arXiv:2302.01135v2 [cs.RO] 3 Nov 2023

基于细分的碰撞约束下可证明可行的半无限规划

Duo Zhang[1], Chen Liang[2],Xifeng Gao[1],Kui Wu[1],和 Zherong Pan[1†]

摘要—我们提出了一种用于一般串联体机器人轨迹优化的半无限规划（SIP）求解器。这些问题涉及无限数量的非凸碰撞约束，因此比标准的非线性规划（NLP）更具挑战性。以约束采样为基础的现有半无限规划求解器无法保证满足所有约束。相较之下，我们的方法利用串联体运动的保守界限，确保在整个优化过程中解的可行性。我们进一步采用细分方法，自适应地减小保守运动估计中的误差。结合这些方法，我们证明了该半无限规划求解器在逼近半无限规划问题的最优解时，能够以任意用户指定的精度保证可行性。我们在仿真中针对多个轨迹优化问题展示了该方法，包括工业机械臂和无人机。结果表明，我们的方法能够在几分钟内生成无碰撞的局部最优轨迹。

索引词—**半无限规划、轨迹优化、碰撞处理、串联体**

一、引言

本文研究串联机器人轨迹生成，这是机器人运动规划中的一个基础问题。诸多要求中，提供严格的无碰撞保证对于算法的可靠性至关重要；也就是说，在任何时刻，机器人本体与静态和动态障碍物之间都应保持至少一个安全距离。除了满足可行性，现代规划算法（如 [1]）还进一步追求（局部）最优性，即寻找使用户指定代价函数达到最小值的轨迹。典型的代价函数会考虑平滑度 [2]、能效 [3],和时间优化 [4]。尽管数十年来研究不断深入，同时实现可行性与最优性仍然是一项挑战。

多种技术都尝试生成可行且最优的轨迹。最广为人知的基于采样的运动规划器 [5]及其最优变体 [6] 会在机器人的构型空间中逐步构建一棵树，然后使用底层碰撞检测器确保沿树的每条边都无碰撞。受限于树的最优轨迹渐近地趋近于全局最优解。然而，大多数底层碰撞检测器都基于离散时间采样 [7] ，无法确保连续运动过程中无碰撞。最优基于采样的方法属于零阶优化算法，无需梯度信息即可引导轨迹搜索。但其缺点是，在构型空间维度增加时，寻找全局最优轨迹的复杂度呈指数级增长 [8]。

†表示通讯作者。 [1]腾讯光子工作室群。{zduozhang、xifgao、kwwu、zrpan}@global.tencent.com。 [2]浙江大学计算机科学系。

与此同时，人们提出了一阶和二阶轨迹优化算法 [9], 利用导数信息将轨迹引向局部最优解，其复杂度随构型空间维度呈多项式增长。基于成熟的现成非线性规划求解器, 例如 [10], , 轨迹优化已被用于解决复杂的高维规划问题。然而，尽管高阶技术有效，碰撞约束的处理仍是一项重大挑战，因为约束数量是无限的，从而导致半无限规划问题 [11]。现有的关节机器人的轨迹优化器采用交换法 [12], , 即在离散时间点对约束进行采样。与碰撞检测器使用的离散时间采样类似，交换法可能遗漏不可行约束，因而无法提供可行性保证。在最新研究中，Marcucci等人 [13] 提出了一种替代方法：首先确定构型空间中的可行凸子集，然后在这些子集中搜索全局最优轨迹。虽然该方法能够提供可行性和最优性保证，但确定可行子集需要进行代价高昂的预计算 [14]。

我们提出了一种具有可行性保证的新型半无限规划（SIP）求解器。我们的方法基于基于离散化的 SIP 求解器 [12]。我们将机器人轨迹划分为多个时间区间，并使用保守运动界来确保每个时间区间内的无碰撞性质。这些时间区间进一步引入障碍惩罚函数，引导优化器保持在可行域内，并以任意用户指定精度逼近半无限规划问题的最优解。我们方法的关键组成部分包括：1）一种运动界，用于保守地估计机器人上的某个点在有限时间区间内的运动范围；2）一种安全线搜索算法，用于防止运动界与障碍物相交；3）一种运动细分方案，用于递归地减小保守运动估计的误差。通过精心设计运动界和线搜索算法，我们证明，在利普希茨运动连续性的温和假设下，我们的求解器能够在有限次迭代内收敛到一条无碰撞的近似局部最优轨迹。我们还在一系列示例上评估了我们的方法，包括工业机械臂穿过复杂环境到达目标，以及同时进行旋转和平移的多无人机轨迹生成。我们的方法能够在单台式计算机上于几分钟内生成安全轨迹。

II. 相关工作

我们回顾了运动规划中最优性与可行性、半无限规划及其在机器人学中的应用，以及各种安全认证方面的相关工作。

A. 运动规划的最优性与可行性

我们重点介绍运动规划框架发展历程中的三个里程碑：轨迹优化方法 [15], 快速探索随机树（RRT） [5],及其最优变体（RRT-Star） [6]。尽管这些框架的性能在很大程度上取决于算法组件的具体选择，但它们在最优性和复杂度方面存在显著的定性差异。轨迹优化保证返回的轨迹在局部吸引域内达到最优；RRT 返回任意一条可行轨迹，但不提供任何最优性保证；而 RRT-Star 则提供渐近全局最优性保证。更强的最优性保证伴随着构型空间维度上显著更高的复杂度。基于现成的非线性规划求解器（例如 [16], ），轨迹优化的复杂度为多项式级。RRT 的复杂度取决于可见性性质 [17], ，与维度并无直接关系。遗憾的是，最优的基于采样的运动规划复杂度为指数级 [8],；考虑到一般非凸优化具有 NP 困难性，这并不令人意外。因此，近似全局最优性只有在低维问题中才有望实现，而在实际的高维规划问题中，局部最优性更为理想。尽管人们已付出大量努力来降低 RRT-Star 的代价，包括采用双向探索 [18], 、分支定界 [19], 、Informed-RRT-Star [20], 和惰性碰撞检测器 [21], ，但其最坏情况复杂度仍无法消除。

除了最优性之外，为上述任何一种框架提供严格的可行性保证都是一项重大挑战。对于轨迹优化，碰撞约束在非线性规划中被表述为可微的硬约束。然而，由于约束数量无限，实际建模时 [9, 22, 23] 需要在离散时间点对约束进行采样，这会破坏可行性保证。更糟的是，许多现成的非线性规划求解器 [10]可以接受不可行解，然后利用梯度信息引导解返回可行域，但这并不能保证一定成功，尤其是在机器人或环境中含有几何尺寸很薄的物体时。一个例外是可行序列二次规划算法 [24] ，它能确保每次迭代都保持可行，但这一算法在机器人学界尚未得到充分研究。另一方面，RRT、RRT-Star 及其变体需要低层级的碰撞检测器，以剔除存在碰撞的轨迹段。广泛使用的离散时间碰撞检测器 [7] 同样需要进行时间采样，因而无法保证可行性。虽然存在精确的连续时间碰撞检测器 [25, 26, 27], ，但它们对机器人连杆的运动作出了严格假设，即运动为线性或仿射运动；这些假设仅适用于点机器人、刚体机器人或类汽车机器人。对于更一般的关节式机器人运动，已有研究提出了近似的连续时间碰撞检测器 [28, 29,30] ，它们可以给出运动上界，但这些上界可能过于保守，从而导致假阴性。相比之下，我们的轨迹优化方法同样高度依赖运动上界，但我们采用递归细分来自适应地收紧运动界并为一般构型空间提供局部最优性和可行性保证。

B. 半无限规划及其在机器人学中的应用

半无限规划涉及包含有限个决策变量但具有无限个约束的数学规划。在机器人应用中，半无限规划经常用于对运动安全、可控性和稳定性、可达性以及普遍接触的可实现性等约束进行建模。求解半无限规划的关键挑战在于将无限约束集约化为可计算的有限集。据我们所知，除某些特殊情况外，目前尚无普遍等价的无限到有限约化方法。因此，通用半无限规划求解器依赖近似的无限到有限约化方法，将半无限规划转换为传统非线性规划，然后以子问题的形式进行迭代求解。交换法和离散化方法是其中两种具有代表性的此类方法。这些方法通过对约束指标集进行采样，将半无限规划近似约化为非线性规划。就我们的碰撞约束而言，这种处理类似于基于采样的运动规划器所使用的离散时间碰撞检测器。遗憾的是，即使从可行初始点出发，通用半无限规划求解器也无法保证所得解的可行性，这是底层非线性规划求解器固有的缺陷。为此，我们提出一种用于求解碰撞约束下特殊半无限规划的可行离散化方法，并提供可行性保证。我们的方法受到精确罚函数公式的启发，该公式通过对约束指标进行积分，将半无限规划约化为传统非线性规划。精确罚函数法可以视为第三种无限到有限约化方法，但此类惩罚函数中的积分通常难以计算。我们的核心思想是在不损害理论保证的前提下，通过细分来近似计算这些积分。

C. 基于安全证书的规划

截至目前，我们的讨论主要聚焦于适用于任意构型空间的一般算法，而这类算法很难建立可行性保证。不过，在若干特殊情形下或附加假设下，也存在例外。例如，在假设系统为连续时间动力系统的情况下，控制障碍函数（CBF） [39, 40] 会设计一个控制器来引导机器人，同时满足给定约束；但 CBF 只关注可行性，无法保证所引导的机器人轨迹是最优的。将机器人近似为一个点或一个球后，机器人轨迹便成为高阶样条，并且可以推导出紧致的运动界以确保安全。这种方法广泛用于（多）无人机轨迹生成 [35, 41], ，但无法扩展到更复杂的机器人运动学。最近，Amice等人 [14] 提出了一种新颖的表述方法，用于证明任意关节机器人的构型空间中一个正测度子集的可行性。他们的方法依赖于一种重新表述，将碰撞约束转化为条件多项式正性问题；如 [13], 中所做的那样，该问题还可以与混合整数凸规划相结合，以确保可行性。与所有这些技术相比，我们的可行性

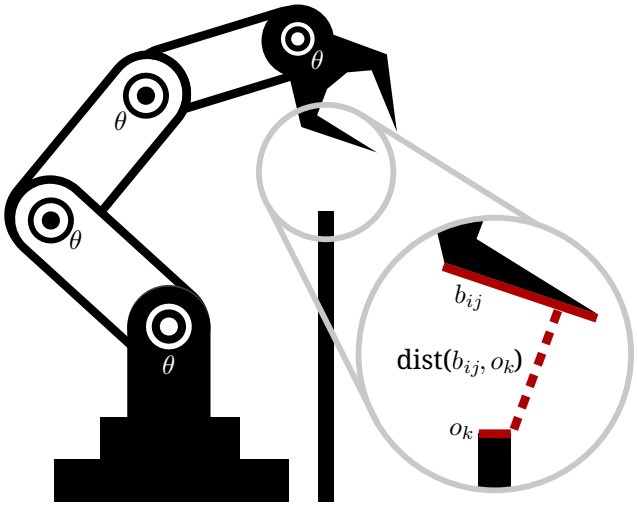


图1：我们考虑一台运动中的关节式机械臂，其中第 i 个连杆所占据的体积记为 b_i。每个 b_i 都可有限分解为 $b_i = \bigcup_j b_{ij}$，且每个 b_{ij} 都是简单形状，例如红色的边。b_{ij} 是时间 t 和轨迹参数 θ 的函数，记为 $b_{ij}(t, \theta)$。θ 可以是构型空间中 B´zier 曲线的控制点。同样，我们可以将障碍物 $o = \bigcup_k o_k$ 分解，其中 o_k 是较短的红色边。我们引入对数障碍能量，将距离 dist(b_{ij}, o_k)（虚线）约束在安全距离 d_0 之外。

