抛物层”的模空间，其中丛在穿孔点处的标准抛物结构（即旗）通过附加的标架变量（旗的子商的最高外幂的平凡化）得到了丰富。这个空间还可以从辛几何角度解释为穿孔曲面上基本群的所有带标架表示空间的“内爆截面”；这些表示被视为丛上的平坦联络，而标架则是每个穿孔点处平凡化这一附加数据。带框抛物层空间是抛物丛的一个“主空间”：它既可以通过环面约化，在辛几何意义下给出标准的抛物模空间；也可以通过相应的复环面作用下的几何不变量理论（GIT）商，在全纯意义下给出该模空间；在这两种情形中，环面都作用于标架。

利用穿孔点处环面的作用，我们可以进行粘合操作：首先，将一条（可能不连通的）带穿孔曲线的若干或全部穿孔点两两连接，构造一条节点曲线。在这条节点曲线上，对每个节点，我们可以通过平凡化，将两个穿孔点处旗的子商的最高外幂相互识别，从而由带框抛物层构造“部分粘合”的层。在辛图景中，这实际上相当于对适当的环面作用取对角辛商；在全纯图景中，则相当于取对角几何不变量理论商。（事实上，经过适当的正规化后，取商所用的是“反对角”环面，因为一个穿孔点处特征值的排列顺序与另一个穿孔点处的相反。）

当然，我们需要确认这个空间确实是退化的实际结果。 [BHu], 中完成了这一工作：他们将粘合空间作为标准光滑曲线模空间的一个极限，该极限对应于曲线退化为由三裤组成的“气球动物”。这篇论文同时考察了辛版本和全纯版本。值得一提的是，所得退化与 Bhosle 在 [Bh2] 中考察的退化不同。

对于 SL(2, $\mathbb{C}$) 的情形，已经证明， [HJ], 三裤衬构件是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$，因此，与粘合后的三裤相对应的节点曲线上的粘合空间确实是托里克的，它是通过对三裤衬空间的乘积（$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$）取辛（或 GIT）环面商得到的：黎曼

曲面对应的 SU(2) 表示的托里克簇，是黎曼曲面退化为节点曲线后其上的“部分粘合”SL(2, $\mathbb{C}$)层的模空间，其中每个不可约分支都是一个三孔球面。

Jeffrey 和 Weitsman 的构造在 SL($n, \mathbb{C}$), $n > 2$ 情形下并不适用。原因是他们在构造中使用了与三叶曲面分解相关的 Goldman 流，而这类流的数量实在不足。虽然在这个更一般的情形下，我们同样可以将 SL($n, \mathbb{C}$) 的极限空间看作与节点曲线相关的模空间，并发现它是三孔球面空间的环面约化，但后者并未显现出任何环面结构的迹象。本文旨在对三孔球面空间作进一步的环面退化，从而也得到模空间的环面退化。

我们很荣幸将本文献给我们的朋友兼合作者 Oscar Garc´ıa- Prada。他一直是我们灵感与项目的源泉。值此他六十岁生日之际，谨以此文为贺。

2. The moduli of framed parabolic sheaves on a trinion

2.1. 全纯与辛模空间。从复几何的角度来看，三孔球面（记作 X）是一个带有三个不同标记点 p_1、p_2、p_3的黎曼球面。

我们的目标是探究如何退化三孔球面 X 上 SL($n, \mathbb{C}$)-带框抛物层的模空间。下文将简要回顾文献 [HJS2], 中给出的半稳定带框抛物 SL($n, \mathbb{C}$) 层理论。

我们首先考虑底层层实际上局部自由的情形。在三孔球面 X 上，相关数据如下：

- 秩 n 次数为 0 的全纯向量丛 E（定义在 X 上），带有一个固定的同构
$$\Phi : \bigwedge^n E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \tag{2.1}$$
（SL($n, \mathbb{C}$)结构）。
- 元素
$$\beta_j^i \in \bigwedge^i E_{p_j}^*, \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1, \cdots, n.$$
它们可以为零，但必须是可分解的（因此，任意非零β_j^i的湮没子都是维数为 $n - i$的子空间 $E_j^{n-i} \subset E_{p_j}$），并且满足如下相容性条件：若 β_j^i、$\beta_j^{i'}$ 均非零，且 $i < i'$，则存在一个元素
$$\gamma^{i,i'} \in \bigwedge^{i'-i} E_{p_j}^*$$
使得 $\beta_j^{i'} = \gamma^{i,\ i'} \bigwedge \beta_j^i$。此外，对于 $j = 1$、2、3，$\beta_j^n = \Phi(p_j)^{-1}(1)$，其中Φ是（2.1）中的固定同构。

与抛物丛的关系很简单：每个非零的 β_j^i 都会给出上述纤维 E_{p_j}的 $n - i$维子空间 E_j^{n-i}，从而在每个 p_j处定义一面旗。部分 β_j^i 为零这一事实允许出现非完全旗。注意，上述“商” $\gamma^{i,\ i'}_{\ j}$ 在商 $E_j^{n-i}/E_j^{n-i'}$ 上定义了体积形式，因此称为“带框架的”。

这些带框架向量丛即使是半稳定的，也可能退化并产生挠。幸运的是，所需的挠并不多；事实上，下文所述的挠的所有性质都可由半稳定条件以及它在模空间中属于闭轨道这一点推出；参见 [HJS2] 中的引理 3.4。（事实上，就最终的抛物权而言，只有当间隔 $\alpha_1 - \alpha_n$ 为 1 时才会出现挠。）结构集合可扩展为允许：

- 一个次数为 0 的秩 n 层 E，在标记点之外局部自由。挠层支撑在约化标记点 p_1、p_2、p_3 上。因此，p_j 处的挠具有形式$\mathcal{O}_{p_j}^{\oplus s_j}$。
- E上的一个 SL$(n,\mathbb{C})$ 结构，即一个同构 det $E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$（关于相干层的行列式线丛，参见 [Ko，第 V 章，§ 6] ）。这等价于给出一个同构

$$\Phi : \bigwedge^n (E/\text{torsion}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(-s_1p_1 - s_2p_2 - s_3p_3),$$

其中 s_j 是上述整数。

- 元素 $\beta_j^i \in \bigwedge^i E_{p_j}^*$、$j = 1$、2、3 以及 $i = 1$、$\cdots$、$n-1$、n。它们可以为零，但必须是可分解的（因此，任意非零 β_j^i 的湮没子都是一个维数为 $n-i$的子空间$E_j^{n-i} \subset E_{p_j}$），并且如果 β_j^i、$\beta_j^{i'}$ 均非零，且 $i < i'$，则有

$$\gamma_j^{i,i'} \in \bigwedge^{i'-i} E_{p_j}^* \tag{2.2}$$

使得 $\beta_j^{i'} = \gamma^{i,}{}_j{}^{i'} \wedge \beta_j^i$。若 p_j 处挠层的秩 s_j 为正，则$\beta_j^n = 0, \beta_j^i = 0$ 对于 $i < s_j$ 和 $\beta_j^{s_j}$ 是由元素 $e_j^1, e_j^2, \cdots, e_j^{s_j}$ 构成的非零乘积，它们生成挠的对偶。

在 [HJS2] 中，构造了这些带框层的模空间 $\mathcal{M}_{SL} = \mathcal{M}_{SL}(X)$。它还有一个利用内爆截面定义的辛版本，可用表示以及穿孔点处单值化的特征空间的框架来表达[HJS1]。对于我们的情形，这相当于：

- 三孔球面基本群到 SU(n) 的一个表示。
- 与每个穿孔点周围的单值化的每个特征值相对应的广义特征空间的最高外幂的平凡化。若将穿孔点 p_i 周围单值化的特征值提升到李代数中的基本 alcove，也就是说，取其对数，则它们为

$$\alpha^1(i) \geq \alpha^2(i) \geq \alpha^3(i) \geq \cdots \geq \alpha^n(i) \geq \alpha^1(i) - 1, \ \sum_{j=1}^n \alpha^j(i) = 0.$$

在相差一个归一化因子的意义下，全纯图景中平凡化的范数由差值 $\alpha^j(i) - \alpha^{j+1}(i)$ 给出。这些 $\alpha^j(i) - \alpha^{j+1}(i)$ 充当平凡化上自然环面作用的矩映射。根据与抛物丛的标准等价，$\alpha^j(i)$ 也给出了与抛物丛模空间的几何不变理论构造相关联的权重。

