arXiv:2302.01124v2 [math.GT] 4 Feb 2023

# 关于 Bar-Natan - van der Veen 的扰动高斯

JORGE BECERRA

摘要。本文进一步阐明 Bar-Natan 和 van der Veen 基于非交换代数生成级数的高斯演算所构造的一类新型多项式时间纽结多项式的性质。这些多项式可确定所有带色琼斯多项式，其中最简单的一个预计与单变量二环多项式一致。我们证明了一个猜想，该猜想指出这些多项式中有一半为零，并给出了其中三个纽结多项式不变量的具体公式。我们还研究了这些多项式在纽结连通和下的行为。

目录

1. 引言 1
2. 旋转缠结 5
3. 缠结的普适不变量 9
4. 高斯演算 15
5. 普适不变量 $Z_{\mathbb{D}}$ 26
6. 带映射的性质 42
7. 展望 49
附录 A. 带映射的计算 53
参考文献 54

## 1. 引言

纽结的量子不变量至今已得到广泛研究三十年。这些不变量通常由量子群[Jim85、CP94、Kas95], 的表示论构造而来。量子群是一个统称，涵盖复半单李代数的万有包络代数的量子化（也称为变形）。其中，量子代数 $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ 尤为突出，因为它不仅最容易研究，还产生了一系列称为带色琼斯多项式的结不变量，其中第一个便是著名的琼斯多项式 [Jon85]。

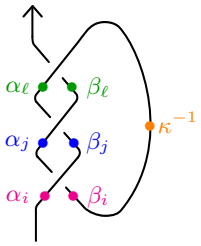
这些代数在构造量子不变量时的主要特点是它们具有带状结构。粗略地说，带状代数 $A$ 有两个优选的可逆元素

$$R = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i \in A \otimes A \qquad , \qquad \kappa \in A,$$

日期：2023年2月7日。2020年数学主题分类。57K14，16T05，17B37。

（精确定义见第 3.1 节），它们使范畴$\mathsf{Mod}_A$ 中的有限维表示成为带状范畴或扭结范畴 [Oht02b、Tur16]。本文将研究一种同样由带状代数生成的纽结不变量，它包含该代数所有表示所生成的不变量，因此被称为与 相关联的万有结不变量 $A$ [Law89、Hab06]。

下面简要介绍普适不变量的构造，详情请参见第3.2节。给定一个（长的、带框架的、有定向的）纽结 $K$ 图，其中所有交叉均假定指向上方，在正交叉处放置 $R$ 的副本，在负交叉处放置 $R^{-1}$的副本；其中第一个因子位于上跨处，第二个因子位于下穿处。同样，在每个逆时针整周旋转处放置 $\kappa$ 的副本，在每个顺时针整周旋转处放置 $\kappa^{-1}$的副本，然后沿纽结的定向将珠子相乘，得到一个元素 $Z_A(K) \in A$。下面以右手三叶结$T_{2,\ 3}$为例说明这一构造：




$$Z_A(T_{2,3}) = \sum_{i,j,\ell} \alpha_i\ \beta_j\ \alpha_\ell\ \kappa^{-1}\ \beta_i\ \alpha_j\ \beta_\ell.$$

在过去二十年中，普适不变量得到了广泛研究[Hab08、Suz10、Suz13、MS16、Suz18]。尽管定义看似简单，但计算这一不变量可能会成为一项艰巨的任务。主要困难在于，为了获得精细的结不变量，必须采用非交换的无限维带状代数，而其中的元素 $R$ 和 $\kappa$通常表示为代数生成元乘积的无限和[1] ，因此对于任意纽结，想要从这些乘积中得到具体表达式是毫无希望的。据作者所知，数值$Z_{U_h(\mathfrak{sl}_2)}(K)$目前仅对以下四个纽结 $K$ （具有四个或更少交叉） [Hab02，§3.4]。

在一系列出版物中 [BV18，BV21]，D. Bar-Natan 和 R. van der Veen 提出了一种新颖的技术，用于高效地处理上述非交换代数中的迭代乘积问题。触发所谓的高斯演算 这一方法的观察是，量子群理论中通常出现的代数（例如万有包络代数的量子化 $U_h(\mathfrak{g})$ ）具有庞加莱-伯克霍夫-维特型基，因此作为拓扑模，它们同构于以交换变量为元的多项式环，并带有一个作为幂级数附加的参数 $h$ 。

为说明这一想法，为简单起见，我们省略参数 $h$。有限维线性代数中的 $k$-向量空间同构 $\mathrm{Hom}_k(V,\ W) \cong V^* \otimes W$在 $V \cong k[x]$ 和 $W \cong k[y]$的条件下，可以提升为一个 $k$-线性同构

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) \xrightarrow{\cong} k[y][[\xi]].$$

[1]只要该代数以某个不定元 $h$ 上的幂级数环为基环，并且将其视为赋有 $h$-进拓扑的拓扑代数，这类无穷和便是有意义的。

这使我们能够将 $k$-线性映射视为幂级数，并将映射的复合视为幂级数之间的某种配对。将这一观点应用于代数 $A$，我们可以将乘法映射 $\mu\colon A\otimes A\longrightarrow A$ 视为幂级数 $\bar{\mu}$（关于高斯演算的更一般讨论，见第4.2节和4.3节）。

Bar-Natan 和 van der Veen 随后将这一方法用于环 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$ 上的（拓扑）带状代数 $\mathbb{D}$，其中 $\mathbb{Q}_\varepsilon := \mathbb{Q}[\varepsilon]$。从上述视角来看，这种代数的关键性质是，级数 $\bar{\mu}$，以及对应于元素 $R$ 和 $\kappa$的级数，都可以更简洁地写成扰动高斯，也就是形如以下形式的幂级数

$$e^G(P_0+P_1\varepsilon+P_2\varepsilon^2+P_3\varepsilon^3+\cdots) \tag{1.1}$$

其中 $G$ 且每个 $P_i$ 都是有限表达式；两个这样的幂级数的配对可以通过一个具体公式计算（见定理4.12），其结果也具有相同的形式。

这一新颖方法的结果是，对于任意纽结 $K$，都可以计算 e
其值

$$Z_{\mathbb{D}}(K)\pmod{\varepsilon^N} \tag{1.2}$$

通过截断（1.1），可得到有限表达式。这种方法的主要计算优势在于，与表示理论得到的不变量不同，后者需要指数时间计算，而（1.2）的值可以在多项式时间内计算。

值得一提的是，代数 $\mathbb{D}$ 满射到 $U_h(\mathfrak{sl}_2)$，因此不变量 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 决定了 $Z_{U_h(\mathfrak{sl}_2)}(K)$，进而决定所有带色琼斯多项式。事实上，我们预计 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 等价于带色琼斯多项式的集合。此外， $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 与 Rozansky 对带色琼斯多项式的有理展开密切相关，见第7.3节。

利用上述概述的工具箱， [BV21] 证明，对于一个零框架纽结$K$，普适不变量 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 完全由一族纽结多项式不变量决定

$$\rho_K^{i,j}\in\mathbb{Q}[t,t^{-1}]\qquad,\qquad i\geq 0,\ 0\leq j\leq 2i, \tag{1.3}$$

以及著名的亚历山大多项式 $\Delta_K\in\mathbb{Z}[t+t^{-1}]$（属于 $K$），因此研究 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 的特征，就相当于研究给定多项式族的特征。

在这组多项式中，数值 $\rho^1_{,\ K}{}^0$ 尤为突出：迄今已知，只有这一对($\Delta_K$， $\rho^1_{,\ K}{}^0$）能产生可高效计算的最强结不变量 [BV18]：

- 其计算复杂度为 $O(c^5)$，其中 $c$ 是结图的交叉数，
- 它在2978个交叉数不超过12的素结集合上取2883个不同的值。作为比较，若 $Kh_{\mathbb{Q}}(K)$表示有理Khovanov同调， $P(K)$表示 $K$的HOMFLY-PT多项式，那么这一对（$Kh_{\mathbb{Q}}(K)$ $P(K)$）取值数量比这一对（$\Delta_K$， $\rho^1_{,\ K}{}^0$）约少一百个。

事实上，我们预计这个多项式 $\rho^1_{,\ K}{}^0$ 与单变量 2-圈多项式一致，参见第 7.4 节。对于其余部分，我们预计其中一些多项式较弱。事实上，我们的第一个主要结果是，这些多项式中有一半是平凡的。

**定理 1.1**（定理 5.18， [BV21] 中的猜想）。 对于任意 0-框架结 $K$，

$$\rho_K^{i,j}(t) = 0$$

对于 $j > i > 0$。

我们的第二个主要结果为 [BV21]，中的一个猜想提供了支持：三元组 $(\Delta_K, \rho^{1,\ 0}_{K}, \rho^{2,\ 0}_{K})$ 完全决定了 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 模 $\varepsilon^3$ 的值。此外，我们还能用这个三元组给出其余纽结多项式不变量的具体公式（上述论文已经给出了 (1) 的公式）。

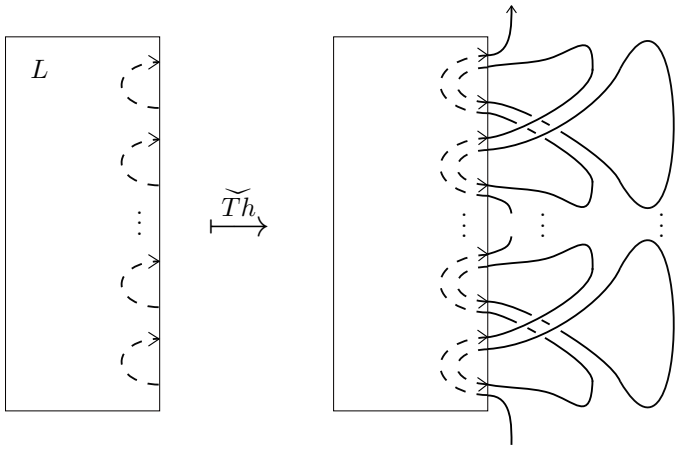
**定理 1.2** (定理5.20)。 对于任意零框架纽结 $K$， 我们有

$$(1)\ \rho_K^{1,1}(t) = \frac{2t}{1-t}\Delta_K'(t),$$

$$(2)\ \rho_K^{2,1}(t) = \frac{2t\Delta_K^4(t)}{t-1}\left(\frac{\rho_K^{1,0}}{\Delta_K^3}\right)'(t),$$

$$(3)\ \rho_K^{2,2}(t) = t\left(\frac{\Delta_K(t)}{1-t}\right)^3\left((3-t)(\Delta_K^{-1})'(t) + 2t(1-t)(\Delta_K^{-1})''(t)\right).$$

我们在这两个结果中采用了相同的策略，下面简要概述。每个定向零框架纽结 $K$ 都可以由一个具有 $2g$ 个开放分支的缠结 $L$ （ $g \geq 1$）构造而成：通过添加若干交叉，将每股加倍，反转其中一些股的定向，并合并端点，使得 $K$ 等于 $L$ 的加厚，记作 $Th(L)$，如下图所示：




(1.4)

普适不变量 $Z_{\mathbb{D}}$ 对于前面提到的拓扑操作是自然的，因此存在一个代数加厚映射

$$Th : \mathbb{D}^{\hat{\otimes} 2g} \longrightarrow \mathbb{D}$$

具有如下性质：

$$Z_{\mathbb{D}}(\widetilde{Th}(L)) = Th(Z_{\mathbb{D}}(L)),$$

其中，在前一个等式中，普适不变量被扩展到了开辫。这意味着，要研究纽结多项式不变量 $\rho^{i,\ j}_{K}$ 的性质，只需研究 $Z_{\mathbb{D}}(L)$ 以及与加厚映射相关联的非交换变量级数。

**论文结构。** 论文其余部分安排如下：第 2 节回顾定向带框缠结，并介绍作为一种便利类别的旋转缠结。第 3 节回顾拓扑带状 Hopf 代数的概念，以及基于此类带状代数的万有缠结不变量，并重点探讨万有不变量相对于 Hopf 运算的自然性。第 4 节回顾 Bar-Natan - van der Veen 针对带状代数 $\mathbb{D}$ 的高斯演算。我们详细说明了在非交换代数中使用交换生成级数的动机。第5 节介绍一个针对垂直底部缠结定义的加厚映射，并明确论证该映射关于万有缠结不变量的自然性。我们还描述了加厚映射的基本构件——带映射——的像所具有的一种代数性质，这将使定理 1.1 的证明变得简单。本节还回顾 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 模 $\varepsilon$ 如何恢复纽结的 Alexander 多项式，并以此为基础证明定理 1.2。我们还给出多项式族 $\rho^{i,\ j}_{K}$ 对纽结连通和的显式公式。第 6 节证明一些关于带映射生成级数结构的技术性结果，这些结果将是证明定理 1.2 的关键。最后，第 7 节讨论若干关于万有不变量的开放问题和猜想 $Z_{\mathbb{D}}$。附录 A 包含一个计算机实现，用以展示带映射的一些性质；这些性质超出了手工计算的范围。

**致谢。** 作者谨向 Roland van der Veen 致谢，感谢他就本文内容提出的许多有益讨论和建议。

## 2. 旋转缠结

本节回顾立方体中的定向带框缠结，并特别关注那些股从立方体底部出发、在顶部结束的缠结，因为这类缠结可以用一种特别方便的描述方式来表示，称为旋转缠结。

**2.1. 缠结范畴 $\mathcal{T}$。** 设 $D^1=[-1,1]\subset\mathbb{R}$ 为一维圆盘，设 $n,m\geq 0$ 为整数。一个（定向带框）缠结 是一个嵌入的同痕类

$$L:\left(\coprod_n D^1\times D^1\right)\amalg\left(\coprod_m D^1\times S^1\right)\hookrightarrow (D^1)^{\times 3}$$

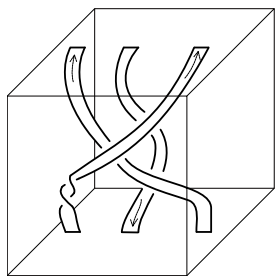
且满足其限制为一个保向同胚

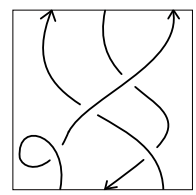
$$\coprod_n D^1\times\{-1,1\}\xrightarrow{\cong}\left(\bigcup_{i=1}^{n_1}F_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n_2}H_i\right)$$

其中 $n_1,\ n_2\geq 0,\ n_1+n_2=2n,\ F_i:=\hat{\imath}_{2n_1+1}^{2i-1},\ \hat{\imath}_{2n_1+1}^{2i}\times 0\times -1\subset(D^1)^{\times 3}$ 且 $H_i:=\hat{\imath}_{2n_2+1}^{2i-1},\ \hat{\imath}_{2n_2+1}^{2i}\times 0\times 1\subset(D^1)^{\times 3}$，其中 $D^1\times\pm 1$ 上的定向由 $D^1\times D^1$ 中的通常定向诱导，而 $F_i$ 和 $H_i$ 上的定向分别由正向和反向诱导。此处的同痕是指

相对于 $\coprod_n(D^1\times\pm1)$ 的同痕。此外，带状区域 $0\times D^1$ 和环带$0\times S^1$ 的核心也带有定向。如果 $m=0$，我们称该缠结为开。

按照惯例，我们通常只画出缠结的带状区域在一般位置下相对于黑板框架的核心，并将其称为缠结的股，见下图。我们将这些图视为在带定向框架的 Reidemeister 变换 I、II、III 型下等价。

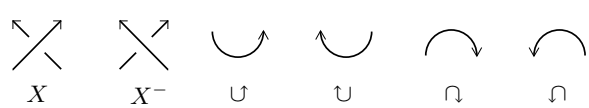




众所周知，缠结的集合可以组织成一个严格幺半范畴（实际上是带状范畴）。令 Mon$(+,-)$ 为集合 $\{+,-\}$ 上的自由幺半群。给定一个缠结 $L$，根据 $L$ 分别朝上或朝下，为每个 $F_i$ 和 $H_j$ 指定符号 $+$ 或 $-$。此指定定义了两个元素 $s(L)$ $t(L)$ $\in$Mon$(+,-)$，其长度分别为 $n_1$ 和 $n_2$，称为 $L$的源 和靶 。

缠结范畴$\mathcal{T}$定义为：对象是 Mon$(+,-)$，态射 Hom$_{\mathcal{T}}(s,t)$ 是满足 $s=s(L)$ 和 $t=t(L)$ 的缠结 $L$ 的集合。缠结 $L_1,L_2$ 的复合映射 $L_2\circ L_1$ 是将 $L_2$ 叠放在 $L_1$ 上方所得的缠结，而词 $w\in$ Mon$(+,-)$ 的恒等态射是缠结 $\uparrow_w$，它由若干条平行的垂直股组成，其定向由 $s(\uparrow_w)=t(\uparrow_w)=w$ 决定。对象上的幺半积由词的连接给出；在态射层面，$L_1\otimes L_2$ 是将 $L_2$ 放在 $L_1$ 右侧（并对立方体的长度进行归一化）所得的缠结。单位对象是空词，也就是 Mon$(+,-)$ 的单位元。

这是一个经典结果（参见 [Oht02b、Hab06]）：范畴$\mathcal{T}$由对象 $+$、$-$ 以及下列态射 $X$、$X^-$、$\cup\hat{}$、$\circlearrowleft$、$\check{}\cap$、$\check{}\cap$ 幺半生成。




(2.1)

接下来，我们主要将注意力限制在$\mathcal{T}$的某个子范畴上。向上缠结 范畴是单体子范畴$\mathcal{T}_{\mathrm{up}}\subset\mathcal{T}$，其对象为 Mon$(+)$ $\subset$ Mon$(+,-)$，态射为开切络。向上缠结$K\in$ Hom$_{\mathcal{T}^{\mathrm{up}}}(+,+)$称为长纽结，或为简便起见称为纽结。存在一个典范的闭合运算，它在长纽结（相对于其端点）的同痕类与闭纽结的同痕类之间建立了众所周知的双射，因此我们可以通过研究向上缠结来研究纽结理论。

2.2. **旋转缠结**。 就我们的目的而言，将讨论限制在一类特定的缠结上会更方便，我们现在来介绍这类缠结。若缠结图 $D$ 处于旋转形式，则称之为

(1) 作为缠结， $D$ 朝上。(2) $D$ 中的所有交叉都朝上，且所有极大点和极小点均成对出现，形式如下：



(2.2)

其中，虚线圆盘表示缠结图中该段股周围的某个邻域。

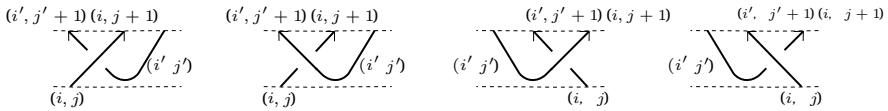
我们将旋转缠结图视为在 莫尔斯同痕意义下等价，也就是说，平面同痕保持所有极大点和极小点不变。我们不允许出现孤立的杯和帽（“半旋转”）；它们必须成对出现，形式为 ˇ∩ 和 ∪ˆ，或 ˇ∩ 和 ↻。这种只允许“整周旋转”的缠结图概念最早由 [BV18] 和 [BV21]提出。

下面的引理包含在后一篇文献针对纽结的计算机实现中，但我们在此将同一论证记录下来，并推广至缠结。

**引理 2.1**。 任何向上缠结都有一个旋转形式的图。

证明。 给定一个向上缠结的缠结图 $D$，我们将构造另一个旋转形式的图，它与前者之间仅相差平面同痕。

对于每个缠结分支，按照股的定向为边编号。令有序对 $(i,\ j)$ 表示股的第 $j$ 条边 $D_i$。用 $X_{(i,j),\ (i',j')}$表示这样的交叉：边 $(i,\ j)$ 是上股的足，边 $(i',\ j')$ 是下股的足。根据全序 $(i,\ j) < (i',\ j)$（若 $i < i'$ 或 $i = i'$ 且 $j < j'$），将交叉以向上的方式放置在平面的带 $\mathbb{R} \times [k, k+1]$ 中，并在具有最大有序对的边的足的末端放置一个杯，见下图：



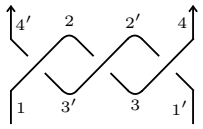

对每个 $i$，我们按照顺序连接边 $(i,\ j)$，并将所有尚未连接的边向上延伸。为此，当需要与图中已有的边合并时，我们必须放置一些帽。所得图中，杯和帽成对出现，如（2.2）所示；此外还会出现孤立极大值和之字形曲线，分别如左图和右图所示。不过，这两者都可以通过平面同痕消去。



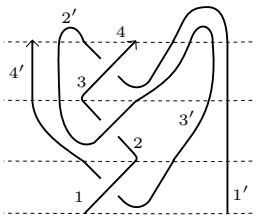
(2.3)

根据构造，所得的图与原图平面同痕。 □

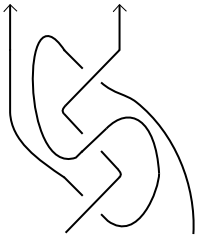
**例 2.2.** 下面以一个例子说明前一个引理的证明。假设我们从下图所示的二分支缠结开始：



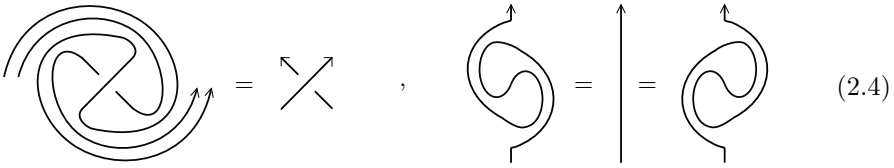

为简便起见，我们将边标记为 $j = (1, j)$ 和 $j' = (2, j)$。所述算法生成如下缠结图：



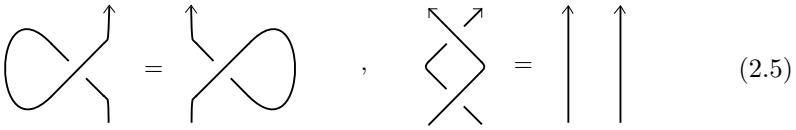

去除孤立极大值后，我们得到原始缠结的如下旋转图：



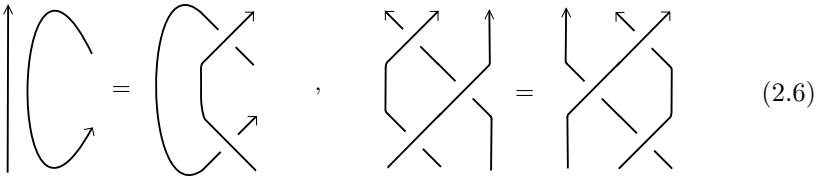
因此，我们只需研究旋转形式的缠结图，并将其简称为旋转缠结。仿照 [Oht02b，定理 3。3]和 [Pol10]，，不难看出，以下关系构成了旋转缠结的旋转 *Reidemeister* 变换：



(2.4)



(2.5)



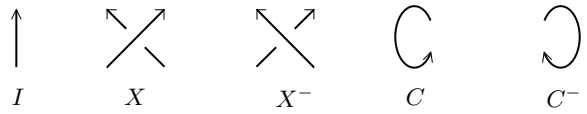
(2.6)

通常，上述图示表示两个缠结图在除某个开邻域外完全相同，而在该邻域内如图所示。从中可得

**推论 2.3.** 存在双射

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\text{向上缠结}\\ \text{在 } (D) \text{ 中 } \times 3\end{array}\right\}}{\text{同痕}} \quad = \quad \frac{\left\{\begin{array}{ll}\text{向上缠结} & \\ \text{图 } (D) & 1 \times 2\end{array}\right\}}{\begin{array}{c}\text{平面同痕和}\\ \text{Reidemeister 移动}\end{array}} \quad = \quad \frac{\left\{\begin{array}{l}\text{旋转缠结}\\ \text{在 } (D) \text{ 中 } \times 2\end{array}\right\}}{\begin{array}{c}\text{莫尔斯同痕与}\\ \text{旋转}\\ \text{Reidemeister 变换}\end{array}}$$

注意，旋转缠结无法嵌入$\mathcal{T}$中，因为（2.2）的整周旋转无法视为态射；不过，任何旋转缠结都可以分解为下图所示基本构件在平面上的拼合：单根无结弦（记作 $I$）、正交叉和负交叉（分别记作 $X$ 和 $X^-$），以及逆时针和顺时针整周旋转（分别记作 $C$ 和 $C^-$）。我们将元素 $C$ 称为旋转子。




(2.7)

## 3. 缠结的万有不变量

本节主要旨在确定记号和约定，我们将回顾拓扑带状霍普夫代数的概念，以及基于此类代数构造万有缠结不变量的方法，并着重介绍旋转缠结的描述。我们还将阐述万有不变量的自然性和函子性，以及它与源自量子群表示论的经典量子不变量之间的关系。

### 3.1. 拓扑带状霍普夫代数。

我们简要回顾拓扑模和拓扑带状霍普夫代数的定义，并重点介绍之后将用到的主要特征。更多细节请参阅 [Kas95]或 [Hab06]。

设 $k$ 是一个含单位元的交换环，并考虑变量 $h$ 上系数取自 $k$ 的形式幂级数环 $k[[h]]$ 。通常，我们赋予 $k[[h]]$ 由环同构所诱导的（逆）极限拓扑

$$k[[h]] \xrightarrow{\cong} \lim_n k[h]/(h^n),$$

这称为 $h$-进拓扑。

给定一个 $k[[h]]$-模 $M$，它关于 $h$-进拓扑的完备化 为$\wedge M := \lim_n M/h^n M$，并赋予极限拓扑。当典范映射$\wedge M \longrightarrow M$ 是一个同构时，我们称 $M$ 是完备的，并通过此同构在 $M$ 上赋予 $h$-进拓扑，因此 $M$ 可以视为一个拓扑$k[[h]]$-模。我们将重点研究以下这类 $k[[h]]$-模：若 $V$ 是一个自由$k$-模，则由 $V$ 中的系数构成的形式幂级数集合 $V[[h]]$ 自然是一个$k[[h]]$-模。容易看出 $V[[h]]$ 是完备的，因此它可以实现为

一个拓扑 $k[[h]]$-模。我们称这类模为拓扑自由模。注意，

$$V[[h]] \cong \widehat{V \otimes_k k[[h]]}$$

作为拓扑 $k[[h]]$-模。

给定两个 $k[[h]]$-模 $M$ 和 $N$，其拓扑张量积 定义为通常张量积的完备化，

$$M \hat{\otimes} N := \widehat{M \otimes_{k[[h]]} N}.$$

我们用 $\mathbf{Mod}^{\mathsf{t}}_{k[[h]]}$ 表示由拓扑 $k[[h]]$-模及连续 $k[[h]]$-模映射构成的对称幺半范畴，并将 $\tau_{M,N} \colon M \hat{\otimes} N \longrightarrow N \hat{\otimes} M$记作其对称编织。我们也用 $\mathbf{Mod}^{\mathsf{tf}}_{k[[h]]}$ 表示 $\mathbf{Mod}^{\mathsf{t}}_{k[[h]]}$ 中由拓扑自由 $k[[h]]$-模构成的满子范畴。类似地，我们用 $\mathbf{Mod}^{\mathsf{f}}_{k}$ 表示由自由 $k$-模及 $k$-线性映射构成的范畴。为方便起见，我们分别用 $\mathbf{Hom}_k$ 和 $\mathbf{Hom}_{k[[h]]}$ 表示范畴 $\mathbf{Mod}^{\mathsf{f}}_{k}$ 和 $\mathbf{Mod}^{\mathsf{tf}}_{k[[h]]}$中的同态集。