保证基于弱得多的利普希茨运动界假设，并且我们无需进行任何预计算即可建立安全性证书。

III. 问题陈述

本节将对碰撞约束轨迹生成问题进行一般性表述。全文中，我们将使用下标来标记几何实体或函数，但为使文章简洁起见，不注明下标的总数；例如，我们用 $\sum_i$ 表示对所有下标 i 求和。我们将一个开环串联机器人视为由若干刚体组成。第 i 个刚体在全局坐标系中占据一个有限体积，记为 $b_i \subset \mathbb{R}^3$。在不引起歧义的情况下，我们将刚体及其体积视为同一概念。进一步地，我们用 $b_i^0 \subset \mathbb{R}^3$ 表示第 i 个刚体在其局部坐标系中的体积。我们还假设存在一组静态障碍物，占据另一体积 $o \subset \mathbb{R}^3$。根据关节式刚体运动学，我们可以通过刚体变换由 b_i^0 计算得到 b_i：$b_i = M_i b_i^0$，其中我们定义 $M_i b_i^0 = \{M_i x | x \in b_i^0\}$。当机器人运动时，$M_i$ 以及 b_i 会成为随时间变化的函数，分别记为 $M_i(t, \theta)$ 和 $b_i(t, \theta)$。这里，$t \in [0, T]$ 是时间参数，轨迹由一组决策变量参数化，记为 θ。碰撞约束轨迹生成问题旨在最小化二阶可微代价函数 $\mathcal{O}(\theta)$，使得每个刚体 b_i 与 o 保持至少用户指定的安全距离记为 d_0，且对任意 $t \in [0, T]$ 均成立。形式化地说，定义如下：

$$\begin{aligned} &\underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\ \mathcal{O}(\theta) \\ &\text{s.t.} \quad \operatorname{dist}(b_i(t,\theta), o) \geq d_0 \quad \forall i \wedge t \in [0,T], \end{aligned} \tag{1}$$

其中 dist(•) 表示两个集合之间的最短欧几里得距离。在非常宽松的二阶可微假设下，代价函数 $\mathcal{O}(\theta)$ 可以表达用户对“良好”轨迹的各种要求，例如末端执行器与目标位置之间的接近程度，或轨迹的平滑度。这是一个半无限规划，因为它包含无穷多个约束，每个时间点对应一个约束。此外，该半无限规划是非光滑的，因为两个一般集合之间的距离函数不可微。式（1）是一个通用定义，涵盖了图1所示的机器人和障碍物的各种几何表示。

A. 光滑近似

尽管本文的核心思想是采用离散化方法求解方程（1），但大多数现有的 SIP 求解器已经采用离散化的思路来表示刚体的空间 b_i，以处理函数 dist(•)的非光滑性。通过空间离散化，我们假设 b_i 具有有限分解 $b_i = \bigcup_j b_{ij}$，其中 b_{ij} 是 j的第 b_i 个子集，位于世界坐标系中。类似地，我们可以将 o有限分解为 $o = \bigcup_k o_k$，其中 o_k 是世界坐标系中 k环境障碍物的第 o 个子集。如果一对子集之间的距离函数 dist(b_{ij}, o_k) 可微，那么我们便可以将非光滑 SIP 方程（1）化为以下光滑 SIP：

$$\begin{aligned} &\underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\ \mathcal{O}(\theta) \\ &\text{s.t.} \quad \operatorname{dist}(b_{ij}(t,\theta), o_k) \geq d_0 \quad \forall i,j,k \wedge t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2}$$

总之，空间离散化基于以下假设：

假设 III.1。每个 b_i 和 o 都具有有限分解，分别记为 $b_i = \bigcup_j b_{ij}$ 和 $o = \bigcup_k o_k$，使得对于任意 $\langle i, j, k \rangle$，$dist(b_{ij}, o_k)$ 足够光滑。

假设III.1 对于机器人连杆的大多数计算表示都成立。例如，常见的空间离散化方法包括点云、凸包和三角网格。对于点云，其中每个 b_{ij} 或 o_k都是一个点，而 dist(•) 是可微的逐点距离。对于凸包，dist(•) 表示一对凸包之间的距离，其精确形式不可微，但可以通过稍微膨胀每个凸包，使其成为严格凸集，从而使其足够光滑 [42]。对于三角网格，已有研究表明，一对三角形之间的距离可归结为两种情况：1）点与三角形之间的距离；2）一对边之间的距离，参见 [25], ；这两种情况都是凸包的特例。尽管空间离散化会产生更多的距离约束，但只需激活彼此距离较近的少数约束，并将其传递给 SIP 求解器进行处理。利用

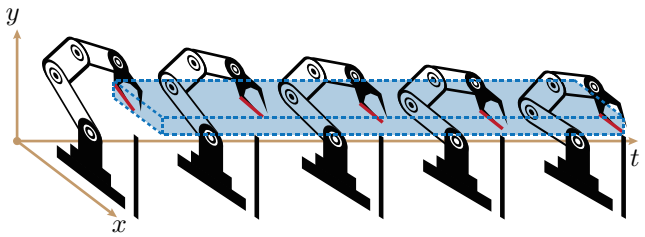


图 2：当图中所示的红色边 1 沿时间轨迹运动时，我们使用时空运动界（蓝色）估计其范围并保证安全。

空间加速数据结构 [43]可以高效地识别这些可能处于激活状态的约束。然而，尽管采用了这些空间离散化方法，时间域中的约束总数仍然是无限的。

B. 交换法

交换法是一种用于求解一般半无限规划的经典算法，它通过在空间和时间上对约束进行采样，将半无限规划化为一系列非线性规划。具体而言，该算法维护一个实例集 $\mathcal{I}$，其中包含有限个 $\langle i,j,k,t\rangle$ 元组，并将公式（1）化为以下非线性规划：

$$\begin{aligned}&\underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\ \mathcal{O}(\theta)\\ &\text{s.t.}\quad \operatorname{dist}(b_{ij}(t,\theta),o_k)\geq d_0\quad \forall\,\langle i,j,k,t\rangle\in\mathcal{I}.\end{aligned}\tag{3}$$

该算法通过交替求解公式（1）和更新 $\mathcal{I}$ 来逼近公式（3）的解。交换法的成功依赖于用于更新$\mathcal{I}$的约束选择预言机。尽管一些启发式预言机在经验上效果良好，但我们并不知道有任何交换法能够保证满足半无限约束。事实上，大多数交换法会在约束已被违反时，即 $\operatorname{dist}\langle i,j,k,t\rangle$，将新的成对元素加入 $\mathcal{I}$，并依赖底层非线性规划求解器将解拉回约束流形，而此时可行性保证便不复存在。

IV. 基于细分的半无限规划求解器

我们提出了一种受离散化方法启发的新型基于细分的半无限规划求解器 [12]。与使用预言机算法选择实例集$\mathcal{I}$的交换法不同，离散化方法将索引集均匀细分为有限个区间，并从每个区间中选择一个替代索引，以构成实例集$\mathcal{I}$，从而将原问题转化为非线性规划。然而，与传统的不可行离散化方法的关键区别在于，我们在第IV-A 节设计了代理约束，使其可行域严格包含于方程（1）的真实可行域。随后，我们在第IV-B节和第IV-C节证明，通过使用可行内点法（例如 [44，第 4 章。1] ）求解非线性规划，我们的算法能够保证生成满足所有代理约束的迭代。由于代理约束可能将解限制在过于保守的子集中，我们在第IV-D节引入了一种细分方法，以自适应地调整该保守子集并逐步逼近原始可行域。

A. 代理约束

我们考虑以下无限时空子集约束：

$$\operatorname{dist}(b_{ij}(t,\theta),o_k)\geq d_0\quad \forall t\in[T_0,T_1]\subseteq[0,T],\tag{4}$$

其中，b_{ij}和 o_k是两个空间子集，$[T_0,T_1]\subseteq[0,T]$是一个时间子集。我们的代理约束用单个时间点取代整个时间区间。一个自然的选择是采用以下中点约束：

$$\operatorname{dist}\left(b_{ij}\left(\frac{T_0+T_1}{2},\theta\right),o_k\right)\geq d_0,\tag{5}$$

根据假设 III.1，该函数可微。不幸的是，方程（5）所规定的可行域大于方程（4）所规定的可行域，因而违反了我们的可行性要求。为解决这一问题，我们对使用代理约束所导致的可行性误差给出上界。通过作出以下较弱的假设，可以得到一个线性上界：

假设 IV.1. t 和 θ 的可行域有界。

引理 IV.2. 在假设 *III.1*、*IV.1*下，存在一个常数 L_1 使得：

$$|dist(b_{ij}(t_1,\theta),o_k)-dist(b_{ij}(t_2,\theta),o_k)|\leq L_1|t_1-t_2|.$$

证明。 有界定义域上的可微函数也是利普希茨连续的，因此我们可以将 L_1 定义为利普希茨常数。 □

上述结果表明，中点代理约束的可行性误差上界为 $L_1(T_1-T_0)/2$。此外，可行域由以下更严格的约束指定：

$$\operatorname{dist}(b_{ij}(t,\theta),o_k)\geq d_0+L_1|T_1-T_0|/2,$$

是实际可行域的子集。然而，这样的子集可能过于严格，并且往往会导致可行域为空。相反，我们的方法仅将引理 IV.2 用作额外的安全检查，如图 2 所示，而底层优化器则处理标准约束方程（5）。请注意，引理 IV.2 中的界并不紧，而且存在许多收敛速度超线性的复杂上界，其中一种经过充分研究的方法是泰勒模型 [29]。虽然我们建议在实现本方法时使用泰勒模型，但我们的理论结果仅要求线性上界。

B. 屏障惩罚函数

为确保我们的算法生成可行迭代，我们必须使用可行内点法求解非线性规划，例如 [44,第四章.1]。这些算法将每个不等式碰撞约束转化为以下惩罚函数：

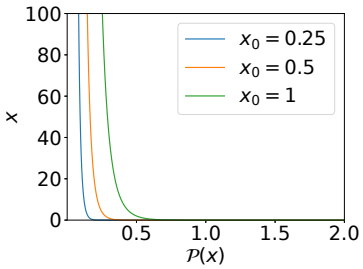
$$\mathcal{P}_{ijk}(t,\theta)\triangleq\mathcal{P}\left(\operatorname{dist}\left(b_{ij}\left(t,\theta\right),o_k\right)-d_0\right),$$

其中，P 是定义在 $(0,\ \infty)$ 上的充分光滑、单调递减函数，且 $\lim_{x\to 0}\mathrm{P}(x)=\infty$ and $\lim_{x\to\infty}\mathrm{P}(x)=0$。为了处理半无限规划问题，我们需要 P 满足以下附加假设：