在全纯侧，加上挠意味着我们可以从同一个带框层空间得到不同次数丛的模空间，例如；次数之差由挠“补足”。当特征值满足等式 $\alpha^1(i) - \alpha^n(i) = 1$ 时，就会出现这种情况（回想一下， $\sum_{j=1}^{n} \alpha^j(i) = 0$）。这里的关键在于，虽然对于 $\alpha^1(i) - \alpha^n(i) = 1$，我们可以有带旗的局部自由丛，但它们的轨道在 GIT 构造中并不闭合；我们可以通过退化使丛获得非平凡的挠；这些丛将在 GIT 构造中表示闭轨道。

这些带框层的模空间由一种标准的商构造表示：将层 E 按 $\mathcal{O}_X(k)$ 扭转，其中 k 充分大，并令 Z 为截面空间 $H^0(X, E(k)) = H^0(X, E \otimes \mathcal{O}_X(k))$。我们有同态

$$\bigwedge^n Z = \bigwedge^n H^0(X, E(k)) \longrightarrow H^0(X, \det E(k)) = H^0(X, (\det E) \otimes \mathcal{O}_X(nk)).$$

按照 Bhosle [Bh1], 和 Hurtubise-Jeffrey-Sjamaar [HJS2], 的做法，利用 $\det E$ 的平凡化，上述同态给出一个同态

$$\Phi \in \operatorname{Hom}\left(\bigwedge^n Z, H^0(X, \mathcal{O}_X(nk))\right). \tag{2.3}$$

这个 Φ 表示层 $E(k)$，因此它表示 E。事实上，我们可以如下定义平凡向量丛 $\mathcal{Z} = Z \times X \longrightarrow X$ 的子丛 $Ann(\Phi)$:

$$Ann(\Phi) = \left\{(s, x) \in \mathcal{Z} \;\middle|\; \Phi(s \wedge \alpha)(x) = 0 \text{ for all } \alpha \in \bigwedge^{n-1} \mathcal{Z}\right\} \subset \mathcal{Z}. \tag{2.4}$$

这给出一个正合列

$$0 \longrightarrow Ann(\Phi) \xrightarrow{\eta} \mathcal{Z} = \mathcal{O}_X^{\oplus N} \longrightarrow E(k)/\text{torsion} \longrightarrow 0, \tag{2.5}$$

其中 $N = \dim H^0(X, E(k))$。注意， $Ann(\Phi)$ 的整体截面对应于取值于其挠子层的 $E(k)$ 的截面。令

$$T := \eta(H^0(X, Ann(\Phi))) \subset \mathcal{Z} = \mathcal{O}_X^{\oplus N}$$

是平凡子 层，由 $H^0(X, Ann(\Phi))$ 生成，其中 η 是 (2.5) 中的映射。

对于 $j = 1$、2、3，考虑求值映射

$$Z = H^0(X, E(k)) \longrightarrow E(k)_{p_j}.$$

取它的第 i 个外积的对偶

$$\varphi_j^i : \bigwedge^i E(k)_{p_j}^* \longrightarrow \bigwedge^i H^0(X, E(k))^*.$$

Let

$$\psi_j^i := \varphi_j^i(\beta_j^i) \in \bigwedge^i H^0(X, E(k))^* \tag{2.6}$$

是框架旗定义中外代数元素 β_j^i 在 φ_j^i 下的像。

旗中的平面由 $Ann(\psi_j^i)$ 在 p_j 处的求值给出，其中 ψ_j^i 在 (2.6) 中构造。模空间是元组Φ, ψ_j^i 在 GL$(N, \mathbb{C})$ 作用下的 GIT 商。注意，这些元素是外代数中的单项式（对于 Φ，是逐点而言），也就是说，它们满足 Pl¨ucker 关系，并且存在相容性

条件，涉及每个 p_j 处的 ψ^i_j。特别是，我们在p_j 处得到旗这一事实，是由于 Φ, ψ^i_j 的相容性，因此

$$Ann(\Phi(p_j)) \subset T + Ann(\psi^i_j),$$

并且当 $i < i'$ 时， $Ann(\psi^i_j) \subset Ann(\psi^{i'}_j)$。

我们引用 [HJS2] 中的两个引理:

引理 2.1（[HJS2，第 359 页，引理 3.3]）。设 $\left(\Phi, (\psi^i_j)_{i=1,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ 3}\right)$ 是一个半稳定点。那么以下两条成立:

(1) $\Phi \neq 0$，且 $Ann(\Phi)$ 是一个秩为 $N-n$ 的子丛 $\mathcal{Z}$。(2) 对所有 $j = 1, 2, 3$，交集 $H^0(\Sigma, Ann(\Phi)) \bigcap (\bigcap_i Ann(\psi^i_j))$ 均为零。

下面的引理涉及半稳定层的挠部分。

引理 2.2（[HJS2，第 359–360 页，引理 3.4]）。

(1) E 的挠子层集中在点 p_1, p_2, p_3 上。(2) 对任意 $j = 1, 2, 3$，令 x 为 X 上p_j 附近的局部全纯坐标函数，且 $x(p_j) = 0$。 p_j处的挠子层是若干模 $\mathcal{O}/x^{l_\mu}\mathcal{O}$之和。于是所有的 l_μ 均为 1。(3) p_j 处 E 的挠子模 T_j 是若干项 $\mathcal{O}/x\mathcal{O}$之和，我们将其写作向量空间 $\mathbb{C}^{s_j}$。于是有 $s_j < n$。若 $e_1, \cdots, e_{s_j}$是 T_j的一组基，则 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_{s_j}$与 ψ^i_j的缩并至少对某个 $i \geq s_j$非零。(4) 令 $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \cdots, \widehat{e}_{s_j}$为 $(\mathbb{C}^N)^* = H^0(\Sigma, E(k))^*$中的元素，它们分别对应于在求值下 $e_1, \cdots, e_{s_j}$的对偶。若 $\left(\Phi$的轨道 $(\psi^i_j)_{i=1,\cdots,n;j=1,2,3}\right)$是闭的，则对每个 p_j，我们可以选择基 $e_1, \cdots, e_{s_j}$和 $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \cdots, \widehat{e}_{s_j}$，并用元素 $\widehat{e}_{s_j+1}, \cdots, \widehat{e}_N$补成 $\mathbb{C}^N$的一组基，使得存在常数 c_j（可以为零），满足 $\psi^i_j = c_j\widehat{e}_1 \wedge \widehat{e}_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_i$，其中 $i = s_j, \cdots, n$（“挠向量排在最前”），$\psi^i_j = 0$ 对 $i < s_j$成立，且 $\psi^{s_j}_j \neq 0$。

我们注意到，因此，对于闭轨道，挠的秩 s_j 仅记录 ψ^n_j、 ψ^i_j、 $i = 1$、 $\cdots$、 $s_j - 1$ 的消失。

[HJS2] 的结果告诉我们，任意带 puncture 的黎曼曲面 Σ 上都存在这些带框层的模空间——既有全纯实现，也有辛实现。在全纯版本中，每个标记点的框架上都有自然的复环面作用。辛地，在我们进行 imploding 时，酉框架上存在一个定义良好的实环面作用。其矩映射就是标记点处 holonomy 的特征值集合，取值于 SU(n) 的基本 alcove 中。

2.2. 粘合。模空间在每个标记点处都具有环面作用。抛物丛的各种模空间可以通过对 $\mathcal{M}_{SL}$ 取环面商得到；更确切地说，是对 $\mathcal{M}_{SL}$ 中由各种 β^i_j 的消失所确定的分层取商：本质上，我们将 $\gamma^{i,\ i'}_j$ 所给出的尺度商去掉（见（2.2））。事实上，抛物丛的稳定性理论对于

SL($n,\mathbb{C}$) 涉及一个权重单形

$$\Delta = \left\{ (\alpha^1 \geq \alpha^2 \geq \cdots \geq \alpha^n \geq \alpha^1 - 1) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \alpha^i = 0 \right\}$$

对于每个标记点。这个权重单形分解为若干面

$$\Delta^I, \;\; I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$$

由满足 $\alpha^i > \alpha^{i+1}$ 当且仅当 $i \in I$的权重组成。对于三孔球面，有三个单形 Δ_j （每个标记点对应一个），而这些面 Δ_j^I 将对应于框架模空间中的分层，其中只有$\beta_j^{i_l}$、 $i_l \in I$非零；也就是说，在 p_j 处有一个由 I索引的部分旗。由此，框架模空间的稳定性由相应 Δ_j^I中某一组权重下诱导的抛物丛是否稳定来决定。