以下命题是对拓扑自由模已知性质的重新表述（参见 [Kas95]）。

**命题 3.1.** 从 $V$ 到 $V[[h]]$ 的过程产生了一个自由—遗忘伴随

$$\mathbf{Mod}^{\mathsf{f}}_{k} \underset{U}{\overset{-[[h]]}{\rightleftarrows}} \mathbf{Mod}^{\mathsf{tf}}_{k[[h]]} \qquad (\perp)$$

此外，完备张量积通过同构限制在拓扑自由模上

$$V[[h]] \hat{\otimes} W[[h]] \xrightarrow{\cong} (V \otimes_k W)[[h]], \tag{3.1}$$

由此使 $\mathbf{Mod}^{\mathsf{tf}}_{k[[h]]}$ 成为一个对称幺半范畴，并使函子 $-[[h]]$ 成为强幺半且忠实的（并且本质满）。

此外，$\mathbf{Mod}^{\mathsf{tf}}_{k[[h]]}$ 是[2] 通过同构在自身上富化的

$$\mathrm{Hom}_{k[[h]]}(V[[h]], W[[h]]) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_k(V, W)[[h]] \tag{3.2}$$

由伴随关系诱导，从而使其成为一个闭对称幺半范畴，这意味着存在自然同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{k[[h]]}(M, \mathrm{Hom}_{k[[h]]}(N, P)) &\xleftarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{k[[h]]}(M \hat{\otimes} N, P) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{k[[h]]}(N, \mathrm{Hom}_{k[[h]]}(M, P)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $N$、$M$ 和 $P$ 是拓扑自由的。

最后，遗忘函子 $U \colon \mathbf{Mod}^{\mathsf{tf}}_{k[[h]]} \longrightarrow \mathbf{Set}$ 由单位对象 $k[[h]]$ 表示，也就是说，存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{k[[h]]}(k[[h]], V[[h]]) \xrightarrow{\cong} U(V[[h]]) \tag{3.4}$$

一个拓扑霍普夫代数是一个拓扑 $k[[h]]$-模 $A$，具有代数结构（$A$，$\mu$，$\eta$）、余代数结构（$A$，$\Delta$，$\epsilon$）（相容性体现在余代数结构映射是代数态射），以及一个同构

[2]有关富化范畴的精确定义，请参见 [Rie14]

$S:\ A\longrightarrow A$，称为反 ***antipode***，它是卷积幺半群 $\mathrm{Hom}^{k[[h]]}(A,\ A)$ 中 $\mathrm{Id}_A$ 的逆元，即

$$m(S\hat{\otimes}\mathrm{Id})\Delta=\eta\epsilon=m(\mathrm{Id}\hat{\otimes}S)\Delta.$$

定义中的所有结构映射都必须连续（也就是说，它们都必须是 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{t}}_{k[[h]]}$ 中的态射）。

一个拓扑拟三角 ***Hopf*** 代数 是一个拓扑霍普夫代数 $A$，并配有一个可逆元 $R\in A\hat{\otimes}A$，称为万有 $R$ 矩阵，满足以下性质：

$$(\Delta\hat{\otimes}\mathrm{Id})R=R_{13}\cdot R_{23} \tag{3.5}$$

$$(\mathrm{Id}\hat{\otimes}\Delta)R=R_{13}\cdot R_{12} \tag{3.6}$$

$$\tau_{A,A}\Delta=R\cdot\Delta(-)\cdot R^{-1} \tag{3.7}$$

其中 $R_{12}:=R\hat{\otimes}1$，$R_{13}:=(\mathrm{Id}\hat{\otimes}\tau_{A,A})R_{12}$，且 $R_{23}:=1\hat{\otimes}R$。

我们用 $R=\sum_i\alpha_i\hat{\otimes}\beta_i$ 表示万有 $R$-矩阵，用 $R^{-1}=\sum_i\alpha_i\hat{\otimes}\beta_i$ 表示其逆元。请注意，一般来说，这些和是无限的。

拓扑带状霍普夫代数 是一个拓扑拟三角 Hopf 代数$A$，并配有一个优选元 $\kappa\in A$，称为平衡元，满足

$$\Delta\kappa=\kappa\hat{\otimes}\kappa \tag{3.8}$$

$$\epsilon(\kappa)=1 \tag{3.9}$$

$$\kappa^2=u\cdot S(u^{-1}) \tag{3.10}$$

$$S^2=\kappa\cdot(-)\cdot\kappa^{-1} \tag{3.11}$$

其中 $u:=\mu(S\hat{\otimes}\mathrm{Id}_A)R_{21}=\sum_i S(\beta_i)\cdot\alpha_i$ 称为***Drinfeld*** 元，而$u^{-1}:=\mu(\mathrm{Id}_A\hat{\otimes}S^2)R_{21}=\sum_i\beta_i\cdot S^2(\alpha_i)$ 是其逆元。这里我们记 $R_{21}=\tau_{A,A}(R)$。

该元 $v:=\kappa^{-1}\cdot u$ 在经典文献中称为带状元 （因此这种代数结构得名）。注意，带状元是中心元：对任意 $x\in A$，都有$vx=\kappa^{-1}ux=\kappa^{-1}S^2(x)u=x\kappa^{-1}u=xv$。可以证明 [KR93]，平衡元的公理组（3.8）–（3.11）等价于通常的公理组

$$v\in\mathcal{Z}(A)\ ,\ v^2=u\cdot S(u)\ ,\ \Delta(v)=(R_{21}R)^{-1}(v\hat{\otimes}v)\ ,\ \epsilon(v)=1\ ,\ S(v)=v$$

关于带状元，其中$\mathcal{Z}(A)$表示 $A$的中心。

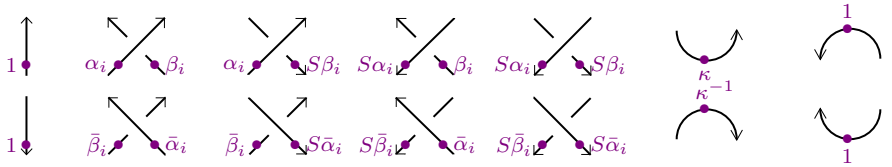
例 3.2. 对于任意半单复李代数 $\mathfrak{g}$，Drinfeld [Dri85] 和 Jimbo [Jim85] 构造了一个定义在 $\mathbb{C}[[h]]$上的拓扑带状霍普夫代数 $U_h(\mathfrak{g})$，它是李代数 $\mathfrak{g}$的万有包络代数 $U(\mathfrak{g})$的一种“量子化”，这意味着 $U_h(\mathfrak{g})/hU_h(\mathfrak{g})\cong U(\mathfrak{g})$作为双代数同构，并且 $U_h(\mathfrak{g})\cong U(\mathfrak{g})[[h]]$ 作为 $\mathbb{C}[[h]]$-模同构。

在第4.1 节中，我们将介绍所要研究的核心拓扑带状霍普夫代数示例。

3.2. **万有缠结不变量**。 现在我们可以定义万有缠结不变量，它最早由 [Law89] 引入（简要的历史说明见 [Hab06，§1.2。1]）。设 $A$ 是一个拓扑带状霍普夫代数，其单位元为 $1\in A$，万有 $R$-矩阵 $R=\sum_i\alpha_i\hat{\otimes}\beta_i$，逆元 $R^{-1}=\sum_i\bar{\alpha}_i\hat{\otimes}\bar{\beta}_i$ 和平衡元$\kappa\in A$。

为简单起见，我们将限于开切络的情形（否则必须对闭分支使用带状霍普夫代数的一个商，但这里我们

不会这样做），此外我们总是假设切络分支是有序的。给定一个 $n$ 分支开辫 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$，在平凡辫子图、交叉、杯和帽的最下方放置代表元素 1,( $S^i \otimes S^j$)($R^{\pm 1}$) $\kappa^{\pm 1}$, $i, j = 0, 1$ 的珠子，并始终将“alpha”置于上股，将“beta”置于下股，如下图所示：



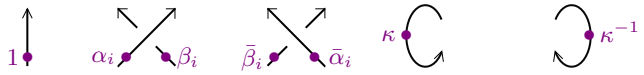

(3.12)

在带状霍普夫代数 下的普适不变量是元素$Z_A(L) \in A \hat{\otimes} \overset{n}{\cdots} \hat{\otimes} A$，定义如下：对于 $1 \leq i \leq n$，令 $Z_A(L)^{(i)}$ 为一个（形式）词，按照股的定向，从左到右依次写出第 $i$ 个分支上珠子的标签。然后令

$$Z_A(L) := \sum Z_A(L)_{(1)} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} Z_A(L)_{(n)} \in A \hat{\otimes} \overset{n}{\cdots} \hat{\otimes} A$$

其中，求和遍历 $R^{\pm 1}$ 中的所有子指标（每个交叉对应一个）。

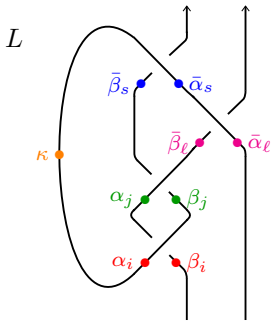
若 $L$ 是向上缠结，则普适不变量的描述特别简单，因为一旦将其写成旋转形式，我们只需指定（2.7）中的五个（而非十四个）基本构件的取值。由上文可得，这些赋值为：




(3.13)

Oht02b 中证明了 [Oht02b]： $Z_A(L)$ 在 Reidemeister 移动下保持不变，因此定义了缠结的同痕不变量。

**例 3.3**。 设 $L$ 为下方的二分支向上缠结，我们已按照（3.13）对其加上装饰：




其普适不变量由下式给出

$$Z_A(L) = \sum_{i,j,\ell,s} \beta_i \alpha_j \bar{\beta}_\ell \hat{\otimes} \bar{\alpha}_\ell \bar{\alpha}_s \kappa \alpha_i \beta_j \bar{\beta}_s \in A \hat{\otimes} A.$$

警告 3.4。请读者留意，文献中关于普适不变量存在不同的约定和记号，它也记作 $J_L$ 或 $Q^{A;*}$。

我们的约定最接近 Ohtsuki 的 [Oht02b], ，只需将缠结上下翻转即可，因为他更倾向于将缠结定向为向下。也就是说，对于缠结 $L$ 其值 $Z_A(L)$ 是 Ohtsuki 对该缠结普适不变量的取值$L'$，其中 是 $L$ 的图在平面内旋转 180 度后得到的图。

Habiro [Hab06] 也将向下定向视为首选，并沿着股定向的逆向读取珠子。其值$Z_A(L)$ 等于 Habiro 对 $L'' \subset (D^1)^{\times 3}$ 的普适不变量取值，该取值由将 $L$ 180绕 轴旋转 度 $z$ 并反转所有股的定向而得。

最后， [BBG18] 采用第四种约定：缠结定向为向上，但普适不变量沿着股定向的逆向书写。其值 $Z_A(L)$ 等于作者对普适不变量的取值，即对 $L'''$ 进行上下翻转（在平面内旋转 180 度） $L$ 并反转所有股的定向后所得。

由此可见，我们的约定与上述三种约定本质上等价，差别仅在于缠结 $L, L', L'', L'''$ 之间的一些细微差异。

3.3. **普适不变量的自然性**。有些缠结操作相对于 Hopf 代数的结构映射具有自然性。按照 [Hab06],，给定一个开辫 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ 和 $1 \le i \le n$，定义

$$S_{L_i} : A \longrightarrow A \qquad , \qquad S_{L_i}(x) := \kappa^{h(i)} S(x) \kappa^{f(i)}$$

其中

$$h(i) := \begin{cases} 0, & \text{if the head of } L_i \text{ points up} \\ -1, & \text{if the head of } L_i \text{ points down} \end{cases}$$

and

$$f(i) := \begin{cases} 0, & \text{if the foot of } L_i \text{ points up} \\ 1, & \text{if the foot of } L_i \text{ points down} \end{cases}.$$

类似地，设 $L^1, L^2, L^3, L^4$ 是开辫，使得 $s(L^1) = t(L^2) = w - +w'$，并且 $s(L^3) = t(L^4) = w + -w'$，其中某个 $w, w' \in \mathsf{Mon}(+, -)$；并假设第一个 $\pm$ 处 $w$ 与 $w'$ 之间的切络分支是第 $i$ 个，而第二个 $\pm$ 处的分支是第 $(i+1)$ 个（因此二者不同）。定义态射 $A \hat{\otimes} A \longrightarrow A$ 如下

$$\mu^{\cup}_{L^1_i}(x \otimes y) := x\kappa y \qquad \mu^{\cap}_{L^2_i}(x \otimes y) := yx$$
$$\mu^{\cup}_{L^3_i}(x \otimes y) := y\kappa^{-1} x \qquad \mu^{\cap}_{L^4_i}(x \otimes y) := xy$$

线性延拓。同样地，定义

$$\check{\mu}^{\cup}_i(L^1) := L^1 \circ (\uparrow_w \otimes \cup \otimes \uparrow_{w'}) \qquad \check{\mu}^{\cap}_i(L^2) := (\uparrow_w \otimes \cap \otimes \uparrow_{w'}) \circ L^2$$
$$\check{\mu}^{\cup}_i(L^3) := L^3 \circ (\uparrow_w \otimes \cup \otimes \uparrow_{w'}) \qquad \check{\mu}^{\cap}_i(L^4) := (\uparrow_w \otimes \cap \otimes \uparrow_{w'}) \circ L^4$$

记号 3.5。给定线性映射 $g : A^{\otimes p} \longrightarrow A^{\otimes q}$、 $n \ge 1$ 和 $1 \le i \le n$，记作

$$g_{(n,i)} = g_{(i)} := \mathrm{Id}^{\hat{\otimes}(i-1)} \hat{\otimes} g \hat{\otimes} \mathrm{Id}^{\hat{\otimes}(n-i)} : A^{\hat{\otimes} p+n-1} \longrightarrow A^{\hat{\otimes} q+n-1}.$$

以下结果是标准的。这里我们根据当前设置对其进行了调整。

命题 *3.6.* 设 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ 是一个具有 $n$ 个分支的开辫，并且如上所述，$L^1$、$L^2$、$L^3$、$L^4$ 也具有 $n$ 个分支。设 $L'$ 是另一个开辫。对于 $1 \leq i \leq n$，令 $\check{}\,\Delta_i(L)$（分别为 $\check{}\,\varepsilon_i(L)$、$\check{}\,S_i(L)$）表示由 $L$ 对 $i$ 个分支中的第 $L_i$ 个进行加倍（分别为移除、反转定向）后得到的缠结。则

$$\begin{aligned} Z_A(\check{\mu}_i^{\bullet}(L^j)) &= (\mu^{\bullet}_{L_i^j})_{(i)}(Z_A(L^j)) \\ Z_A(L \otimes L') &= Z_A(L) \otimes Z_A(L') \\ Z_A(\check{\Delta}_i(L)) &= \Delta_{(i)}(Z_A(L)) \\ Z_A(\check{\varepsilon}_i(L)) &= \varepsilon_{(i)}(Z_A(L)) \\ Z_A(\check{S}_i(L)) &= (S_{L_i})_{(i)}(Z_A(L)) \end{aligned}$$

其中 $\bullet = \cup\check{}, \check{}\cap, \cup, \check{}\cap$ 若 $j = 1,2、3、4$，则依次成立。

**3.4. 普适不变量的函子性**。 如果我们将讨论范围限定为向上缠结，那么万有缠结不变量可以视为一个强幺半函子，具体如下：给定一个（拓扑）带状霍普夫代数 $A \in \mathsf{Mod}^{k[[h]]}$，令 A 表示其对象为非负整数、且 ®

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(n,m) = \begin{cases} \emptyset, & n \neq m, \\ U(A^{\hat{\otimes} n} \times \Sigma_n), & n = m, \end{cases}$$

其中 $U : \mathsf{Mod}^{k[[h]]} \,{}^{\times}\mathsf{Grp} \longrightarrow \mathsf{Set}$ 表示典范遗忘函子。复合运算定义如下：若 $f = (u, \sigma)$ 和 $g = (v, \tau)$ 是 A 中的态射，则

$$g \circ f := (u \cdot \sigma_*^{-1} v \ , \ \tau \circ \sigma),$$

其中 $\sigma_*^{-1}$: $A^{\hat{\otimes} n} \longrightarrow A^{\hat{}\otimes n}$ 是由 $\sigma^{-1}$ 和 $\mathsf{Mod}^{k[[h]]}$ 的对称编织所诱导的因子置换映射，而 $\tau \circ \sigma$ 表示对称群中元素的双射之复合。该复合运算的结合性显然由 $\sigma_*^{-1}$ 是代数映射以及 $(\tau\circ\sigma)_* = \tau_*\circ\sigma_*$ 这一事实得出。对象 $n$ 的恒等态射为这一对 $(1 \hat{} \otimes \cdots \hat{}\otimes 1\,, \mathrm{Id})$。这个范畴关于整数加法和乘积构成严格幺半范畴

$$f \otimes f' := (u \hat{\otimes} u', \sigma \otimes \sigma')$$

具有 $f' = (u', \sigma') \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(m, m)$ 以及 $\sigma \otimes \sigma' \in \Sigma_{n+m}$ 块置换。幺半结构的单位元是整数零。

**命题 3.7**。 设 $A$ 是一个（拓扑）带状霍普夫代数，并设 A 是由 $A$ 按照前述方式诱导出的严格幺半范畴。那么，万有缠结不变量诱导出一个强幺半函子

$$Z_A : \mathcal{T}^{\mathrm{up}} \longrightarrow \mathsf{A}.$$

证明。 给定一个由 $n$ 个分支组成的向上缠结 $L$，回顾一下，我们总是假设这些分支按照源 $+^n \in \mathcal{T}$ 中的顺序递增排列。记 $\sigma_L \in \Sigma_n$ 为 $L$ 所诱导的置换，即 $\sigma(i)$ 是在第 $i$ 个位置与靶 $+^n \in \mathcal{T}$ 相交的分支的标签。

[3]约定：若第 $i$ 个分支从南向北延伸，则新的第 $i$ 个分支位于东侧，新的第 $(i+1)$ 个分支位于西侧，其余分支的顺序相应调整。

函子定义如下：对象 $+^n$ 映射到 $n \geq 0$，而如前所述的向上缠结 $L$ 映射到有序对 $(Z_A(L)\ \sigma_L)$。由此得到的映射是函子且为强幺半，这直接由 A 的构造可知。□

注 3.8。请注意，在研究普适不变量时，考虑旋转缠结比考虑立方体中的一般缠结自然得多。事实上，普适 $R$矩阵及其逆元 $R^{\pm 1}$ 以及平衡元及其逆元 $\kappa^{\pm 1}$ 都有几何对应物 $X^{\pm}$ 和 $C^{\pm}$，此外没有其他构件需要考虑。进一步说，若放宽旋转缠结的概念（粗略而言，即允许虚交叉），那么可以将普适不变量视为一种特定的幺半自然变换，它推广了命题 3.6和命题3.7。这将是即将发表的一篇论文的主题 [Bec23b]。

3.5. **与 Reshetikhin-Turaev 不变量的关系。** 众所周知，带状 Hopf 代数 $A$ 在 $k[[h]]$ 上的普适不变量 $Z_A$ 支配由带状范畴 $\mathsf{Mod}_A$ 的有限秩左 $A$-模 [ 所产生的 Reshetikhin-Turaev 不变量 Oht02b, Tur16], , 其中若 $V \cong \bigoplus_{\text{有限}} k[[h]]$，则 $\mathsf{Mod}_A$ 是“有限秩”的 $k[[h]]$-模。

更准确地说，令$\mathcal{T}_{\mathsf{Mod}_A}$ 为缠结的带状范畴，其中各分支由 $\mathsf{Mod}_A$ 的元素着色，并令 $RT : \mathcal{T}_{\mathsf{Mod}_A} \longrightarrow \mathsf{Mod}_A$ 为 Reshetikhin-Turaev 函子不变量。给定一个向上排序的 $n$ 分支缠结 $L$，为方便起见，假设各分支按照源 $+^n \in \mathcal{T}$中 $L$的顺序递增排列。记 $\sigma = \sigma_L \in \Sigma_n$ 为 $L$所诱导的置换，即 $\sigma(i)$ 是在第 $i$ 个位置与 $L$ 的靶 $+^n \in \mathcal{T}$相交的分支标签。

给定 $(V_i, \rho_{V_i}) \in \mathsf{Mod}_A$, $1 \leq i \leq n$，若记

$$RT(L; V_1, \dots, V_n) \in \mathrm{Hom}_A(V_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} V_n, V_{\sigma(1)} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} V_{\sigma(n)})$$

为 $RT$ 作用于 $L$ 所得的值，其中第 $i$ 个分支以 $V_i$着色，那么我们有

$$RT(L; V_1, \dots, V_n) = \sigma_* \circ (\rho_{V_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \rho_{V_n})(Z_A(L)), \tag{3.14}$$

其中 $\sigma_* \colon V_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} V_n \longrightarrow V_{\sigma(1)} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} V_{\sigma(n)}$ 是由 $\sigma$ 以及 $\mathsf{Mod}^{k[[h]]}$ 的对称编织所诱导的映射，该对称编织会置换各因子。

特别地，向上缠结的普适不变量也可用于恢复链环的 Reshetikhin-Turaev 不变量。事实上，任意链环都是弦链 $L$ 的辫闭包 $\mathrm{cl}(L)$，也就是说，它是一个向上缠结 $L$，其诱导置换 $\sigma_L$ 是恒等态射。若 $(V, \rho_V) \in \mathsf{Mod}_A$，记 $\mathrm{tr}_q^V \colon A \longrightarrow k[[h]]$ 为 $V$ 的量子迹，$\mathrm{tr}_q^V(x) := \mathrm{tr}^V(\kappa x)$，其中 $\mathrm{tr}^V \colon \mathrm{End}^{k[[h]]}(V) \longrightarrow k[[h]]$ 为（范畴）迹。则有如下等式：

$$RT(\mathrm{cl}(L); V_1, \dots, V_n) = (\mathrm{tr}_q^{V_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathrm{tr}_q^{V_n})(Z_A(L)), \tag{3.15}$$

其中，$\mathrm{cl}(L)$ 的分支顺序由 $L$ 的顺序诱导，并且我们作了如下识别：$\mathrm{Hom}^{k[[h]]}(k[[h]], k[[h]]) \cong k[[h]]$。

## 4. Gaussian calculus

本节将介绍本文的核心代数对象——拓扑带状霍普夫代数 $\mathbb{D}$。我们还将进行详尽的讨论，以说明使用

生成级数的理由，并给出具体示例。之后，我们将回顾 Bar- Natan - van der Veen 提出的一种新颖技巧，该技巧被称为 高斯演算，用于代数 $\mathbb{D}$[BV21]。

生成级数和高斯演算将是研究满足 $\mathbb{D}$ 的万有缠结不变量时不可或缺的工具。正如我们在该代数（以及许多其他拓扑带状霍普夫代数）中所看到的，万有 $R$-矩阵由无穷和给出，因此 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 的表达式难以处理，不变量也几乎无法计算。高斯演算将提供一种策略，使我们能够在 $\varepsilon$ 的幂模意义下，以多项式时间有效计算万有不变量。

4.1. $\mathbb{D}$ 代数。设 $X$ 为一个集合，并将由 $X$ 生成的自由 $k$-代数记为 $k\langle\langle X\rangle\rangle$。由 $X$ 生成的拓扑自由 $k[[h]]$-代数是 $k[[h]]$-代数 $k\langle\langle X\rangle\rangle[[h]]$，其中的元素是系数属于 $k\langle\langle X\rangle\rangle$ 的形式级数，并赋予其作为拓扑自由 $k[[h]]$-模的 $h$-进拓扑。若 $R$ 是 $k\langle\langle X\rangle\rangle[[h]]$ 的子集，则将 $k\langle\langle X\rangle\rangle[[h]]$ 对由 $R$ 生成的双边理想的 $h$- 进闭包取商，所得代数称为受关系 $R$ 约束、由 $X$ 拓扑生成的 $k[[h]]$-代数。

在本小节余下部分中，我们固定 $k$ 为环 $\mathbb{Q}_\varepsilon := \mathbb{Q}[\varepsilon]$，即以未知数 $\varepsilon$为变量的有理系数多项式环。

现在我们定义主要代数对象。代数 $\mathbb{D}$ 是由 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{t},\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}$ 拓扑生成的 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-代数，并满足以下关系

$$[\boldsymbol{t},-]=0 \quad , \quad [\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}]=\boldsymbol{x} \quad , \quad [\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}]=-\boldsymbol{y} \quad , \quad [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]_q=\frac{1-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}}{h}, \tag{4.1}$$

其中 $q:=e^{h\varepsilon}$, $[u,v]:=uv-vu$, $[u,v]_q:=uv-q\cdot vu$, $\boldsymbol{A}:=e^{-h\varepsilon\boldsymbol{a}}$ 以及 $\boldsymbol{T}:=e^{-h\boldsymbol{t}}$。指数函数应理解为幂级数，$e^u=1+u+u^2/2+\cdots$。

以下命题描述了 $\mathbb{D}$的结构。令 $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}$ 和$[n]_q! := [n]_q[n-1]_q\cdots[1]_q$，并记 $\boldsymbol{b}:=\boldsymbol{t}+\boldsymbol{a}\varepsilon$（显然可以用它替换生成元 $\boldsymbol{t}$）。

**命题 4.1** ([BV21]). 代数 $\mathbb{D}$ 是一个定义在$\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$上的拓扑带状霍普夫代数。其余乘法和反 *antipode* 由下式确定

$$\begin{aligned}
\Delta(\boldsymbol{y}) &= 1\hat{\otimes}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\hat{\otimes}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A} &&, \quad S(\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{A})^{-1}\\
\Delta(\boldsymbol{t}) &= \boldsymbol{t}\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\boldsymbol{t} &&, \quad S(\boldsymbol{t})=-\boldsymbol{t}\\
\Delta(\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{a}\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\boldsymbol{a} &&, \quad S(\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}\\
\Delta(\boldsymbol{x}) &= 1\hat{\otimes}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\hat{\otimes}\boldsymbol{A} &&, \quad S(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}^{-1},
\end{aligned}$$

而余单位 $\epsilon$ 将所有生成元映射为0。通用的 $R$-矩阵和平衡元由下式给出

$$\boldsymbol{R}=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{h^{n+m}}{[m]_q!n!}\boldsymbol{y}^m\boldsymbol{b}^n\hat{\otimes}\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{x}^m \quad , \quad \boldsymbol{\kappa}=+\sqrt{\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}}.$$

在上述命题中，正平方根仍应理解为形式幂级数，$\sqrt{1+u}=1+u/2-u^2/8+\cdots$。

注记 4.2。 代数 $\mathbb{D}$ 是一个量子包络代数的 Drinfeld 双[CP94], , 与 Jimbo-Drinfeld $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ 代数的情形“几乎”相同。不仅如此，代数 $\mathbb{D}$ 源自最简单的非平凡李代数（定义在 $\mathbb{Q}$上），即唯一的非阿贝尔二维李代数 $\mathfrak{h}$，其括号为 $[e_1,e_2]=e_1$。更