假设 IV.3. 障碍函数 $\mathcal{P}$ 满足：

$$\lim_{x\to 0} x\mathcal{P}(x) = \infty.$$

最常见的惩罚函数是对数障碍函数 $\mathcal{P}(x) = -\log(x)$，但该函数不满足假设 IV.3。通过直接验证可以发现，有效的惩罚函数为 $\mathcal{P}(x) = -\log(x)/x$。在 [43],作者指出，采用局部支撑的$\mathcal{P}$ 有利于空间加速数据结构高效剪除非活跃约束，因此我们提出如下函数：



$$\mathcal{P}(x) = \begin{cases} \frac{(x_0-x)^3}{x^4} & x \le x_0 \\ 0 & x > x_0, \end{cases}$$

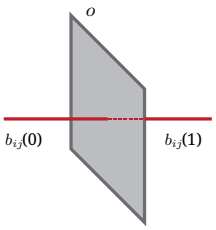
该函数二阶可微，且在$(0, x_0]$ 范围内具有局部支撑，其中 x_0 是一个较小的正数。假设IV.3的直观依据在于半无限约束的积分重构。事实上，我们可以对半无限变量上的惩罚函数进行积分，将无限约束转化为有限形式，从而得到如下¯有限积分惩罚函数，记为$\mathcal{P}$:

$$\bar{\mathcal{P}}_{ijk}(T_0, T_1, \theta) \triangleq \int_{T_0}^{T_1} \mathcal{P}_{ijk}(t, \theta)dt. \tag{6}$$

上述积分惩罚函数已在 [37, 38, 45]中用于求解半无限规划。然而，他们提出的算法仅适用于约束具有特定形式的情况，此时方程（6）中的积分具有闭式表达式。遗憾的是，我们的问题中的此类积分无法得到闭式解。因此，我们提出通过时空离散化来近似该积分。我们将证明，离散近似的误差是可控的，这对于所提求解器的收敛性至关重要。为了使惩罚函数能够保证¯可行性，$\mathcal{P}_{ijk}$ 必须在以下情况趋于无穷大：

$$\exists t \in [T_0, T_1] \quad \text{dist}\left(b_{ij}\left(t, \theta\right), o_k\right) \to d_0. \tag{7}$$

然而，对数障碍函数不满足这一性质。如插图所示，假设存在一条沿正 X 轴的直线轨迹 $b_{ij}(t) = (t, 0, 0)$，o 是与 X 轴相交于 (1/2，0，0) 的 YZ 平面，$T = 1$ 和 $d_0 = 0$,



¯那么 P 取以下有限值：

$$\bar{\mathcal{P}}_{ijk}(0, 1) \triangleq \int_0^1 -\log\left(\left|t - \frac{1}{2}\right|\right) dt = \log(2) + 1 < \infty.$$

相反，我们的假设IV.3可确保¯P的良定义性，如下述引理所示：

引理 IV.4。假设*III.1*、*IV.1*、*IV.3*以及方程¯ (7) 成立，则：$\mathcal{P}_{ijk} \to \infty$。

证明。 根据假设 III.1，我们有有限分解¯并且 $\mathcal{P}_{ijk}$ 定义良好。不失一般性，假设$t \in (T_0, T_1)$ 因此我们可以选取一个正数 ϵ_1 使得 $[t-\epsilon_1, t+\epsilon_1] \subseteq [T_0, T_1]$。对于任意 $t' \in [t-\epsilon_1, t+\epsilon_1]$，由 t' 的有界性及引理 IV.2，我们有：

$$\text{dist}\left(b_{ij}\left(t', \theta\right), o_k\right) \le \text{dist}\left(b_{ij}\left(t, \theta\right), o_k\right) + L_1|t' - t|.$$

综合以上内容，我们得到：

$$\begin{aligned} &\bar{\mathcal{P}}_{ijk}(T_0, T_1, \theta) \ge \bar{\mathcal{P}}_{ijk}(t-\epsilon_1, t+\epsilon_1, \theta) \\ &\ge \epsilon_1 \mathcal{P}(\text{dist}\left(b_{ij}\left(t, \theta\right), o_k\right) - d_0 + L_1\epsilon_1) \ge \epsilon_1 \mathcal{P}(\epsilon_1 + L_1\epsilon_1), \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由方程（7）得出，并通过选择 θ 使得 $\text{dist}\left(b_{ij}(t, \theta)\ o_k\right) - d_0 \le \epsilon_1$。令 ϵ_1 趋于零并应用 IV.3，即可证明该引理。 □

C. 可行内点法

现在，我们结合上述思路，为半无限规划问题设计一种可行内点法。我们将有界时间域划分为一组互不相交的时间区间，$[0, T] = \cup_l [T_0^l, T_1^l]$，并选取中点约束作为代表。因此，惩罚函数将不等式约束非线性规划转化为如下无约束问题：

$$\begin{aligned} \underset{\theta}{\text{argmin}}\ \mathcal{E}(\theta) &\triangleq \mathcal{O}(\theta) + \mu \sum_{ijkl} (T_1^l - T_0^l)\mathcal{P}_{ijkl}(\theta) \\ \mathcal{P}_{ijkl}(\theta) &\triangleq \mathcal{P}_{ijk}(\frac{T_0^l + T_1^l}{2}, \theta), \end{aligned} \tag{8}$$

其中，μ 是障碍系数的正权重。注意，我们根据时间跨度$T_1^l - T_0^l$ 对惩罚函数 $\mathcal{P}_{ijkl}$ 加权，以便通过黎曼和的意义近似积分形式 $\bar{\mathcal{P}}_{ijkl}(\theta) \triangleq \bar{\mathcal{P}}_{ijk}(T_0^l, T_1^l, \theta)$。可使用标准的一阶和二阶算法求解方程（8），其中一阶方法的搜索方向$d^{(1)}$ 为：

$$d^{(1)} \triangleq -\nabla_\theta \mathcal{E},$$

而二阶方法的形式为：

$$d^{(2)} \triangleq \mathcal{M}\left(\nabla_\theta^2 \mathcal{E}\right)^{-1} d^{(1)}.$$

这里，M(●) 是海森矩阵的调制函数¯，满足 $\beta I \le$ M(H) $\le \beta I$，其中 β^- 和 β 为正常数。计算出搜索方向后，_ 会自适应地选择步长 α，以确保满足第一 Wolfe 条件：

$$\mathcal{E}(\theta + d\alpha) \le \mathcal{E}(\theta) + c\left\langle d\alpha, \nabla_\theta \mathcal{E}\right\rangle, \tag{9}$$

其中 $c \in (0,1)$ 是一个正常数。已有研究表明，若选择最小的 $z \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\alpha = 1/z$ 满足方程（9），则可行内点法将收敛到$\mathcal{E}$ [44, 命题 1.24]的一个一阶临界点。在计算机的有限精度算术下，当 θ 时，我们将终止 $\|d^{(1)}\|_\infty \le \epsilon_d$ 更新循环。此外，我们添加一个外层循环，通过迭代减小 μ 直至一个较小常数 ϵ_μ，以缩小对偶间隙。求解不等式约束非线性规划的整体内点过程总结于算法1中。

算法 1：可行内点法

输入： 可行的 θ，初始 $\mu, \epsilon_\alpha, \epsilon_d, \epsilon_\mu, \gamma \in (0, 1)$
输出： 局部最优 θ

当 $\mu > \epsilon_\mu$ **时**
  $d \leftarrow d^{(1)}$ 或 $d \leftarrow d^{(2)}$
  当 $\|d\|_\infty > \epsilon_d$ **时**
    α，$\epsilon_\alpha \leftarrow$线搜索($\theta$，$d$，$\epsilon_\alpha$)
    $\theta \leftarrow \theta + d\alpha$
    $d \leftarrow d^{(1)}$ 或 $d \leftarrow d^{(2)}$
  $\mu \leftarrow \mu\gamma$
返回 θ

D. 自适应细分

算法 1 用于求解非线性规划，而非半无限规划。如第 IV-A节所述，由代理约束得到的非线性规划可行域可能大于半无限规划的可行域。为确保满足半无限约束意义下的可行性，我们采用运动界引理IV.2 ，并在线搜索过程中增加一项额外的安全检查，如算法 2所示。算法2 采用更保守的可行性条件，将可行域缩小 $\psi(T_1^l - T_0^l)$。运动界引理 IV.2 直接表明$\psi(x) = L_1 x/2$。然而，我们的理论分析要求采用更保守的 ψ 定义如下：

$$\psi(x) = L_1 x/2 + L_2 x^\eta, \tag{10}$$

其中，L_2 和 η 是正常数。我们选择仅接受线搜索算法找到的 α，前提是 $\theta + d\alpha$通过安全检查。另一方面，安全检查未通过表明代理约束对半无限约束的近似不够准确，因此需要进行细分。因此，我们采用中点细分，将 $[T_0^l, T_1^l]$ 分成两部分：$[T_0^l, (T_0^l+T_1^l)/2]$和 $[(T_0^l+T_1^l)/2, T_1^l]$。重复此过程，直到线搜索算法找到的 α 通过安全检查。请注意，安全检查未通过可能有两个不同原因：1）步长 α 过大；2）需要进行更多细分。由于第一个原因更容易检查和解决，因此安全检查未通过时，我们选择始终减小 α，直至达到 α 的某个下界。我们将此下界记为 ϵ_α。我们的线搜索方法总结于算法 3 中。结合算法 1、2 和 3，即可构成完整的 SIP 求解器。

算法 2：安全检查(θ)

Output: $\langle i, j, k, l\rangle$ such that $\mathcal{P}_{ijkl}$ violates safety condition
for Each penalty term $\mathcal{P}_{ijkl}$ **do**
  if $\text{dist}\left(b_{ij}\left(\frac{T_0^l+T_1^l}{2}, \theta\right), o_k\right) \le d_0 + \psi(T_1^l - T_0^l)$ **then**
    Return $\langle i, j, k, l\rangle$
Return None

V. 收敛性分析

在本节中，我们论证我们的算法 1 适用于求解半无限规划问题方程（1），为此我们建立了三个

算法 3：线搜索(θ，d，ϵ_α)

输入： 初始 $\alpha_0, \gamma \in (0, 1)$
输出： 步长 α 和更新后的 ϵ_α

$\alpha \leftarrow \alpha_0$
$\theta' \leftarrow \theta + d\alpha$
i，j，k，$l \leftarrow$安全检查(θ')
当 $\langle i, j, k, l\rangle \neq$无 $\vee$ θ'违反方程（9） **执行**
  如果 $\langle i, j, k, l\rangle \neq$无 **则**
    如果 $\alpha \le \epsilon_\alpha$ **then**
      $\epsilon_\alpha \leftarrow \gamma\epsilon_\alpha$
      细分($\mathbf{P}_{ijkl}$)并重新评估 E(θ)
      $d \leftarrow d^{(1)}$ 或 $d \leftarrow d^{(2)}$
    else
      $\alpha \leftarrow \gamma\alpha$
  else
    $\alpha \leftarrow \gamma\alpha$
  $\theta' \leftarrow \theta + d\alpha$
  i，j，k，$l \leftarrow$安全检查(θ')
返回 α ,ϵ_α