还有一种替代操作：给定曲面 Σ 上带有穿孔点 p_1、 p_2 的一个框架层，且β_1^j 、 β_2^j 具有相同的消失模式（更准确地说，通过 $\{1, \cdots, n\}$中的顺序反转彼此映射），我们可以利用平凡化来识别 p_1、 p_2处旗的相应子商。这相当于对 p_1、 p_2处的标架取反对角环面商；从辛几何角度看，这相当于设定$\alpha_1(j) + \alpha_2(j) = 0$，然后再对实环面取商。

如果两个点 p_1, p_2 位于不同的曲面 Σ_i 上，也可以进行相同的操作。若从一组通过在穿孔点处粘合而构成的曲面 Σ_0 出发，则通过反复应用上述粘合构造，可以将与 Σ_0 相关联的模空间表示为一个环面商：它是与三孔球面相关联的模空间 $\mathcal{M}_{SL}$ 的 ($3g-3$) 重积的环面商。因此，与 Σ_0 相关联的空间的某个变形上的环面结构，取决于能否为 $\mathcal{M}_{SL}$ 找到一个环面结构。

2.3. 一般点集。现在我们来研究模空间 $\mathcal{M}_{SL}$ 上的“近似环面”结构。由于允许顶形式 β_i^n 在标记点处不与 SL($n,\mathbb{C}$) 结构重合时，描述起来会稍微容易一些，因此我们定义

$$\mathcal{M}_{GL} = \{(E, \beta_i^j) \;|\; (E, \beta_i^1, \cdots, \beta_i^{n-1}, c_i\beta_i^n) \in \mathcal{M}_{SL} \quad \text{for} \quad c_i \in \mathbb{C}^*\}.$$

注意，层 E 保留了其 SL($n,\mathbb{C}$) 结构。

模空间中存在一个扎里斯基开子集 $U \subset \mathcal{M}_{GL}$，其中的点满足

- 层 E 是一个向量丛，并且是平凡的，
- 在三个点 p_1、 p_2、 p_3处有完全旗，并且
- 它们在由 E的截面给出的整体平凡化下两两互相横截。

接下来我们可以进行规范化。用同样平凡的 E^*来思考最为简单，这样我们的框架旗 β_i^j 现在就是 j-向量。我们选取整体平凡化

$$e_1, \cdots, e_n$$

使得 p_1 处的旗为标准旗 ($(E^*)_1^i = \langle e_1, \cdots, e_i \rangle$)，而 p_2 处的旗为“反标准”旗 ($(E^*)_2^i = \langle e_{n-i+1}, \cdots, e_n \rangle$)。旗的这种形式将

基的选择约化为对角环面；再纳入 p_1 处的标架，使其为标准标架，即可固定 $e_1, \cdots, e_n$ 的尺度；随后， p_2 处的标架可通过用非零常数 $a_1, \cdots, a_n$ 对基 e_i 进行归一化来确定：

$$f_i = a_i e_i$$

使得 $\beta_2^i = (a_1 \cdots a_{n-i})^{-1} e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{n-i}^*$。于是， p_3 处的第三个带标架旗可以取一组规范化基

$$\begin{aligned} g_1 &= m_{1,1}e_1 + m_{1,2}e_2 + \ldots + m_{1,n}e_n \\ g_2 &= m_{2,1}e_1 + m_{2,2}e_2 + \ldots + m_{2,n-1}e_{n-1} \\ g_3 &= m_{3,1}e_1 + m_{3,2}e_2 + \ldots + m_{3,n-2}e_{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ g_{n-1} &= m_{n-1,1}e_1 + m_{n-1,2}e_2 \\ g_n &= m_{n,1}e_1 \end{aligned}$$

其中 $m_{i,j} \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 使得 $E_3^i = \langle g_1, \cdots, g_i \rangle$。将其记作

$$g = Me,$$

其中 M 是一个矩阵。于是， a, M 空间的总维数为

$$d := n + (n+1)n/2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 1.$$

对角环面 $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用于 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$，并作用在与点 p_1, p_2, p_3 相关联的框架上；其作用分别是对基 e_i, f_i, g_i 施加自然作用，因此也作用于系数 a_i, $m_{i,j}$。这扩张为一个自由作用

$$(\mathbb{C}^*)^d = (\mathbb{C}^*)^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}-1}$$

在 U 上，通过添加 $\mathbb{C}^*$ 个作用实现，这些作用分别作用于每个 $m_{i,j}$, $j \leq n-i$，或作用于 a_i。

2.4. 到射影空间的双有理映射。在前一种表述中，由于作用依赖于正规化，因此不清楚如何将其整体延拓。我们可以用另一种方式对数据进行编码（在 U 上与前一种方式等价），从而得到一个到射影空间的双有理映射，$(\mathbb{C}^*)^d$ 将在其上作用，不过权重有所不同。令

$$\widetilde{\mathcal{M}_{GL}} = \{(E, \beta_i^j, V) \mid (E, \beta_i^j) \in \mathcal{M}_{GL},\ V \subset H^0(X, E),\ \dim V = n\}.$$

于是，在 E 平凡的一般位置上， $\mathcal{M}_{GL}$ 与 $\mathcal{M}_{GL}$ 之间存在双射；甚至在次一般位置上也是如此，此时 E 的分裂型是最小的非平凡型，即线丛分量的次数为 $(1, 0, \cdots, 0, -1)$。

我们有求值映射 $V \longrightarrow E_{p_j}$，以及相应的外幂，并将它们与映射 β_j^i 复合，得到

$$\widetilde{\beta}_j^i = \widetilde{\beta}_j^i(E, \beta_j^i, V) \in \bigwedge^i V^*.$$

We t然后考虑对每组满足 $j_1, j_2, j_3 \in \{0, \cdots, n\}$ 之和为 n 的元素

$$\widetilde{\beta}^{j_1,j_2,j_3} = \widetilde{\beta}_1^{j_1} \wedge \beta_2^{j_2} \wedge \beta_3^{j_3} \in \bigwedge^n V^*.$$

对 V 作基变换，会使这些量对所有指标 j_1, j_2, j_3 同乘一个标量；因此，只要 $\widetilde{\beta}^{j_1,j_2,j_3}$ 中至少有一个非零，我们就得到 $\mathbb{P}^d$ 中定义良好的元素 $\phi(E, \beta_i^j, V)$。但情况并非总是如此：例如，丛 E 可能是非平凡的（因此 $\beta^{n,0,0} = \beta^{0,n,0} = \beta^{0,0,n} = 0$），并且对于其他指标 j_1, j_2, j_3，尽管相应的 $\widetilde{\beta}_i^{j_i}$ 非零，它们的和却没有一个等于 n。因此，我们必须取图的闭包：

$$\widehat{\mathcal{M}_{GL}} = \overline{\{((E, \beta_i^j, V), (\widetilde{\beta}^{j_1,j_2,j_3}) \in \mathcal{M}_{GL} \times \mathbb{P}^d \,\big|\, \phi(E, \beta_i^j, V) = (\widetilde{\beta}^{j_1,j_2,j_3})\}}.$$

由此得到一系列映射，它们都是双有理映射：

$$\mathcal{M}_{GL} \longleftarrow \widetilde{\mathcal{M}_{GL}} \longleftarrow \widehat{\mathcal{M}_{GL}} \longrightarrow \mathbb{P}^d.$$

在这些对应关系下，$\mathbb{P}^d$ 中坐标超平面的补集与我们的开子集 U 双射。$(\mathbb{C}^*)^d$（射影线性群 $\mathrm{PGL}(d+1,\mathbb{C})$ 的极大环面）在 $\mathbb{P}^d$ 上有自然作用；它是 $\mathbb{P}^d$ 上某个 $(S^1)^d$ 作用的复化，该作用是哈密顿的，其矩映射取值于标准单形。通过我们的双有理映射，这一作用转移到空间 U 上，其方式与我们先前定义的等价。我们希望将其扩展到整个 $\mathcal{M}_{GL}$；然而，若不变形 $\mathcal{M}_{GL}$，便无法做到这一点。