准确地说，令 $\mathbb{B}$ 为由 $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{b}$ 拓扑生成的 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-代数，并满足唯一关系 $[\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}]=\varepsilon\boldsymbol{y}$。通过如下定义，它恰好是一个拓扑霍普夫代数

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{y}) &= 1\hat{\otimes}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\hat{\otimes}\boldsymbol{B} &&, \qquad S(\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{y}\boldsymbol{B}^{-1}\\ \Delta(\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{b}\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\boldsymbol{b} &&, \qquad S(\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{B}:=e^{-h\boldsymbol{b}}$。注意，这是对 $\mathfrak{h}$ 的万有包络代数 $U(\mathfrak{h})$ 的量子化，并具有其标准 Hopf 代数结构（令 $\varepsilon=1$ 后）。容易看出，$\mathbb{B}$ 是拓扑自由的；具体而言，排序 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-同态

$$\mathcal{O}:\mathbb{Q}_\varepsilon[y,b][[h]]\xrightarrow{\cong}\mathbb{B} \qquad , \qquad y^pb^q\mapsto\boldsymbol{y}^p\boldsymbol{b}^q$$

是拓扑 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-模的一个同构（注意，显然的同构 $\mathbb{Q}_\varepsilon[y,b]\cong\bigoplus_{p,\ q\geq 0}\mathbb{Q}_\varepsilon y^pb^q$ 表明 $\mathbb{Q}_\varepsilon[y,b]$ 是一个自由 $\mathbb{Q}_\varepsilon$- 模）。

类比于 $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ 的情形，[CP94]，令 $\mathbb{B}$ 为由 $\widetilde{\boldsymbol{y}}:=h\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{b}:=h\boldsymbol{b}$ 生成的 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-子代数。令 $\mathbb{A}:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]}(\mathbb{B},\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]])$ 为 $_\sim\mathbb{B}$ 的对偶模。仔细分析可知，$\mathbb{A}$ 在拓扑意义下由两个元素 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{x}$ 生成，并满足唯一关系 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}]=\boldsymbol{x}$；令

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{a}\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}\boldsymbol{a} &&, \qquad S(\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}\\ \Delta(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}\hat{\otimes}1+\boldsymbol{A}\hat{\otimes}\boldsymbol{x} &&, \qquad S(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}:=e^{-h\varepsilon\boldsymbol{a}}$ 将 $\mathbb{A}$ 变为拓扑霍普夫代数。此外，通过排序映射，$\mathbb{A}$ 也是一个拓扑自由的 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-模

$$\mathcal{O}:\mathbb{Q}_\varepsilon[a,x][[h]]\xrightarrow{\cong}\mathbb{B} \qquad , \qquad a^px^q\mapsto\boldsymbol{a}^p\boldsymbol{x}^q.$$

于是，代数 $\mathbb{D}$ 作为 Drinfeld 双 $\mathbb{D}:=\mathcal{D}(\mathbb{B})=\mathbb{A}\hat{\otimes}\mathbb{B}$ 出现，其 Hopf 代数结构由 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 的 Hopf 代数结构以及自然配对 $\langle-,-\rangle:\mathbb{A}\hat{\otimes}\widetilde{\mathbb{B}}\longrightarrow\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$确定。

以下命题可直接由上述讨论及（3.1）得出：

**命题 4.3**。代数 $\mathbb{D}$ 是拓扑自由的。更确切地说，排序映射

$$\mathcal{O}:\mathbb{Q}_\varepsilon[y,t,a,x][[h]]\xrightarrow{\cong}\mathbb{D} \qquad , \qquad y^pt^qa^rx^s\mapsto\boldsymbol{y}^p\boldsymbol{t}^q\boldsymbol{a}^r\boldsymbol{x}^s$$

是拓扑 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-模的一个同构。

注 4.4。拓扑霍普夫代数 $\mathbb{D}_{\varepsilon=1}:=\mathbb{D}/(\varepsilon-1)\mathbb{D}$ 可视为 $U(\mathfrak{gl}_2)$ 的一种量子化，其中 $\mathfrak{gl}_2$是（有理）李代数$\mathfrak{gl}_2$的万有包络代数；其方式与例 3.2 相同。利用 $\mathfrak{gl}_2$的生成元$H$、$X$、$Y$、$Z$即可轻易验证这一点，其中 $H$、$X$、$Y$构成一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组，$Z$是中心元；将$H$ 替换为生成元 $H'=(H+Z)/2$，因为对于 $h=0$，$q$-交换子 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]_q$ 变为$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=2\varepsilon\boldsymbol{a}+\boldsymbol{t}$。

更进一步，李代数投影 $\mathfrak{gl}_2\twoheadrightarrow\mathfrak{sl}_2$ 可以提升为满射 Hopf代数同态 $\mathbb{D}_{\varepsilon=1}\twoheadrightarrow U_h(\mathfrak{sl}_2)$，其核为由 $\boldsymbol{t}$生成的子模。

前面的注释结合式（3.15）可推出

**推论 4.5** ([BV21])。$\mathbb{D}$ 的普适不变量 $Z_{\mathbb{D}}$ 决定了 $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ 的普适不变量 $Z_{U_h(\mathfrak{sl}_2)}$，因此也决定了所有带色琼斯多项式。

**4.2. 高斯表达式的一个启发性示例。** 现在令 $k$ 为一个作为阿贝尔群具有唯一可除性的环，即 $\mathbb{Q} \subseteq k$。如上所述，我们主要关注如何以有效的方式，计算选定的、定义在某个幂级数环 $k[[h]]$ 上的拓扑带状霍普夫代数 $A$ 对应的普适不变量 $Z_A$。若要根据一个带有 $r$个珠子的图计算纽结的普适不变量，请注意我们必须进行复合映射

$$k[[h]] \longrightarrow A^{\hat{\otimes} r} \xrightarrow{\mu\hat{\otimes}\mathrm{Id}} A^{\hat{\otimes} r-1} \xrightarrow{\mu\hat{\otimes}\mathrm{Id}} A^{\hat{\otimes} r-2} \xrightarrow{\mu\hat{\otimes}\mathrm{Id}} \cdots \xrightarrow{\mu\hat{\otimes}\mathrm{Id}} A \tag{4.2}$$

其中，第一个箭头将 $1 \in k[[h]]$ 映射到由 $r$ 珠子确定的元素。主要问题在于，这个复合映射通常极难理解，因为它是非交换且无限秩的。这意味着，我们希望$\hat{\ }$改为对集合 $\mathrm{Hom}^{k[[h]]}(A^{\otimes p},\ A^{\otimes q})$ 以及复合律

$$\mathrm{Hom}_{k[[h]]}(A^{\hat{\otimes} p}, A^{\hat{\otimes} q}) \hat{\otimes} \mathrm{Hom}_{k[[h]]}(A^{\hat{\otimes} q}, A^{\hat{\otimes} r}) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{k[[h]]}(A^{\hat{\otimes} p}, A^{\hat{\otimes} r}),$$

给出另一种描述，使得前面那一串映射的复合变得可行。

举例来说，考虑 $V$，$W$ 有限秩自由 $k$-模（例如，两个有限维向量空间）。典范映射

$$V^* \otimes W \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_k(V, W) \qquad , \qquad \xi \otimes w \mapsto (v \mapsto \xi(v)w)$$

是一个同构，其逆元通过将线性映射 $T$ 映射到 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \otimes T(e_i)$ 给出，其中 $(e_1,$ ……，$e_n)$ 是 $V$ 的一组基，而 $(\omega_1,$ ……，$\omega_n)$ 是其对偶基。在这个同构下，映射的复合恰好由 $k$-模与其对偶之间的对偶配对 $\langle -,\ -\rangle$ 给出，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_k(V,W) \otimes \mathrm{Hom}_k(W,U) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Hom}_k(V,U) \\ \cong\uparrow & & \cong\uparrow \\ V^* \otimes W \otimes W^* \otimes U & \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\langle -,-\rangle\otimes\mathrm{Id}} & V^* \otimes U \end{array}$$

现在假设 $V$，$W$ 是秩为可数无限的自由 $k$-模，为方便起见，记作 $V = k[x]$ 和 $W = k[y]$。注意，$V^* \cong k[[\xi]]$，对于

$$\mathrm{Hom}_k(\bigoplus_i k \cdot x^i, k) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_k(k \cdot x^i, k) \cong \prod_i k \cdot \xi^i.$$

现在，典范映射

$$k[x]^* \otimes k[y] \cong k[[\xi]] \otimes k[y] \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(k[x], k[y])$$

用这些记号表示为

$$\left(\sum_i \lambda_i \xi^i\right) \otimes p(y) \mapsto \left(x^i \mapsto \lambda_i p(y)\right)$$

仍然是单射，但不是同构，因为“重命名”映射 $T(p(x)) := p(y)$ 不可能属于其像。为了将此映射提升为同构，我们便不得不将其扩展到它的 $\xi$-进完备化 ¤

$k[[\xi]] \otimes k[y] \cong k[y][[\xi]]$，

$$\begin{array}{ccc} & & k[y][[\xi]] \\ & & \uparrow \\ k[[\xi]] \otimes k[y] & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(k[x],\ k[y]) \end{array}$$

根据图的交换性，虚线箭头必须定义为

$$\sum_i p_i(y)\xi^i \mapsto (x^i \mapsto p_i(y)). \tag{4.3}$$

注意，尽管我们转到了 $k[[\xi]]\otimes k[y]$ 的完备化，但仍然像基例中那样，存在 $\xi$ 与 $x$ 之间的对偶性。虚线箭头确实是一个同构，因为

$$\mathrm{Hom}_k(\bigoplus_i k\cdot x^i, k[y]) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_k(k\cdot x^i, k[y]) \cong \prod_i k[y]\cdot\xi^i \cong k[y][[\xi]]$$

并且很容易验证，该映射恰好由（4.3）给出。在无限可数情形下，复合映射仍由对偶配对给出，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_k(k[x],k[y])\otimes\mathrm{Hom}_k(k[y],k[z]) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Hom}_k(k[x],k[z]) \\ \cong\uparrow & & \cong\uparrow \\ k[y][[\xi]]\otimes k[z][[\eta]] & \xrightarrow{\langle-\rangle_{y,\eta}} & k[z][[\xi]] \end{array}$$

其中我们用 $\eta$ 表示与 $y$ 对偶的变量，而 $\langle-\rangle_{y,\eta}$ 是这两个变量之间的对偶配对，$\eta^i(y^j)=\delta_{ij}$。更准确地说，若 $p_i(y)=\sum_r^{N_i}\lambda_r^i y^r$，则

$$\left\langle \left(\sum_i p_i(y)\xi^i\right)\otimes\left(\sum_j q_j(z)\eta^j\right)\right\rangle_{y,\eta} := \sum_i\left(\sum_r^{N_i}\lambda_r^i q_r(z)\right)\xi^i. \tag{4.4}$$

我们了解到，将映射替换为幂级数，意味着追踪该映射作用于所有基元素后所得的像。例如，上文的重命名映射 $T$ 由 $T=\sum_i y^i\xi^i$给出。然而，追踪无穷和实在过于繁琐。若要处理幂级数，最方便的做法是在每个加项中预先引入一个因子 $1/i!$ 这样 $T$ 就会变成指数函数，

$$T=\sum_i \frac{1}{i!}y^i\xi^i = e^{y\xi}$$

从而得到一个紧凑、易于处理的表达式。我们可以通过稍微修改同构（4.3）来实现这一点：

$$\sum_i p_i(y)\xi^i \mapsto (x^i \mapsto i!p_i(y)). \tag{4.5}$$

这样一来，对偶变量 $\eta$ 与 $y$ 之间的配对现在变为 $\eta^i(y^j)=i!\ \delta_{ij}$而公式（4.4）现在写作

$$\left\langle \left(\sum_i p_i(y)\xi^i\right)\otimes\left(\sum_j q_j(z)\eta^j\right)\right\rangle_{y,\eta} := \sum_i\left(\sum_r^{N_i} r!\lambda_r^i q_r(z)\right)\xi^i. \tag{4.6}$$

注 4.6。为方便起见，我们将 $k[y][[\xi]]\otimes k[z][[\eta]]$ 与其在以下映射下的像等同 r 典范单射

$$k[y][[\xi]]\otimes k[z][[\eta]] \hookrightarrow k[y,z][[\xi,\eta]] \qquad , \qquad P(y,\xi)\otimes Q(z,\eta)\mapsto P(y,\xi)Q(z,\eta).$$

这样我们就能得到更简化的表达式，例如，两个“重命名”映射的复合映射就是$\langle e^{y\xi+z\eta}\rangle_{y,\eta}=e^{z\xi}$.

我们提醒读者，配对$\langle - \rangle_{y,\eta}$并不 延拓到 $k[y,z][[\xi,\eta]]$：例如，配对$\langle \sum_i y^i\eta^i\rangle_{y,\eta} = \sum_i 1$ 没有良好定义。

注意 4.7。 由于我们主要研究由生成元和关系给出的代数（它们作为模是自由的），因此改用 $V = k[x_1,\dots,x_n]$ 而不写 $V = k[x]$ 更方便（显然二者都是同构的 $k$-模）。这样做几乎没有改变任何内容：现在我们有一个 $k$-模同构

$$k[y_1,\dots,y_m][[\xi_1,\dots,\xi_n]] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_k(k[x_1,\dots,x_n], k[y_1,\dots,y_m]) \tag{4.7}$$

其定义为（与（4.5）对比）

$$\sum_{i_1,\dots,i_n\geq 0} p_{i_1,\dots,i_n}\xi^{i_1}\cdots\xi^{i_n} \mapsto (x^{i_1}\cdots x^{i_n} \mapsto i_1!\cdots i_n! p_{i_1,\dots,i_n}), \tag{4.8}$$

其中 $p_{i_1,\dots,i_n} = p_{i_1,\dots,i_n}(y_1,\dots,y_m)$。和之前一样，我们必须相应地修改配对，即 $(\eta_1^{j_1}\cdots\eta_m^{j_m})(y_1^{i_1}\cdots y_m^{i_m}) = i_1!\cdots i_m!\delta_{i_1 j_1}\cdots\delta_{i_m j_m}$，以及公式（4.6）。这样一来，我们可以将多变量重命名映射的复合写为 $\langle e^{\sum_i (y_i\xi_i + z_i\eta_i)}\rangle_{y,\eta} = e^{\sum_i z_i\xi_i}$.

设 $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ 为形式变量。给定一个 $k$-线性映射 $g\colon V \longrightarrow W$ between $k$-模，有一个自然的扩张

$$\widehat{g}: V[[\zeta_1,\dots,\zeta_n]] \longrightarrow W[[\zeta_1,\dots,\zeta_n]]$$

定义如下

$$\widehat{g}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n\geq 0} v_{i_1,\dots,i_n}\zeta_1^{i_1}\cdots\zeta_n^{i_n}\right) := \sum_{i_1,\dots,i_n\geq 0} g(v_{i_1,\dots,i_n})\zeta_1^{i_1}\cdots\zeta_n^{i_n}$$

我们称其为 $g$ 的 $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$-扩张。以下引理将非常有用：

**引理 4.8**。 设 $V_1$、$V_2$ 是可数无限秩的自由 $k$-模，并带有指定同构 $\mathcal{O}_1$：$k[x_1,\dots,x_n] \xrightarrow{\cong} V_1$ 和 $\mathcal{O}_2$：$k[y_1,\dots,y_m] \xrightarrow{\cong} V_2$。与 $k[y_1,\dots,y_m][[\xi_1,\dots,\xi_n]]$ 对应的元素

$$\mathcal{O}_2^{-1}\circ f\circ\mathcal{O}_1 : k[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow k[y_1,\dots,y_m]$$

在同构 (4.7) 下等于

$$(\widehat{\mathcal{O}_2^{-1}}\circ\widehat{f}\circ\widehat{\mathcal{O}_1})(e^{x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n}),$$

其中所有帽号均表示 $(\xi_1,\dots,\xi_n)$-扩张。

证明。 若 $p_{i_1,\dots,i_n} := (\mathcal{O}_2^{-1}\circ f\circ\mathcal{O}_1)(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n})$，则根据定义，与 $\mathcal{O}_2^{-1}\circ f\circ\mathcal{O}_1$ 对应的幂级数为

$$\sum_{i_1,\dots,i_n\geq 0}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}p_{i_1,\dots,i_n}\xi_1^{i_1}\cdots\xi_n^{i_n}.$$

由于在帽映射中，变量 $\xi_1,\dots,\xi_n$ 被视为常数，这恰好就是元素（“$\mathcal{O}_2^{-1}\circ\widehat{f}\circ$”$\mathcal{O}_1$)($e^{x_1\xi_1+\dots+x_n\xi_n}$)。□

4.3. **扰动高斯表达式的收缩**。自由无限可数秩模之间有许多有趣的 $k$-线性映射，可以表示为有限表达式的指数函数，或表示为指数表达式与其他对象的乘积。

**Ex例 4.9**。 (1) 恒等态射 $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ 对应于 $e^{x_1\xi_1+\dots+x_n\xi_n}$。

(2) 对于 $n \geq 0$，“乘以 $x^n$”的映射， $\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$, $x^i \mapsto x^{i+n}$对应于 $e^{x\xi}x^n$。(3) “导子”映射 $\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$, $x^i \mapsto ix^{i-1}$ 对应于 $e^{x\xi}\xi$。(4) $\mathbb{Q}[x]$的乘法律，即 $\mathbb{Q}[x_1,x_2] \cong \mathbb{Q}[x]\otimes\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$,$x_1^n x_2^m \mapsto x^{m+n}$，对应于元素 $e^{x(\xi_1+\xi_2)}$。此处添加了子指标以区分两个生成元。

下面给出一个更复杂的例子。

**例 4.10** ([BV21])**.** 设 $A$ 为（有理）韦尔代数，即由 $\mathbb{Q}$-代数自由生成的 $\boldsymbol{p}$， $\boldsymbol{x}$ 并满足关系 $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}] = 1$。递归应用$\boldsymbol{xp} = \boldsymbol{px} - 1$，我们可以将 $A$ 的任意元素写成“有序单项式”$\sum_i \boldsymbol{p}^{n_i}\boldsymbol{x}^{m_i}$之和，这相当于说存在一个同构

$$\mathcal{O} : \mathbb{Q}[p,x] \xrightarrow{\cong} A \qquad , \qquad p^n x^m \mapsto \boldsymbol{p}^n\boldsymbol{x}^m$$

(与命题 4.3比较）。在此同构下，$A$ 的乘法可视为映射 $\mathbb{Q}[p_1,x_1,p_2,x_2] \longrightarrow \mathbb{Q}[x,p]$, 它将单项式$p_1^{n_1}x_1^{m_1}p_2^{n_2}x_2^{m_2}$映射为 $\mathcal{O}^{-1}(\boldsymbol{p}^{n_1}\boldsymbol{x}^{m_1}\boldsymbol{p}^{n_2}\boldsymbol{x}^{m_2})$。通过我们的对应

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[p_1,x_1,p_2,x_2],\mathbb{Q}[x,p]) \cong \mathbb{Q}[p,x][[\pi_1,\xi_1,\pi_2,\xi_2]]$$

在（4.7）中所述的对应下，韦尔代数的乘法对应于元素

$$e^{p(\pi_1+\pi_2)+x(\xi_1+\xi_2)-\xi_1\pi_2}. \tag{4.9}$$

关键观察是 $A[[\pi_1,\xi_1,\pi_2,\xi_2]]$ 中的以下等式：

$$e^{\boldsymbol{x}\xi_1}e^{\boldsymbol{p}\pi_2} = e^{\boldsymbol{p}\pi_2}e^{\boldsymbol{x}\xi_1}e^{-\xi_1\pi_2}. \tag{4.10}$$

利用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式很容易看出这一点，因为对易子 $[\pi_2\boldsymbol{p},\xi_1\boldsymbol{x}]$ 是中心元（等式两边都等于 $e^{\boldsymbol{x}\xi_1+\boldsymbol{p}\pi_2-\frac{1}{2}\xi_1\pi_2}$）。

于是，根据引理4.8，与乘法 $\mu\colon A\otimes A \longrightarrow A$ 对应的韦尔代数幂级数为

$$\begin{aligned}
(\widehat{\mathcal{O}^{-1}} \circ \widehat{\mu} \circ \widehat{\mathcal{O}\otimes\mathcal{O}})(e^{p_1\pi_1+x_1\xi_1+p_2\pi_2+x_2\xi_2}) = \\
&= (\widehat{\mathcal{O}^{-1}} \circ \widehat{\mu})(e^{(\boldsymbol{p}\otimes 1)\pi_1}e^{(\boldsymbol{x}\otimes 1)\xi_1}e^{(1\otimes\boldsymbol{p})\pi_2}e^{(1\otimes\boldsymbol{x})\xi_2}) \\
&= \widehat{\mathcal{O}^{-1}}(e^{\boldsymbol{p}\pi_1}e^{\boldsymbol{x}\xi_1}e^{\boldsymbol{p}\pi_2}e^{\boldsymbol{x}\xi_2}) \\
&\overset{(4.10)}{=} \widehat{\mathcal{O}^{-1}}(e^{\boldsymbol{p}\pi_1}e^{\boldsymbol{p}\pi_2}e^{\boldsymbol{x}\xi_1}e^{\boldsymbol{x}\xi_2}e^{-\xi_1\pi_2}) \\
&= e^{p(\pi_1+\pi_2)+x(\xi_1+\xi_2)-\xi_1\pi_2}
\end{aligned}$$

如（4.9）中所述。

注记 4.11。 为简化记号，我们将用同一个符号表示 $k$-线性映射及其根据（4.7）对应的幂级数，并称之为 生成

级数 或线性映射的生成函数，因此在前面的例子中，我们只需写作

$$\mu = e^{p(\pi_1+\pi_2)+x(\xi_1+\xi_2)-\xi_1\pi_2}.$$

此时，读者应该已经认识到指数函数表达式的重要性，更准确地说，是二次指数形式的表达式，即所谓的高斯表达式，以及高斯表达式与其他某个级数的乘积，我们称之为扰动高斯表达式。如果我们要专注于高斯元，就需要一种有效配对高斯生成级数的方法（该操作对应于 $k$- 个线性映射的复合映射）。为此，尽可能展开配对映射的源会很方便。

对于 $n > 0$令 $r_1, \dots, r_{2n}$和 $s_1, \dots, s_{2n}$为未知量，我们将把它们解释为彼此的对偶。定义 $n$-元组 $r' = (r_1, \dots, r_n)$、 $r'' = (r_{n+1}, \dots, r_{2n})$、$s' = (s_1, \dots, s_n)$、 $s'' = (s_{n+1}, \dots, s_{2n})$，并令 $r = (r', r'')$和 $s = (s', s'')$。此外，令 $u' = (u_1, \dots, u_n)$、 $u'' = (u_{n+1}, \dots, u_{2n})$、 $v' = (v_1, \dots, v_n)$、 $v'' = (v_{n+1}, \dots, v_{2n})$为 $n$-元组未知量。此外，考虑 $1 \leq i, j \leq n$对应的 $n^2$ 个未知量 $w_{ij}$，并构造矩阵 $W = (w_{ij})$。

给定一个元素 $P \in k[r', s'', u'', v'][[r'', s', u', v'', W]]$（幂级数环中的变量应理解为相应的未知数），若存在， $s$沿 $r$的收缩 $P$，是幂级数$\langle P \rangle_{r,s} \in k[u'', v'][[u', v'', W]]$它由将 $P$ 中的每个乘积 $r_k^i s_k^j$ 替换为 $i!\delta_{ij}$得到。

记 $\mathcal{C}(k[r', s'', u'', v'][[r'', s', u', v'', W]])$ 为 $k$可沿[4]收缩的幂级数子模 $r$， $s$。于是我们有一个定义良好的 $k$模映射

$$\langle - \rangle_{r,s} : \mathcal{C}(k[r', s'', u'', v'][[r'', s', u', v'', W]]) \longrightarrow k[u'', v'][[u', v'', W]] \tag{4.11}$$

它以如下意义扩展了与复合映射相对应的配对：对于 $\ell = y$， $z$， $\xi$或 $\eta$，令 $\ell' = (\ell_1, \dots, \ell_n)$， $\ell'' = (\ell_{n+1}, \dots, \ell_{2n})$。如果

$$\varphi : \mathcal{C}(k[r', s'', u'', v'][[r'', s', u', v'', W]]) \longrightarrow k[y', y''][[\xi', \xi'']] \otimes k[z', z''][[\eta', \eta'']]$$

是一个 $k$-代数同态，使得

$$\varphi(r') = y' \quad , \quad \varphi(r'') = \eta'' \quad , \quad \varphi(s') = \eta' \quad , \quad \varphi(s'') = y''$$

并限制为一个 a $k$-代数映射

$$\varphi_{\text{restr}} : k[u'', v'][[u', v'', W]] \longrightarrow k[z', z''][[\xi', \xi'']],$$

那么我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(k[r', s'', u'', v'][[r'', s', u', v'', W]]) & \xrightarrow{\langle - \rangle_{r,s}} & k[u'', v'][[u', v'', W]] \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\text{restr}}} \\ k[y', y''][[\xi', \xi'']] \otimes k[z', z''][[\eta', \eta'']] & \xrightarrow{\langle - \rangle_{y,\eta}} & k[z', z''][[\xi', \xi'']] \end{array}$$

换言之，如果两个生成级数的乘积属于 $\varphi$ 的像，那么我们可以使用收缩来计算它们的配对（因此也能计算它们所对应线性映射的复合映射）。尽管看起来我们所得不多，但这里有一个关键区别：在映射 $\varphi$ 下，变量 $y', y''$ 现在是“对偶”的，具体来说， $\varphi(r') = y'$ 且 $\varphi(s'') = y''$。这使我们能够充分利用以下关于扰动高斯表达式收缩的定理来进行复合映射：

[4]这类似于可测函数中可积函数的集合。

**定理 4.12** (收缩，[BV21])。沿用上述记号，考虑矩阵 $W := (I-W)^{-1}$ 并设 $\bar{r} := r + vW$ 以及 $\bar{s} := W(s+u)$，其中我们将 $s$和 $u$ 视为用于矩阵乘法的列向量。则以下等式成立：

$$\left\langle e^{ru+vs+rWs} P(r,s) \right\rangle_{r,s} = \det(\widetilde{W})\ e^{v\widetilde{W}u} \left\langle P(\bar{r},\bar{s}) \right\rangle_{r,s}.$$

注意，矩阵（$I-W$）在 $k[[W]]$ 中确实可逆，因为其行列式模 $(w_{11}, \ldots, w_{nn})$ 等于 1。

4.4. **的生成级数** $\mathbb{D}$。现在，我们将前两小节中发展的高斯方法应用于第 $\mathbb{D}$ 节中的带状霍普夫代数4.1。根据命题 4.3，代数 $\mathbb{D}$ 是一个拓扑自由 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-模。根据命题 3.1，我们可以轻易地将同构（4.7）扩展到拓扑自由 $k[[h]]$-模：我们有一个类似的双射

$$k[y_1,\ldots,y_m][[\xi_1,\ldots,\xi_n]][[h]] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{k[[h]]}(k[x_1,\ldots,x_n][[h]], k[y_1,\ldots,y_m][[h]]) \tag{4.12}$$