性质。首先，以下结果显而易见，并表明我们的算法会生成可行迭代：

定理 V.1. 在假设*III.1* 和假设 *IV.1*下，如果算法 *1* 能在某次迭代中找到一个正的 α 并在第 θ 行更新 *5*，则更新后的 θ 是方程(1)的可行解。

证明。 算法 3 生成的步长必须通过安全检查，从而确保：

$$\begin{aligned}&\text{dist}\left(b_{ij}\left(\frac{T_0^l + T_1^l}{2}, \theta\right), o_k\right)\\ \ge& d_0 + \psi(T_1 - T_0) > d_0 + L_1\frac{T_1^l - T_0^l}{2},\end{aligned}$$

其中我们使用了在方程（ ψ 10）中对 的选择。根据引理 IV.2，对于任意 $t \in [T_0^l, T_1^l]$，有：

$$\begin{aligned}&\text{dist}\left(b_{ij}\left(t, \theta\right), o_k\right)\\ \ge&\text{dist}\left(b_{ij}\left(\frac{T_0^l + T_1^l}{2}, \theta\right), o_k\right) - L_1\left|t - \frac{T_0^l + T_1^l}{2}\right| > d_0.\end{aligned}$$

由于算法 3 会检查每个时空约束子集，因此证明完毕。 □

定理 V.1 依赖于这样一个事实：算法 1确实会在有限的计算量后生成一次迭代。然而，算法 1 的有限终止并非显而易见，原因有二。首先，线搜索算法 3 可能陷入 while 循环，始终无法通过安全检查。其次，即使线搜索算法总能有限终止，算法 1 中的内层 while 循环也可能永远陷入其中。这是因为一次细分会移除一个惩罚项，并增加两个形式如下的惩罚项：$(T_1^l - T_0^l)\mathcal{P}_{ijkl}$ 到 $\mathcal{E}(\theta)$中，从而改变目标函数的形态。因此，细分可能会增大 $\|d\|_\infty$，而算法 1可能永远无法将 $\|d\|_\infty$ 降至用户指定的 ϵ_d。然而，

下面的结果表明，通过适当选择 η，这两种情况都不会发生：

定理 V.2. 在假设 *III.1*、*IV.1*、*IV.3*成立，且假设$\eta < 1/6$时，算法*1* 经过有限次细分后终止。

证明。 参见第 IX节。 □

定理 V.2 说明了算法 1的定义良好性。该算法旨在求解非线性规划方程 (8)，而非原方程 (1)。我们的最终结果通过证明：只要充分小地选择 μ和 ϵ_μ，方程 (8) 的一阶最优性条件就会趋近于方程 (1的条件。

定理 V.3. 我们采用假设 *III.1*、*IV.1*、*IV.3*、*X.2* ，并假设 $\eta < 1/6$。若使用零序列 *1* 和 $\{\mu^k\}$ 与 $\{\epsilon_d^k\}$运行算法 k 次迭代，则可得到解序列 $\{\theta^k\}$，使得每个聚点 θ^0 都满足方程(1)的一阶最优性条件。

证明。 参见第X节。 □

VI. 关节机器人上的实现

我们介绍本方法的两个版本。在第一个版本中，我们假设机器人和环境几何形状都使用三角网格进行离散化。尽管三角网格可以表示任意凹形，但它需要大量单元，即使采用第VI-C节介绍的加速技术，开销仍然过大。因此，在第二个版本中，我们通过将每个机器人连杆和障碍物近似为单个凸包 [14, 46] 或通过凸分解得到的多个凸包 [47]，来减少几何基元的数量。换言之， b_{ij} 和 o_k 在我们的方法中可以是运动点、边、三角形或一般凸包。在第一个版本中，我们需要确保两个三角网格无碰撞。为此，只需确保每对边之间以及每对顶点与三角形之间的距离都大于 d_0 [48]。在第二个版本中，我们需要确保每对凸形之间的距离都大于 d_0。然而，众所周知，边-边距离函数或凸形-凸形距离函数不可微。我们遵循 [42] 的方法，通过用曲面膨胀每条边或每个凸包，使其成为严格凸形，并具有定义良好的导数，从而解决这一问题。本节将介绍本方法在实际应用中的技术细节，以生成具有平移关节和铰链转动关节的关节机器人的轨迹。

A. 计算利普希茨上界

我们的方法要求对每种几何形状评估利普希茨常数 L_1 。我们将满足引理L_1^{ijk} 的 b_{ij} 与 o_k这一对的利普希茨常数记为IV.2。我们首先考虑 b_{ij}为运动点的情况，其他所有情况只需稍作修改即可涵盖。我们将 Θ 记为关节参数向量，它也是 t 和 θ 的函数。根据链式法则，我们有：

$$L_1^{ijk} = \max \left| \frac{\partial \text{dist}(b_{ij}(t,\theta), o_k)}{\partial t} \right| = \max \left| \frac{\partial \text{dist}(b_{ij}(t,\theta), o_k)}{\partial b_{ij}(t,\theta)} \frac{\partial b_{ij}(t,\theta)}{\partial \Theta(t,\theta)} \frac{\partial \Theta(t,\theta)}{\partial t} \right|.$$

不失一般性，我们假设 $\partial\Theta(t, \theta)/\partial t$ 的每个元素都限制在范围 $[-1, 1]$ 内。第一项是一个距离函数，其次梯度的范数至多为 1 [49]。结合这些结果，我们推导出以下与 o^k 无关的 L_1^{ijk} 上界，并将其记为 L_1^{ij}：

$$L_1^{ij} \le \max \left| \frac{\partial b_{ij}(t,\theta)}{\partial \Theta(t,\theta)} \right|_{2,1},$$

这意味着 L_1^{ij} 是雅可比矩阵 $l_{2,1}$ 范数的上界（即各列的 l_2 范数之和）。接下来，我们考虑一般情形，其中 b_{ij} 是一个具有 N 个顶点的凸包，这些顶点记为 $b_{ij}^1, \cdots, b_{ij}^N$。我们知道， b_{ij} 上距离 o_k 最近的点位于某个插值点 $\sum_{m=1}^N b_{ij}^m \xi^m$ 上，其中 ξ^m 是凸插值权重，也是 $\theta(t)$ 的函数。我们得到以下关于距离随时间变化的上界：

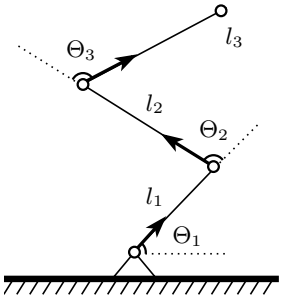
$$\begin{aligned} &\left| \text{dist}\Big(\sum_{m=1}^N b_{ij}^m(t_1,\theta)\xi_1^m, o_k\Big) - \text{dist}\Big(\sum_{m=1}^N b_{ij}^m(t_2,\theta)\xi_2^m, o_k\Big) \right| \\ \le &\left| \text{dist}\Big(\sum_{m=1}^N b_{ij}^m(t_1,\theta)\xi_1^m, o_k\Big) - \text{dist}\Big(\sum_{m=1}^N b_{ij}^m(t_2,\theta)\xi_1^m, o_k\Big) \right| \\ \le &L_1^{ij}(\xi_1^m)|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

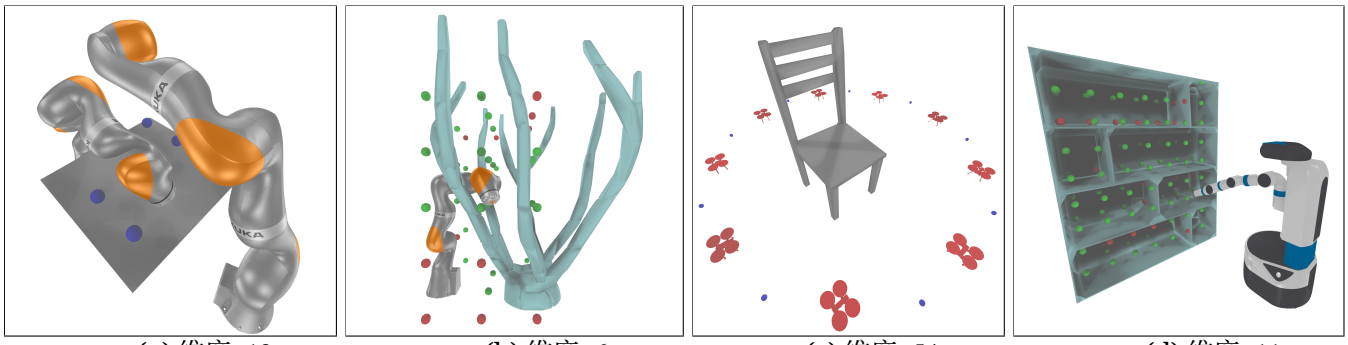
上述不等式成立，是因为系数 ξ^m使距离最小，因此用 ξ_1^m替换 ξ_2^m只会增大距离。这里我们将 $\xi_\bullet^m \triangleq \xi^m(\theta(t_\bullet))$ 简记为 $\xi_\bullet^m \triangleq \xi^m(\theta(t_\bullet))$，并假设 $\text{dist}(b_{ij}(t_1, \theta)\, o_k) < \text{dist}(b_{ij}(t_2, \theta)\, o_k)$；否则，我们可以交换 t_1和 t_2。接下来，我们将 ξ_1^m视为独立于 $\theta(t)$ 的常数，并估计依赖于 ξ_1^m 的利普希茨常数 $L_1^{ij}(\xi_1^m)$：

$$\begin{aligned} L_1^{ij}(\xi_1^m) &= \max \left| \frac{\partial \text{dist}(b_{ij}(t,\theta), o_k)}{\partial \sum_{m=1}^N b_{ij}^m \xi_1^m} \frac{\partial \sum_{m=1}^N b_{ij}^m \xi_1^m}{\partial \Theta(t,\theta)} \frac{\partial \Theta(t,\theta)}{\partial t} \right| \\ &\le \max \sum_{m=1}^N \left| \frac{\partial b_{ij}^m(t,\theta)}{\partial \Theta(t,\theta)} \right|_{2,1} \xi_1^m \le \max_{m=1,\cdots,N} \left| \frac{\partial b_{ij}^m(t,\theta)}{\partial \Theta(t,\theta)} \right|_{2,1}. \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式成立，是因为 ξ_1^m构成凸组合。可以看出，我们对 $L_1^{ij}(\xi_1^m)$ 的估计确实独立于 ξ_1^m，因此可以将其重新定义为所需的利普希茨常数 L_1^{ij}。换言之，移动凸包的利普希茨常数等于其顶点上的最大利普希茨常数，而边和三角形的利普希茨常数只是凸包的特例。

接下来需要评估运动点 b_{ij}的雅可比矩阵$l_{2,1}$-范数的上界。我们可以通过正向运动学函数推导出该上界。为简单起见，假设机械臂仅包含铰链关节，如





(a) 维度=12 (b) 维度=6 (c) 维度=54 (d) 维度=11

Fig. 3：四个基准问题的快照，并标注了构型空间的维度

es.