3. Okounkov bodies and toric degeneration

为了了解如何做到这一点，我们回顾奥昆科夫体的理论 [KK、EK] 以及 Andersen、[An]，和 Harada-Kaveh [HK] 的定理。Escobar 和 Kaveh 的《Notices》综述文章 [EK]对该理论作了精彩介绍。簇 X 的奥昆科夫体取决于两项数据。第一项是选取非常丰直线丛丛 L 的截面空间 S，从而给出到射影空间的嵌入；因此，S 的元素生成 X 的齐次坐标环。通常，S 就是 $H^0(X, L)$。第二项是点 p 附近的某个坐标系，由点附近一组有序函数 f_1、$\cdots$、f_d 给出。这可以看作对应于在该点正规交叉的 d 个因子；由于我们将按字典序来考虑它们，因此可以将其视为一面旗（事实上，只需考虑逐次交集 D_1、$D_1 \cap D_2$、$\cdots$）。给定 p 附近的任意其他函数 g，我们可以将 g 展开为幂级数 $\sum_{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)} c_\alpha f_i^{\alpha_1} \cdots f_d^{\alpha_d}$。随后，我们可以定义 g 的一个取值于 $\mathbb{Z}^d$ 的赋值 $\nu(g)$，其定义如下：

$$\nu(g) = \min\{\alpha \mid c_\alpha \neq 0\}$$

这里的最小值是相对于字典序而言的。（还可以使用更一般的赋值，不过我们只需要这种赋值。）

现在考虑由以下元素的乘积生成的齐次坐标环

$$\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C}[X]_m$$

S （我们在 p 附近平凡化了 L）； $\mathbb{C}[X]_m$ 对应于 m 重乘积。我们有一个半群 $F_S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^d$

$$F_S = \bigcup_{m \geq 0} \{(m, \nu(g)) \mid g \in \mathbb{C}[X]_m\}.$$

令 C 为 $F_S \cup \{0\}$ 的凸包的闭包；将 Okounkov 体 Δ_S 定义为 C 与平面 $m = 1$ 的交集。一个标准例子是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$，其中 S 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{C})$ (1) 的截面，并以标准坐标平面定义赋值；由此得到的 Okounkov 体是标准单形。这当然是 $\mathbb{P}^n$ 的标准环面作用对应的矩多面体，而对于环面簇，同样的结论也成立。

自然会产生这样一个问题：如果簇 X 的 Okounkov 体是某个环面簇的多面体，那么该簇能否退化为环面簇？这对该体施加了约束，因为多面体的边数有限，而且这里的多面体都是有理的。当该体具有这种形式时，根据 Anderson 的一个定理，答案是肯定的。对于簇 X，令 $X(S)$ 表示由 X 在 $\mathbb{P}(S)$ 中的像的闭包所定义的簇。Anderson 构造了 $X(S)$ 的一个平坦退化 $\mathbb{X}$：一个族 $\mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{C}$，其纤维为 $X_t = X(S)$（$t \neq 0$ 时），且 X_0 为环面簇，并且其 Okounkov 体保持不变。

定理 3.1（[An，第 1184–1185 页，定理 1]）。设 ν 为与 X的子簇旗相关联的赋值，并设 $S \subset H^0(X, L)$ 为一个线性系，使得 F_S 有限生成，且 Okounkov 体 Δ_S 是有理多胞体。

- 簇 $X(S)$ 可平坦退化为（不一定正规）的托里克簇 X_0。 X_0 的正规化是与多胞体 Δ_S对应的（正规）托里克簇。
- 若环面 T 作用于 X，且 S 是一个 T-不变线性系，旗由 T-不变子簇组成，则该退化是 T-等变的。
- 设 $S' \subset S$ 是一个诱导双有理态射的子系

$$\phi : X(S) \longrightarrow X(S'),$$

且其半群也有限生成。 $X(S)$ 和 $X(S')$ 的相应退化彼此相容：存在一个平坦族的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{X}' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

证明通过环结构的退化，将带有滤过的环转化为分次环。一旦得到环面退化，我们便可以探究这里相应的哈密顿图景。Harada 和 Kaveh 在以下假设下给出了答案：族 $\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ 可表示为一致投影 $\mathbb{P}^N \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$的限制； X_0 上的环面作用是 $\mathbb{P}^N$上某个作用的限制； $\mathcal{X}$ 上的 K¨ahler 形式是 $\mathbb{P}$上某个形式的限制，且在环面作用下保持不变；最后， $\mathcal{X}$ 除原点外是光滑的：

定理3.2（[HK，定理1和 2]）。设 X 是一个光滑的 n维射影簇，且 X上带有 K ¨ahler 结构 ω。假设存在一个环面退化π： $\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$，其极限为 X，并满足上述条件。那么：

- 存在一个满射连续映射 ϕ： $X \longrightarrow X_0$，它在稠密开子集 $U \subset X$ 上是辛同胚。
- 在 (X, ω) 上存在一个完全可积系统 $\mu = H_1, \cdots, H_n$；其中哈密顿量在 X 上连续，在 U 上光滑并定义一个标准可积系统，且其动量像 Δ 与 (X_0, ω_0) 的动量像相同，后者是一个多面体。
- 在 X 的稠密开子集 U 上，可积系统 $\mu = H_1, \cdots, H_n$ 生成一个哈密顿环面作用；在该可积系统的矩映射 μ 下，Δ 内部的原像 $\mu^{-1}(\Delta^0)$ 包含于开子集 U 中。
- 在半群 F_S 有限生成的假设下，Δ 是 X 关于给出该射影嵌入的线性系 S 的 Okounkov 体。

定理3.2 的所有假设似乎都很可能适用于我们所关注的情形，除了光滑性之外。

4. Strata, and birational equivalence

为了将 Anderson 定理应用于我们感兴趣的情形，我们希望了解有理有限 Okounkov体这一性质如何在上述双有理等价中传递。显然，Okounkov 体并不会保持不变：等变双有理环面簇的多面体并不相同。为了说明这里的问题所在，考虑 $\mathbb{P}^2$这一简单情形，它具有标准环面作用、标准仿射坐标等。我们考虑由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$的截面给出的恒等射影嵌入。在一种标准平凡化下，其截面为1, x, y；而$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)$的截面为1, x, y, x^2, xy, y^2, $\cdots$, xy^{m-1}, y^m。对应于除子 $x = 0$ 和 $y = 0$ 的 Okounkov 体是一个单形。现在对原点 p进行 blow-up,

$$\pi : \widetilde{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \mathbb{P}^2,$$

例外除子 E 位于原点上方。吹起上的坐标为 $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$，其中 $(x, y) = (\widetilde{x}, \widetilde{x}\widetilde{y})$，我们取由 $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ 切出的因子来定义我们的~Okounkov 体。 $\mathbb{P}^2$ 的嵌入由 $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))(-E)$ 的截面给出，这些截面由 $\widetilde{x}$, $\widetilde{x}\widetilde{y}$, $\widetilde{x}^2$, $\widetilde{x}^2\widetilde{y}$, $\widetilde{x}^2\widetilde{y}^2$ 张成；或者，在 $\mathbb{P}^2$ 的截面空间中，由 x, y, x^2, xy, y^2 张成，即 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \otimes \mathcal{I}_p$ 的截面空间，其中 $\mathcal{I}$ 是原点的理想层。这些截面及其幂给出一个 Okounkov 体，它是一个截角单纯形，由标准单形切去一个角得到。结果确实是~$\mathbb{P}^2$的矩多面体。

人们或许会想当然地断言，Okounkov 体为有限生成有理多胞体这一性质在任意双有理等价下都能保持；但我们看不出有什么简便的方法可以实现这一点。幸运的是，在我们的情形中，空间存在有限分层，这为我们提供了帮助：各分层之间的等价由群作用产生，这些群作用赋予空间一定的齐性，并将

对 Okounkov 多面体增加的约束数量减少到有限个。事实上，我们的丛空间是一个由层 E 构成的空间，其附加结构由元素 β_i^j 给出。可能的层 E 类型为

$$\mathcal{O}(m_1)^{\ell_1} \oplus \mathcal{O}(m_2)^{\ell_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(m_s)^{\ell_s} \oplus ((\mathbb{C}_{p_1})^{\oplus k_1}) \oplus ((\mathbb{C}_{p_2})^{\oplus k_2}) \oplus ((\mathbb{C}_{p_3})^{\oplus k_3})$$

其中，m_i、k_j 的取值范围受次数约束（总和为零）和稳定性条件限制。按这些类型对用于构造模空间的空间 W 进行分层后，在任一分层中任意一点的邻域内，模空间的构造基本相同；任意两点之间可通过我们取商所用的群的作用相互映射。进一步地，选取一个 n 维截面空间 V后，还可根据 V与不同类型的截面空间 $\mathcal{O}(m_j)^{\ell_j}$、$(\mathbb{C}_{p_i})^{\oplus k_i}$的交集，以及 E_{p_i} 到 V的拉回的维数和所有这些空间的交叠模式，进行进一步分层。同样，分层中一对 (E, V) 的模空间构造邻域与任意其他一对的邻域等价；区分它们的是坐标 $\widetilde{\beta}^{j_1,\ j_2,\ j_3} = \widetilde{\beta}_1^{j_1} \wedge \widetilde{\beta}_2^{j_2} \wedge \widetilde{\beta}_3^{j_3}$的取值。现在，对某个分层中的每个点 p，考虑由指标 j_1、j_2、j_3 组成的~集合 I_p，其中 $\beta^{j_1,\ j_2,\ j_3}$ 为零。容易看出，如果同一分层中 p、q 对应的 I_p、I_q 相同，那么它们在 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 对 E_{p_i}、$i = 1$的作用下等价；这与第 2.3 节所用的方法类似。基本上，我们将三个旗中的两个规范化，而第三个旗的坐标则给出不同的取值。