其中，对应关系对 4.8）中的每个 $h$幂仍然相同。现在回顾（4.2，我们主要关心的是研究该 Hopf 代数的 $n$ 重张量积之间的映射。为了在同构 $\mathcal{O}$: $\mathbb{Q}_\varepsilon[y,t,a,x][[h]] \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}$下转到多项式环时追踪张量积的各个因子，我们考虑如下情形：给定一个有限有序集 $I = (i_1, \ldots, i_n)$，其中有 $n$ 个元素，将 $\ell_I = (\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_n})$ 记作 $\ell = y,\ t,\ a,\ x$。同样，根据命题 3.1，我们有一个同构

$$\mathcal{O}^{\hat{\otimes} I} : \mathbb{Q}_\varepsilon[y_I,t_I,a_I,x_I][[h]] \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}^{\hat{\otimes} n}. \tag{4.13}$$

将此同构与（4.12）结合起来，我们得到如下

**命题 4.13.** 设 $I$，$J$ 为有限有序集，且满足 $\#I = n$ 和 $\#J = m$。那么，双射 (4.7) 诱导出一个双射

$$\mathbb{Q}_\varepsilon[y_J,t_J,a_J,x_J][[\eta_I,\tau_I,\alpha_I,\xi_I]][[h]] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]}(\mathbb{D}^{\hat{\otimes} n}, \mathbb{D}^{\hat{\otimes} m})$$

其中 $\eta$、$\tau$、$\alpha$、$\xi$分别是 $y$、$t$、$a$、$x$的对偶变量。

此外，我们也可以将上一小节介绍的高斯演算用于带状霍普夫代数 $\mathbb{D}$的结构映射。它们的生成级数不是扰动高斯表达式，但其指数部分可以分成两个这样的表达式，具体含义如下。

$\mathbb{Q}_\varepsilon[y_J,t_J,a_J,x_J][[\eta_I,\tau_I,\alpha_I,\xi_I]][[h]]$ 中的生成级数若具有如下形式 $e^G$，则称为一个两步高斯

$$G = \begin{pmatrix} \tau_I & a_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_J \\ \alpha_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_J & \xi_I \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} \eta_I \\ x_J \end{pmatrix}$$

其中矩阵 $\Gamma_{k\ell}$ 的系数属于 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}h$，而 $\Lambda$ 是一个矩阵，其系数是由 $\mathcal{A}_i := e^{\alpha_i}$、$T_j := e^{-t_j h}$ 和 $h$构成的有限表达式，其中 $i \in I,\ j \in J$

令 $G_1$和 $G_2$分别表示 $G$的第一项和第二项，因此 $G = G_1 + G_2$。给定一个两步高斯 $e^G$，如果我们将 $y, x, \eta, \xi$视为常数，那么 $e^G$就是一个扰动高斯表达式 $e^{G_1}e^{G_2}$（其中扰动为 $e^{G_2}$）。或者，如果我们将 $t, a, \tau, \alpha$视为常数，那么 $e^G$就是一个带有常量扰动部分 $e^{G_1}$的扰动高斯表达式 $e^{G_2}e^{G_1}$。因此，我们仍然可以复合两步高斯

高斯元，并两次使用缩并定理 4.12：首先针对变量 $a, t, \tau, \alpha$，将 $y, x, \eta, \xi$ 视为常数，随后针对其余的 $y, x, \eta, \xi$。

**记号 4.14.** 若 $f\colon \mathbb{D}^{\otimes n} \longrightarrow \mathbb{D}^{\otimes m}$ 是一个 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-模映射，且 $I, J$ 是有限有序集的选取，其中 $\#I = n, \#J = m$，则记作

$$f_I^J := (\mathcal{O}^{\hat{\otimes} J})^{-1} \circ f \circ \mathcal{O}^{\hat{\otimes} I} : \mathbb{Q}_\varepsilon[y_I, t_I, a_I, x_I][[h]] \longrightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon[y_J, t_J, a_J, x_J][[h]]$$

其对应的生成级数（此处记号略有滥用）也记为 $f_I^J$。

以下关键定理极为深刻，并且很大程度上依赖于将 $\mathbb{D}$ 构造为 Drinfeld 双。回忆一下，根据命题 3.1，一个 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-模映射 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]] \longrightarrow \mathbb{D}^{\otimes m}$；根据命题 4.13，它由 $\mathbb{Q}_\varepsilon[y_J, t_J, a_J, x_J][[h]]$中的一个生成级数决定，其中 $\#J = m$。

**定理 4.15** ([BV21])**.** 带状霍普夫代数 $\mathbb{D}$ 的所有结构映射的生成级数都是经过扰动的两步高斯元，扰动项是 $\varepsilon$中的一个幂级数，也就是说，它们全都具有以下形式

$$e^G(P_0 + P_1\varepsilon + P_2\varepsilon^2 + P_3\varepsilon^3 + \cdots)$$

其中 $e^G$ 是一个两步高斯，且每个 $P_k$ 都是由 $y$、$t$、$a$、$x$、$\eta$、$\alpha$、$\xi$、$T$、$A$ 和 $h$构成的有限表达式。

更具体地说，我们有以下等式：

$$R^{ij} = \exp\Big[(t_i a_j + y_i x_j)h\Big] \quad , \quad (R^{-1})^{ij} = \exp\Big[-(t_i a_j + y_i x_j T_i^{-1})h\Big] \pmod{\varepsilon}$$

$$\kappa^i = T_i^{1/2} \quad , \quad (\kappa^{-1})^i = T_i^{-1/2} \pmod{\varepsilon}$$

$$\mu_{ij}^k = \exp\Bigg[a_k(\alpha_i + \alpha_j) + t_k(\tau_i + \tau_j) + y_k(\eta_i + \mathcal{A}_i^{-1}\eta_j) + x_k(\xi_j + \mathcal{A}_j^{-1}\xi_i) + \frac{1 - T_k}{h}\eta_j\xi_i\Bigg] \pmod{\varepsilon}$$

$$\Delta_i^{jk} = \exp\Big[\alpha_i(a_j + a_k) + \tau_i(t_j + t_k) + \eta_i(T_k y_j + y_k) + \xi_i(x_j + x_k)\Big] \pmod{\varepsilon}$$

$$S_i^j = \exp\Bigg[-\alpha_i a_j - \tau_i t_j - \mathcal{A}_i T_j^{-1} y_j \eta_i - \mathcal{A}_i x_j \xi_i - \mathcal{A}_i \frac{1 - T_j^{-1}}{h}\eta_i\xi_i\Bigg] \pmod{\varepsilon}$$

**注记 4.16。** 暂且略去参数 $h$ 和 $\varepsilon$，读者应将上述关于 $\mathbb{D}$ 结构映射的生成级数与标准 $\mathbb{Q}[y, t, a, x]$Hopf 代数结构的生成级数进行比较。回顾一下，若 $\mathfrak{g}$ 是一个（有理）李代数，则其万有包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 具有一个典范的 Hopf 代数结构，其余乘法由 $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$确定，余单位由$\epsilon(v) = 0$确定，反 antipode 由 $S(v) = -v$确定，其中 $v \in \mathfrak{g}$。由于 $\mathbb{Q}[y, t, a, x]$ 同构于交换李代数 $\mathbb{Q}y \oplus \mathbb{Q}t \oplus \mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}x$ 的万有包络代数（事实上与其对称代数同构），我们得到一个由以下内容确定的典范 Hopf 代数结构

$$\mu_{ij}^k(z_i z_j') = z_k z_k' \qquad , \qquad \Delta_i^{jk}(z_i) = z_j + z_k \qquad , \qquad S_i^j(z_i) = -z_j$$

对于 $z$， $z'=y$， $t$， $a$， $x$。直接应用引理 4.8 可得以下生成级数：

$$\begin{aligned}\mu_{ij}^{k} &= \exp\Big[a_k(\alpha_i+\alpha_j)+t_k(\tau_i+\tau_j)+y_k(\eta_i+\eta_j)+x_k(\xi_j+\xi_i)\Big]\\ \Delta_i^{jk} &= \exp\Big[\alpha_i(a_j+a_k)+\tau_i(t_j+t_k)+\eta_i(y_j+y_k)+\xi_i(x_j+x_k)\Big]\\ S_i^{j} &= \exp\Big[-\alpha_i a_j-\tau_i t_j-y_j\eta_i-x_j\xi_i\Big]\end{aligned} \tag{4.14}$$

因此，我们可以将 $T$ 和 $\mathcal{A}$ 出现在定理4.15的生成级数中，视为 $\mathbb{D}$ 及其不同结构映射的括号非平凡性的结果。

**例 4.17**。下面演示如何利用生成级数和缩并定理 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-模映射，复合 $n$-重张量积之间的映射 $\mathbb{D}$。4.12。

考虑映射 $f\colon \mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]\longrightarrow \mathbb{D}^{\hat{\otimes}4}$ 和 $g\colon \mathbb{D}^{\hat{\otimes}4}\longrightarrow \mathbb{D}^{\hat{\otimes}3}$ 其生成级数为

$$f^{1,2,3,4}=\exp\Big[(t_1a_2+t_3a_4+y_1x_2+y_3x_4)h\Big](a_1a_2+a_3a_4+y_1^2x_2^2)\varepsilon \pmod{\varepsilon^2}$$

and

$$g^0_{1,3}=\exp\Big[a_0(\alpha_1+\alpha_3)+t_0(\tau_1+\tau_3)+y_0(\eta_1+\mathcal{A}_1^{-1}\eta_3)+x_0(\xi_3+\mathcal{A}_3^{-1}\xi_1)\Big] \pmod{\varepsilon^2}$$

（严格来说，第二个生成级数应为 $g^0_{1,\ 3}\otimes \mathrm{Id}^{2,4}_{2,4}$，但由于与恒等态射的复合是平凡的，我们在公式中将其略去）。两个表达式都是两步高斯，因此根据上面的讨论，我们可以进行复合映射

$$\begin{aligned}g\circ f &= \Big\langle f^{1,2,3,4}\cdot g^0_{1,3}\Big\rangle_{1,3}\\ &= \Big\langle e^{a_0(\alpha_1+\alpha_3)+t_0(\tau_1+\tau_3)+(t_1a_2+t_3a_4+y_1x_2+y_3x_4)h+y_0(\eta_1+\mathcal{A}_1^{-1}\eta_3)+x_0(\xi_3+\mathcal{A}_3^{-1}\xi_1)}\cdot\\ &\qquad\qquad\cdot(a_1a_2+a_3a_4+y_1^2x_2^2)\varepsilon\Big\rangle_{1,3}\end{aligned}$$

如上所述，使用收缩公式两次。

首先，我们收缩变量 $\alpha$， $t$， $a$， $\tau$（对于指标 1、3），取

$$\begin{aligned}r&=(t_1,t_3,\alpha_1,\alpha_3)\quad,\quad s=(\tau_1,\tau_3,a_1,a_3)\quad,\quad W=0\\ u&=(a_2h,a_4h,a_0,a_0)\ ,\ v=(t_0,t_0,0,0)\end{aligned}$$

使得 $W=I$，然后

$$\begin{aligned}r'&=r+v=(t_0+t_1,t_0t_3,\alpha_1,\alpha_3),\\ s'&=s+u=(\tau_1+a_2h,\tau_3+a_4h,a_0+a_1,a_0+a_3).\end{aligned}$$

根据定理4.12 我们有

$$\begin{aligned}\Big\langle f^{1,2,3,4}\cdot g^0_{1,3}\Big\rangle_{a_{13},t_{13}} &= e^{(y_1x_2+y_3x_4)h+y_0\eta_1+x_0\xi_3}\Big\langle e^{a_0(\alpha_1+\alpha_3)+t_0(\tau_1+\tau_3)+(t_1a_2+t_3a_4)h}\cdot\\ &\qquad e^{y_0\mathcal{A}_1^{-1}\eta_3+x_0\mathcal{A}_3^{-1}\xi_1}(a_1a_2+a_3a_4+y_1^2x_2^2)\varepsilon\Big\rangle_{a_{13},t_{13}}\end{aligned}$$

$$= e^{(y_1x_2+y_3x_4)h+y_0\eta_1+x_0\xi_3}e^{t_0(a_2+a_4)h}.$$
$$\left\langle e^{y_0\mathcal{A}_1^{-1}\eta_3+x_0\mathcal{A}_3^{-1}\xi_1}((a_0+a_1)a_2+(a_0+a_3)a_4+y_1^2x_2^2)\varepsilon\right\rangle_{a_{13},t_{13}}$$
$$= e^{(y_1x_2+y_3x_4)h+y_0\eta_1+x_0\xi_3}e^{t_0(a_2+a_4)h}.$$
$$e^{y_0\eta_3+x_0\xi_1}((a_0-y_0\eta_3)a_2+(a_0-x_0\xi_1)a_4+y_1^2x_2^2)\varepsilon$$

其中，最后一个等式用到了 t

$$\left\langle e^{\lambda\mathcal{A}^{\pm1}}a\right\rangle_a = e^{\lambda}(\pm\lambda),$$

这可以通过将左侧展开为幂级数并逐项收缩来轻松验证。

第二步是再次使用定理4.12 来收缩余下的变量 $y$，$\xi$，$\eta$，$x$(在相同的指标 1、3处）。现在我们考虑

$$r=(y_1,y_3,\xi_1,\xi_3) \quad , \quad s=(\eta_1,\eta_3,x_1,x_3) \quad , \quad W=0$$
$$u=(x_2h,x_4h,x_0,x_0)\ ,\ v=(y_0,y_0,0,0)$$

~使得 $W=I$，然后

$$r'=r+v=(y_0+y_1,y_0y_3,\xi_1,\xi_3),$$
$$s'=s+u=(\eta_1+x_2h,\eta_3+x_4h,x_0+x_1,x_0+x_3).$$

最终得到

$$g\circ f=\left\langle\left\langle f^{1,2,3,4}\cdot g^0_{1,3}\right\rangle_{a_{13},t_{13}}\right\rangle_{y_{13},x_{13}}$$
$$= e^{t_0(a_2+a_4)h}\Big\langle e^{(y_1x_2+y_3x_4)h+y_0(\eta_1+\eta_3)+x_0(\xi_1+\xi_3)}\cdot$$
$$((a_0-y_0\eta_3)a_2+(a_0-x_0\xi_1)a_4+y_1^2x_2^2)\varepsilon\Big\rangle_{y_{13},x_{13}}$$
$$= e^{t_0(a_2+a_4)h}e^{y_0(x_2+x_4)h}\cdot$$
$$\left\langle((a_0-y_0(\eta_3+x_4h))a_2+(a_0-x_0\xi_1)a_4+(y_0+y_1)^2x_2^2)\right\rangle_{y_{13},x_{13}}$$
$$= e^{(t_0(a_2+a_4)+y_0(x_2+x_4))h}(a_0(a_2+a_4)-y_0a_2x_4h+y_0^2x_2^2)\varepsilon.$$

最后指出，在这样的具体例子中，最好使用计算机进行计算（前一个计算只需几百分之一秒），其原因想必读者在完成这项繁琐（但在概念和计算上都很简单）的计算后便会显而易见。然而，在下文的一般论证中，两步收缩将发挥核心作用，而不仅仅是在计算方面。

## 5. 普适不变量 $Z_{\mathbb{D}}$

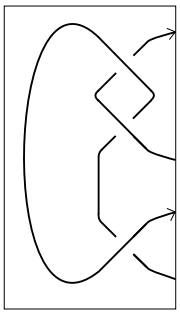
本节将定义 Habiro 底部缠结的加厚与带映射，这将为我们研究零框架纽结的普适不变量提供一种强有力的策略。我们将利用这些映射，证明关于 Bar-Natan - van der Veen 多项式族的两个主要结果 $\rho^i{}_K^j$ 见定理 5.18 和定理 5.20。

为了证明这两个定理，我们需要一些关于加厚映射（部分）的生成级数的技术性结果。我们已将这些结果列于第 6 节。

5.1. **加厚映射**。 本小节将构造本文的关键工具。回顾一下，纽结 $K$ 的亏格 是其 *Seifert* 曲面亏格中的最小值，也就是说，这些曲面是 $S^3$ 中以$\mathrm{cl}(K)$为边界的紧致、连通、定向曲面。我们将利用一种广为人知的构造过程，从 $2g$的加厚中构造亏格为 $\leq g$ 的缠结分支。为此，我们将借用（并稍作修改） [Hab06]中的底辨缠概念。

设 $n \geq 0$。一个含有 $n$ 个分支的 $n$ 分支底辨缠 是一个开辨缠结，它是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((+-)^n,\ \emptyset)$ 的元素，并且其第 $i$ 个分支从底部的第 $(2i-1)$ 个点出发，在第 $2i$ 个点结束。垂直底缠结 是底辨缠 $L \subset (D^1)^{\times 3}$ 绕 $y$ 轴旋转 $(-\pi/2)$ 后的像。

下面是一个垂直底缠结的例子：

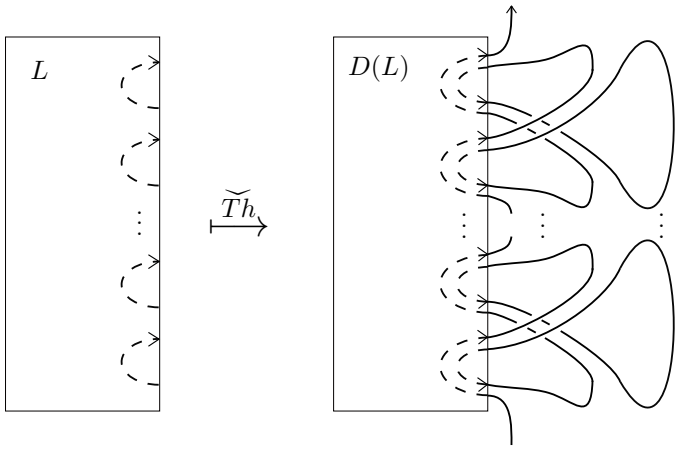


我们为任意垂直底缠结赋予一个从最低分支开始的标准次序。还要注意，垂直底缠结中每个分支的首端和尾端都朝上。从这个意义上说，它们的行为与向上缠结相似。使用引理2.1 中的相同论证可得：

**引理 5.1**。 每个垂直底缠结都有一个旋转形式的图。

此外，给定一个带状霍普夫代数 $A$，我们也可以使用（3.12）中的规则（或根据前一个引理，使用（3.13）中的规则）来定义垂直底缠结的普适不变量。

令 $g \geq 1$，并令 $L$ 为一个 $2g$ 分支的垂直底缠结。$L$ 的加厚$\widetilde{\ }$是如下所示的纽结 $Th(L)$，




(5.1)

其中， $D(L)$ 是将 $L$ 的每个分支加倍，并对每对加倍后的分支中的内侧分支反转定向所得的结果； $L$ 中的虚线分支表示它们可能是打结的。注意，纽结 $Th(L)$（及其闭合$\widetilde{\ }$）带有一个亏格为 $g$ 的 Seifert 曲面。此外，这种纽结总是零框架的，因为每个交叉都会产生两个正交叉和两个负交叉，因此所得纽结的总扭率始终为零。

若$\mathsf{vBT}_n$ 表示 $n$分支垂直底部缠结的同痕类集合，则前述构造定义了一个满射[5] 映射

$$\widetilde{Th} : \mathsf{vBT}_{2g} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{genus} \leq g \\ \text{0-framed knots} \end{array} \right\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(+,+). \tag{5.2}$$

现在我们旨在构造此映射的代数对应物。固定一个拓扑带状霍普夫代数 $A$，其具有通用 $R$-矩阵 $R = \sum_i \alpha_i \hat{\otimes} \beta_i \in A \hat{\otimes} A$ 以及平衡元 $\kappa \in A$。交叉映射 $Cr$ 和带映射 $B$ 定义如下：

$$Cr : A \hat{\otimes} A \longrightarrow A \hat{\otimes} A \qquad , \qquad Cr(x \hat{\otimes} y) := \sum_i x\alpha_i \hat{\otimes} \beta_i y$$

and

$$B : A \hat{\otimes} A \longrightarrow A \qquad , \qquad B(x \hat{\otimes} y) := \sum_{(x),(y)} x_{(2)} S(y_{(1)}) \kappa S(x_{(1)}) \kappa y_{(2)},$$

其中，对于 $z \in A$，我们使用 Sweedler 记号 $\Delta(z) \overset{(x),(y)}{=} \sum_{(z)} z_{(1)} \hat{\otimes} z_{(2)}$。

对于 $g \geq 1$，代数加厚映射 $Th$ 是以下复合映射

$$A^{\hat{\otimes} 2g} \xrightarrow{Cr^{\hat{\otimes} g}} A^{\hat{\otimes} 2g} \xrightarrow{B^{\hat{\otimes} g}} A^{\hat{\otimes} g} \xrightarrow{\mu^{[g]}} A \tag{5.3}$$

其中 $\mu^{[g]}$ 表示 $g$ 重乘法映射。

以下结果本质上是众所周知的，但由于它与本文相关，我们仍给出详细证明。

**命题 5.2.** 设 $g \geq 1$。我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{vBT}_{2g} & \xrightarrow{\widetilde{Th}} & \left\{ \begin{array}{c} \text{genus} \leq g \\ \text{0-framed knots} \end{array} \right\} \\ {\scriptstyle Z_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Z_A} \\ A^{\hat{\otimes} 2g} & \xrightarrow{Th} & A \end{array}$$

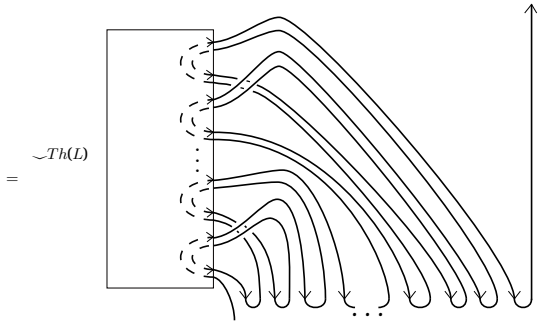
证明。 实际上，我们将证明一个更一般的命题。具体而言，我们旨在构造一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathsf{vBT}_{2g} & \xrightarrow{\text{cross}} & \mathcal{T}^{(1)} & \xrightarrow{\check{\Delta}} & \mathcal{T}^{(2)} & \xrightarrow{\check{S}} & \mathcal{T}^{(3)} & \xrightarrow{\text{cups}} & \left\{ \begin{array}{c} \text{genus} \leq g \\ \text{0-framed knots} \end{array} \right\} \\ {\scriptstyle Z_A}\downarrow & & {\scriptstyle Z_A}\downarrow & & {\scriptstyle Z_A}\downarrow & & {\scriptstyle Z_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Z_A} \\ A^{\hat{\otimes} 2g} & \xrightarrow{\widetilde{Cr}^{\hat{\otimes} g}} & A^{\hat{\otimes} 2g} & \xrightarrow{\Delta^{\hat{\otimes} 2g}} & A^{\hat{\otimes} 4g} & \xrightarrow{(S_\cap \hat{\otimes} \mathrm{Id})^{\hat{\otimes} 2g}} & A^{\hat{\otimes} 4g} & \xrightarrow{\widetilde{\mu}} & A \end{array} \tag{5.4}$$

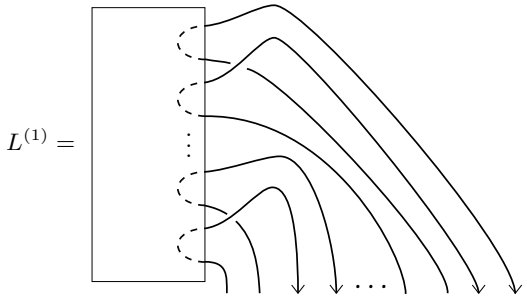
[5]给定 $S^3$ 中一个亏格为 $g' \leq g$ 的闭纽结，在该纽结的亏格为 $g'$ 的 Seifert 曲面上附加 $(g-g')$ 个二维一柄，得到一个亏格为 $g$ 的 Seifert 曲面 $F$。初等代数拓扑保证存在 $2g$ 条简单闭曲线 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$，使得 $H_1(F;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\gamma_{2g}$。将 $F$ 形变收缩到这些曲线的管状邻域之并（的闭包），便得到一个新的带状形式 Seifert 曲面；由此可以读出带的核心所确定的垂直底缠结。

$\smile$使得顶行的复合映射是几何加厚映射 $Th$，底行的复合映射是代数加厚映射 $Th$。

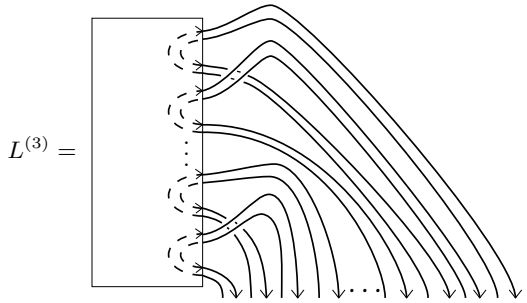
设 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_{2g}$ 为一个垂直底缠结。主要观察是，$\smile Th(L)$ 同痕于以下纽结：将帽拖到底部即可得到该纽结：




$\smile$由此形式可见，$Th(L)$ 由 $L$ 按如下方式得到：首先添加交叉，并将端点移至平面的底部，从而构造 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((++--)^g, \emptyset)$ 的一个元素 $L^{(1)}$，如下图所示：




接下来，将 $L^{(1)}$ 的每一股加倍，也就是说，对每个分支 $\ell$ 应用 $\check{}\ \Delta_\ell$，得到一个具有 $4g$ 个分支的缠结，属于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((+^4-^4)^g, \emptyset)$，记作 $L^{(2)}$。然后，$\check{}$ 将所有标记为奇数的分支反向定向，对每个这样的分支应用 $S_\ell$，从而得到一个属于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((+-)^{2g}, \emptyset)$ 的缠结，如下所示，




$\smile$其中也标明了各分支的顺序。然后，通过在底部连接 $4g$ 个杯，就得到纽结 $Th(L)$，也就是说

$$\widetilde{Th}(L) = (L^{(3)} \otimes \uparrow_+) \circ (\uparrow_+ \otimes \cup \otimes \overset{4g}{\cdots} \otimes \cup).$$

如果 $\mathcal{T}^{(i)}$ 表示所有这类由垂直底缠结构成的 $L^{(i)}$ 的集合，那么前述描述就将图（5.4）的几何加厚映射实现为顶行复合映射。

普适不变量 $Z_A($ $\widetilde{\ }$ $Th(L))$ 随后可利用命题 3.6 的自然性性质进行计算。事实上，若令 $\widetilde{\ }Cr(x\hat{\otimes}y) := [Cr(x\hat{\otimes}y)]\cdot(\kappa^{-1}\hat{\otimes}\kappa^{-1})$，根据定义可知

$$Z_A(L^{(1)}) = \widetilde{Cr}^{\hat{\otimes}g}(Z_A(L)).$$

现在，命题 3.6 立即推出（5.4）中最左侧三个方块可交换，其中令 $S_\cap(x) = \kappa^{-1}S(x)$。现在，对 $n \geq 2$ 写作

$$(\mu^{\cup})^{[n]}(x_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} x_n) := x_1\kappa x_2\kappa \cdots \kappa x_n \in A,$$