插图所示。我们用Θ_k 表示第k个铰链关节的角度。如果 b_{ij} 位于

第 K个连杆，那么只有$\Theta_{1、\cdots、K}$ 会影响b_{ij}的位置。我们假设第 k个连杆的长度为 l_k，那么当所有第 k、$\cdots$、K个连杆都处于伸直状态时， Θ_k对 b_{ij}的影响最大，因此：

$$\left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial \Theta_k}\right| \le \sum_{m=1}^{k} l_m \Longrightarrow \left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial \Theta}\right|_{2,1} \le \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=k}^{K} l_m.$$

B. 高阶多项式轨迹参数化

我们的 L_1^{ij} 公式依赖于$\partial\Theta(t,\theta)/\partial t$的有界性。关节机器人可能具有必须在任意 $t \in [0,T]$处满足的关节限位。为此，我们使用高阶复合 B´ézier 曲线对构型空间中的轨迹 $\Theta(t,\theta)$进行参数化，使得 $\Theta(t,\theta)$是一个高阶多项式函数。采用这种形式，可以将任意 t 处$\Theta(t,\theta)$的界限转化为其控制点 [50]的界限。我们分别将关节下限和上限记为Θ 和 Θ。若以 M_k 表示提取 Θ_k 控制点的矩阵，并以 M_k的第 i行表示为 M_{ik}，则可通过以下障碍函数保守地施加关节限位约束：

$$\sum_i \sum_k \mathcal{P}(\bar{\Theta}_k - M_{ik}\Theta_k) + \mathcal{P}(-\underline{\Theta}_k + M_{ik}\Theta_k). \tag{11}$$

类似的方法可用于将 $\partial\Theta_k(t,\theta)/\partial t$ 限制在范围 $[-1,1]$内。我们知道，B´ézier 曲线的梯度仍是一个阶数较低的 B´ézier 曲线，因此可用M_k'表示提取 $\partial\Theta_k(t,\theta)/\partial t$控制点的矩阵，并以 M_k的第 i行表示为 M_{ik}'。随后，可通过添加以下障碍函数，实现对任意 t 处 $\partial\Theta(t,\theta)/\partial t$有界性的约束：

$$\sum_i \sum_k \mathcal{P}(1 - M_{ik}'\Theta_k) + \mathcal{P}(1 + M_{ik}'\Theta_k). \tag{12}$$

请注意，这些约束具有严格保守性。不过，通过在贝塞尔曲线组合中使用更多控制点，始终可以表示任意长、包含复杂运动的轨迹。

C. 屏障函数的加速与自适应计算

朴素地计算障碍函数项$\sum_{ijkl}\mathrm{P}_{ijkl}$ 的代价可能高得难以承受。为此，我们提出了几种与理论分析兼容的加速技术。首先请注意，我们的理论结果假设所有 b_{ij}使用相同的 L_1，但第 VI-A 节中计算出的 L_1^{ij} 常数对每个 b_{ij}都不同。我们可以不使用$L_1 = \max_{ij} L_1^{ij}$，而是针对每个 b_{ij}采用不同的 $\phi(x) = L_1^{ij}x/2 + L_2x^{\eta}$，这样会得到较宽松的安全条件，并减少细分次数。此外，由于我们的势函数 P 在设计上具有局部支撑性，因此只有当 b_{ij} 与 o_k 之间的距离小于 x_0+d_0时，才需要计算 P_{ijk}。我们提出构建时空的、基于二叉树的包围体层次结构（BVH） [51]，以剪除不必要的 P_{ijk} 项。BVH 的每个叶节点都表示一个唯一的元组 $< b_{ij}, T_0^l, T_1^l >$，可将其与每个障碍物o_k 进行检查，以快速剪除距离大于x_0+d_0的 $< b_{ij}, o_k >$对。BVH 还提供了一种便于执行自适应细分的数据结构。当安全检查未能通过项P_{ijk}时，我们只细分该项，不改变其他 b_{ij} 和 o_k 对的细分状态。具体而言，细分时，叶节点元组 $< b_{ij}, T_0^l, T_1^l >$会被一个含有两个子节点的内部节点替代： $< b_{ij}, T_0^l, (T_0^l + T_1^l)/2 >$以及$< b_{ij}, (T_0^l + T_1^l)/2, T_1^l >$。

D. 处理自碰撞

我们的方法本身就适用于处理自碰撞。事实上，对于两个关节机器人子集 b_{ij} 和 $b_{i'j'}$，我们有以下广义运动界：

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{dist}(b_{ij}(t_1,\theta), b_{i'j'}(t_1,\theta)) - \mathrm{dist}(b_{ij}(t_2,\theta), b_{i'j'}(t_2,\theta))| \\
\le &|\mathrm{dist}(b_{ij}(t_1,\theta), b_{i'j'}(t_1,\theta)) - \mathrm{dist}(b_{ij}(t_2,\theta), b_{i'j'}(t_1,\theta))| + \\
&|\mathrm{dist}(b_{ij}(t_2,\theta), b_{i'j'}(t_1,\theta)) - \mathrm{dist}(b_{ij}(t_2,\theta), b_{i'j'}(t_2,\theta))| \\
\le &(L_1^{ij} + L_1^{i'j'})|t_1 - t_2|,
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式是通过分别在第一项和第二项中将 $b_{i'j'}(t_1,\ \theta)$和 $b_{ij}(t_2,\ \theta)$ 视为静态障碍物推导得出的。上述结果表明，如果引理 IV.2对到静态障碍物的距离成立，那么通过对利普希茨常数求和，该结论对两个运动机器人子集之间的距离也成立。因此，我们可以使用以下替代

定义 $\phi(x)$，以在安全检查中防止自碰撞：

$$\phi(x) = (L_1^{ij} + L_1^{i'j'})x/2 + L_2 x^{\eta}.$$

读者可以通过相同的论证验证，我们所有的理论结果同样适用于自碰撞；为简洁起见，我们省略重复的推导。值得注意的是，使用我们在第VI-C节介绍的自适应细分方案，b_{ij}和$b_{i'j'}$的细分状态可能不同。例如，b_{ij}可能有一个细分区间 $[T_0^l, T_1^l]$，而$b_{i'j'}$有一个与之重叠的区间$[T_0^{l'}, T_1^{l'}]$，使得$[T_0^l, T_1^l) \cap [T_0^{l'}, T_1^{l'}) \neq \varnothing$，但$[T_0^l, T_1^l] \neq [T_0^{l'}, T_1^{l'}]$。由于我们使用中点约束作为区间的代表，因此对于这种不一致的区间对，不存在定义良好的中点。为了解决这一问题，我们注意到，根据中点细分规则，要么 $[T_0^l, T_1^l] \subset [T_0^{l'}, T_1^{l'}]$，要么 $[T_0^{l'}, T_1^{l'}] \subset [T_0^l, T_1^l]$。因此，我们可以递归地细分较大的区间，直到两个区间完全相同。

VII. 评估

我们使用 C++ 实现了该方法，并在配备一颗 32 核 AMD 3970X CPU 的台式计算机上评估其性能。我们充分利用 CPU 核心，对包围体层次结构碰撞检测、能量函数和导数计算进行并行化。所有实验均使用$x_0 = 10^{-3}$、$L_2 = 10^{-4}$、$\eta = 1/7$、$\mu = 10^{-2}$、$\epsilon_d = 10^{-4}$。轨迹在构型空间中参数化，采用一条由 5 段组成、阶数为 5 的复合 B´ezier 曲线，时间范围为 $T = 5$ 秒。我们使用下文讨论的四个计算基准测试。

A. 基准问题

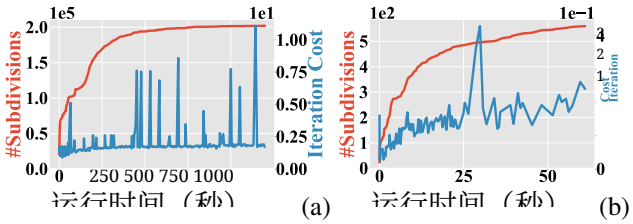


图4：针对第一个基准测试，绘制使用三角网格 (a) 和凸包 (b) 表示时的细分数量及每次迭代的成本（秒）随计算时间的变化情况。

我们的第一个基准测试（图3a）涉及两台 LBR iiwa 机械臂同时在共享工作空间中抵达 4 个目标点。为此，我们的目标函数包含机器人末端执行器与目标点之间的距离度量，以及如 [22] 所示的拉普拉斯轨迹平滑度度量。图4展示了两种几何表示方式（三角网格和凸包）的收敛历史及细分次数。由于精细的几何细节导致大量三角形对，采用三角网格的方法比采用凸包的方法慢得多。采用凸包表示的方法在经过 359 次细分、231 次迭代和 2.23 分钟计算后，成功抵达全部 4 个目标位置。我们还绘制了图4中的每次迭代成本，该成本会随着细分次数增加及障碍惩罚项的引入而上升。

我们的第二个基准测试（图 3b，成功点以绿色表示，未成功点以红色表示）涉及一台 LBR iiwa 机械臂与带有细长几何物体的树状障碍物交互。这类障碍物会使不可行的离散化方法产生定义不明确的梯度，甚至穿透机器人连杆 [1]，而我们的方法能够轻松处理这类形状不规则的障碍物。我们对末端执行器需要到达的目标位置进行网格采样，并针对每个位置运行算法。我们的方法成功到达了 16/56 个位置。我们还针对每个未成功的点进行了穷举搜索。具体而言，如果某个未成功的点与一个成功点相邻，我们就为末端执行器优化一条额外的轨迹，以连接这两个点。如此反复，直至无法到达新的点。通过这种方式，我们的方法成功到达了 39/56 个位置。平均而言，要到达每个目标点，采用凸包表示的方法经过 416 次细分、246 次迭代后收敛，计算耗时 0.31 分钟，因此总计算时间为 17.36 分钟。

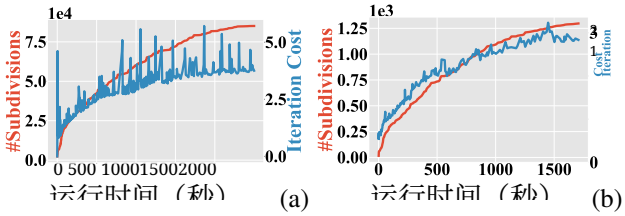


图5：采用三角网格（a）和凸包（b）表示时，第三个基准测试中细分数量和每次迭代成本（秒）随计算时间的变化。

我们的第三个基准测试（图 3c）涉及一群无人机穿过障碍物并彼此交错飞行。无人机可以建模为具有 6 个自由度的自由飞行刚体。先前的工作 [52] 仅搜索平移，然后利用微分平坦性 [53] 求得可行的姿态轨迹。然而，这些姿态轨迹可能并非无碰撞。相反，我们可以同时优化平移和旋转，并保证无碰撞。我们对这两种几何表示都进行了实验，该示例的收敛历史绘于图5中。同样，我们采用三角网格的方法能够表示精细的几何形状，但需要耗费显著更多的计算时间。相比之下，采用凸包表示的方法经过 1297 次细分、188 次迭代和 25.87 分钟计算后收敛。在表 I中，我们总结了采用三角网格和凸包表示时，本方法各组成部分的计算量占比。主要瓶颈在于能量评估，即计算 $\mathcal{E}(\theta)$及其导数。请注意，我们采用三角网格或凸包作为几何表示。前一种情况下，每个距离项对应一对边或一个点与一个三角形。尽管这种距离函数的计算开销较低，但