我们现在考虑簇 $\widehat{\mathcal{M}_{GL}}$ 映射到 $\mathbb{P}^d$，并且集合U同构于 $\mathbb{P}^d$中坐标超平面的补集。因而，簇 $\widehat{\mathcal{M}_{GL}}$ 可以看作位于 U中各种坐标 k 维平面的膨胀之内；上一段的齐性论证告诉我们，所需的膨胀确实在具有恒定 I_p的某个分层的集合上保持不变。

~因此，簇 $\mathcal{M}_{GL}$ 通过线性系 W 嵌入，该线性系由线丛L的截面构成；此线丛是 $\mathbb{P}^d$上某个线丛 $\mathcal{O}(m)$ 的拉回，再经过除子 $-E$的扭曲；在 $\mathbb{P}^d$ 上，它对应于 $H^0(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{I})$，其中某个理想对应于一族坐标 k-平面（可能带有重数），但只有有限个生成元~，分别对应于 β^{j_1,j_2,j_3}，并在我们的分层上按适当的阶消失。我们选取点 p_0作为原点，该点对应于所有 β_i^j、$j = 1$、$\cdots$、$n-1$均为零的平凡丛（即没有旗），并由 $\mathrm{SL}(m,\mathbb{C})$-结构给出 β_i^n；如有必要则进一步进行膨胀，以确保该点及其在对 β_i^n进行缩放下的像都是光滑的；我们选取 $\mathbb{P}^d$中坐标平面的原像内的一组除子，并且关于 $\beta^{j_1,\ j_2,j_3}$的阶，再次存在有限个有理约束~。简言之，我们得到单形的一个有理子多面体，并可将 Anderson 定理应用于 $\mathcal{M}_{GL}$。

~现在，我们希望从 $\mathcal{M}_{GL}$ 投影到 $\mathcal{M}_{GL}$，再次将 $\mathcal{M}_{GL}$中点 p_0 及其缩放像的像消解奇点；将该投影记为 ρ。显然，在 $\mathcal{M}_{GL}$ 上除去余维至少为二的集合后，该映射是同构；特别地，它在基点的邻域内是同构，因此将我们的坐标平面 D_i 映到$\mathcal{M}_{GL}$。现在，对 L沿 ρ 取直接像。由于 L 的截面都是由 $\beta^{j_1,\ j_2,\ j_3}$中长度为 m 的~的乘积构成，直接像的取值落在模空间上自然行列式线丛 L_0 的 m次幂 L_0^m中。将 W中的截面向下推并拉回后，我们得到空间 W的一个子空间 $W' = \rho^*\rho_* W \subset W$，并且可以将其视为

的 W' 是 $H^0(\mathcal{M}_{GL}, L_0)$的一个子空间。同样，由于我们的分层具有齐性，$\widehat{\quad}$其 Okounkov 体由有限个约束从 $\mathcal{M}_{GL}$ 的 Okounkov 体中截出，因此是一个有理多胞体。

简言之，再次根据 Anderson 定理：

定理 4.1。空间 $\mathcal{M}_{GL}$ 允许退化为一个环面 $\mathcal{M}^0_{GL}$。作用于 $\mathcal{M}_{GL}$ 上的框架的环面作用可扩展为作用于 $\mathcal{M}^0_{GL}$上的环面作用。

5. 哈密顿量与内爆截面

5.1. 双倍与模空间的构造。正如我们在引言中所指出的，我们的带框层空间具有一种辛解释：它是三 punctured 球面基本群到 SU(n) 的表示空间，并在标记点处附加了一些额外结构。本节将从这一辛观点出发，探讨我们的“近似环面结构”。

我们首先回顾一些构造，这些构造见于 [AMM] 和 [HJS1 第 6], 节，涉及紧半单李群 K的双倍 $DK = K \times K$ 及其内爆截面。令 $DK = \{(u, v) \in K \times K\}$，我们可以将 DK 视为圆柱基本群的表示空间，也就是平坦的 K联络空间；不过，这些联络定义在一个丛上，该丛在圆柱两端的两个点 q_1、 q_2处配有平凡化。元素 u表示从 q_1 到 q_2 的平行移动，而元素 v 表示从 q_2出发绕圆柱端部的平行移动。表示空间配备有一个二形式，其定义如下：

$$\omega = -\frac{1}{2}\big(Ad(v)u^*\theta_L, u^*\theta_L\big) - \frac{1}{2}\big(u^*\theta_L, v^*(\theta_L + \theta_R)\big).$$

这里， θ_L 是左 Maurer-Cartan 形式， θ_R 是右形式。形式 ω 并非闭形式，而 $d\omega$ 是通过适当的群值矩映射对紧群上的典范三形式作拉回所得。在我们的情形中，群作用是 DK上的$K \times K$ 之一：

$$(k_1, k_2)(u, v) = (k_1 u k_2^{-1}, k_2 v k_2^{-1}).$$

就圆柱上的平坦联络而言，这对应于在 p_1、 p_2处改变平凡化的作用。这里的矩映射由（Ad（u）v^{-1}， v） $\in K \times K$给出，而 DK 是一个拟哈密顿 $K\times K$ 空间。限制到环面上或进行拟哈密顿约化后，这个三形式会消失；由于我们将进行这些操作，二形式最终将是闭形式。

下一步是将 v 限制在环面 T的基本 alcove Δ 内；该多面体表示 T中的共轭类。对于 SU(n)，我们取对数并除以 $2\pi\sqrt{-1}$，于是

$$v = \exp(2\pi\sqrt{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)).$$

仿射 Weyl 室 Δ 恰好是有序特征值的集合

$$\Delta = \left\{ (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq \alpha_1 - 1) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \right\}$$

对应于每个标记点。这个权重单形分解为若干面

$$\Delta^I, \quad I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$$

由满足以下条件的权组成： $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ 当且仅当 $i \in I$。对于任意 K，也有类似的分解。

现在我们可以限制到 $K \times \Delta \subset DK$。对于 v，在 Δ的内部，形式非退化；但在边界分层 Δ_I 上， Δ 存在零方向，它们是稳定子 K_I 中元素 Δ_I的交换子群 $[K_I, K_I]$ 的轨道；参见 [HJS1]。我们将这些方向取商，得到内爆截面：

$$DK_{\text{impl}} = \sqcup_I K_I/[K_I, K_I] \times \Delta_I. \tag{5.1}$$

这是一个分层的拟哈密顿 $K \times T$空间。现在， p_2 处的作用限制为环面 T。

我们可以将（5.1）中的 DK_{impl} 用作构造三孔球面上带标架表示的模空间 M 的构造基元。事实上，取 DK_{impl}的三个副本：

$$\left\{(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) \in DK^3_{\text{impl}}\right\}. \tag{5.2}$$

它们的元素共同表示穿孔点 $v_i \in \Delta$ 处的整体变换 p_i、 $i = 1$、2、3，以及到公共点 p_0 的平行移动 u_i。它们共同定义基本群的一个表示这一约束

$$u_1 v_1 u_1^{-1} u_2 v_2 u_2^{-1} u_3 v_3 u_3^{-1} = 1$$

等价于将 K的对角作用的矩映射设为 1，其中通过对 K 取商，消除了在 p_0处任意选择平凡化的自由。因此，最终结果为：

定理 5.1（[HJS1]）。空间 M

$$M = \left\{(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) \in DK^3_{\text{impl}} \;\middle|\; u_1 v_1 u_1^{-1} u_2 v_2 u_2^{-1} u_3 v_3 u_3^{-1} = 1\right\}/K$$

是一个带有矩映射的哈密顿 T^3 空间

$$(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) \longmapsto (v_1, v_2, v_3) = V.$$

其在 V =(v_1, v_2, v_3) 处的哈密顿约化是抛物丛的模空间 M_V，其在 p_i处具有整体变换 v_i。该约化固定了 $v_i \in \Delta$，并将 $K_i/[K_I, K_I]$的轨道取商，从而消除了穿孔点处子商的框架。