并令 $\tau_{(123)}$ 如 §3.5 中所述，对置换 $(123) \in \Sigma_4$。那么，映射 $\tilde{\mu}$（5.4）右下角所示的映射，定义为以下复合映射：

$$A^{\hat{\otimes}4g} \xrightarrow{\tau_{(123)}^{\hat{\otimes}g}} A^{\hat{\otimes}4g} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\eta} A^{\hat{\otimes}4g+1} \xrightarrow{(\mu^{\cup})^{[4g+1]}} A$$

由此，根据命题 3.6 可知（5.4）最右侧的方块也可交换。请注意，在应用乘法之前，我们必须置换各因子，以改变分支的顺序。

剩下需要验证的是，底行的复合映射等于代数加厚映射 $Th$。容易看出，带映射 $B\colon\ A\hat{\otimes}A \longrightarrow A$等于以下复合映射：

$$A^{\hat{\otimes}2} \xrightarrow{(\cdot\kappa^{-1})^{\hat{\otimes}2}} A^{\hat{\otimes}2} \xrightarrow{\Delta\hat{\otimes}\Delta} A^{\hat{\otimes}4} \xrightarrow{(S_\cap\hat{\otimes}\mathrm{Id})^{\hat{\otimes}2}} A^{\hat{\otimes}4} \xrightarrow{\tau_{(123)}} A^{\hat{\otimes}4} \xrightarrow{\mathrm{Id}\hat{\otimes}\eta} A^{\hat{\otimes}5} \xrightarrow{(\mu^{\cup})^{[5]}} A$$

因此，代数加厚映射等于复合映射

$$\mu^{[g]} \circ [(\mu^{\cup})^{[5]}]^{\hat{\otimes}g} \circ (\mathrm{Id}\,\hat{\otimes}\,\eta)^{\hat{\otimes}g} \circ \tau_{(123)}^{\hat{\otimes}g} \circ (S_\cap\,\hat{\otimes}\,\mathrm{Id})^{\hat{\otimes}2g} \circ \Delta^{\hat{\otimes}2g} \circ (\cdot\kappa^{-1})^{\hat{\otimes}2g} \circ Cr^{\hat{\otimes}g}.$$

注意到 $\mu^{[g]}\circ[(\mu^{\cup})^{[5]}]^{\hat{\otimes}g}\circ(\mathrm{Id}\hat{\otimes}\eta)^{\hat{\otimes}g}\circ\tau^{\hat{\otimes}g}_{(123)} = \tilde{\mu}$，结论便直接得出。 □

特别地，前面的结果表明，要理解纽结的普适不变量，只需理解其加厚后为该纽结的垂直底缠结的普适不变量。我们将大量运用这一事实来推导纽结不变量 $Z_{\mathbb{D}}$ 的性质。

注 5.3。 尽管我们按照上述证明中的解释构造了交换图（5.4），但我们无法定义缠结类之间的映射，使其恰好成为三个映射的拓扑对应物，而这三个映射的复合映射定义了代数加厚映射（从而得到一个更自然的交换图）。应当将此视为我们所用缠结概念的一个缺陷。解决这一问题的一种方法是允许虚交叉，参见 [Bec23b]。

本节余下部分，我们将借助生成级数进行论证。以下引理将证明极为有用。为简洁起见，我们针对自由 $k$-模写出这些陈述，但显然它们对拓扑自由$k[[h]]$-模也都成立。

**引理 5.4.** 设

$$k[x_1,\ldots,x_n] \xrightarrow{f} k[y_1,\ldots,y_m] \xrightarrow{g} k[z_1,\ldots,z_p]$$

是 $k$-模映射，并假设 $g$ 的生成级数 $\bar{g}$ 在某些

$i = 1, \dots, m$处没有 $\eta_i$ 。如果 $f_{|y_i=0}$表示 $f$的生成级数 $f$在$y_i = 0$处的取值，那么我们有

$$\langle \bar{f} \cdot \bar{g} \rangle_y = \langle \bar{f}_{|y_i=0} \cdot \bar{g} \rangle_y \tag{5.5}$$

类似地，如果 $f$ 没有 $y_i$，那么我们有

$$\langle \bar{f} \cdot \bar{g} \rangle_y = \langle \bar{f} \cdot \bar{g}_{|\eta_i=0} \rangle_y \tag{5.6}$$

（对于自由 $k[[h]]$-模之间的映射，结论也相同。）

证明。如果 $\bar{g}$ 没有 $\eta_i$，那么 $\bar{f}$中的任意 $y_i$ 都将与 $1 = \eta_i^0$配对，从而得到$\langle y_i^k \eta_i^0 \rangle_{y_i} = 0$，其中 $k > 0$成立。因此，我们不妨直接在 $f$中设定 $y_i = 0$ 。第二个陈述的证明类似。□

另一种证明。展开定义可知，$\bar{g}$ 没有 $\eta_i$ 等价于理想 $\mathfrak{a} \subset k[y_1, \dots, y_m]$ 由 $y_i$ 生成，且包含于 $g$的核中。此外，$k$-模映射对应于 $f_{|y_i=0}$ 映射 $f$ 在$f^{-1}(\mathfrak{a})$ 上恒为零，$f$在其他地方则与其一致。显然，$g \circ f = g \circ f$ 作为 $k$-模映射成立，但这等价于（5.5），从而完成第一部分的证明。

对于第二部分，$f$没有 $y_i$ 意味着 $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Im} f = 0$；而将 $\bar{g}$替换为$\bar{g}_{|\eta_i=0}$ 相当于将 $g$ 替换为 $\tilde{g}$，后者在 $\mathfrak{a}$ 上恒为零，在其他地方则与$g$ 一致。结论由上述论证即可得出。□

记号 5.5. 如上所述，我们通常不区分 $k$-模映射及其生成级数，因此通常将 (5.5) 和 (5.6) 分别改写为

$$g \circ f = g \circ f_{|y_i=0} \qquad \text{and} \qquad g \circ f = g_{|\eta_i=0} \circ f,$$

分别。

下面的引理用与前面相同的方法证明：

**引理 5.6.** 设 $f, g$ 是如上的 $k$-模映射。则

$$(g \circ f)_{|z_i=0} = g_{|z_i=0} \circ f$$

类似地

$$(g \circ f)_{|\xi_i=0} = g \circ f_{|\xi_i=0}.$$

**引理 5.7.** 设

$$k[w_1, \dots, w_q] \xrightarrow{h} k[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{f} k[y_1, \dots, y_m] \xrightarrow{g} k[z_1, \dots, z_p]$$

是一个 $k$-模映射图。

*(1)* 若 $f$ 的生成级数不含 $\xi_i$，则 $g \circ f$ 的生成级数也不含 $\xi_i$。*(2)* 若 $f$ 的生成级数不含 $\xi_i$，且由 $w_j$ 生成的理想经 $h$ 映射到由 $x_i$ 生成的理想，则 $f \circ h$ 的生成级数不含 $\omega_j$ （ $w_j$ 的对偶变量）。

证明。若 $\mathfrak{a}$ 表示由 $x_i$ 生成的理想，则 (1) 可由 $\mathfrak{a} \subseteq \ker f \subseteq \ker(g \circ f)$ 得出。同理，若 $\mathfrak{b}$ 表示由 $w_j$ 生成的理想，则 (2) 可由$h(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \ker f$ 得出，即 $\mathfrak{b} \subseteq \ker(f \circ h)$。□

对于拓扑带状 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-代数 $\mathbb{D}$，代数加厚映射的生成级数具有两个显著性质。

**命题 5.8**。 带映射的生成级数 $B^k_{i,\ j}$ 不含 $\tau$，也就是说，其中没有单项式 $\tau_i$ 或 $\tau_j$。此外，代数加厚映射的生成级数 $Th^j_{i_1,\ \ldots\ldots i_{2g}}$ 也不含 $\tau$。

证明。 对于第一部分，只需说明由$\boldsymbol{t}\hat{\otimes}1$ 和 $1\hat{\otimes}\boldsymbol{t}$ 生成的双边理想属于 $B$：$\mathbb{D}\hat{\otimes}\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$的核。若 $\boldsymbol{u}\hat{\otimes}\boldsymbol{v}\in\mathbb{D}\hat{\otimes}\mathbb{D}$，则有

$$\begin{aligned}
B(\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}\hat{\otimes}\boldsymbol{v}) &= \sum_{(\boldsymbol{t}),(\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{v})} \boldsymbol{t}_{(2)}\boldsymbol{u}_{(2)}S(\boldsymbol{v}_{(1)})\boldsymbol{\kappa}S(\boldsymbol{t}_{(1)}\boldsymbol{u}_{(1)})\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{v}_{(2)}\\
&= \sum_{(\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{v})} \Big(\boldsymbol{u}_{(2)}S(\boldsymbol{v}_{(1)})\boldsymbol{\kappa}S(\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}_{(1)})\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{v}_{(2)} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}_{(2)}S(\boldsymbol{v}_{(1)})\boldsymbol{\kappa}S(\boldsymbol{u}_{(1)})\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{v}_{(2)}\Big)\\
&= \sum_{(\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{v})} \Big(-\boldsymbol{u}_{(2)}S(\boldsymbol{v}_{(1)})\boldsymbol{\kappa}S(\boldsymbol{u}_{(1)})\boldsymbol{t}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{v}_{(2)} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}_{(2)}S(\boldsymbol{v}_{(1)})\boldsymbol{\kappa}S(\boldsymbol{u}_{(1)})\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{v}_{(2)}\Big)\\
&= 0
\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{t}$ 是中心元。对于由 $1\hat{\otimes}\boldsymbol{t}$ 生成的理想，计算类似。

对于第二部分，注意 $Cr:\ \mathbb{D}\hat{\otimes}\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}\hat{\otimes}\mathbb{D}$ 显然将这两个理想中的每一个映到其自身，因此该断言直接由引理 5.7得出。 □

略滥用记号，我们通常将 $\mathcal{O}^{-1}(Z_{\mathbb{D}}(K))$ 写作 $Z_{\mathbb{D}}(K)$。我们还将 $Z_{\mathbb{D}}(L)_{|t_{i_1}=\cdots=t_{i_{2g}}=0}$ 写作$Z_{\mathbb{D}}(L)_{|t=0}$ 。

**推论 5.9**。 设 $K=Th(L)$ 为一个零框架纽结。那么，值 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 完全由 $Z_{\mathbb{D}}(L)_{|t=0}$ 确定，

$$Z_{\mathbb{D}}(K)=Th(Z_{\mathbb{D}}(L)_{|t=0}).$$

前一个结果的作用极为强大，因为它显著减少了计算中涉及的项数，也降低了证明的复杂度。

下面介绍第二个性质：

**定理 5.10.** 若 $n\geq 0$ 且 $j\geq 1$，则带映射 $B$ 的像不包含含有 $\boldsymbol{a}^{n+j}\varepsilon^n$的单项式。

更准确地说，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{Q}[[h]]}\{\boldsymbol{y}^p\boldsymbol{t}^q\boldsymbol{a}^{n+j}\boldsymbol{x}^r\varepsilon^n : p,q,r\geq 0\}\cap \mathrm{Im}\,B=0.$$

证明.我们先引入一些术语：如果一个初等单项式 $\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{t}^*\boldsymbol{a}^p\boldsymbol{x}^*\varepsilon^q h^*\in\mathbb{D}$ 满足性质(★)，即 $p\leq q$，其中 $*$ 表示任意非负整数，就称它满足该性质。更一般地，对于 $k$重张量积，称

$$\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{t}^*\boldsymbol{a}^{p_1}\boldsymbol{x}^*\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{t}^*\boldsymbol{a}^{p_k}\boldsymbol{x}^*\varepsilon^q h^*\in\mathbb{D}^{\hat{\otimes}k}$$

若 $\sum_i p_i\leq q$，则满足(★)。通过 $\mathbb{Q}$-线性将(★)的定义推广到$\mathbb{D}^{\hat{\otimes}k}$ 的任意元素。于是，定理断言 $\mathrm{Im}\,B$ 中的所有元素都满足(★)。

现在，乘积 $\boldsymbol{u}_1\ldots\boldsymbol{u}_n$ 满足(★)，当且仅当任意置换乘积 $\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}\ldots\boldsymbol{u}_{\hat{\sigma}(n)}$ 都满足

**(★)** 对任意 $\sigma \in \Sigma_n$ 都成立。这是因为定义 $\mathbb{D}$ 保持 性质 **(★)** 的关系意味着，在

$$\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{xa} + \boldsymbol{x} \quad , \quad \boldsymbol{ay} = \boldsymbol{ya} - \boldsymbol{y} \quad , \quad \boldsymbol{xy} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{yx}\varepsilon^i h^i + \sum_{i,j} \mu_{i,j} \boldsymbol{t}^i \boldsymbol{a}^j \varepsilon^j h^{i+j-1}$$

等式两边都满足性质（★），其中此处 $\lambda_i, \mu_{ij} \in \mathbb{Q}$。另请注意， $\boldsymbol{u} \in \mathbb{D}$ 满足（★）当且仅当 $\boldsymbol{u\kappa}$ 满足（★），其中 $\boldsymbol{\kappa} = \sum_i (-1)^i \quad ! \boldsymbol{T}^{1/2} \boldsymbol{a}^i \varepsilon^i h^i$ 照例表示平衡元。一个方向显然成立，因为若两个元素满足（★），它们的乘积也满足该性质。反过来，注意若 $\boldsymbol{u}$ 含有一个单项式 $\boldsymbol{y}^* \boldsymbol{t}^* \boldsymbol{a}^{n+j} \boldsymbol{x}^* \varepsilon^n h^*$ ，且 $j \geq 1$，那么 $\boldsymbol{u\kappa}$ 将包含 $\boldsymbol{y}^* \boldsymbol{t}^* \boldsymbol{a}^{n+j+i} \boldsymbol{x}^* \varepsilon^{n+i} h^*$。

既然如此，我们提出以下断言：若 $\boldsymbol{u} \hat{\otimes} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}' \hat{\otimes} \boldsymbol{v}' \in \mathbb{D} \hat{\otimes} \mathbb{D}$ 满足以下条件： $B(\boldsymbol{u} \hat{\otimes} \boldsymbol{v})$ 和 $B(\boldsymbol{u}' \hat{\otimes} \boldsymbol{v}')$ 满足（★），则乘积$B(\boldsymbol{uu}' \hat{\otimes} \boldsymbol{vv}')$的像也满足该性质。事实上，根据上文所示的性质，元素

$$B(\boldsymbol{uu}' \hat{\otimes} \boldsymbol{vv}') = \sum_{(\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{u}'),(\boldsymbol{v}),(\boldsymbol{v}')} \boldsymbol{u}_{(2)} \boldsymbol{u}'_{(2)} S(\boldsymbol{v}'_{(1)}) S(\boldsymbol{v}_{(1)}) \boldsymbol{\kappa} S(\boldsymbol{u}'_{(1)}) S(\boldsymbol{u}_{(1)}) \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{v}_{(2)} \boldsymbol{v}'_{(2)}$$

满足 **(★)** 当且仅当

$$\sum_{(\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{u}'),(\boldsymbol{v}),(\boldsymbol{v}')} \boldsymbol{u}_{(2)} S(\boldsymbol{v}_{(1)}) \boldsymbol{\kappa} S(\boldsymbol{u}_{(1)}) \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{v}_{(2)} \boldsymbol{u}'_{(2)} S(\boldsymbol{v}'_{(1)}) S(\boldsymbol{u}'_{(1)}) \boldsymbol{v}'_{(2)}$$

满足 **(★)** 当且仅当

$$\sum_{(\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{u}'),(\boldsymbol{v}),(\boldsymbol{v}')} \boldsymbol{u}_{(2)} S(\boldsymbol{v}_{(1)}) \boldsymbol{\kappa} S(\boldsymbol{u}_{(1)}) \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{v}_{(2)} \boldsymbol{u}'_{(2)} S(\boldsymbol{v}'_{(1)}) \boldsymbol{\kappa} S(\boldsymbol{u}'_{(1)}) \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{v}'_{(2)} = B(\boldsymbol{u} \hat{\otimes} \boldsymbol{v}) B(\boldsymbol{u}' \hat{\otimes} \boldsymbol{v}')$$

满足 **(★)**，而这成立，由此得证该断言。

我们来完成定理的证明。根据前述断言，只需验证 $B$作用于元素 $\boldsymbol{y} \otimes 1$, $\boldsymbol{a} \otimes 1$, $\boldsymbol{x} \otimes 1$, $1 \otimes \boldsymbol{y}$,$1 \otimes \boldsymbol{y}$, $1 \otimes \boldsymbol{a}$, $1 \otimes \boldsymbol{x}$ 所得的像满足 **(★)**。容易验证

$$\Delta(\boldsymbol{a} \otimes 1) = \Delta(1 \otimes \boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a\kappa}^2 + \boldsymbol{a\kappa}^2 = 0$$

这显然满足 **(★)**。对于其余四个元素，我们作如下论证：称映射 $f$：$\mathbb{D}^{\otimes n} \longrightarrow \mathbb{D}^{\otimes m}$ 保持性质 **(★)**，如果只要 $\boldsymbol{w}$ 满足 **(★)**， $f(\boldsymbol{w})$就满足 **(★)**。显然，**(★)**-保持映射的复合映射仍是 **(★)**-保持映射，因此只需证明余乘法和反antipode 保持 **(★)**。由于它们是代数（反）同态，只需验证生成元。等式

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \sum_i \pm(1 \hat{\otimes} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \hat{\otimes} \boldsymbol{a}^i \varepsilon^i h^i) \quad , \quad S(\boldsymbol{x}) = -\sum_i \boldsymbol{x} \boldsymbol{a}^i \varepsilon^i h^i$$

$$\Delta(\boldsymbol{y}) = \sum_i \pm(1 \hat{\otimes} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{t}^* \boldsymbol{a}^i \varepsilon^i h^i) \quad , \quad S(\boldsymbol{y}) = -\sum_i \boldsymbol{y} \boldsymbol{t}^* \boldsymbol{a}^i \varepsilon^i h^i$$

根据命题4.1 可知 $\Delta$ 和 $S$ 保持 (★)，从而完成定理的证明。□

**推论 5.11**。 如果 $n \geq 0$ 和 $j \geq 1$，那么代数加厚映射的像

$$Th : \mathbb{D}^{\hat{\otimes} 2g} \longrightarrow \mathbb{D},$$

$g \geq 1$不包含带有 $\boldsymbol{a}^{n+j}\varepsilon^n$ 的单项式。

证明。 沿用上一个证明中的术语，$\operatorname{Im} B$ 中的所有元素都满足(★)，因此 $\operatorname{Im} B^{\otimes g}$ 中的所有元素也满足 (★)，于是 $\operatorname{Im}(B^{\otimes g} \circ Cr^{\otimes g})$中的所有元素也都满足该性质。由于乘法保持性质 (★)，结论得证。 □

5.2. **普适不变量** $Z_{\mathbb{D}}$ (模 $\varepsilon$)。 回忆一下，若 $K$ 是 $S^3$中的一个闭纽结，且 $F$ 是 $K$ 的一个亏格为 $g$ 的塞弗特曲面，则 $K$的塞弗特矩阵 （与 $F$相关）是由 $v_{ij} := \operatorname{lk}(\gamma_i, \gamma_j^+)$给出的整数系数矩阵 $2g \times 2g\,(v_{ij})$，其中 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$是简单闭曲线，满足 $H_1(F; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\gamma_{2g}$，且 $\gamma_j^+$ 表示 $\gamma_j$的正向推离。于是，$K$ 的亚历山大多项式为

$$\Delta_K(t) = \det(t^{-1/2}V - t^{1/2}V^T) \in \mathbb{Z}[t + t^{-1}] \subset \mathbb{Z}[t, t^{-1}]. \tag{5.7}$$

特别是，若 $K = Th(L)$（因此它附带一个 Seifert 曲面 $F$的选择），则存在一组规范的简单闭曲线 $\gamma_1$，……，$\gamma_{2g}$，它们生成 $H_1(F; \mathbb{Z})$，并由 $L$完全确定，即由加厚过程中形成的带的核心构成。在这种情况下，很容易得到与 $K$（以及 $F$）相关的塞弗特矩阵。具体而言，令 $p_{ij}$ （分别为 $n_{ij}$）表示 $L$ 中上股为第 $i$个分支、下股为第 $j$个分支的正（分别为负）交叉数，并令 $V' = (v'_{ij})$，其中 $v'_{ij} := p_{ij} - n_{ij}$。那么很容易验证，矩阵

$$V := V' + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \overset{g}{\cdots} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

就是 $K$所对应的塞弗特矩阵，其中 $\oplus$ 表示矩阵的分块直和。此外，基 $\gamma_1$，……，$\gamma_{2g}$相对于 $F$的交叉形式是辛的，具体而言，该交叉形式等于

$$V - V^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \overset{g}{\cdots} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: Q. \tag{5.9}$$

**命题 5.12**。 设 $L$ 是一个 $2g$ 分支垂直底缠结，其分支用 $\{1, \ldots, 2g\}$ 标记，设 $K = Th(L)$，并设 $V'$如上。则

$$Z_{\mathbb{D}}(L)_{|t=0} = \exp\left[yV'x \cdot h\right] \pmod{\varepsilon},$$

其中 $y = (y_1, \ldots, y_{2g})$ 以及 $x = (x_1, \ldots, x_{2g})^T$。

证明。 首先，根据引理 5.1 ，我们可以将 $L$ 视为交叉与旋转子的某种组合（参见（2.7））， 因此由（3.4）可将 $L$ 的普适不变量视为一个复合

$$\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]] \longrightarrow \mathbb{D}^{\hat{\otimes} N} \xrightarrow{\tau_\sigma} \mathbb{D}^{\hat{\otimes} N} \xrightarrow{\mu^{[n_1]} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mu^{[n_{2g}]}} \mathbb{D}^{\hat{\otimes} 2g}$$

其中，第一个箭头将 1 映射为由若干个 $R^{\pm 1}$ 和 $\kappa^{\pm 1}$ 构成的张量积，第二个箭头则重新排列张量因子，并且所有箭头都视为模 $\varepsilon$。在同构 $\mathcal{O}$ 下，我们可以将其看作一个复合映射

$$\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]] \longrightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon[y_I, t_I, a_I, x_I][[h]] \xrightarrow{\mu_I^J} \mathbb{Q}_\varepsilon[y_J, t_J, a_J, x_J][[h]]$$

其中 $I=\{i_1,\ \ldots i_N\}$、 $J=\{1,\ \ldots\ldots,\ 2g\}$ 和 $\mu_I^J$ 是乘法映射的生成级数的一个复合映射，

$$\mu_I^J=(\mu_{k_r,i_N}^{2g}\circ\cdots)\circ\cdots\circ(\mu_{k_p,i_q}^{1}\circ\cdots\circ\mu_{k_1,i_3}^{k_2}\circ\mu_{i_1,i_2}^{k_1}).$$

由于我们只关心在 $t=0$ 处得到的复合映射，根据引理 5.6，我们可以将 $\mu_I^J$ 替换为 $(\mu_I^J)_{|t=0}$。重复这一论证，等价地，我们可以将 $\mu_{k_r}^{2g}$、$i_N$ 替换为 $(\mu_{k_r}^{2g},i_N)_{|t=0}$。查看定理 4.15 中乘法映射的生成级数（模 $\varepsilon$），我们发现 $(\mu_{k_r}^{2g},i_N)_{|t=0}$ 不含 $\tau$，因此根据引理 5.4，我们可以将剩余的复合映射替换为其在 $t=0$ 处的取值。反复应用这一论证可知，将 $\mu_I^J$ 中出现的每个乘法映射替换为其在 $t=0$ 处的取值，会得到 $(\mu_I^J)_{|t=0}$。

特别是，上述论证还表明 $(\mu_I^J)_{|t=0}$ 不含 $\tau$，因此再次根据引理 5.4，我们可以将所有 $R^{\pm1}$ 的副本替换为其在 $t=0$ 处的取值，并直接忽略旋子，因为 $(\kappa^{\pm1})^i_{|t_i=0}=1$（模 $\varepsilon$）。于是注意到

$$(R^{\pm1})^{ij}_{|t=0}=\exp[\pm(y_ix_j)h]$$

尤其是 $a$无自由项，因此递归应用引理5.4 后，我们可以在定义 $\mu_I^J$的复合映射中改用$(\mu_{i,\ j}^{k})_{|t=\alpha=0}$。然而，这个生成级数等于交换乘法对应的生成级数，见注4.16；在交换乘法中，乘积表示用相同的指标重新标记。一个正交叉（上股为 $i$）使 $p_{ij}$ 增加一，而一个负交叉（上股为 $i$）使 $n_{ij}$增加一。由此即可得证。□

前一个命题使我们能够证明， $Z_{\mathbb{D}}(K)$（模 $\varepsilon$）等价于亚历山大多项式。

**命题 5.13** ([BV21])。设 $K$ 是一个0框架结。则

$$Z_{\mathbb{D}}(K)=\frac{1}{\Delta_K(\boldsymbol{T})}\pmod{\varepsilon}.$$

证明。设 $K=Th(L)$ 表示某个具有 $2g$ 个分支的垂直底缠结 $L$。我们通过考察复合映射，来计算 $Z_{\mathbb{D}}(K)=Th(Z_{\mathbb{D}}(L))$

$$\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]\xrightarrow{Z_{\mathbb{D}}(L)}\mathbb{D}^{\hat{\otimes}2g}\xrightarrow{Cr^{\hat{\otimes}g}}\mathbb{D}^{\hat{\otimes}2g}\xrightarrow{\mu^{[g]}\circ B^{\hat{\otimes}g}}\mathbb{D}$$

以这种方式。

映射 $Cr^{\otimes g}$ 由乘法以及 $R$的复制组成。与命题5.12 中给出的论证相同，可以证明，如果 $V$ 由（5.9）给出，即 $V$ 是 $K$ 所对应加厚的塞弗特矩阵，那么

$$Cr^{\hat{\otimes}g}(Z_{\mathbb{D}}(L))_{|t=0}=\exp\left[yVx\cdot h\right]\pmod{\varepsilon}.$$

现在，由于 $B$不含 $\tau$，引理 5.7 保证 $\mu^{[g]}\circ B^{\hat{\otimes}g}$ 也不含 $\tau$，因此只需使用上文对 $Cr^{\otimes g}(Z_{\mathbb{D}}(L))$ 在 $t=0$ 处的求值。但 $Cr^{\otimes g}(Z_{\mathbb{D}}(L))_{|t=0}$ 模 $\varepsilon$ 不含 $a$，这意味着根据引理 5.4，我们改用 $(\mu^{[g]}\circ B^{\hat{\otimes}g})_{|\alpha=0}$。利用推论 6.2，我们得到

$$\begin{aligned}Z_{\mathbb{D}}(K)&=(\mu^{[g]}\circ B^{\hat{\otimes}g})_{|\alpha=0}\circ Cr^{\hat{\otimes}g}(Z_{\mathbb{D}}(L))_{|t=0}\\&=\left\langle T_k^g\exp\left[yVx\cdot h+\frac{T_k-1}{h}\cdot\xi Q\eta\right]\right\rangle_{1,\ldots,2g}\pmod{\varepsilon}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