Step	Time
线搜索方向计算	1.6%
细分	3.3%
安全检查	14.4%
目标函数评估	80.7%

表 I：在一次优化过程中，我们汇总了各组成部分所占的计算量比例。主要瓶颈在于能量评估，占计算量的 80.7%。

P_{ijkl} 项的数量很大，造成了显著的计算负担。后一种情况下，P_{ijkl}项的数量要少得多，但每次评估 P_{ijkl} 都需要进行复杂的计算，以求得两个一般凸包之间的最短距离，这同样是计算瓶颈。

我们的最后一项基准测试（图 3d）规划机械臂移动机器人到达书架上位置网格中的各个位置。我们使用凸分解将机器人连杆和书架都表示为凸包。从远处的初始猜测出发，我们的方法能够引导机器人到达 114 个目标位置中的 88 个，成功率为 77.19%。对于每个目标点取平均值，我们使用凸包表示的方法在经过 874 次细分、402 次迭代和 1.77 分钟的计算后收敛，因此总计算时间为 201.78 分钟。

i 个连杆	1	2	3	4	5	6	7	9	10
δL_1^i	3.71	5.24	4.87	5.06	5.84	6.14	6.88	7.21	7.79

表 II：图中机械臂移动机器人的每个连杆的利普希茨常数高估程度3d（1号连杆最靠近根关节）。

B. 利普希茨常数的保守性

根据表I，我们的主要计算瓶颈在于反复细分所产生的大量惩罚项。这部分是由于利普希茨常数被高估，导致运动界过于保守，需要进行更多细分才能收紧该界。为了量化第 i个刚体的高估程度，我们将我们的利普希茨常数与以下真实最紧界进行比较：

$$L_1^{ij*} \triangleq \underset{t\in[T_0^l,T_1^l]}{\operatorname{argmin}} \left|\frac{\partial b_{ij}(t,\theta)}{\partial t}\right|,$$

并将高估指标定义为 $\delta L_1^i \triangleq$最大值$_j\, L_1^{ij}/L_1^{ij*}$，其中我们通过在 L_1^{ij*} 内按$t \in [T_0^l, T_1^l]$ 的间隔对时间点进行采样，计算 $\delta t = 10^{-3}$，并选取最大值。我们为图1秒（$T_1^l - T_0^l = 1$的机械臂移动机器人初始化了 1000 条随机轨迹，如图3d 所示，并在表 ΔL_1^i II 中汇总了每个机器人连杆在 1000 个案例中的平均值，其中第1条连杆最靠近根关节。沿运动学链向下，连杆的高估程度会逐渐增加，这是由于链上各关节的高估累积所致。因此，运动学链越长，所需的细分次数越多。

C. 与交换法的比较

我们将先前工作的优点结合起来，实现了一种可靠的交换法 [12]。在每次迭代中，检测每对凸物体之间时空最深的穿透点，并将其加入有限索引集。为检测最深穿透点，我们以$\epsilon = 10^{-3}$ 的有限间隔对时间域进行密集采样，并计算每个时间点上每对机器人连杆的穿透深度。我们使用 CGAL 中实现的精确点到网格距离计算 [54] 来计算各时间点的穿透深度，并采用 [6]中提出的包围体层次结构和分支定界技术，高效剪除非最深穿透点。更新索引集后，我们构造非线性规划，并使用 IPOPT 软件包求解 [10]。当梯度的无穷范数小于 10^{-4}时，我们终止非线性规划求解，这与我们的方法相同。请注意，我们以 $\epsilon = 10^{-3}$ 的有限间隔对时间域进行采样，并且只向索引集中加入新约束，从不移除已有约束。因此，我们的交换求解器本质上是通过逐步实例化约束，将半无限规划化为非线性规划求解器问题，所以它与非线性规划求解器具有相同的可行性保证。据我们所知，这是基于交换法的半无限规划求解器所能提供的最强可行性保证。为公平比较，本节中两种方法均只使用碰撞约束，即我们的方法不使用关节限位方程（11）和梯度界方程（12）。

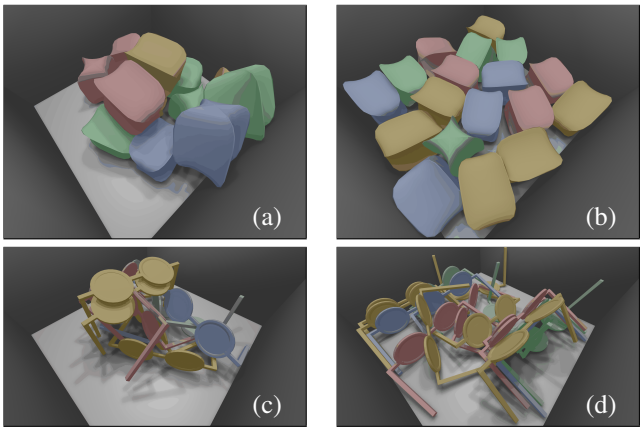


图 6：使用我们的方法逐个（a）和联合（b）沉降 18 个大型物体的结果。此外，我们还可以沉降非常薄的物体，例如眼镜，无论是逐个（c）还是联合（d）沉降。

我们的第一个比较基准涉及物体沉降：我们将非凸物体放入箱子中，并使用两种方法计算力平衡位姿。具体做法是将目标函数设为重力势能，并对所有物体各自的单个位姿进行优化。与轨迹优化相比，物体沉降容易得多，因为无需进行时间细分或采样。我们考虑两种物体沉降模式：第一种是逐个处理模式，即假设先前优化的物体保持不动，并在每次运行中依次优化一个物体的位姿

#大型物体	1	2	3	4	5	6	7	9	10
离散化	2.13	4.31	6.67	5.96	9.33	6.18	12.44	21.54	14.43
交换		0.11	0.06	0.11	0.14	0.22	0.31	0.84	1.93	0.40
#薄型物体	1	2	3	4	5	6	7	9	10
离散化	3.90	8.43	4.74	22.87	24.10	9.71	23.43	10.87	11.94
交换	-	-	-	-	-	-	-	-	-

表 III：使用我们的离散化方法或交换法安置 10 个物体所需的计算时间（秒）。我们用“-”表示运行失败。

；第二种是联合模式，在一次运行中优化所有物体的位姿。逐个处理模式的计算速度更快，但无法找到准确的力平衡位姿。联合模式能够找到准确的位姿，但需要更多迭代才能收敛。在第一个实验中，我们将 18 个大型物体放入箱子中，结果如图6a 所示，前 10 个物体的平均计算时间汇总于表III。交换法的速度比我们的方法快 10× 倍以上。这是因为我们的方法在每次迭代中都需要考虑所有三角形对之间的所有潜在接触。在第二个实验中，我们将 18 副眼镜放入箱子中，如图 6c 所示。我们的方法仍能找到力平衡位姿，但交换法无法找到可行解，因为眼镜的几何形状较薄，无法明确定义穿透深度。最后，我们对两个示例都使用联合模式运行我们的方法，其中大型物体耗时 19 分钟，薄型物体耗时 20 分钟。如图 6bd 所示，联合模式计算出的位姿具有低得多的重力势能。

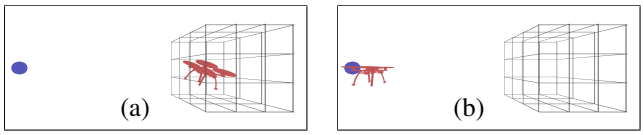


图 7：一架无人机被困在笼子里，但正试图飞出笼子，前往蓝色目标点。图中展示了使用我们的离散化方法 (a) 和交换法 (b) 计算出的无人机最终位置。

我们的第二个比较基准是图 7中所示的一个玩具示例，其中一架无人机被困在由一排金属杆组成的笼子里。无人机正试图飞向外面的目标点。我们的方法会使无人机靠近目标点，但仍被困在笼子里；而交换法则会错误地使无人机飞出笼子，无论 ϵ 有多小。这一看似令人惊讶的结果是因为交换法最终以分辨率 ϵ检测离散时间点上的穿透。然而，优化器可以任意加速无人机，使其在 ϵ内飞出笼子，从而漏检碰撞约束。

最后，我们在第一个和第三个基准测试（图 3ac）上运行这两种算法，这两个基准测试仅涉及机器人的单个目标位置。（另外两个基准测试涉及目标位置网格，因此使用交换法计算的代价过高。）交换法在两个基准测试中均成功。在第一个基准测试中，交换法经过 123 次索引集更新和非线性规划求解后，用时 33.09 分钟完成计算，而我们的方法仅用时 5.47 分钟。类似地，在第三个基准测试中，交换法经过 1804 次索引集更新和非线性规划求解后，用时 699.23 分钟完成计算，而我们的方法仅用时 30.02 分钟。我们的方法之所以具有性能优势，原因有二：首先，我们的方法不要求在最高分辨率下检测碰撞（交换法中的 $\epsilon = 10^{-3}$）。相反，我们只需要进行足够的细分，以找到下降方向。其次，我们的方法不要求在每次能量函数更新后都精确求解非线性规划。我们在每轮细分中只执行一次牛顿法迭代。

D. 与基于采样的方法比较

与我们的局部最优保证相比，基于采样的方法提供了更强的渐近全局最优性保证，因此我们使用开源基于采样的算法实现 [55]作为基准真值，并将其底层离散碰撞检测器的采样间隔设为较小的 $\epsilon = 10^{-3}$。在首次比较中，我们在第一个基准测试（图 3a）上运行我们的方法和 RRT-Star，超时时间设为 60 分钟。对于这两种方法，我们都将目标函数设为构型空间轨迹长度与末端执行器到目标位置的笛卡尔空间距离的加权组合。在优化过程中，我们每隔 10 秒保存一次当前最优轨迹，并在图 8中绘制其轨迹长度和到目标的距离。我们的方法收敛到局部最优解的速度快得多，而 RRT-Star 则需要很长的计算时间，才能在 12 维构型空间中搜索更优轨迹，进展甚微。我们还在第三个基准测试（图3c）上测试了 RRT-Star，其构型空间维度更高，达到 54 维，但它在 60 分钟内未能计算出有意义的轨迹。这是因为零阶基于采样的算法具有指数级复杂度。

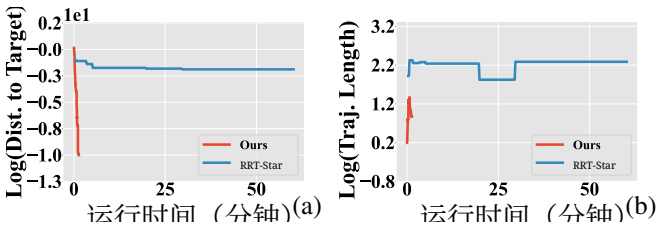


图 8：我们以对数刻度绘制了使用我们的算法和 RRT-Star 进行轨迹优化过程中的目标笛卡尔空间距离 (a) 以及构型空间轨迹长度 (b)。

在第二次对比中，我们在第二个基准测试（图 3b）上运行概率路线图（PRM），并将超时时间设为 20 分钟。这个时长已经超过我们的方法到达所有目标位置所需的计算时间。若末端执行器与目标位置的距离在 7 厘米以内，我们就认为已到达该目标位置