5.2. 哈密顿流与向量场。我们希望研究 M一般位置上的哈密顿流，它们对应于退化上的环面结构。该位置首先要求 v_i 位于 Δ 的内部 Δ_0 （在此之上DK_{impl} 只是 $K \times \Delta_0$），同时还要求由 u_i 表示的标架满足某些横截条件。由于在复域中更容易看清这一点，我们首先将 M 和 DK_{impl} 复化为 $M_{\mathbb{C}}$、 $(DK_{\text{impl}})_C$ 上的空间，并在复域上考察所有对象，使得 u_i 属于复化群，而 v_i 属于 $T_{\mathbb{C}}$中根平面的补集。

我们专门讨论 SU(n) 及其复化 SL($n, \mathbb{C}$)。基本仿射 Weyl 室的内部 Δ_0 对应于互异的特征值；在复数情形下（对于 M）

对应于完全旗。按照通常的约定，这些旗在环面平凡化中对应于 $\langle e_1\rangle \subset \langle e_1, e_2\rangle \subset \cdots$。对于 p_1，我们将保持这一顺序；对于 p_2, p_3，则采用相反的顺序 $\langle e_n\rangle \subset \langle e_n, e_{n-1}\rangle \subset \cdots$。记作 b 的矩阵将是三角矩阵，可以是上三角（b^+）或下三角（b^-）；记作 n 的矩阵将是严格三角矩阵（即对角线上为 1），可以是上三角（n^+）或下三角（n^-）；记作 d 的矩阵将是对角矩阵。相应的李代数元素记作 $\beta^\pm, \mu^\pm, \delta$，其中 $\beta^\pm = \mu^\pm + \delta$；$v$ 的变化记作 ζ。

因此，在一般位置上，我们可以将 u_i 分解为 $b_i^+ n_i^- = n_i^+ d_i n_i^-$，反过来也可以。我们还可以假设，从 p_1 传输来的旗与从 p_2 传输来的旗在 p_0处横截相交，因此可以在 p_0 处通过选取这些交点作为一组基来规范化标架，使得 u_1 是一个上三角矩阵 $b_1^+ = n_1^+$（即保持 p_1处的旗），u_2 是一个严格下三角矩阵 n_2^-（保持来自 p_2的旗和平凡化），并且在进一步满足一般性条件后，u_3 可唯一分解为 $b_3^+ n_3^-$，即一个上三角矩阵与一个严格下三角矩阵的乘积，我们也将其记作 $n_3^+ d_3 n_3^-$。

于是我们得到关系

$$b_1^+ v_1 (b_1^+)^{-1} n_2^- v_2 (n_2^-)^{-1} = b_3^+ n_3^- v_3^{-1} (n_3^-)^{-1} (b_3^+)^{-1}. \tag{5.3}$$

在这种规范化下，n_3^+ 表示旗的相对位置，而对角分量 d_1、d_3 表示标架。由于我们处于一般、稳定的位置，可以自由改变这些（带框架的）旗（即 b_3^+），同时保持 v_i 不变；相应地，酉位置上的 u_i 也会发生变化。不过，为了保持 5.3，n_3^-、b_1^+、n_2^-也会随之发生相应变化。

现在，我们计算形式 ω 在关于（$K \times \Delta_0$）$_{\mathbb{C}}$的二参数无穷小变分 u、v 上的取值。令

$$\begin{aligned} & b^+(1+\epsilon\beta^+ + \delta\widehat{\beta}^+) n^- (1 + \epsilon\mu^- + \delta\widehat{\mu}^-) \\ &= b^+ n^- (1 + \epsilon((n^-)^{-1}\beta^+ n^- + \mu^-) + \delta((n^-)^{-1}\widehat{\beta}^+ n^- + \widehat{\mu}^-)) \end{aligned}$$

and

$$v(1 + \epsilon\zeta + \delta\widehat{\zeta}),$$

因此，作用于变分上的形式变为

$$\begin{aligned} & \omega((\beta^+, \mu^-, \zeta), (\widehat{\beta}^+, \widehat{\mu}^-, \widehat{\zeta})) = \\ & \frac{1}{2} tr((v(n^-)^{-1}\beta^+ n^- v^{-1})((n^-)^{-1}\widehat{\beta}^+ n^-) - (v(n^-)^{-1}\widehat{\beta}^+ n^- v^{-1})((n^-)^{-1}\beta^+ n^-)) \\ & + \frac{1}{2} tr((v(n^-)^{-1}\beta^+ n^- v^{-1})\widehat{\mu} - (v(n^-)^{-1}\widehat{\beta}^+ n^- v^{-1})\mu^-) \\ & + \frac{1}{2\pi i} tr((n^-)^{-1}\beta^+ n^- + \mu^-)\widehat{\zeta} - ((n^-)^{-1}\widehat{\beta}^+ n^- + \widehat{\mu}^-)\zeta). \end{aligned}$$

对于 $(\beta^+, \mu^-, \zeta) = (0, \mu^-, 0)$，这变为：

$$\begin{aligned}\omega((0,\mu^-,0),(\widehat{\beta}^+,\widehat{\mu}^-,\widehat{\zeta})) &= \frac{1}{2}tr(-(v(n^-)^{-1}\widehat{\beta}^+ n^- v^{-1})\mu^-)\\ &= \frac{1}{2}tr(-\widehat{\beta}^+(n^- v^{-1}\mu^- v(n^-)^{-1}))\\ &= \frac{1}{2}tr(-\widehat{\mu}^+(n^- v^{-1}\mu^- v(n^-)^{-1}))\end{aligned} \tag{5.4}$$

注意，这意味着与空间 n^+B^- 相切的各个向量，即 μ^-, δ 两两配对为零。公式 (5.4) 还表明，基切向量 $(\mu(i,j)^+)_{k,l} = \delta_{k,i}\delta_{l,j}$, $i < j$ 与 $(\mu(j,i)^-)_{k,l} = \delta_{k,j}\delta_{l,i}$ 的配对非零，其系数为 $(b^-)_{j,j}(b^-)_i^{-1}{}_{,i}\, v_i v_j^{-1}$。此外，同样对于 $i < j$, $\mu(i,j)^+$，只有当 $j' \le i < j \le i'$ 时，它才与 $\mu(i',j')^-$ 的配对非零。这保证了对于 $i < j$，辛形式在 $\mu(i,j)^+$ 与 $\mu(j',i')^-$ 之间给出非退化配对，我们将其记作

$$\omega(\mu(i,j)^+, \mu(i',j')^-) = A_{i,j;i'j'}$$

因此，对于线性组合 $P = \sum_{i<j} p_{i,j}\mu(i,j)^+$, $Q = \sum_{i>j} q_{i,j}\mu(i,j)^-$，我们有示意性地

$$\omega(P,Q) = p^T A q.$$

5.3. 哈密顿量。上面的公式还表明，严格上三角矩阵群N^+的分量应当是生成与 b^+N^- 相切的向量场的哈密顿量。现在注意到，群 N^+可以取对数（即求指数映射的逆），其值属于严格上三角矩阵李代数 $\mathfrak{n}^+$。令 $\xi \in \mathfrak{n}^+$ 满足 $\exp(\xi) = n^+$，于是 $\xi = \log(n^+)$。我们有如下公式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp(\xi + t\zeta)|_{t=0} &= \exp(\xi)\cdot\Big(\frac{1-\exp(-ad(\xi))}{ad(\xi)}\Big)\zeta\\ &= \exp(\xi)(1 - \frac{ad(\xi)}{2} + \frac{ad(\xi)^2}{6} - \ldots)\zeta.\end{aligned} \tag{5.5}$$

由于伴随作用是幂零的，这就给出了 $\mathfrak{n}^+$ 的切向量与 N^+的切向量之间的双射。考虑 ξ的分量，其中 $i < j$：

$$H_{i,j}(n^+, b^-, v) = \log(n^+)_{i,j} = \xi_{i,j}.$$

根据上面的公式 (5.5)，$H_{i,j}$ 在左不变向量场 $P = \sum_{i<j} p_{i,j}\beta(i,j)^+$ 上的微分是若干系数的组合：

$$dH_{i,j} = p_{i,j} + \sum_{i'<i,j'>j} C_{i',i;j',j}(b^+)p_{i',j'}$$

或者，示意地说，

$$dH_{i,j} = (p^T C)_{i,j}$$

结合起来，由于我们希望哈密顿向量场 $X_{H_{i,j}} = \sum_{i'j'} M_{i',j';\,i,j}\mu(j',i')^-$满足：对所有 P

$$dH_{i,j}(P) = -\omega(P, X_{H_{i,j}})$$

我们有

$$(p^T C)_{i,j} = -(p^T A M)_{i,j}$$

给出 $M = A^{-1}C$ 以及

$$X_{H_{i,j}} = -\sum_{i'j'}(A^{-1}C)_{i',j';i,j}\mu(j',i')^-$$

对于 $i < j$。

最后，我们有两个“辛对偶”的量。首先，将与环面系数 v 相关的哈密顿量设为

$$H_l^V = \frac{1}{2\pi i}\log(v)_l, \quad l = 1, \cdots, n-1.$$

在复域中，这些量将是多值的。根据定理 5.1，它们给出与 M 相关的环面作用，通过右乘作用于 u_i。其向量场由左不变向量场 δ 给出，对应于右侧的对角作用。由 (5.4) 可知，它们与 $H_{i,\ j}$ 泊松对易。作为辛对偶，我们也可以取对角矩阵 d 在分解 n^+dn^- 中的各项作为哈密顿量；同样，它们与 $H_{i,\ j}$ 泊松对易。它们的向量场将是与对角矩阵 v 相切的向量 ζ。