为进行前述复合运算，我们使用缩并定理 4.12 其中

$$u = v = 0 \quad , \quad r = (y\ \xi) \quad , \quad s = (\eta\ x) \quad , \quad W = \begin{pmatrix} 0 & Vh \\ \frac{T_k - 1}{h} Q & 0 \end{pmatrix},$$

从而得到

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{D}}(K) &= T^g \det(I - W)^{-1} = T^g \det(I - (T-1)VQ)^{-1} \\ &= T^g \det(-Q^2 - (T-1)VQ)^{-1} = T^g \det(Q) \det(-Q - (T-1)V)^{-1} \\ &= T^g \det(-V + V^T - (T-1)V)^{-1} = T^g \det(V^T - TV)^{-1} \\ &= (T^{-1/2})^{-2g} \det(V - TV^T)^{-1} = \det(T^{-1/2}V - T^{1/2}V^T) \\ &= \Delta_K(T)^{-1} \pmod{\varepsilon} \end{aligned}$$

（我们省略了下标 $k$），其中我们使用了 $\det(Q) = 1$, $Q^2 = -I$,$V - V^T = Q$，并且对于任意具有相同阶数的方阵 $A$, $B$ 等式

$$\det \begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix} = \det(I - AB)$$

成立。 □

5.3. **的标准形**。现在我们将重点研究（长）纽结的普适不变量。众所周知（例如参见 [Hab06，命题 8。2]），纽结 $Z_A(K)$ 的普适不变量 $K$ 取值于带状霍普夫代数 $\mathcal{Z}(A)$ 的中心 $A$。

我们可以完全确定代数 $\mathbb{D}$ 的中心。

**命题 5.14** ([BV21])**.** 设 $\boldsymbol{w}' \in \mathcal{Z}(\mathbb{D})$ 且满足

$$\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{y}\boldsymbol{x} + g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{t}) \pmod{h}$$

对于某些 $g \in \mathbb{Q}_\varepsilon\langle\langle X, Y\rangle\rangle$。则 $Z(\mathbb{D})$ 作为拓扑 $\mathbb{Q}_\varepsilon[[h]]$-子代数，由元素 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{w}'$生成。

特别是，元素

$$\boldsymbol{w} := \boldsymbol{y}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} + \frac{q\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{A} - \frac{1}{2}(q+1)(\boldsymbol{T}+1)}{h(q-1)}$$

满足上述假设。

注 5.15. 陈述中的分子确实是 $h(q-1)$ 的倍数。其在 $\mathbb{D}/(q-1)\mathbb{D} = \mathbb{D}/\varepsilon h\mathbb{D}$ 中的像[6] 等于 $1 + \boldsymbol{T} - (\boldsymbol{T}+1) = 0$，因为 $q$ 和 $\boldsymbol{A}^{\pm 1}$ 都映射为 1。由于 $\boldsymbol{t}$ 是中心元，对 $(q\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{A} - \frac{1}{2}(q+1)(\boldsymbol{T}+1))/(q-1)$ 应用洛必达法则，即可得到结论。

该命题指出，我们应当能够用 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 表示纽结 $K$ 的普适不变量 $Z_{\mathbb{D}}(K)$。对于零框架纽结，以下基本定理表明，我们可以用一种特别简洁的形式表示 $Z_{\mathbb{D}}(K)$。

对于纽结 $K$，我们将 $\Delta_K \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 记作 $K$（的闭包）的亚历山大多项式，并将其归一化为 $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$ 且 $\Delta_K(1) = 1$。

[6]在幂级数环 $\mathbb{Q}[[x]]$ 中，由 $x$ 生成的理想等于由 $e^x - 1$ 生成的理想。

**定理 5.16** ([BV21])。 对于任意 0-框架结 $K$，存在纽结多项式不变量

$$\rho_K^{i,j} \in \mathbb{Q}[t, t^{-1}],$$

$i \geq 0$, $0 \leq j \leq 2i$，使得

$$Z_{\mathbb{D}}(K) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{2i} h^{i+j} \frac{\rho_K^{i,j}(\boldsymbol{T})}{\Delta_K^{2i+1-j}(\boldsymbol{T})} \boldsymbol{w}^j \right) \varepsilon^i$$

注意，命题 5.13 相当于说 $\rho^0{}_{,K}{}^0 = 1$。

5.4. **高阶项的消失** $\rho^i{}_{,K}{}^j$ 。 定理 5.16 指出，研究普适不变量 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 相当于研究 Bar-Natan - van der Veen 多项式的集合 $\rho^i{}_{,K}{}^j$，其中 $i \geq 0$, $0 \leq j \leq 2i$。那么自然的问题是，这些纽结多项式不变量的区分能力有多强。预计多项式 $\rho^i{}_{,K}{}^0$ 能够区分大量纽结（见第 7 节）。对于 $j > 0$，我们预计这些多项式要么是平凡的，要么可以由 $j = 0$ （以及亚历山大多项式）的相关多项式推出。事实上，通过解决 [BV21], 中的一个猜想，我们将在下文证明，求和实际上仅遍历 $j = 0, \ldots, i$。

首先，我们需要一个中心元 $\boldsymbol{w}$ mod $\varepsilon^2$的显式公式。

**引理 5.17.** 设 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{D}$ 如命题 *5.14*中所示。那么我们有

$$\boldsymbol{w} = \frac{1-\boldsymbol{T}}{h}\left(\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\right) + \boldsymbol{yx} + \left[\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{T})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^2) + \boldsymbol{yax}h\right]\varepsilon \pmod{\varepsilon^2}.$$

证明. 证明这一点的一种方法是将定义 $\boldsymbol{w}$ 的表达式按 $\varepsilon$的幂级数展开。或者，由于 $h(q-1) \in \varepsilon\mathbb{D}$ 且 $\boldsymbol{yA}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{yx} + \boldsymbol{yax}h \pmod{\varepsilon^2}$，只需证明

$$q\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{TA} - \frac{1}{2}(q+1)(\boldsymbol{T}+1) = h(q-1)\left[\frac{1-\boldsymbol{T}}{h}\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(1+\boldsymbol{T})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^2)\varepsilon\right] \pmod{\varepsilon^3}$$

这一点通过将两边按 $\varepsilon$的幂展开即可直接验证。 □

**定理 5.18.** 对于任意 0-框架结 $K$，

$$\rho_K^{i,j}(t) = 0$$

对于 $j > i \geq 1$。

证明。我们先注意到，只需证明对于一个零框架纽结 $K$，其值 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 不含有 $\boldsymbol{a}^{n+p}\varepsilon^n$ 的单项式，其中 $p > 0$。事实上，根据引理5.17 可知

$$\boldsymbol{w}^j\varepsilon^i = \left(\frac{1-\boldsymbol{T}}{h}\right)^j \boldsymbol{a}^j\varepsilon^i + (\text{terms with lower powers of } \boldsymbol{a}) \pmod{\varepsilon^{i+1}},$$

因此，考察定理 5.16 中的表达式，我们必须得出结论： $\rho^i{}_{,K}{}^j = 0$ 当$j > i > 0$时。

按照惯例，对于一个有 $2g$ 个分支的垂直底缠结 $L$，其股标记为 $\mathbf{1}, \ldots, 2g$，记作

$$(Z_{\mathbb{D}}(L)_{|t=0})^{1,\ldots,2g} = e^{yV'x\cdot h}(P_0 + P_1\varepsilon + \cdots + P_n\varepsilon^n) \pmod{\varepsilon^{n+1}}$$

and

$$Th^0_{1,\dots,2g} = e^{(*)}(P'_0 + P'_1\varepsilon + \cdots + P'_n\varepsilon^n) \pmod{\varepsilon^{n+1}}$$

其中 $(*)$ 是一个不包含任何 $a_0$的表达式。根据推论5.11，我们得到

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{D}}(K) &= Th^0_{1,\dots,2g} \circ (Z_{\mathbb{D}}(L)_{|t=0})^{1,\dots,2g} \\ &= \left\langle e^{yV'x\cdot h}(P_0 + P_1\varepsilon + \cdots + P_n\varepsilon^n)e^{(*)}(P'_0 + P'_1\varepsilon + \cdots + P'_n\varepsilon^n)\right\rangle_{1,\dots,2g} \\ &= \left\langle e^{yV'x\cdot h+(*)}P_0P'_0\right\rangle + \cdots + \left\langle e^{yV'x\cdot h+(*)}(P_0P'_n + \cdots + P_nP'_0)\right\rangle \varepsilon^n \end{aligned}$$

（模 $\varepsilon^{n+1}$）。

要看出收缩

$$\left\langle \qquad e^{yV'x\cdot h+(*)}(P_0P'_n + \cdots + P_nP'_0)\right\rangle_{1,\dots,2g}$$

不含任何项 $a_0^{n+p}$， $p > 0$，论证如下：收缩之后出现的 $a_0$ 任意次幂，要么是因为它原本就在某个 $P'_i$ 中（情形 (1)），要么是在应用收缩定理4.12时由某个 $a_\ell$，$\ell = 1$，……，$2g$产生（情形 (2)）。但若是情形 (1)，根据推论5.11，这种 $a_0$ 次幂至多为 $n$。另一方面，应用收缩公式时不可能产生 $a_0$ ，因为这样的项会来自指数部分，而指数 $a_0$ 中没有 $e^{yV'x\cdot h+(*)}$ （参见例4.17），由此得证。□

5.5. **一些具体数值**。对于零框架纽结 $K$，令 $\mathrm{Coeff}_{a_0\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K))$ 表示 $a_0\varepsilon^2$ 中（独立于 $a_0$ 和 $\varepsilon$） $Z_{\mathbb{D}}(K)^0$，的系数，其中 0 表示 $K$ 的唯一标号，即

$$Z_{\mathbb{D}}(K)^0 = \frac{1}{\Delta_K(T_0)} + (\cdots)\varepsilon + \left(\mathrm{Coeff}_{a_0\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K))a_0 + \begin{pmatrix}\text{terms with}\\ a_0^k, k\neq 1\end{pmatrix}\right)\varepsilon^2 \pmod{\varepsilon^3}$$

并将 $\mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}\varepsilon}(Z_{\mathbb{D}}(K))$ 记作该项，即 $\varepsilon^1$ 的倍数，且与$y_0$， $a_0$， $x_0$无关。

**命题 5.19.** 设 $K$ 是一个零框架纽结。于是有

$$\mathrm{Coeff}_{a_0\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K)) = -2hT_0 \cdot \partial_{T_0}\mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}\varepsilon}(Z_{\mathbb{D}}(K)).$$

证明。 照例，设 $L$ 是一个 $2g$ 分支的垂直底缠结，使得 $K = \frown Th(L)$，并记

$$\left[Cr^{\hat{\otimes}g} \circ Z_{\mathbb{D}}(L))_{|t=0}\right]^{1,\dots,2g} = e^{yVx\cdot h}(1 + \overline{P}_1\varepsilon + \overline{P}_2\varepsilon^2) \pmod{\varepsilon^3}$$

为 $L$ 的普适不变量与 $g$重交叉映射复合后所得的生成级数，并且

$$\left[\mu^{[g]} \circ B^{\hat{\otimes}g}\right]^0_{1,\dots,2g} = e^G(T_0^g + P_1^{\alpha\neq 0}\varepsilon + P_2^{\alpha\neq 0}\varepsilon^2) \pmod{\varepsilon^3}$$

如命题 6.5 中的加厚映射（部分）的生成级数，从而 $G_{|\alpha=0} = \frac{T_0^{-1}}{h}\xi Q\eta$，以及整个表达式 ——

$$\left[(\mu^{[g]} \circ B^{\hat{\otimes}g})_{|\alpha=0}\right]^0_{1,\dots,2g} = e^{\frac{T_0^{-1}}{h}\xi Q\eta}(T_0^g + P_1\varepsilon + P_2\varepsilon^2) \pmod{\varepsilon^3}$$

其中 $P_i = (P_i^{\alpha\neq 0})|_{\alpha=0}$。于是有

$$\begin{aligned}
Z_{\mathbb{D}}(K)^0 &= \left\langle T_0^g e^{yVx\cdot h+G}\right\rangle + \left\langle (T_0^g \overleftarrow{P}_1 + P_1^{\alpha\neq 0}) e^{yVx\cdot h+G}\right\rangle \varepsilon \\
&\quad + \left\langle (T_0^g \overline{P}_2 + P_1^{\alpha\neq 0}\overline{P}_1 + P_2^{\alpha\neq 0}) e^{yVx\cdot h+G}\right\rangle \varepsilon^2 \\
&= \left\langle T_0^g e^{yVx\cdot h+\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right\rangle \\
&\quad + \left(\left\langle T_0^g \overline{P}_1 e^{yVx\cdot h+G}\right\rangle + \left\langle P_1 e^{yVx\cdot h+\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right\rangle\right)\varepsilon \\
&\quad + \left(\left\langle (T_0^g \overline{P}_2 + P_1^{\alpha\neq 0}\overline{P}_1) e^{yVx\cdot h+G}\right\rangle + \left\langle P_2 e^{yVx\cdot h+\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right\rangle\right)\varepsilon^2 \pmod{\varepsilon^3}
\end{aligned}$$

其中我们令 $\langle -\rangle = \langle -\rangle_{1,\dots,2g}$，并将 $G$ 和 $P_i^{\alpha\neq 0}$ 替换为它们在不出现 $a_i$、$1\le i\le 2g$ 的那些收缩中的取值。由此可得

$$\mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}\varepsilon}(Z_{\mathbb{D}}(K)) = \left\langle T_0^g \overline{P}_1 e^{yVx\cdot h+G}\right\rangle + \left\langle \mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}}(P_1) e^{yVx\cdot h+\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right\rangle \tag{5.11}$$

and

$$\mathrm{Coeff}_{a_0\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K)) = \left\langle \mathrm{Coeff}_{a_0}(P_1^{\alpha\neq 0})\overline{P}_1 e^{yVx\cdot h+G}\right\rangle + \left\langle \mathrm{Coeff}_{a_0}(P_2) e^{yVx\cdot h+\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right\rangle. \tag{5.12}$$

另一方面，引理 6.7 表明

$$-2hT_0\cdot\partial_{T_0}\left(\mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}}(P_1) e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right) = \mathrm{Coeff}_{a_0}(P_2) e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta},$$

这又意味着

$$-2hT_0\cdot\partial_{T_0}\left\langle \mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}}(P_1) e^{yVx\cdot h+\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right\rangle = \left\langle \mathrm{Coeff}_{a_0}(P_2) e^{yVx\cdot h+\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right\rangle$$

由配对和导数的线性性。现在将两边乘以 $P_1 e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}$命题6.5第一部分中的并进行缩并，可得

$$-2hT_0\cdot\partial_{T_0}\left\langle T_0^g \overline{P}_1 e^{yVx\cdot h+G}\right\rangle = \left\langle \mathrm{Coeff}_{a_0}(P_1^{\alpha\neq 0})\overline{P}_1 e^{yVx\cdot h+G}\right\rangle$$

将最后两个方程相加，并与（5.11）和（5.12）比较，即得所需结果。□

**定理 5.20**。对于任意零框架纽结 $K$，我们有

*(1)* $\rho_K^{1,1}(t) = \dfrac{2t}{1-t}\Delta_K'(t)$,

*(2)* $\rho_K^{2,1}(t) = \dfrac{2t\Delta_K^4(t)}{t-1}\left(\dfrac{\rho_K^{1,0}}{\Delta_K^3}\right)'(t)$,

*(3)* $\rho_K^{2,2}(t) = t\left(\dfrac{\Delta_K(t)}{1-t}\right)^3\left((3-t)(\Delta_K^{-1})'(t) + 2t(1-t)(\Delta_K^{-1})''(t)\right)$.

证明。 **(1)** 我们将 $a_0\varepsilon$ （独立于$a_0$ 和 $\varepsilon$）中 $Z_{\mathbb{D}}(K)^0$, 的系数记为 $\mathsf{Coeff}_{a_0\varepsilon}(Z_{\mathbb{D}}(K))$，其中 **0** 表示唯一的标签，即

$$Z_{\mathbb{D}}(K)^0 = \frac{1}{\Delta_K(T_0)} + \left(\mathrm{Coeff}_{a_0\varepsilon}(Z_{\mathbb{D}}(K))a_0 + (\text{terms indep. of } a_0)\right)\varepsilon \pmod{\varepsilon^2}.$$

将此与定理 5.16 和引理 5.17 进行比较可得

$$\operatorname{Coeff}_{a_0\varepsilon}(Z_{\mathbb{D}}(K)) = h\frac{(1-T_0)\rho_K^{1,1}(T_0)}{\Delta_K^2(T_0)}. \tag{5.13}$$

设 $L$ 为一个垂直底缠结，使得 $K = Th(L)$，从而

$$Cr^{\hat{\otimes} g}(Z_{\mathbb{D}}(L))_{|t=0} = e^{yVx\cdot h} \pmod{\varepsilon}$$

如命题5.13的证明中所述，其中 $V$ 是 $K$的一个塞弗特矩阵。再次应用推论 5.9，利用 $\mathsf{Coeff}_{a_0}(P_1)$ 关于第一扰动项 $P_1$ 的表达式，该项是 $(\mu^{[g]} \circ B^{\hat{\otimes} g})|_{\alpha=0}$ 在命题 6.4中导出的，得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{Coeff}_{a_0\varepsilon}(Z_{\mathbb{D}}(K)) &= \left\langle \operatorname{Coeff}_{a_0}(P_1) e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta} e^{yVx\cdot h} \right\rangle_{1,\dots,2g} \\
&= \left\langle -2hT_0\cdot\partial_{T_0}\left(T_0^g e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right) e^{yVx\cdot h} \right\rangle_{1,\dots,2g} \\
&= -2hT_0\cdot\partial_{T_0}\left\langle T_0^g e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta + yVx\cdot h} \right\rangle_{1,\dots,2g} \\
&= -2hT_0\cdot\partial_{T_0}\left(\frac{1}{\Delta_K(T_0)}\right),
\end{aligned}$$

其中我们利用了配对和导数的线性性，以及（5.10）等于亚历山大多项式的逆元这一事实，正如命题 5.13中所示。结合（5.13）可推出

$$\begin{aligned}
\rho_K^{1,1}(T_0) &= \frac{\operatorname{Coeff}_{a_0\varepsilon}(Z_{\mathbb{D}}(K))\cdot\Delta_K(T_0)}{h(1-T_0)} \\
&= \frac{-2hT_0\cdot\partial_{T_0}\left(\frac{1}{\Delta_K(T_0)}\right)\Delta_K^2(T_0)}{h(1-T_0)} \\
&= \frac{2T_0}{1-T_0}\partial_{T_0}\Delta_K(T_0).
\end{aligned}$$

(3) 现在以类似的方式定义 $\mathsf{Coeff}_{a_0^2\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K))$ 。再次结合定理5.16 和引理5.17 可得

$$\operatorname{Coeff}_{a_0^2\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K)) = \frac{h^2(1+T_0)\rho_K^{1,1}(T_0)}{2\Delta_K^2(T_0)} + \frac{h^2(1-T_0)^2\rho_K^{2,2}(T_0)}{\Delta_K^3}. \tag{5.14}$$

另一方面，项 $\mathsf{Coeff}_{a_0^2\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K))$ 可以利用推论 5.9以及命题 6.4 的第二部分得到，正如我们之前所做的那样：

$$\begin{aligned}
\operatorname{Coeff}_{a_0^2\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K)) &= \left\langle \operatorname{Coeff}_{a_0^2}(P_2) e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta} e^{yVx\cdot h} \right\rangle_{1,\dots,2g} \\
&= \left\langle 2h^2T_0\left[(\partial_{T_0} + T_0\cdot\partial_{T_0,T_0})\left(T_0^g e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right)\right] e^{yVx\cdot h} \right\rangle_{1,\dots,2g} \\
&= 2h^2T_0(\partial_{T_0} + T_0\cdot\partial_{T_0,T_0})\left\langle T_0^g e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta + yVx\cdot h} \right\rangle_{1,\dots,2g} \\
&= 2h^2T_0\cdot\partial_{T_0}\left(\frac{1}{\Delta_K(T_0)}\right) + 2h^2T_0^2\cdot\partial_{T_0,T_0}\left(\frac{1}{\Delta_K(T_0)}\right).
\end{aligned}$$

由（5.14）和（1）可得

$$\rho_K^{2,2}(T_0) = \frac{\Delta_K^3(T_0)}{(1-T_0)^2}\left(\frac{\operatorname{Coeff}_{a_0^2\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K))}{h^2} - \frac{T_0(1+T_0)}{(1-T_0)}\partial_{T_0}\Delta_K^{-1}(T_0)\right)$$

$$= \frac{\Delta_K^3(T_0)}{(1-T_0)^2}[2(1-T_0)T_0\partial_{T_0}\Delta_K^{-1}(T_0) + 2(1-T_0)T_0^2\partial_{T_0,T_0}\Delta_K^{-1}(T_0) + T_0(T_0+1)\partial_{T_0}\Delta_K^{-1}(T_0)]$$
$$= T_0\frac{\Delta_K^3(T_0)}{(1-T_0)^2}[(3-T_0)\partial_{T_0}\Delta_K^{-1}(T_0) + 2T_0(1-T_0)\partial_{T_0,T_0}\Delta_K^{-1}(T_0)].$$

（2）再次由定理5.16 和引理5.17 可得

$$\mathrm{Coeff}_{a_0\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K)) = \frac{h^2\rho_K^{1,1}(T_0)(1+T_0)^2}{2\Delta_K^2(T_0)} + \frac{h^2\rho_K^{2,1}(T_0)(1-T_0)}{\Delta_K^4(T_0)} + \frac{h^2\rho_K^{2,2}(T_0)(1-T_0)^2}{\Delta_K^3(T_0)} \tag{5.15}$$

and

$$\mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}}(Z_{\mathbb{D}}(K)) = \frac{h\rho_K^{1,0}(T_0)}{\Delta_K^3(T_0)} + \frac{h\rho_K^{1,1}(T_0)(1-T_0)}{2\Delta_K^2(T_0)},$$

并由 (1)

$$\partial_{T_0}\mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}}(Z_{\mathbb{D}}(K)) = h\cdot\partial_{T_0}\left(\frac{\rho_K^{1,0}}{\Delta_K^3}\right)(T_0) - h\cdot\partial_{T_0}\left(T_0\cdot\partial_{T_0}\Delta_K^{-1}(T_0)\right)$$
$$= h\cdot\partial_{T_0}\left(\frac{\rho_K^{1,0}}{\Delta_K^3}\right)(T_0) - h\left(\partial_{T_0}\Delta_K^{-1}(T_0) + T_0\cdot\partial_{T_0,T_0}\Delta_K^{-1}(T_0)\right).$$

这个表达式与 (5.15) 一起可得

$$\rho_K^{2,1}(T_0) = \frac{\Delta_K^4}{h^2(1-T_0)}\left(\mathrm{Coeff}_{a_0\varepsilon^2}(Z_{\mathbb{D}}(K)) - \frac{h^2\rho_K^{1,1}(T_0)(1+T_0)^2}{2\Delta_K^2(T_0)} - \frac{h^2\rho_K^{2,2}(T_0)(1-T_0)^2}{\Delta_K^3(T_0)}\right)$$
$$= \frac{\Delta_K^4}{(1-T_0)}\left[2T_0\cdot\partial_{T_0}\Delta_K^{-1}(T_0) + 2T_0^2\cdot\partial_{T_0,T_0}\Delta_K^{-1}(T_0) - 2T_0\cdot\partial_{T_0}\left(\frac{\rho_K^{1,0}}{\Delta_K^3}\right)(T_0) - \frac{\rho_K^{2,2}(T_0)(1-T_0)^2}{\Delta_K^3(T_0)}\right]$$
$$= \frac{\Delta_K^4}{(1-T_0)}\left[\left(2T_0 - \frac{T_0}{1-T_0}(3-T_0) + \frac{T_0(1+T_0)}{1-T_0}\right)\cdot\partial_{T_0}\Delta_K^{-1}(T_0) + \left(2T_0^2 - \frac{T_0}{1-T_0}2T_0(1-T_0)\right)\cdot\partial_{T_0,T_0}\Delta_K^{-1}(T_0) - 2T_0\cdot\partial_{T_0}\left(\frac{\rho_K^{1,0}}{\Delta_K^3}\right)(T_0)\right]$$
$$= \frac{2T_0\Delta_K^4(T_0)}{T_0-1}\cdot\partial_{T_0}\left(\frac{\rho_K^{1,0}}{\Delta_K^3}\right)(T_0)$$

其中，在第二个等式中我们使用了 (1) 和命题5.19 ，在第三个等式中使用了 (2)。□

**5.6. 连通和下的行为。** 我们还希望研究 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 关于连通和的行为。回想一下，对于纽结 $K, K'$，亚历山大多项式满足

$$\Delta_{K\#K'} = \Delta_K\Delta_{K'}. \tag{5.16}$$

**定理 5.21。** 设 $K$、$K'$ 为零框架纽结， $n \geq 0$ 和 $0 \leq r \leq n$ 为整数。那么

$$\rho_{K\#K'}^{n,r} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=\max(0,r+i-n)}^{\min(i,r)} \rho_K^{i,j}\rho_{K'}^{n-i,r-j}\Delta_K^{2(n-i)-(r-j)}\Delta_{K'}^{2i-j}.$$

证明。 首先注意，根据定义，我们有

$$Z_{\mathbb{D}}(K\#K') = Z_{\mathbb{D}}(K)Z_{\mathbb{D}}(K').$$

现在，根据定理 5.16，等式左边乘以 $\boldsymbol{w}^r\varepsilon^n$ 的系数必定为

$$\frac{\rho^{n,r}_{K\#K'}}{\Delta^{2n+1-r}_{K\#K'}} = \frac{\rho^{n,r}_{K\#K'}}{\Delta^{2n+1-r}_{K}\Delta^{2n+1-r}_{K'}},$$

而右边对应的系数必定为

$$\sum_{i+u=n}\sum_{\substack{j+v=r\\ j\le i\ ,\ v\le u}} \frac{\rho^{i,j}_{K}}{\Delta^{2i+1-j}_{K}}\frac{\rho^{u,v}_{K'}}{\Delta^{2u+1-v}_{K'}}.$$

这里， $\rho^{i,\ j}$ 以及亚历山大多项式均在 $\boldsymbol{T}$ 处取值，并且为方便起见省略了 $h$。令 $u := n-i$ 和 $v := r-j$，则第二个求和式中必须有 $j \ge r+i-n$。重新整理各项后，即得证明。□

注记 5.22。 请注意，前一定理的论证重新证明了（5.16）。

**推论 5.23**。 设 $K$、$K'$ 是零框架纽结，且 $n \ge 0$。则

$$\rho^{n,0}_{K\#K'} = \sum_{i=0}^{n} \rho^{i,0}_{K}\rho^{n-i,0}_{K'}\Delta^{2(n-i)}_{K}\Delta^{2i}_{K'}.$$

备注5.24。 情形 $n = 1$ 已在 [Qua22], 中证明，但那里使用的论证涉及冗长繁琐的计算。

为方便起见，我们明确写出 $\rho^{n,K^{r}}{}_{\#K'}$ 的前几项:

(1) $\rho^{1,0}_{K\#K'} = \rho^{1,0}_{K}\Delta^{2}_{K'} + \rho^{1,0}_{K'}\Delta^{2}_{K}$,
(2) $\rho^{1,1}_{K\#K'} = \rho^{1,1}_{K}\Delta_{K'} + \rho^{1,1}_{K'}\Delta_{K}$,
(3) $\rho^{2,0}_{K\#K'} = \rho^{2,0}_{K}\Delta^{4}_{K'} + \rho^{2,0}_{K'}\Delta^{4}_{K} + \rho^{1,0}_{K}\rho^{1,0}_{K'}\Delta^{2}_{K}\Delta^{2}_{K'}$,
(4) $\rho^{2,1}_{K\#K'} = \rho^{2,1}_{K}\Delta^{3}_{K'} + \rho^{2,1}_{K'}\Delta^{3}_{K} + \rho^{1,1}_{K}\rho^{1,0}_{K'}\Delta^{2}_{K}\Delta_{K'} + \rho^{1,1}_{K'}\rho^{1,0}_{K}\Delta^{2}_{K'}\Delta_{K}$,
(5) $\rho^{2,2}_{K\#K'} = \rho^{2,2}_{K}\Delta^{2}_{K'} + \rho^{2,2}_{K'}\Delta^{2}_{K'} + \rho^{1,1}_{K}\rho^{1,1}_{K'}\Delta_{K}\Delta_{K'}$.