与目标位置的距离。在这个六维配置空间中，PRM 成功到达 56 个目标位置中的 46 个，而我们的方法到达了 39 个。我们的方法成功率较低，是因为其本质上是局部最优的。若要提高成功率，可以将基于采样的算法与我们的局部方法结合起来，以提供高质量的初始猜测，例如 [56], 中所做的那样；不过，这超出了本研究的范围。我们还在第四个基准测试（图3d）上测试了 PRM，并将超时时间设为 240 分钟，这同样长于我们方法的总计算时间。在这个 11 维构型空间中，PRM 只能到达 114 个目标位置中的 17 个，而我们的方法到达了 88 个，凸显了一阶算法的优势。

区间 ϵ	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.01
#无人机逃逸	10/10	7/10	2/10	0/10	0/10

表 IV：RRT-Star 在不同采样间隔下规划的无人机行为 ϵ。

最后，我们在图 7 中的玩具示例上比较这两种方法，以突出 RRT-Star 对碰撞检测器采样间隔的敏感性。同样，我们将 RRT-Star 的超时时间设为 30 分钟。我们采用不同的采样间隔 ϵ，并在每种 ϵ下运行 RRT-Star 10 次。无人机错误逃出笼子的次数汇总于表 IV中。当 ϵ足够小时，无人机能够被正确困在笼子里；而当ϵ较大时，无人机则会逃脱。对于 ϵ的中间取值，无人机的行为取决于随机采样位置。相比之下，我们的方法能够保证无人机被正确困在笼子里，而无需调整 ϵ。

VIII. 结论

我们提出了一种具有可证明可行性的算法，用于关节机器人的无碰撞轨迹生成。我们对其底层半无限规划问题进行建模，并采用一种新颖的可行离散化方法求解。该方法将时间域划分为离散区间，并为每个区间选取一个代表性约束，从而将半无限规划问题转化为非线性规划。我们还提出了一种保守运动界，以确保原始半无限规划约束得到满足。最后，我们建立了理论收敛保证，并提出了适用于关节机器人的实用实现方案。结果表明，我们的方法能够在几分钟内为工业机械臂生成长时域轨迹。

我们的方法存在若干局限性，未来工作将致力于解决这些问题。不足之处在于，我们的方法需要大量细分才能获得可行且近乎最优的解。这部分是由于对利普希茨常数的估计过于保守，且引理 IV.2采用了线性运动界。未来，我们计划通过探索高阶泰勒模型来减少细分次数并提高计算速度 [29]。一个较小的局限是，我们的方法需要定制的线搜索方案，无法使用现成的非线性规划求解器，这可能会增加实现复杂度。最后，我们的方法不考虑等式约束，而等式约束对于对机器人动力学建模很有用。通过将我们的方法与基于 merit 函数的技术相结合，可以纳入其他等式约束 [44], ，这是未来工作的一项重要方向。

参考文献

[1] J. Schulman 等，“采用序列凸优化和凸碰撞检测进行运动规划”，国际机器人研究杂志，第33卷，第9期，页码1251–1270，2014年。[2] K. J. Kyriakopoulos 和 G. N. Saridis，“最小加加速度路径生成”，载于《论文集：*1988*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议》，IEEE，1988年，页码364–369。.[3] C. Hansen、J. Oltjen、D. Meike 和 T. Ortmaier，“工业机器人节能轨迹生成的改进方法”，载于*2012*年*IEEE*自动化科学与工程国际会议（*CASE*），IEEE，2012年，页码1–7。[4] T. Kunz 和 M. Stilman，“具有有界加速度和速度的路径跟随时间最优轨迹生成”，机器人学：科学与系统*VIII*，页码1–8，2012年。[5] S. M. LaValle 等，“快速探索随机树：一种新的路径规划工具”，1998年。[6] S. Karaman 和 E. Frazzoli，“用于最优运动规划的基于采样的算法”，国际机器人研究杂志，第30卷，第7期，页码846–894，2011年。[7] J. Pan、S. Chitta 和 D. Manocha，“FCL：用于碰撞与邻近查询的通用库”，载于*2012*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议，IEEE，2012年，页码3859–3866。[8] L. Janson、B. Ichter 和 M. Pavone，“确定性采样运动规划：最优性、复杂度与性能”，国际机器人研究杂志，第37卷，第1期，页码46–61，2018年。[9] J. Schulman、J. Ho、A. X. Lee、I. Awwal、H. Bradlow 和 P. Abbeel，“通过序列凸优化寻找局部最优的无碰撞轨迹。”，载于机器人学：科学与系统，Citeseer，第9卷，2013年，页码1–10。[10] L. T. Biegler 和 V. M. Zavala，“使用 IPOPT 进行大规模非线性规划：企业级动态优化的集成框架”，《计算机与化学工程》，第33卷，第3期，页码575–582，2009年。[11] K. Hauser，“针对非凸障碍物的轨迹优化半无限规划”，国际机器人研究杂志，第40卷，第10–11期，页码1106–1122，2021年。[12] M. L´opez 和 G. Still，“半无限规划”，《欧洲运筹学杂志》，第180卷，第2期，页码491–518，2007年。[13] T. Marcucci、M. Petersen、D. von Wrangel 和 R. Tedrake，“利用凸优化进行障碍物周围的运动规划”，*arXiv* 预印本 *arXiv:2205.04422*，2022年

.

[14] A. Amice、H. Dai、P. Werner、A. Zhang 和 R. Tedrake，“在构型空间中寻找并优化机器人机械臂的经认证无碰撞区域”，*arXiv* 预印本 *arXiv:2205.03690*，2022年。[15] J. T. Betts，“轨迹优化数值方法综述”，《制导、控制与动力学杂志》，第21卷，第2期，页码193–207，1998年。[16] S. J. Wright，原始-对偶内点法。SIAM，1997年。[17] D. Hsu、J.-C. Latombe 和 H. Kurniawati，“关于概率路线图规划的概率基础”，载于《机器人研究：第十二届国际研讨会 *ISRR* 成果》，施普林格，2007年，页码83–97。[18] M. Jordan 和 A. Perez，“最优双向快速探索随机树”，2013年。[19] S. Karaman、M. R. Walter、A. Perez、E. Frazzoli 和 S. Teller，“使用 RRT 的随时运动规划”，载于*2011*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议，IEEE，2011年，页码1478–1483。[20] J. D. Gammell、S. S. Srinivasa 和 T. D. Barfoot，“知情快速探索随机树：通过直接采样可采纳的椭球启发式方法实现聚焦的最优采样路径规划”，载于*2014*年 *IEEE/RSJ* 智能机器人与系统国际会议，IEEE，2014年，页码2997–3004。[21] K. Hauser，“渐近最优运动规划中的惰性碰撞检测”，载于*2015*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议（*ICRA*），IEEE，2015年，页码2951–2957。[22] C. Park、J. Pan 和 D. Manocha，“ITOMP：用于动态环境实时重规划的增量轨迹优化”，载于第二十二届自动规划与调度国际会议，2012年。[23] M. Zucker 等，“CHOMP：用于运动规划的协变哈密顿优化”，《国际机器人研究杂志》，第32卷，第9–10期，页码1164–1193，2013年。[24] A. L. Tits，“可行序列二次规划可行序列二次规划”，载于《优化百科全书》，C. A. Floudas 和 P. M. Pardalos 编。马萨诸塞州波士顿：施普林格美国，2009年，页码1001–1005。[25] Y.-K. Choi、W. Wang、Y. Liu 和 M.-S. Kim，“两个运动椭圆盘的连续碰撞检测”，*IEEE*机器人学汇刊，第22卷，第2期，页码213–224，2006年。[26] Y.-K. Choi、J.-W. Chang、W. Wang、M.-S. Kim 和 G. Elber，“椭球体的连续碰撞检测”，*IEEE* 可视化与计算机图形学汇刊，第15卷，第2期，页码311–325，2008年。[27] T. Brochu、E. Edwards 和 R. Bridson，“高效且几何精确的连续碰撞检测”，*ACM*图形学汇刊（*TOG*），第31卷，第4期，页码1–7，2012年。[28] F. Schwarzer、M. Saha 和 J.-C. Latombe，“机器人路径的精确碰撞检测”，《机器人算法基础 *V*》，页码25–41，2004年。[29] X. Zhang、S. Redon、M. Lee 和 Y. J. Kim，“使用泰勒模型和时间剔除对多刚体模型进行连续碰撞检测”，*ACM* 图形学汇刊，第 26 卷，第 3 期，15–es，2007年 7 月。[30] J. Pan、L. Zhang 和 D. Manocha，“使用 B 样条快速平滑运动规划轨迹”，载于机器人学：科学与系统，2011年。[31] A. Majumdar、A. A. Ahmadi 和 R. Tedrake，“使用平方和规划沿轨迹进行控制设计”，载于*2013*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议，IEEE，2013年，第 4054–4061 页。[32] A. Clark，“控制障碍函数的验证与综合”，载于 *2021*年 *IEEE* 第 *60* 届决策与控制会议（*CDC*），IEEE，2021年，第 6105–6112 页。[33] A. Majumdar 和 R. Tedrake，“用于实时鲁棒反馈运动规划的漏斗库”，国际机器人研究杂志，第 36 卷，第 8 期，第 947–982 页，2017年。[34] M. Zhang 和 K. Hauser，“带互补约束的半无限规划及其在普遍接触位姿优化中的应用”，载于 *2021*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议（*ICRA*），IEEE，2021年，第 6329–6335 页。[35] R. Deits 和 R. Tedrake，“拥挤环境中无人机的高效混合整数规划”，载于 *2015*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议（*ICRA*），IEEE，2015年，第 42–49 页。[36] P. A. Parrilo，鲁棒性与优化中的结构化半定规划及半代数几何方法。加州理工学院，2000年。[37] T. Pietrzykowski，“约束极大值的精确势函数法”，*SIAM* 数值分析杂志，第 6 卷，第 2 期，第 299–304 页，1969年。[38] A. R. Conn 和 N. I. Gould，“半无限规划的精确罚函数”，数学规划，第 37 卷，第 1 期，第 19–40 页，1987年。[39] U. Borrmann、L. Wang、A. D. Ames 和 M. Egerstedt，“用于安全群体行为的控制屏障证书”，*IFAC-PapersOnLine*，第 48 卷，第 27 期，第 68–73 页，2015年。[40] A. D. Ames、S. Coogan、M. Egerstedt、G. Notomista、K. Sreenath 和 P. Tabuada，“控制屏障函数：理论与应用”，载于 *2019*年第 *18* 届欧洲控制会议（*ECC*），IEEE，2019年，第3420–3431 页。[41] S. Liu、N. Atanasov、K. Mohta 和 V. Kumar，“ 使用线性二次最短时间控制的四旋翼飞行器搜索式运动规划”，载于*2017*年 *IEEE/RSJ* 智能机器人与系统国际会议（*IROS*），IEEE，2017年，第 2872–2879 页。[42] A. Escande、S. Miossec、M. Benallegue 和 A. Kheddar，“用于计算具有连续梯度的邻近距离的严格凸包”，*IEEE*机器人学汇刊，第 30 卷，第 3 期，第 666–678 页，2014年。[43] D. Harmon、E. Vouga、B. Smith、R. Tamstorf 和 E. Grinspun，“异步接触力学”，载于 *ACM SIGGRAPH 2009* 论文集，SIGGRAPH ’09 系列，纽约州纽约市，美国：计算机协会，2009年。