总结如下：

定理 5.2。哈密顿量 $H_{i,\ j}$、 $1 \le i < j \le n$ 以及 H_l^V、 $l = 1$、 $\cdots$、 $n-1$ 在 $(DK_{\mathrm{impl}})_{\mathbb{C}}$ 的一般点集上生成一个完全可积哈密顿系统（即全纯拉格朗日叶状结构），其叶为 $n^+B^- \times \{v\}$。类似地，哈密顿量 $H_{i,\ j}$、 $1 \le i < j \le n$ 以及 d 的分量 d_i、 $l = 1$、 $\cdots$、 n 在 $(DK_{\mathrm{impl}})_{\mathbb{C}}$ 的一般点集上生成一个完全可积哈密顿系统（即全纯拉格朗日叶状结构），其叶为 $n^+N^- \times (\Delta_0)_{\mathbb{C}}$

这些哈密顿量$H_{i,\ j}$ 当然只在一般位置上有定义；我们给出其他定义域更广的哈密顿量，它们生成相同的环，并且下降到 M。

5.4. 全局可约哈密顿量。现在，我们在三个 DK_{impl} 因子上分别有拉格朗日叶状结构及其关联的哈密顿量。我们希望将它们合并为一组。将 DK_{impl} 或其复化视为带框架表示或其复化的参数空间，则在每个穿孔点 p_i 处，我们都有一个环面值自同态 v_i以及一个子空间旗

$$E_{i,j} = \langle e_1, e_2, \cdots, e_j\rangle, \quad \text{for } \ i = 1$$

and

$$E_{i,j} = \langle e_n, e_{n-1}, \cdots, e_{n-j+1}\rangle, \quad \text{for } \ i = 2, 3.$$

映射 v_i生成了$\bigwedge^j E_{i,\ j}$的一个自同构$V_{i,\ j} = \bigwedge^j(v_i)$（一个标量），本质上等于最前面的 j 个特征值之积。现在，将$E_{i,\ j}$ 的基 e_j 传输到 p_0，使用 u_i，得到纤维E_{p_0}（丛E_{p_0}的纤维）中的向量 $u_i(e_j)$，于是将它们相乘，得到 $\bigwedge^j(E_{p_0})$中的一个 j-向量 $u_i(E_{i,\ j})$。纤维 E_{p_0} 有一个由 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 结构给出的顶次 n-形式 $dvol$；对于 $j_1 + j_2 + j_3 = n$，考虑矩阵

$$G_{j_1,j_2,j_3} = (u_1(e_1, \cdots, e_j),\ u_2(e_n, \cdots, e_{n-j_2+1}),\ u_3(e_n, \cdots, e_{n-j_3+1})$$

并取体积：

$$dvol(u_1(E_{1,j_1}) \wedge u_2(E_{2,j_2}) \wedge u_3(E_{3,j_3})) = \det G_{j_1,j_2,j_3}.$$

注意，将 u_1 分解为 $b_1^- n_1^+$ 后，我们可以用 b_1^- 替换 u_1；同样，令 $u_j = b_j^+ n_j^-$，$j = 2, 3$，我们可以在 $j = 2, 3$ 的情况下用 b_j^+ 替换 u_j。这在 SL$(n, \mathbb{C})$ 对 u_i 的左作用下保持不变，但在与穿孔点相关的环面作用下并不保持不变。（例如，在一般点集上，我们可以利用 u_i 上的右环面作用，将其主子式 det$(u_i)_{s,\, t}$，$s, t \in \{1, \cdots, j\}$，$i = 1, 3$ 和 det$(u_2)_{s,\, t}$，$s, t \in \{n-j+1, \cdots, n\}$，$i = 1, 3$ 归一化为 1；但这样就失去了 SL$(n, \mathbb{C})$-不变性。）我们设对于 $j_1 + j_2 + j_3 = n$，$j_i \in \{0, \cdots, n-1\}$，

$$\widetilde{H}^G_{j_1,j_2,j_3} = \det G_{j_1,j_2,j_3}. \tag{5.6}$$

在对 $u_1 = b_1^+ = n_1^+ d_1$、$u_2 = n_2^-$ 和 $u_3 = b_3^+ n_3^- = n_3^+ d_3 n_3^-$ 进行正规化后，哈密顿量变为 b_3^+ 的子矩阵的行列式，再乘以 d_1 的各项之积：

$$H^G_{j_1,j_2,j_3} = d_{1,1} \ldots d_{1,j_1} \det((b_3^+)_{i,j},\, i = j_1 + 1, \cdots, j_1 + j_2,\, j = n - j_2 + 1, \cdots, n).$$

命题 5.3. 在上述正规化下，在一般点集上，存在一个双全纯映射，将 $H^G_{j_1, j_2, j_3}$ 与（哈密顿量 $H_{i,\, j}$ 以及 d_1、d_3 的系数）联系起来，使它们表示对我们哈密顿量的重新参数化。

证明. 注意，在两种情况下都有 $(n+4)(n-1)/2$ 个函数；现在固定 d_i；这样两边都剩下 $n(n-1)/2$ 个函数。首先指出，在指数映射下，$H_{i,\, j}$ 双全纯地映到 n_3^+ 的系数。由 $(n_3^+)_{i,\, j}$ 给出 $H^G_{j_1, j_2, j_3}$ 的映射如上所述；反过来，首先指出，对于 $j_3 = 1$，哈密顿量 $H^G_{j_1, j_2, j_3}$（除去 b_1^+ 的对角元素以及一个符号）恰好就是系数 $(n_3^+)_{i,\, n}$。现在取 $j_3 = 2$、$j_1 = n-3$。由于 $(n_3^+)_{n-1,\, n-1}$ 的值为一，我们可以利用行列式 H^G_{n-3},1,2 计算 $(n_3^+)_{n-2,\, n-1}$；保持 $j_3 = 2$ 不变，并递减 j_1，随后便可依次利用 H^G_{i-1},1,2 计算系数 $(n_3^+)_{i,\, n-1}$。现在从 $j_3 = 3$ 重新开始，我们可以再次逐步向上，依次计算 $(n_3^+)_{n-3,\, n-2}$，$(n_3^+)_{n-4,\, n-2}$、$\cdots$ 等等。然后我们以同样的方式处理 $j_3 = 4$、$\cdots$、$n-1$。□

根据上一节，$H^G_{j_1,\, j_2,\, j_3}$彼此泊松对易。它们在 SL$(n, \mathbb{C})$ 的左作用下不变，因此根据 [AMM], 第 5 节的结果，它们下降为商空间 M 上的一组对易哈密顿量。注意，$H^G_{j_1,\, j_2,\, j_3}$ 在 SL$(n, \mathbb{C}) \times T_{\mathbb{C}}$ 上给出了良定义函数；然而，限制到 SU$(n) \times \Delta$ 上时，除了一般位置 Δ_0（此处 $[K_I, K_I]$ 平凡）之外，它们在 $[K_I, K_I]$ 下并不不变。

5.5. 实性。由此，我们在空间 M 的复化 $M_{\mathbb{C}}$ 上（一个开稠密子集内）得到了一个各向同性全纯叶层，该叶层由函数 $H^G_{j_1,\, j_2,\, j_3}$ 定义。但这尚未使我们在 M 上得到实拉格朗日叶层；事实上，即使在 M 上，这个叶层也远非实的。我们必须加以调整。