## 6. 带映射的性质

本节推导带映射的生成级数的一些性质，这些性质将在第 5 节中多次用到。对于其中一些涉及大量单项式的结果，我们借助 Mathematica 代码进行了计算，相关代码收录于附录 A。

**命题 6.1.** 我们有

$$(B_{|\alpha=0})^{k}_{ij} = T_k \exp\left[\frac{T_k-1}{h}\cdot\begin{pmatrix}\xi_i & \xi_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_i\\ \eta_j\end{pmatrix}\right] \pmod{\varepsilon}$$

证明。 一种展示这一点的方法是让计算机应用收缩公式进行七次计算。不过，为了便于阐述，我们希望在此给出一个明确的证明。

由于 $B$ 不含 $\tau$（根据命题 5.8），且我们令 $\alpha=0$ 对于 $B$，所有含有 $\boldsymbol{t}$ 或 $\boldsymbol{a}$ 的单项式都映射为零，因此根据引理 4.8 $(B_{|\alpha=0})_{ij}^{k}$ 等于

$$\begin{aligned}&(\widehat{(\mathcal{O}^{\hat{\otimes}2})^{-1}}\circ\widehat{B}\circ\widehat{\mathcal{O}})(e^{y_i\eta_i+x_i\xi_i+y_j\eta_j+x_j\xi_j})\\&\qquad=(\widehat{(\mathcal{O}^{\hat{\otimes}2})^{-1}}\circ\widehat{B})\left(\sum_{r,s,p,q\geq 0}\frac{1}{r!s!p!q!}\boldsymbol{y}^r\boldsymbol{x}^s\,\hat{\otimes}\,\boldsymbol{y}^p\boldsymbol{x}^q\eta_i^r\xi_i^s\eta_j^p x_j^q\right)\end{aligned}\tag{6.1}$$

现在的关键观察是，只需证明，模 $\varepsilon$下，®

$$B(\boldsymbol{y}^r\boldsymbol{x}^s\,\hat{\otimes}\,\boldsymbol{y}^p\boldsymbol{x}^q)=\begin{cases}\boldsymbol{T}\left(\frac{1-\boldsymbol{T}}{h}\right)^{r+s}r!s!(-1)^s, & \text{if } r=q \text{ and } s=p,\\ 0 & \text{else.}\end{cases}\tag{6.2}$$

对于（6.1）变为

$$\begin{aligned}&\widehat{(\mathcal{O}^{\hat{\otimes}2})^{-1}}\left(\sum_{r,s\geq 0}\frac{1}{r!s!s!r!}\boldsymbol{T}\left(\frac{1-\boldsymbol{T}}{h}\right)^{r+s}r!s!(-1)^s\eta_i^r\xi_i^s\eta_j^p x_j^q\right)\\&\quad=\widehat{(\mathcal{O}^{\hat{\otimes}2})^{-1}}\left(\boldsymbol{T}\sum_{r,s\geq 0}\frac{1}{r!s!}\left(\frac{1-\boldsymbol{T}}{h}\right)^{r+s}(\eta_i\xi_j)^r(-\eta_j\xi_i)^s\right)\\&\quad=\widehat{(\mathcal{O}^{\hat{\otimes}2})^{-1}}\left(\boldsymbol{T}\sum_{r,s\geq 0}\frac{1}{r!s!}\left(\frac{\boldsymbol{T}-1}{h}\right)^{r+s}(-\eta_i\xi_j)^r(\eta_j\xi_i)^s\right)\\&\quad=T_k\sum_{r,s\geq 0}\left(\frac{1}{r!s!}\left(\frac{T_k-1}{h}\right)^{r+s}(-\eta_i\xi_j)^r(\eta_j\xi_i)^s\right)\pmod{\varepsilon}\end{aligned}$$

这等于命题中的表达式。

为了证明（6.2），我们先注意到以下关于初等单项式的等式 $\boldsymbol{y}^n\boldsymbol{x}^m$，这些等式可通过直接计算得到:

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{y}^n\boldsymbol{x}^m)&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\boldsymbol{y}^i\boldsymbol{x}^j\,\hat{\otimes}\,\boldsymbol{T}^i\boldsymbol{y}^{n-i}\boldsymbol{x}^{m-j}\pmod{\varepsilon},\\S(\boldsymbol{y}^n\boldsymbol{x}^m)&=(-1)^{n+m}\boldsymbol{T}^{-n}\boldsymbol{x}^m\boldsymbol{y}^n\pmod{\varepsilon},\\\boldsymbol{x}^n\boldsymbol{y}^m&=\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{i}i!\boldsymbol{\lambda}^i\boldsymbol{y}^{m-i}\boldsymbol{x}^{n-i}\pmod{\varepsilon},\end{aligned}$$

其中我们令 $\boldsymbol{\lambda}:=\frac{1-\boldsymbol{T}}{h}$。这些表达式意味着

$$\begin{aligned}&(S\hat{\otimes}\mathrm{Id}\,\hat{\otimes}\,S\,\hat{\otimes}\,\mathrm{Id})(\Delta\,\hat{\otimes}\,\Delta)(\boldsymbol{y}^r\boldsymbol{x}^s\,\hat{\otimes}\,\boldsymbol{y}^p\boldsymbol{x}^q)\\&\quad=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\sum_{u=0}^{p}\sum_{v=0}^{q}\binom{r}{i}\binom{s}{j}\binom{p}{u}\binom{q}{v}(-1)^{i+j+u+v}\boldsymbol{T}^{-i}\boldsymbol{x}^j\boldsymbol{y}^i\,\hat{\otimes}\,\boldsymbol{T}^i\boldsymbol{y}^{r-i}\boldsymbol{x}^{s-j}\\&\qquad\qquad\hat{\otimes}\,\boldsymbol{T}^{-u}\boldsymbol{x}^v\boldsymbol{y}^u\,\hat{\otimes}\,\boldsymbol{T}^u\boldsymbol{y}^{p-u}\boldsymbol{x}^{q-v}\pmod{\varepsilon}\end{aligned}$$

因此 $B(\boldsymbol{y}^r\boldsymbol{x}^s\,\hat{\otimes}\,\boldsymbol{y}^p\boldsymbol{x}^q)$ 等于

$$\boldsymbol{T}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\sum_{u=0}^{p}\sum_{v=0}^{q}\binom{r}{i}\binom{s}{j}\binom{p}{u}\binom{q}{v}(-1)^{i+j+u+v}\boldsymbol{y}^{r-i}\boldsymbol{x}^{s-j+v}\boldsymbol{y}^u\boldsymbol{x}^j\boldsymbol{y}^{p-u+i}\boldsymbol{x}^{q-v}$$

模 $\varepsilon$。此外，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^{r-i}\boldsymbol{x}^{s-j+v}\boldsymbol{y}^{u}\boldsymbol{x}^{j}\boldsymbol{y}^{p-u+i}\boldsymbol{x}^{q-v}&\\ &=\sum_{k=0}^{u}\binom{s-j+v}{k}\binom{u}{k}k!\boldsymbol{\lambda}^{k}\boldsymbol{y}^{r+u-i-k}\boldsymbol{x}^{s+v-k}\boldsymbol{y}^{p+i-u}\boldsymbol{x}^{q-v}\\ &=\sum_{k=0}^{u}\sum_{\ell=0}^{p+i-u}\binom{s-j+v}{k}\binom{u}{k}\binom{s+v-k}{\ell}\binom{p-u+i}{\ell}k!\ell!\boldsymbol{\lambda}^{k+\ell}\cdot\\ &\qquad\boldsymbol{y}^{(r+p)-(k+\ell)}\boldsymbol{x}^{(s+q)-(k+\ell)}.\end{aligned}$$

将所有项合并并交换求和次序，得到

$$\begin{aligned}B(\boldsymbol{y}^{r}\boldsymbol{x}^{s}\hat{\otimes}\boldsymbol{y}^{p}\boldsymbol{x}^{q})=&\boldsymbol{T}\sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=0}^{p+r-k}k!\ell!\boldsymbol{\lambda}^{k+\ell}\boldsymbol{y}^{(r+p)-(k+\ell)}\boldsymbol{x}^{(s+q)-(k+\ell)}\cdot\\ &\sum_{v=0}^{q}(-1)^{v}\binom{q}{v}\binom{s+v-k}{\ell}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{j}\binom{s}{j}\binom{s+v-j}{k}\cdot\\ &\sum_{u=k}^{\min(p,p+r-\ell)}(-1)^{u}\binom{p}{u}\binom{u}{k}\sum_{i=\max(\ell+u-p,0)}^{r}(-1)^{i}\binom{r}{i}\binom{p-u+i}{\ell}.\end{aligned}\tag{6.3}$$

现在我们声称，对于每个 $0\leq k\leq p$，当 $\ell<p+r-k$ 时，其余的和为零。为此，只需证明

$$\sum_{u=k}^{\min(p,p+r-\ell)}(-1)^{u}\binom{p}{u}\binom{u}{k}\sum_{i=\max(\ell+u-p,0)}^{r}\binom{r}{i}\binom{p-u+i}{\ell}=0$$

对于 $\ell<p+r-k$。首先注意，若 $0\leq i<\ell+u-p$，则 $\binom{p-u+i}{\ell}=0$，因此可以将 $\max(\ell+u-p,0)$ 替换为 $0$。现在，若 $N,M,R\geq 0$ 是非负整数，则有以下等式，这可以用初等方法证明：

$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^{i}\binom{N}{i}\binom{R+i}{M}=(-1)^{N}\binom{R}{M-N},\tag{6.4}$$

其中 $\binom{R}{M-N}:=0$，若 $M<N$。特别地，对于 $R=0$，可得

$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^{i}\binom{N}{i}\binom{i}{M}=(-1)^{N}\delta_{N,M}\tag{6.5}$$

其中 $\delta_{N,\,M}$ 克罗内克δ。利用这些公式，我们最终计算

$$\begin{aligned}\sum_{u=k}^{\min(p,p+r-\ell)}(-1)^{u}\binom{p}{u}\binom{u}{k}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\binom{p-u+i}{\ell}&\\ &=(-1)^{r}\sum_{u=0}^{p-(\ell-r)}(-1)^{u}\binom{p}{u}\binom{u}{k}\binom{p-u}{\ell-r}\\ &=(-1)^{r}\binom{p}{\ell-r}\sum_{u=0}^{p-(\ell-r)}(-1)^{u}\binom{u}{k}\binom{p-(\ell-r)}{u}\end{aligned}$$

$$= (-1)^r \binom{p}{\ell - r} \delta_{p-(\ell-r),k}$$
$$= 0$$

这里我们假设 $\ell > r$ （否则，根据（6.4），该和自动为零）。这就证明了所述结论。

因此，我们可以将 $\ell = p + r - k$ 代入（6.3），从而将其改写为

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{y}^r \boldsymbol{x}^s \hat{\otimes} \boldsymbol{y}^p \boldsymbol{x}^q) =& \boldsymbol{T}\boldsymbol{\lambda}^{p+r} \boldsymbol{x}^{(s+q)-(p+r)} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+r} k!(p+r-k)! \binom{p}{k} \cdot \\ & \sum_{v=0}^{q} (-1)^v \binom{q}{v} \binom{s+v-k}{p+r-k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \binom{s+v-j}{k}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

接下来我们断言

$$\sum_{v=0}^{q} (-1)^v \binom{q}{v} \binom{s+v-k}{p+r-k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \binom{s+v-j}{k}$$

等于 $(-1)^q \binom{p+r-s}{k-s} \delta_{p+r,\,q+s}$. 为此，我们将使用下式，该式可由（6.4）轻易推出：若 $N$， $M$， $R \geq 0$ 是非负整数且 $R \geq N$，则有

$$\sum_{i=0}^{N} (-1)^i \binom{N}{i} \binom{R-i}{M} = \binom{R-N}{M-N}. \tag{6.7}$$

利用这一点，我们计算得

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{q} (-1)^v \binom{q}{v} \binom{s+v-k}{p+r-k} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \binom{s+v-j}{k} \\ & \qquad = \sum_{v=0}^{q} (-1)^v \binom{q}{v} \binom{s+v-k}{p+r-k} \binom{v}{k-s} \\ & \qquad = \binom{p+r-s}{k-s} \sum_{v=0}^{q} (-1)^v \binom{q}{v} \binom{v}{p+r-s} \\ & \qquad = (-1)^q \binom{p+r-s}{k-s} \delta_{p+r-s,q} \end{aligned}$$

这证明了所述结论。

这表明 $B(\boldsymbol{y}^r \boldsymbol{x}^s \hat{\otimes} \boldsymbol{y}^p \boldsymbol{x}^q) = 0$ 若 $p + r \neq q + s$，因此（6.6）可改写为

$$B(\boldsymbol{y}^r \boldsymbol{x}^s \hat{\otimes} \boldsymbol{y}^p \boldsymbol{x}^q) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\lambda}^{p+r} (-1)^{r+q} \delta_{p+r,q+s} \sum_{k=s}^{p} (-1)^k k!(p+r-k)! \binom{p}{k} \binom{p+r-s}{k-s}$$

并注意到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=s}^{p} (-1)^k k!(p+r-k)! \binom{p}{k} \binom{p+r-s}{k-s} \\ & \qquad = (-1)^s \sum_{\widetilde{k}=0}^{p-s} (-1)^{\widetilde{k}} \binom{p}{\widetilde{k}+s} \binom{p+r-s}{\widetilde{k}} (\widetilde{k}+s)!(p+r-s-\widetilde{k})! \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^s \frac{p!(p+r-s)!}{(p-s)!} \sum_{\tilde{k}=0}^{p-s} (-1)^{\tilde{k}} \binom{p-s}{\tilde{k}} \\
&= (-1)^s \frac{p!(p+r-s)!}{(p-s)!} \delta_{p,s} \\
&= (-1)^s p! s! \delta_{p,s}
\end{aligned}
$$

我们得出结论

$$
\begin{aligned}
B(\boldsymbol{y}^r \boldsymbol{x}^s \hat{\otimes} \boldsymbol{y}^p \boldsymbol{x}^q) &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{\lambda}^{p+r} (-1)^{r+q+s} p! r! \delta_{p,s} \delta_{p+r,q+s} \\
&= \boldsymbol{T}\boldsymbol{\lambda}^{p+r} (-1)^s r! s! \delta_{p,s} \delta_{q,r}
\end{aligned}
$$

如（6.2）中所述。 □

**推论 6.2.** 若 $g \geq 1$ 则

$$
\left[ (\mu^{[g]} \circ B^{\hat{\otimes} g})_{|\alpha=0} \right]_{1,\dots,2g}^{0} = T_0^g \exp\left[ \frac{T_0 - 1}{h} \cdot \xi Q \eta \right] \pmod{\varepsilon}
$$

其中 $Q$ 是（(5.9)）中的交形式矩阵，$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2g})$ 和 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{2g})^T$。

证明。我们有

$$
(\mu^{[g]} \circ B^{\hat{\otimes} g})_{|\alpha=0} = \mu^{[g]} \circ B_{|\alpha=0}^{\hat{\otimes} g} = \mu_{|\alpha=t=0}^{[g]} \circ (B_{|\alpha=0})^{\hat{\otimes} g} \pmod{\varepsilon},
$$

其中第一个等号由引理5.6 得出，第二个等号由引理5.4得出，因为 $B_{|\alpha=0}$ (模 $\varepsilon$) 既是 $\tau$ 又是 $a$-自由的。由于 $\mu_{|\alpha=t=0}^{[g]}$ (模 $\varepsilon$) 是$g$重交换乘法，结论得证。□

我们还需要了解带映射扰动部分的一些内容。以下结果可通过反复应用缩并定理 4.12 得到。我们在附录 A 中用计算机验证了这一点。

**引理 6.3.** 记

$$
(B_{|\alpha=0})_{ij}^k = \exp\left[ \frac{T_k - 1}{h} \cdot \xi Q \eta \right] (T_k + P_1 \varepsilon + P_2 \varepsilon^2) \pmod{\varepsilon^3}
$$

为带映射的生成级数，并令 $\mathsf{Coeff}_{a_k}(P_1)$ 表示在 $P_1$ 的表达式中乘以 $a_k$ 的项（与 $a_k$ 无关）。那么

$$
\mathrm{Coeff}_{a_k}(P_1) = -2T_k(h + T_k(\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i)).
$$

若对 $a_k^2$ 和 $P_2$ 类似地定义 $\mathsf{Coeff}^{a_k^2}(P_2)$，那么

$$
\mathrm{Coeff}_{a_k^2}(P_2) = 2h^2 T_k + 6hT_k^2(\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i) + 2T_k^3(\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i)^2.
$$

**命题 6.4.** 设 $g \geq 1$ 并记

$$
\left[ (\mu^{[g]} \circ B^{\hat{\otimes} g})_{|\alpha=0} \right]_{1,\dots,2g}^{0} = e^{\frac{T_0 - 1}{h} \xi Q \eta} (T_0^g + P_1 \varepsilon + P_2 \varepsilon^2) \pmod{\varepsilon^3}.
$$

如果 系数$a_0$（$P_1$）和 系数$a_0^2$（$P_2$）如上所述定义，那么我们有

$$
\mathrm{Coeff}_{a_0}(P_1) e^{\frac{T_0 - 1}{h} \xi Q \eta} = -2hT_0 \cdot \partial_{T_0} \left( T_0^g e^{\frac{T_0 - 1}{h} \xi Q \eta} \right)
$$

*and*

$$
\mathrm{Coeff}_{a_0^2}(P_2) e^{\frac{T_0 - 1}{h} \xi Q \eta} = 2h^2 T_0 \left[ (\partial_{T_0} + T_0 \cdot \partial_{T_0, T_0}) \left( T_0^g e^{\frac{T_0 - 1}{h} \xi Q \eta} \right) \right].
$$

证明。主要观察是，我们仍然可以按照推论6.2中的论证方式进行，也就是说，在执行复合映射时

$$(\mu^{[g]} \circ B^{\hat{\otimes} g})_{|\alpha=0} = \mu^{[g]} \circ B^{\hat{\otimes} g}_{|\alpha=0},$$

我们可以将 $g$重乘法视为交换乘法。这是因为，引理6.3中展示的系数——它们是确定命题所需系数时唯一发挥作用的系数——仅取决于 $T$ 作为拉丁变量时的情形，而它是中心元。

利用引理6.3，便可直接得出

$$\begin{aligned}\mathrm{Coeff}_{a_0}(P_1) &= T_0^{g-1}\sum_{i=1}^{g}(-2T_0(h+T_0(\xi_{2i-1}\eta_{2i}-\xi_{2i}\eta_{2i-1}))) \\ &= -2ghT_0^g - 2T_0^{g+1}\xi Q\eta \\ &= -2T_0(ghT_0^{g-1}+T_0^g\xi Q\eta)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Coeff}_{a_0}(P_1)e^{\frac{T_0^{-1}}{h}\xi Q\eta} &= -2T_0(ghT_0^{g-1}+T_0^g\xi Q\eta)e^{\frac{T_0^{-1}}{h}\xi Q\eta} \\ &= -2hT_0\cdot\partial_{T_0}\left(T_0^g e^{\frac{T_0^{-1}}{h}\xi Q\eta}\right).\end{aligned}$$

$a_0^2$中的系数的论证类似，但稍微复杂一些。具体来说，我们有

$$(B_{|\alpha=0})_{ij}^k = e^{(*)}[T_k + (\mathrm{Coeff}_{a_k}(P_1')_{ij}^k a_k + (*))\varepsilon + (\mathrm{Coeff}_{a_k^2}(P_2')_{ij}^k a_k^2 + (*))\varepsilon^2] \quad (\text{模 } \varepsilon^3)$$

其中，按照惯例，$(*)$ 表示一些无关项，而 $P_1', P_2'$ 表示 $B$的扰动项。利用引理 6.3，这意味着

$$\begin{aligned}\mathrm{Coeff}_{a_0^2}(P_2) &= T_0^{g-1}\sum_{i=1}^{g}\mathrm{Coeff}_{a_0^2}(P_2')_{2i-1,2i}^0 \\ &\quad + T_0^{g-2}\sum_{1\le i<j\le g}\mathrm{Coeff}_{a_0}(P_1')_{2i-1,2i}^0\mathrm{Coeff}_{a_0}(P_1')_{2j-1,2j}^0 \\ &= 2gh^2T_0^g + 6hT_0^{g+1}\xi Q\eta + 2T_0^{g+2}\sum_{i=1}^{g}(\xi_{2i-1}\eta_{2i}-\xi_{2i}\eta_{2i-1})^2 \\ &\quad + 2g(g-1)h^2T_0^g + 4(g-1)hT_0^{g+1}\xi Q\eta \\ &\quad + 4T_0^{g+2}\sum_{1\le i<j\le g}(\xi_{2i-1}\eta_{2i}-\xi_{2i}\eta_{2i-1})(\xi_{2j-1}\eta_{2j}-\xi_{2j}\eta_{2j-1}) \\ &= 2gh^2T_0^g + 2g(g-1)h^2T_0^g + (4g+2)hT^{g+1}\xi Q\eta + 2T_0^{g+2}(\xi Q\eta)^2 \\ &= 2T_0(gh^2T_0^{g-1}+hT_0^g\xi Q\eta) + 2T_0^2(g(g-1)h^2T_0^2 + 2ghT_0^{g-1}\xi Q\eta + T_0^g(\xi Q\eta)^2),\end{aligned}$$

其中我们用到了

$$(\xi Q\eta)^2 = \sum_{i=1}^{g}(\xi_{2i-1}\eta_{2i}-\xi_{2i}\eta_{2i-1})^2 + 2\sum_{i<j}(\xi_{2i-1}\eta_{2i}-\xi_{2i}\eta_{2i-1})(\xi_{2j-1}\eta_{2j}-\xi_{2j}\eta_{2j-1})$$

在第三个等式中。由此可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Coeff}_{a_0^2}(P_2)e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta} &= 2T_0(gh^2T_0^{g-1}+hT_0^g\xi Q\eta)e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\\ &\quad + 2T_0^2(g(g-1)h^2T_0^2+2ghT_0^{g-1}\xi Q\eta+T_0^g(\xi Q\eta)^2)e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\\ &= 2h^2T_0\cdot\partial_{T_0}\left(T_0^ge^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right)+2h^2T_0^2\cdot\partial_{T_0,T_0}\left(T_0^ge^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}\right)\end{aligned}$$

由此得证。 □

在前面的结果中，我们设定 $\alpha=0$，因为这是我们主要关注的情形。不过，命题 6.4 中的两个等式实际上在一般情形下也成立：

**命题 6.5**。设 $g\geq 1$ 并记

$$\left[\mu^{[g]}\circ B^{\hat{\otimes}g}\right]^0_{1,\dots,2g}=e^G(T_0^g+P_1^{\alpha\neq0}\varepsilon+P_2^{\alpha\neq0}\varepsilon^2)\pmod{\varepsilon^3},$$

使得 $G_{|\alpha=0}=\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta$。若 $\mathsf{Coeff}_{a_0}(P_1^{\alpha\neq0})$ 和 $\mathsf{Coeff}_{a_0^2}(P_2^{\alpha\neq0})$ 按上述方式定义，则有

$$\mathrm{Coeff}_{a_0}(P_1^{\alpha\neq0})e^G=-2hT_0\cdot\partial_{T_0}\left(T_0^ge^G\right)$$

*and*

$$\mathrm{Coeff}_{a_0^2}(P_2^{\alpha\neq0})e^G=2h^2T_0\left[(\partial_{T_0}+T_0\cdot\partial_{T_0,T_0})\left(T_0^ge^G\right)\right].$$

证明概要。 为简便起见，令 $g=1$ 。对于第一个等式，只需证明

$$\mathrm{Coeff}_{a_0}(P_1^{\alpha\neq0})=-2hT_0(1+T_0\cdot\partial_{T_0}G)$$

而对于第二个，我们有

$$\mathrm{Coeff}_{a_0^2}(P_2^{\alpha\neq0})=2h^2T_0(1+3T_0\partial_{T_0}G+T_0^2[\partial_{T_0,T_0}G+(\partial_{T_0}G)^2]).$$

那么，这些等式最好通过计算机验证（项 $\mathsf{Coeff}_{a_0^2}(P_2^{\alpha\neq0})$ 是一个包含 40 个单项式的多项式），我们在附录 A中进行了这项工作。对于 $g>1$ 的一般情形，需要像从引理 6.3 到命题 6.4那样增加一步。 □

注 6.6. 即使对于 $g=1$，带映射的生成级数的完整表达式对于 $\alpha\neq0$而言也极其庞大：仅项 $P_2^{\alpha\neq0}$ 就包含 8,000 多个单项式。这使得我们不得不借助计算机进行这些计算（这同样是严谨的）。

**引理 6.7**。 设 $g\geq1$，并写作

$$\left[(\mu^{[g]}\circ B^{\hat{\otimes}g})_{|\alpha=0}\right]^0_{1,\dots,2g}=e^{\frac{T_0-1}{h}\xi Q\eta}(T_0^g+P_1\varepsilon+P_2\varepsilon^2)\pmod{\varepsilon^3}$$

如前一个命题中所示。令 $\mathsf{Coeff}_{a_0}(P_2)$ 表示在 $P_2$ 中乘以 $a_0$的项，并令 $\mathsf{Coeff}_{\mathbf{1}}(P_1)$ 表示 $P_1$ 中与 $y_0$、$a_0$、$x_0$ 无关的项（即将 $P_1$ 在 $y_0=a_0=x_0=0$处取值）。那么有如下等式：

$$-2T_0\Big(\xi Q\eta\cdot\mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}}(P_1)+h\cdot\partial_{T_0}\mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}}(P_1)\Big)=\mathrm{Coeff}_{a_0}(P_2).$$