子集 $M \subset M_{\mathbb{C}}$ 是对合 I 的不动点集，该对合由 SL$(n, \mathbb{C})$ 上定义的对合诱导而来：

$$I(g) = (g^*)^{-1}.$$

我们的辛形式 ω 在 I下保持不变，也就是说，$I^*(\omega) = \omega$。我们希望哈密顿量取在对合 I 下保持不变的函数。对于环面哈密顿量，

这很简单：令

$$\alpha_k^l \;=\; Re(H_{k,l}^V).$$

这些是 α 基本 alcove中的系数，但对于$k\,=\,2,\ 3$，顺序相反。对于其他哈密顿量，我们取

$$H^{GG}_{j_1,\ j_2,\ j_3} \;=\; A(\alpha_1^{j_1+1}-\alpha_1^{j_1})(\alpha_2^{n-j_2}-\alpha_2^{n-j_2+1})(\alpha_3^{n-j_3}-\alpha_3^{n-j_3+1})(I^*H^G_{j_1,\ j_2,\ j_3})^*H^G_{j_1,\ j_2,\ j_3};\ \ (5.7)$$

这里 A是乘积 $(\alpha_1^1-\alpha_1^n-1)(\alpha_2^1-\alpha_2^n-1)(\alpha_3^1-\alpha_3^n-1)$。 α因子和 A因子的作用是确保哈密顿量在 $[K_I,\,K_I]$的作用下保持不变；在这些作用非平凡的分层上尤其如此。在酉位置上，H^{GG} 除相差一个实因子外，是如下形式的厄米矩阵的行列式：

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2}^* & a_{2,,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3}^* & a_{2,3}^* & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

其中$a_{i,\ i}$ 为对角且为实数。由于该矩阵是厄米矩阵，其行列式为实数；它在 SU(n) 作用和酉环面作用下均保持不变。它是$H^G_{j_1,\ j_2,\ j_3}$ 及其复共轭的乘积，因此表示$H^G_{j_1,\ j_2,\ j_3}$的模平方，同样相差一些因子。

还需要证明这些哈密顿量彼此对易。记 $\{j_1,\,j_2,\,j_3\}$ 为 σ，并记$\{k_1\,,k_2,\,k_3\}$ 为 ρ。我们已有 $X_{H^G_\sigma}(H^G_\rho)\;=\;0$；此外， H^G_ρ沿着 H^G_σ流保持常数。若一个函数为常数，那么它的模平方也为常数，因此 $X_{H^G_\sigma}(H^{GG}_\rho)\;=\;0$。同理，$\overline{X_{H^G_\sigma}}(H^{GG}_\rho)\;=\;0$，所以

$$X_{H^{GG}_\sigma}(H^{GG}_\rho)\;=\;0.$$

这些函数彼此泊松对易，显然也与环面哈密顿量对易。

6. Degenerations of bundle moduli

先考虑光滑的 genus$g$ 曲线 Y_1 上 SL($n,\mathbb{C}$) 丛的模空间 $\mathcal{M}_{SL}(Y_1)$；等价地，这是 Y_1 的基本群到 SU(n) 的表示空间。 [BHu] 的结果给出了模空间 $\mathcal{M}_{SL}(Y_t)$ 的一种退化，该退化对应于 Y_1 经由光滑曲线 Y_t 退化为一条“完全节点化”曲线Y_0。这条曲线由 ($2g-2$) 个三孔球面两两在其穿孔点处粘合而成 X_i，总共有 $3g-3$ 次粘合。极限模空间 $\mathcal{M}_{SL}(Y_0)$ 是我们的带框抛物层在三孔球面上的模空间 $\mathcal{M}_{SL}(X_i)$ 的乘积的一个商；这里取商所依据的是反对角环面作用，该作用作用于与 $\mathcal{M}_{SL}(X_i)$ 的元素相关联的平凡化上：也就是说，如果 X_i 上的穿孔点 p_i 与 X_j 上的 p_j 相识别，我们就将 p_i 处与 $\mathcal{M}_{SL}(X_i)$ 元素相关联的平凡化，与 p_j 处和 $\mathcal{M}_{SL}(X_j)$ 元素相关联的平凡化相识别；注意，这种粘合只是部分粘合，即只粘合丛的子商。随后，我们对保持这些识别的反对角环面作用取商。这个商可以在辛几何意义下或全纯意义下进行。请注意，在辛几何意义下，被粘合的两个穿孔点上的 α_i 会反向： $\alpha_1^i=-\alpha_2^{n-i+1}$，因此取的是反对角商而非对角商。

因此，我们得到 $\mathcal{M}_{SL}(Y_t)$ 退化为极限 $\mathcal{M}_{SL}(Y_0)$，后者是若干 $\mathcal{M}_{SL}(X_i)$ 的乘积的一个商，可以是辛商，也可以是全纯商。注意，这不是一种在 0 以外纤维恒定的退化； $\mathcal{M}_{SL}(Y_t)$ 并不相同，而且确实存在一个托雷利定理，表明 $\mathcal{M}_{SL}(Y_t)$ 决定 Y_t [BGL], [GL]。

$\mathcal{M}_{SL}(X_i)$ 本身并非环面的，除 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 外；在这种情况下，它们与 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 相同。然而，由于我们现在有了一个 $\mathcal{M}_{SL}(X_i)$ 的环面退化，它与穿孔点处的环面作用相容，因此我们现在也有了一个 $\mathcal{M}_{SL}(Y_0)$ 的环面退化，从而也有一个 $\mathcal{M}_{SL}(Y_t)$ 的退化。

References

[AMM] A. Alekseev、A. Malkin 和 E. Meinrenken，李群值矩映射。《微分几何杂志》48（1988），445–495。[AW] S. Agnihotri 和 C. Woodward，酉矩阵乘积的特征值与量子 Schubert 演算，《数学研究快报》5（1998），817–836[AB] M. F. Atiyah 和 R. Bott，黎曼曲面上的杨-米尔斯方程，《伦敦皇家学会哲学汇刊》308（1983），523–615。[An] D. Anderson，奥昆科夫体与环面退化，《数学年刊》356（2013），1183–1202[Bh1] U. N. Bhosle，曲线上的抛物向量丛，《Ark. Mat.》27（1989），15–22。[Bh2] U. N. Bhosle，整射影曲线上的广义抛物层，《印度科学院数学科学学报》102（1992），13–22。[BHu] I. Biswas 和 J. Hurtubise，丛模空间的退化，《高等数学》414（2023），108858。[BGL] I. Biswas、T. L G´omez 和 M. Logares，抛物丛与抛物希格斯丛模空间的可积系统与托雷利定理，《加拿大数学杂志》68（2016），504–520。[EK] L. Escobar 和 K. Kaveh，凸多面体、代数几何与组合学，《美国数学学会通告》67（2002），1116–11123。[Fu] W. Fulton，《环面簇导论》，《数学年刊研究丛书》131，普林斯顿大学出版社，1993。[Go] W. M. Goldman，曲面基本群的辛性质，《高等数学》54（1980），200–225。[GL] T. L. G´omez 和 M. Logares，抛物希格斯丛模空间的托雷利定理，《几何学进展》11（2011），429–444。[HJ] J. Hurtubise 和 L. C. Jeffrey，带加权标架的表示与带框架抛物丛，《加拿大数学杂志》52（2000），1235–1268。[HJS1] J. Hurtubise、L. C. Jeffrey 和 R. Sjamaar，群值内爆与抛物结构，《美国数学杂志》128（2006），167–214。[HJS2] J. Hurtubise、L. C. Jeffrey 和 R. Sjamaar，带框架抛物层的模空间，《全球分析与几何年刊》28（2005），351–370。[HK] M. Harada 和 K. Kaveh，可积系统、环面退化与奥昆科夫体，《发明数学》202（2015），927–985。[JW] L. C. Jeffrey 和 J. Weitsman，平坦联络模空间中的玻尔-索末菲轨道与维林德维数公式，《数学物理通讯》150（1992），593–630。[KK] K. Kaveh 和 A. Khovanskii，牛顿-奥昆科夫体、整点半群、分次代数与交理论，《数学年刊》176（2012），925–978。[Ko] S. Kobayashi，复向量丛的微分几何，《日本数学学会出版物》15，《Kanˆo 纪念讲座》5，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1987。[MS] V. B. Mehta 和 C. S. Seshadri，带抛物结构的曲线上向量丛模空间，《数学年刊》248（1980），205–239。[NS] M. S. Narasimhan 和 C. S. Seshadri，紧黎曼曲面上的稳定酉向量丛，《数学年刊》82（1965），540–567。

[Ve] E. Verlinde，二维共形场论中的融合规则与模变换，《核物理B》300卷（1988），360–376。

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, 1 Homi Bhabha Road, Mumbai 400005, India
电子邮件地址：indranil@math.tifr.res.in

Department of Mathematics, McGill University, Burnside Hall, 805 Sherbrooke St.W., Montreal, Que. H3A 2K6, Canada
电子邮件地址：jacques.hurtubise@mcgill.ca