证明概要。 为简便起见，我们令 $g=1$，因此直接考察带映射 $(B_{|\alpha=0})^0_{1,2}$ 的生成级数。利用缩并定理4.12直接计算可得

$$\mathrm{Coeff}_{\mathbf{1}}(P_1)=2T_0(1-T_0)(\xi_1\eta_2-\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2)-\frac{T_0(1-T_0)}{h}(\xi_1^2\eta_1\eta_2+\xi_1\xi_2\eta_2^2)$$

$$+\frac{T_0(1-T_0)(3-T_0)}{4h}(\xi_1^2\eta_2^2-\xi_2^2\eta_1^2+\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2)$$

类似地

$$\begin{aligned}\mathrm{Coeff}_{a_0}(P_2) &= 4hT_0(1-2T_0)(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2-\xi_1\eta_2)+2T_0(1-2T_0^2)(\xi_1^2\eta_1\eta_2+\xi_1\xi_2\eta_2^2)\\ &+\frac{T_0(-3+5T_0^2)}{2}\xi_1^2\eta_2^2+\frac{T_0(3-8T_0+3T_0^2)}{2}\xi_2^2\eta_1^2\\ &+\frac{2T_0^2(1-T_0)}{h}(\xi_1^3\eta_1\eta_2^2-2h\xi_1\xi_2\eta_1^2-\xi_1^2\xi_2\eta_1^2\eta_2+\xi_1^2\xi_2\eta_2^3-2h\xi_2^2\eta_1\eta_2-\xi_1\xi_2^2\eta_1\eta_2^2)\\ &+\frac{T_0^2(1-T_0)(T_0-3)}{2h}(\xi_1^3\eta_2^3+\xi_2^3\eta_1^3+3\xi_1^2\xi_2\eta_1\eta_2^2-5\xi_1\xi_2^2\eta_1^2\eta_2)\\ &+2T_0(-3+10T_0-5T_0^2)\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2.\end{aligned}$$

那么，命题中的等式只需核验即可，我们在附录中用计算机完成这项工作A。对于 $g>1$ 的一般情形，还需要一个额外步骤，类似于从引理 6.3 到命题 6.4 的推导；这是一项繁琐的计算，留给读者完成。□

## 7. 展望

最后，我们想提出一些与普适不变量 $Z_{\mathbb{D}}$ 相关的开放问题和未来研究方向。

**7.1. 多项式** $\rho^n{}_K{}^0$。 除具体公式外，定理 5.20 （以及定理 5.18）的一个推论是，对于零框架纽结 $K$， $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 的值完全由多项式三元组（$\Delta_K$、$\rho^1{}_K{}^0$、$\rho^2{}_K{}^0$）决定。更确切地说，这些结果表明，其余的值 $\rho^i{}_K{}^j$ 对于 $i=1$、2 和 $j>0$ 要么是平凡的，要么可以表示为 $\Delta_K$ 和 $\rho^1{}_K{}^0$ 的导数的形式。

我们预计高阶项也具有这种性质：

**猜想 7.1** （另见 [BV21]）。 如果 $K$ 是一个零框架纽结，则 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 的值完全由亚历山大多项式 $\Delta_K$ 以及多项式族决定

$$\rho_K^{i,0}\in\mathbb{Q}[t,t^{-1}] \qquad , \qquad i>0.$$

更确切地说，如果 $j>0$，则值 $\rho^i{}_K{}^j$ 可以用亚历山大多项式 $\Delta_K$、多项式 $\rho^i{}_K{}^0$、 $i<j$ 及其导数表示。

对于 $\rho^1{}_K{}^1$ 和 $\rho^2{}_K{}^2$，我们在定理 5.20 中证明了它们只取决于亚历山大多项式。我们预计 $i=j$ 总是如此：

**猜想 7.2**。 若 $K$ 是一个零框架纽结，则多项式族 $\rho^i{}_K{}^i$、 $i>0$ 完全由 $K$ 的亚历山大多项式决定。

7.2. **与纽结拓扑性质的关系**。 研究纽结的量子不变量时，自然会思考不变量 $Z_{\mathbb{D}}$ 与纽结拓扑本质之间的相互关系。对于一个零框架纽结，命题5.13保证 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ (模 $\varepsilon$) 等价于该纽结的亚历山大多项式。该多项式有着充分理解的拓扑解释，可借助纽结补空间的万有阿贝尔覆盖的第一同调群来表述 [Lic97]。如果我们将其余的纽结多项式不变量 $\rho^i{}_K{}^0$ 视为亚历山大多项式的“扰动”版本，那么自然也会想要探求它们的拓扑解释。

**问题 7.3**。 为每个纽结多项式不变量 $\rho^{i}_{K}{}^{0}$ 给出一种拓扑构造。

我们所说的拓扑构造，是指以纽结补空间为基础的构造。对于量子不变量而言，这通常是一个非常困难的问题；值得注意的是，即使对于琼斯多项式，目前也尚无已知的拓扑解释 [大02]。然而，Bar-Natan 和 Van der Veen 最近证明，纽结多项式 $\rho^{1}_{K}{}^{0}$ 可以由一个二次表达式计算得到，其中的变量取值为矩阵 $A$ 的各项的逆元；该矩阵源自对纽结补空间基本群的 Wirtinger 表示应用 Fox 演算 [BV22]。由于矩阵 $A$ 的行列式恰好就是亚历山大多项式，我们相信，这种方法可能会导向对 $\rho^{1}_{K}{}^{0}$ 所期望的拓扑解释。

另一个使我们认为 $\rho^{1}_{K}{}^{0}$ 应当具有纯粹拓扑解释的事实是，它给出了一个纽结亏格界，$g(K) \geq \frac{1}{4}$ 宽度 $\rho^{1}_{K}{}^{0}$ 有时比亚历山大界 [BV21]更精确。因此，既然亚历山大多项式为纽结是纤维化纽结或切片纽结提供了必要条件，我们可以询问，对于 $\rho^{1}_{K}{}^{0}$ 是否也存在类似的性质。

**问题 7.4.** 用 $\rho^{1}_{K}{}^{0}$ 给出纽结 $K$ 为切片结或纤维结的必要条件。

**7.3. 与带色琼斯多项式的关系**。 我们来说明，多项式集合 $\rho^{i}_{K}{}^{0}$ 可能与所谓的带色琼斯多项式有理展开有何关系。

对于 $n \geq 2$ 和 $K$ 一个零框架纽结，令 $J^{n}_{K}(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 表示 $K$的带色琼斯多项式，并将其归一化，使得 $J^{n}_{O}(q) = 1$。也就是说，

$$J^{n}_{K}(q) = \frac{q^{-c_n}}{\{n\}_q} RT(K; V_n) \tag{7.1}$$

其中 $q = e^{h}$ 和 $\{n\}_q := q^{-n+1}[n]_{q^2} = RT(O; V_n)$。这里，$V_n$ 表示 $U_h(\mathfrak{sl}_2)$的秩为$n$的不可约表示，而 $c_n := (n-1)(n+1)/2$ 是 $V_n$的 Casimir 元。

基于 Melvin-Morton 关于带色琼斯多项式展开的工作 [MM95], Rozansky 猜想（并在后来证明）带色琼斯多项式存在一种有理展开，其分母为亚历山大多项式的幂。

**定理 7.5** ([Roz97,Roz98])**.** 设 $K$ 是一个零框架纽结。那么存在对称 *Laurent* 多项式

$$P^{i}_{K} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \qquad , \qquad i \geq 0$$

使得

$$J^{n}_{K}(q) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P^{i}_{K}(q^n)}{\Delta^{2i+1}_{K}(q^n)} (q-1)^{i} \in \mathbb{Q}[[q-1]].$$

此外，$P^{0}_{K}(t) = 1$。

在前述陈述中，等式两边都应理解为关于 $q-1$ 的幂级数展开（注意 $\Delta_K(1) = 1$）。此外，性质 $P^{0}_{K}(t) = 1$ 等价于所谓的 *Melvin-Morton-Rozansky* 猜想，该猜想已在 [BNG96]中得到证明。

注 7.6. 定理中的多项式集合 $P_K^i$ 应理解为对带色琼斯多项式的重新整理（例如参见 [GL05]）。事实上可以证明，给定一个零框架纽结 $K$，存在有理数 $a_{ij}(K)$使得

$$J_K^n(e^h) = \sum_{i,j\geq 0} a_{ij}(K) n^j h^i$$

对于任意 $n \geq 2$，每个 $a_{ij}(K)$ 都是 $K$ 的次数为 $i$ 的有限型不变量。关键性质是，当 $j > i$ 时，$a_{ij}(K) = 0$，这使我们能够对角线求和，并将前一个表达式改写为

$$J_K^n(e^h) = \sum_{\ell=0}^{\infty} R_K^\ell(nh) h^\ell \tag{7.2}$$

对于 $R_K^\ell(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+\ell,\ell} x^j \in \mathbb{Q}[[x]]$。随后 Rozansky 表明，每个 $R_K^\ell$ 都可以写成一个有理函数，

$$R_K^\ell(x) = \frac{\widetilde{P}_K^\ell(e^x)}{\Delta_K^{2\ell+1}(e^x)}$$

对于某些对称 Laurent 多项式 $\widetilde{P}_K^\ell \in \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$。经过变量代换 $h = \log((q-1)+1)$ 定理 7.5 的结论。

现在回忆第 3.5 节中，带色琼斯多项式可以由普适不变量恢复$Z_{U_h(\mathfrak{sl}_2)}$。Habiro [Hab08] 证明了反过来也成立，结合前面的备注可得

**定理 7.7**。设 $K$ 是一个零框架纽结。以下几组数据彼此等价：

*(1)* 普适不变量 $Z_{U_h(\mathfrak{sl}_2)}(K)$，*(2)* 带色琼斯多项式 $\{J_K^n(K)\}_{n\geq 2}$，*(3) Rozansky* 多项式 $\{P_K^n(K)\}_{n\geq 1}$。

根据推论 4.5，零框架纽结 $Z_{\mathbb{D}}(K)$ 的普适不变量 $K$ 确定了前一列表中的第一项（因而也确定了所有项）。我们猜想，普适不变量 $Z_{\mathbb{D}}$ 所包含的信息不超过以下三组数据：

**猜想 7.8**。对于任意零框架纽结 $K$，普适不变量$Z_{\mathbb{D}}(K)$ 这一数据等价于前一定理中的任意一组数据。

根据猜想7.1，前述陈述可改述为：Bar-Natan-Van der Veen 多项式族 $\{\rho^n, {}_K{}^0\}_{n\geq 1}$ 与定理 7.7中的每一组数据等价。

我们希望更精确地阐明 $Z_{\mathbb{D}}$ 与 Rozansky 多项式之间的关系。计算证据强烈表明

**猜想 7.9**。对于任意零框架纽结 $K$，

$$\rho_K^{1,0} = P_K^1.$$

支持这一猜想的实际表格可见于 [BV21] 和 [Roz03]（经过变量替换 $z = t^{1/2} - t^{-1/2}$）。对于其余多项式，我们想强调定理5.16

和定理7.5，其中每个 $\rho^{i,0}_K$ 的分母都是与其“对应项” $P^i_K$相同的亚历山大多项式幂次。更进一步，我们有

$$\rho^{0,0}_K = 1 = P^0_K$$

（参见命题 5.13 和定理 7.5）。然而，对于 $i > 0$， $\rho^{i,0}_K$ 和$P^i_K$ 的取值似乎各不相同。这只是因为命题 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{D}$ 5.14中选取的中心元虽然方便，却并非规范选择。因此我们得到如下

**问题 7.10**。 求一个中心元 $\boldsymbol{w}' \in \mathbb{D}$ ，使得若 $\tilde{\rho}^{i,j}_K$ 表示 $Z_{\mathbb{D}}$ 关于该中心元的有理展开中相应的多项式，则

$$\tilde{\rho}^{i,0}_K = P^i_K.$$

7.4. **与二环多项式的关系**。 Kontsevich 不变量 （或*Kont- sevich* 积分，因其经典表述而得名） [Kon93] 是一个缠结不变量，其定义取决于所选的*Drinfeld* 结合子，即某个元素 $\varphi \in \mathbb{Q}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$，它属于以两个非交换变量为元的形式幂级数环 $X$，$Y$ （对于纽结，该不变量与此选择无关）。Kontsevich 不变量是我们所知最强的结不变量；事实上，有一个猜想认为它能够区分所有（有向）纽结的同痕类 [Oht02a]。此外，已知对于任意半单复李代数 $U_h(\mathfrak{g})$，它支配量子群的表示所对应的 Reshtikhin-Turaev 不变量 $\mathfrak{g}$。

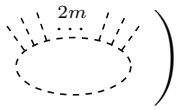
Kontsevich 不变量可以组织成一个强幺半函子 [LM96, Oht02b, HM21]

$$Z = Z_\varphi : \mathcal{T}_q \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}$$

其中，$\mathcal{T}_q$ 是立方体ˆ中带框架定向缠结范畴$\mathcal{T}$的非严格化，而$\mathcal{A}$ 是极化流形上 Jacobi 图的范畴。

要点在于，纽结的 Kontsevich 不变量 $Z(K)$ $K$的值可以视为单三价图的无限形式线性组合。例如，对于平凡结 $O$，它的形式为

$$Z(O) = \exp_{\amalg}\left( \sum_{m\geq 1} b_{2m} \right) \tag{7.3}$$



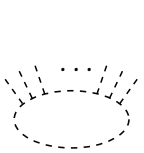
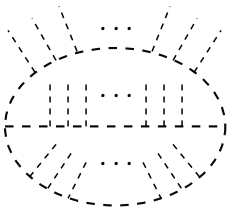

其中，$\exp_{\amalg}$ 指的是关于图的不交并的指数幂级数，系数 $b_{2m}$ 是修正伯努利数，

$$\sum_{m\geq 1} b_{2m} x^{2m} := \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sinh(x/2)}{x/2}\right) \in \mathbb{Q}[[x]],$$

所以 $b_2 = \frac{1}{48}$， $b_4 = -\frac{1}{5760}$， 等等。

表达式（7.3）具有两个显著特征：它以指数形式表示，且图中带有毛。事实证明，这两个特征为所有纽结所共有：Rozansky [Roz03], Kricker [Kri00] （另见 [GK04]）证明了，任意零框架纽结的 Kontsevich 不变量 $K$ 都具有一个

环展开

$$\log_{\sqcup}(Z(K)) = \sum_i \lambda_i$$  $$+ \sum_i \mu_i$$  $$+ \Big($$ $n$-环项, $n>2$ $$\Big).$$

上述表达式的第一项称为单环部分，可以证明它等同于 $\Delta_K$ $K$的亚历山大多项式。第二项称为双环部分，它等价于一个二元多项式

$$\Theta_K(t_1,t_2) \in \mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$$

称为二环多项式，其对应于 $K$ [Oht07]。这是一个强有力的纽结多项式不变量，甚至能够区分变异。

令我们设

$$\hat{\Theta}_K(t) := \Theta_K(t,1) \in \mathbb{Q}[t,t^{-1}].$$

利用 $\mathfrak{sl}_2$权重系统，可以证明 [Roz03、Oht10] 指出

$$\hat{\Theta}_K = P_K^1,$$

因此猜想7.9 等价于

**猜想 7.11**。 对于任意零框架纽结 $K$,

$$\rho_K^{1,0} = \hat{\Theta}_K.$$

在一篇即将发表的论文中 [Bec23a], 我们将证明猜想 7.11 对亏格小于或等于一的纽结成立。

## 附录 A. 带映射的计算

在本附录中，我们收录了 Mathematica [Wol] 实现，用于计算带映射 $B$，该映射在第 6 节中使用。为此，我们使用 Bar-Natan 和 van der Veen 为 [BV 21]，编写的代码，该代码计算带状代数结构映射的生成级数 $\mathbb{D}$，并使用缩并定理 4.12 执行复合映射。该代码可在 van der Veen 的网站上免费获取 http://www.rolandvdv.nl/PG/。

首先，我们定义如下生成级数： $B_{ij}^k$ 带映射的定义与第 5.1 节相同。按照 Mathematica 语言的惯例，双斜杠表示从左到右的复合（或生成级数的配对）。

```
定义[tBSi、j→k = tC3tC4tΔi→r1、l1 tΔj→r2、l2 // tSr1 // tSr2 //
tml1、r2→k // tmk、3→k // tmk、r1→k //tmk、4→k // tmk、l2→k]
```

这里 tm、 tΔ、 tS 和 tC 分别表示乘法、余乘法、反 antipode 和平衡元。结果是一种类似列表的类型，其第二

第一项是指数函数部分，第三项是生成级数的扰动部分。由此我们可以计算引理 6.3：

```
在[•]:= 扰动 = (tBSi, j→k // 正态)[[3]]; P1 =系数[(扰动 /。
 {𝒯i → 1, 𝒯j → 1}), ϵ, 1]; CoeffakP1 = 系数[P1, ak, 1]
```

```
外[•]= -2 ℏ Tk - 2 Tk^2 ηj ξi + 2 Tk^2 ηi ξj
```

```
输入[•]:= P2 = 系数[(扰动 /。 {𝒯i → 1, 𝒯j → 1}), ϵ, 2];
      Coeffak2P2 = 系数[P2, ak, 2]
```

```
Out[•]= 2 ℏ^2 Tk + 6 ℏ Tk^2 ηj ξi + 2 Tk^3 ηj^2 ξi^2 - 6 ℏ Tk^2 ηi ξj - 4 Tk^3 ηi ηj ξi ξj + 2 Tk^3 ηi^2 ξj^2
```

接下来，我们检验在命题的证明中所声称的两个等式 6.5。

```
输入[•]:= G = (tBSi, j→k)[[2]]; P1alphaneq0 =系数[扰动, ϵ, 1];
CoeffakP1alphaneq0 = 系数[P1alphaneq0, ak, 1]; (CoeffakP1alphaneq0 //
展开) === ((-2 ℏ Tk (1 + Tk ∂Tk (G))) // 展开)
```

```
输出[•]= 真
```

```
输入[•]:= P2alphaneq0 = 系数[扰动, ϵ, 2]; Coeffak2P2alphaneq
0 = 系数[P2alphaneq0, ak, 2]; (Coeffak2P2alphaneq0 //展开
) ===
      ((2 ℏ^2 Tk (1 + 3 Tk ∂Tk (G) + Tk^2 (∂Tk,Tk (G) + (∂Tk (G))^2))) // Expand)
```

```
输出[•]= 真
```

最后，我们直接检验引理 6.7 ( $g = 1$) 的陈述。

```
在[•]:= 系数1P1 = 系数[P1 /. {ak → 0, xk → 0, yk → 0}, ak, 0]; 系数akP2 = 系
数[P2 /. {xk → 0, yk → 0}, ak, 1]; (-2 Tk ((ξi ηj - ξj ηi) 系数1P1 + ℏ ∂Tk (系数
1P1))) // 展开) ===(系数akP2 //展开)
```

```
输出[•]= 真
```

## 参考文献

[BBG18] A. Beliakova、C. Blanchet 和 N. Geer。受限量子 $\mathfrak{sl}(2)$。代数与几何拓扑，18(7):4329–4358，2018。doi:10.2140/agt.2018.18.4329。[Bec23a] J. Becerra。属一纽结二环多项式的 Hopf 代数构造。准备中， 2023+。[Bec23b] J. Becerra。论万有缠结不变量的自然性。准备中， 2023+。[Big02] S. Bigelow。琼斯多项式的同调定义。载于《纽结与三维流形的不变量》（京都，*2001*），第《几何与拓扑专著》第4卷，29–41页。Geom. Topol. Publ.，考文垂，2002。doi:10.2140/gtm.2002.4.29。

[BNG96] D. Bar-Natan 和 S. Garoufalidis。论 Melvin-Morton-Rozansky 猜想。《数学发明》，125(1):103–133，1996。doi:10.1007/s002220050070。[BV18] D. Bar-Natan 和 R. van der Veen。一种多项式时间的纽结多项式。《美国数学会会刊》，147(1):377–397，2019。doi:10.1090/proc/14166。[BV21] D. Bar-Natan 和 R. van der Veen。普适结不变量的扰动高斯生成函数，2021。doi:10.48550/ARXIV.2109.02057。[BV22] D. Bar-Natan 和 R. van der Veen。一种扰动亚历山大不变量，2022。[CP94] V. Chari 和 A. Pressley。《量子群指南》。剑桥大学出版社，剑桥，1994。[Dri85] V. G. Drinfeld。Hopf 代数与量子Yang-Baxter方程。《苏联科学院院报》，283(5):1060–1064，1985。[GK04] S. Garoufalidis 和 A. Kricker。边界链环的有理非交换不变量。《几何与拓扑》，8:115–204，2004。doi:10.2140/gt.2004.8.115。[GL05] S. Garoufalidis 和 T. T. Q. Le。Melvin-Morton-Rozansky 猜想的解析版本，2005。doi:10.48550/ARXIV.MATH/0503641。[Hab02] K. Habiro。纽结和整同调球的量子 $\mathrm{sl}_2$ 不变量。载于《纽结与三维流形的不变量》（京都，2001），《几何与拓扑专著》第4卷，55–68页。Geom. Topol. Publ.，考文垂，2002。doi:10.2140/gtm.2002.4.55。[Hab06] K. Habiro。底部缠结与普适不变量。《代数与几何拓扑》，6 1214，2006 1113 10 2140 2006 6 1113 : – 。doi: . /agt. . . .[Hab08] K. Habiro。整同调球的统一Witten-Reshetikhin-Turaev不变量。《数学发明》，171(1):1–81，2008。doi:10.1007/s00222-007-0071-0。[HM21] K. Habiro 和 G. Massuyeau。把手体中底部缠结的 Kontsevich 积分。《量子拓扑》，12(4):593–703，2021。doi:10.4171/qt/155。[Jim85] M. Jimbo。 $q$-差分类比及 Yang-Baxter 方程的 $U(\mathfrak{g})$。《数学物理通讯》，10(1):63–69，1985。doi:10.1007/BF00704588。[Jon85] V. F. R. Jones。通过冯·诺依曼代数定义的一种纽结多项式不变量。《美国数学会通报》（新系列），12(1):103–111，1985。doi:10.1090/S0273-0979-1985-15304-2。[Kas95] C. Kassel。《量子群》，《数学研究生教材》第155卷。施普林格出版社，纽约，1995。doi:10.1007/978-1-4612-0783-2。[Kon93] M. Kontsevich。Vassiliev纽结不变量。载于《I. M. Gel' fand研讨会》，《苏联数学进展》第16卷，137–150页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1993。[KR93] L. H. Kauffman 和 D. E. Radford。有限维 Drinfeld 双成为带状 Hopf 代数的充要条件。《代数杂志》，159 114，1993 1 98 10 1006 1993 1148 ( ): – 。doi: . /jabr. . .[Kri00] A. Kricker。Kontsevich 积分的线与 Rozansky有理性猜想，2000。doi:10.48550/ARXIV.MATH/0005284。[Law89] R. J. Lawrence。利用量子群构造普适链环不变量。载于《理论物理中的微分几何方法》（切斯特，1988），55–63页。世界科学出版社，蒂内克，新泽西州，1989。[Lic97] W. B. R. Lickorish。《纽结理论导论》，《数学研究生教材》第175卷。施普林格出版社，纽约，1997。doi:10.1007/978-1-4612-0691-0。[LM96] T. Q. T. Le 和 J. Murakami。带框架定向链环的普适Vassiliev-Kontsevich不变量。《数学汇刊》，102 1 41 64，1996 http://www.numdam.org/ ( ): – 。item?id=CM 1996 102 1 41 0 URL . [MM95] P. M. Melvin 和 H. R. Morton。着色Jones函数。《数学物理通讯》，169(3):501–520，1995。URL http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104272852。[MS16] J.-B. Meilhan 和 S. Suzuki。万有 $sl_2$ 不变量与 Milnor不变量。《国际数学杂志》，27(11):1650090，37，2016。doi:10.1142/S0129167X16500907。[Oht02a] T. Ohtsuki。关于纽结与三维流形不变量的问题。载于《纽结与三维流形的不变量》（京都，2001），《几何与拓扑专著》第4卷，i–iv，377–572页。Geom. Topol. Publ.，考文垂，2002。doi:10.2140/gtm.2002.4.由 J. Roberts 撰写引言。[Oht02b] T. Ohtsuki。《量子不变量》，《纽结及相关主题丛书》第29卷。世界科学出版公司，里弗埃奇，新泽西州，2002。关于纽结、三维流形及其集合的研究。[Oht07] T. Ohtsuki。论纽结的二环多项式。《几何与拓扑》，11:1357–1475，2007。doi:10.2140/gt.2007.11.1357。

[Oht10] T. Ohtsuki. 第一贝蒂数为 1 的三维流形的微扰不变量。《几何与拓扑》，14(4):1993–2045, 2010. doi:10.2140/gt.2010.14.1993. [Pol10] M. Polyak. Reidemeister 移动的最小生成集。《量子拓扑》，1(4):399– 411, 2010. doi:10.4171/QT/10. [Qua22] R. J. Quarles. 关于多项式时间纽结多项式的一种新视角。Pro- Quest LLC，密歇根州安娜堡，2022. doi:10.31390/gradschool_dissertations.5806. 博士论文——路易斯安那州立大学与农业与机械学院。 [Rie14] E. Riehl. 范畴同伦论，新数学专著丛书第 24 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2014. doi:10.1017/CBO9781107261457. [Roz97] L. Rozansky. 着色琼斯多项式的 Melvin-Morton 展开的高阶项。《数学物理通讯》，183(2):291–306, 1997. doi:10.1007/BF02506408. [Roz98] L. Rozansky. 普适 $R$矩阵、Burau 表示与着色琼斯多项式的 Melvin-Morton 展开。《数学进展》，134(1):1–31, 1998. doi:10.1006/aima.1997.1661. [Roz03] L. Rozansky. 关于纽结 Kontsevich 积分的有理性猜想及其对着色琼斯多项式结构的影响。载于太平洋数学科学研究所研讨会论文集“《三维流形不变量》”（加拿大阿尔伯塔省卡尔加里，1999），第 127 卷，第 47–76 页，2003. doi:10.1016/S0166-8641(02)00053- 6.[Suz10] S. Suzuki. 关于带状底部缠结的普适 $\mathrm{sl}_2$ 不变量。《代数与几何拓扑》，10(2):1027–1061, 2010. doi:10.2140/agt.2010.10.1027. [Suz13] S. Suzuki. 关于 Brunnian 底部缠结的普适 $sl_2$ 不变量。《剑桥哲学会数学论文集》，154(1):127–143, 2013. doi:10.1017/S0305004112000503. [Suz18] S. Suzuki. 普适量子不变量与着色理想三角剖分。《代数与几何拓扑》，18(6):3363–3402, 2018. doi:10.2140/agt.2018.18.3363. [Tur16] V. G. Turaev. 纽结与三维流形的量子不变量，De Gruyter 数学研究丛书第 18 卷。De Gruyter，柏林，2016. doi:10.1515/9783110435221. 第三版 [of MR1292673]. [Wol] Wolfram. Mathematica，版本 13.2. URL https://www.wolfram.com/mathematica. 伊利诺伊州尚佩恩，2022。

伯努利研究所，格罗宁根大学，Nijenborgh 9，9747 AG，格罗宁根，荷兰电子邮件地址：j.becerra@rug.nl网址： https://sites.google.com/view/becerra/