[44] D. P. Bertsekas, “非线性规划, ”《运筹学会杂志》，第48卷，第3期，第334–334页，1997年。[45] U. Sch¨attler, 《半无限规划问题的内点法》，《运筹学年鉴》，第62卷，第1期，第277–301页，1996年。[46] H. Dai、A. Majumdar 和 R. Tedrake, 《通过序列半定规划综合与优化力闭合抓取》，载于《机器人研究》，施普林格，2018年，第285–305页。[47] J.-M. Lien 和 N. M. Amato, 《多边形的近似凸分解》，载于《第二十届计算几何年度研讨会论文集》，2004年，第17–26页。[48] M. Tang、D. Manocha 和 R. Tong, 《使用变形非穿透滤波器进行快速连续碰撞检测》，载于I3D ’10：《 2010 年 ACM SIGGRAPH 交互式三维图形与游戏研讨会论文集》，美国纽约州纽约：ACM，2010年，第7–13页。[49] S. Osher 和 R. P. Fedkiw, 《水平集方法与动态隐式曲面》。施普林格纽约，2005年，第1卷。[50] E. V. Shikin 和 A. I. Plis, 《用户样条手册》。CRC出版社，1995年。[51] Y. Gu、Y. He、K. Fatahalian 和 G. Blelloch, 《通过近似凝聚聚类高效构建包围体层次结构》，载于《第五届高性能图形学会议论文集》，2013年，第81–88页。[52] H. Oleynikova、M. Burri、Z. Taylor、J. Nieto、R. Sieg[53] wart 和 E. Galceran, 《用于在线无人机重新规划的连续时间轨迹优化》，载于《2016年 IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS）》，IEEE，2016年，第5332–5339页。[54] D. Mellinger 和 V. Kumar, 《四旋翼飞行器的最小跃度轨迹生成与控制》，载于《2011年 IEEE 国际机器人与自动化会议》，2011年，第2520–2525页。[55] A. Fabri 和 S. Pion, 《CGAL：计算几何算法库》，载于《第17届 ACM SIGSPATIAL地理信息系统进展国际会议论文集》，2009年，第538–539页。.I. A. S[56] ucan、M. Moll 和 L. E. Kavraki, 《Open Motion Planning Library》，《IEEE机器人与自动化杂志》，第19卷，第4期，第72–82页，2012年12月，https: // ompl.kavrakilab.org。S. Choudhury、J. D. Gammell、T. D. Barfoot、S. S. Srinivasa 和 S. Scherer, 《区域加速批量知情树（RABIT）：将局部信息整合到最优路径规划中的框架》，载于《2016年 IEEE 国际机器人与自动化会议（ICRA）》，IEEE，2016年，第4207–4214页。

IX. 算法 1的有限终止

我们证明算法1 会在有限次迭代后终止。只要不会造成混淆，我们就省略函数的参数。我们的主要思路是比较以下两项：

$$\tilde{\mathcal{P}} \triangleq \sum_{ijkl}(T_1^l - T_0^l)\mathcal{P}_{ijkl} \quad \bar{\mathcal{P}} \triangleq \sum_{ijkl}\int_{T_0^l}^{T_1^l}\mathcal{P}_{ijk}(t)dt,$$

˜其中，我们用简写符号 $\mathcal{P}$ 表示方程（˜ ¯8）中惩罚函数部分。概念上，$\mathcal{P}$ 以黎曼和的意义近似$\mathcal{P}$，且随着细分次数增加，近似误差会减小。然而，由于我们的细分是自适应的，近似误差不会趋近于零。因此，我们需要一种新工具来˜ ¯分析$\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{P}$之间的差异。为此，我们引入以下混合惩罚函数，并用一个变量ϵ_2 控制混合程度：

$$\hat{\mathcal{P}}(\epsilon_2) = \sum_{ijkl}\begin{cases}(T_1^l - T_0^l)\mathcal{P}_{ijkl} & T_1^l - T_0^l \geq \epsilon_2 \\ \int_{T_0^l}^{T_1^l}\mathcal{P}_{ijk}(t)dt & T_1^l - T_0^l < \epsilon_2,\end{cases}$$

当时间区间短于 ϵ_2时，我们采用积分形式；否则采用代理约束。ˆP(ϵ_2) 的一个重要性质是，经过有限次迭代后，它对细分保持不变：

引理 IX.1。 给定固定的 ϵ_2，并经过有限次ˆ细分后，$\mathcal{P}(\epsilon_2)$ 将不再随进一步细分而变化。

证明。 由于每次细分都会将一个时间区间缩短至原来的 1/2，因此只需有限次细分，就能使时间区间满足： $T_1^l - T_0^l < \epsilon_2$。因此，经过有限次细分算子后，一个时间区间必然满足以下两种情况之一：（情况 I）不再对其进行细分，因此它对后续细分保持不变；（情况 II）该时间区间 $T_1^l - T_0^l < \epsilon_2$，并将对其进行无限次细分，但积分在细分下保持不变。 □

ˆ˜接下来，我们将说明 P 与 P 之间的差异可通过 ϵ_2 加以控制。以下结果给出了它们之间差异的界：

引理 IX.2. 取假设 *III.1*、*IV.1*、*IV.3*，并假设 θ 由算法 *1*的某次迭代生成，则有：

$$\left|\hat{\mathcal{P}}(\epsilon_2) - \tilde{\mathcal{P}}\right| = \boldsymbol{O}(\epsilon_2^{1-5\eta}),$$

对于任意小的固定 ϵ_2。

证明。 我们用简写符号 $\sum_{ijkl}^{\Delta T<\epsilon_2}$表示对区间 $T_1^l - T_0^l < \epsilon_2$ 求和，并使用以下缩写：

$$d_t \triangleq \text{dist}\left(b_{ij}\left(t,\theta\right), o_k\right) - d_0$$
$$d_m \triangleq \text{dist}\left(b_{ij}\left(\frac{T_0^l + T_1^l}{2}, \theta\right), o_k\right) - d_0.$$

由于 θ 是通过线搜索生成的，我们有 θ 通过了安全检查，从而得到以下结果：

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}_{ijk}(t) - \mathcal{P}_{ijkl}| &= \left|\int_{d_t}^{d_m}\frac{d\mathcal{P}(x)}{dx}dx\right| \\ &\leq \left|\frac{d\mathcal{P}(x)}{dx}\right|_{L_2(T_1^l - T_0^l)^\eta}\Bigg| |d_m - d_t| \\ &\leq L_1\left|\frac{d\mathcal{P}(x)}{dx}\right|_{L_2(T_1^l - T_0^l)^\eta}\Bigg|\left|t - \frac{T_0^l + T_1^l}{2}\right|.\end{aligned}$$

上面的第二个不等式源于安全检查条件以及 $\mathcal{P}$ $|\nabla_x \mathcal{P}|$ 的单调性。上面的第三个不等式源于引理 IV.2。我们的引理中的结果可直接推导如下：

$$
\begin{aligned}
&\left|\hat{\mathcal{P}}(\epsilon_2)-\tilde{\mathcal{P}}\right| \leq \sum_{ijkl}^{\Delta T<\epsilon_2} \int_{T_0^l}^{T_1^l} \left|\mathcal{P}_{ijk}(t)-\mathcal{P}_{ijkl}\right| dt \\
&\leq \sum_{ijkl}^{\Delta T<\epsilon_2} L_1 \left|\frac{d\mathcal{P}(x)}{dx}\right|_{L_2(T_1^l-T_0^l)^\eta} \left| \int_{T_0^l}^{T_1^l} \left| t-\frac{T_0^l+T_1^l}{2}\right| dt \right| \\
&\leq \sum_{ijkl}^{\Delta T<\epsilon_2} L_1 \frac{(T_1^l-T_0^l)^2}{4} \left|\frac{d\mathcal{P}(x)}{dx}\right|_{L_2(T_1^l-T_0^l)^\eta} \Bigg| \\
&\leq \sum_{ijkl} \frac{T+\epsilon_2}{\epsilon_2} L_1 \frac{(T_1^l-T_0^l)^2}{4} \left|\frac{d\mathcal{P}(x)}{dx}\right|_{L_2(T_1^l-T_0^l)^\eta} \Bigg| \\
&= \sum_{ijkl} \frac{T+\epsilon_2}{\epsilon_2} L_1 (T_1^l-T_0^l)\Gamma(T_1^l-T_0^l) \\
&\Gamma(T_1^l-T_0^l) \triangleq \frac{T_1^l-T_0^l}{4} \left|\frac{d\mathcal{P}(x)}{dx}\right|_{L_2(T_1^l-T_0^l)^\eta} \Bigg|.
\end{aligned}
$$

上面的最后一个不等式基于如下假设：整个时间域 $[0,T]$ 被细分为长度小于 ϵ_2的区间。通过直接验证可知，取 $\eta<1/5$, $\Gamma(T_1^l-T_0^l) = \mathbf{O}(\epsilon_2^{1-5\eta})$ 作为 $T_1^l-T_0^l\to 0$，即可证明该引理。 □

仿照引理 IX.2，我们可以对梯度之差进行界定：

引理 IX.3。 取假设*III.1*、*IV.1*、*IV.3*，并假设 θ 由算法 *1*的某次迭代生成，则有：

$$\left\|\nabla_\theta \hat{\mathcal{P}}(\epsilon_2)-\nabla_\theta \tilde{\mathcal{P}}\right\| = \boldsymbol{O}(\epsilon_2^{1-6\eta}),$$

对于任意小的固定 ϵ_2。

证明。 同样，我们使用以下简写符号： $\sum_{ijkl}^{\Delta T<\epsilon_2}$、 d_t和 d_m。首先对被积函数误差进行界定：

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla_\theta \mathcal{P}_{ijk}(t)-\nabla_\theta \mathcal{P}_{ijkl}\right\| \\
&= \left\| \frac{d\mathcal{P}(d_t)}{dd_t}\nabla_\theta d_t - \frac{d\mathcal{P}(d_m)}{dd_m}\nabla_\theta d_m \right\| \\
&\leq \left|\frac{d\mathcal{P}(d_t)}{dd_t}\right| \left\|\nabla_\theta d_t-\nabla_\theta d_m\right\| + \left|\frac{d\mathcal{P}(d_t)}{dd_t}-\frac{d\mathcal{P}(d_m)}{dd_m}\right| \left\|\nabla_\theta d_m\right\|,
\end{aligned}
$$

这由三角不等式得出。最后一个等式中有两项需要界定。为界定第一项，我们采用与引理IV.2类似的论证。在假设 IV.1下，必定存在某个常数 L_3 使得：

$$\left\|\nabla_\theta d_t-\nabla_\theta d_m\right\| \leq L_3 \left| t-\frac{T_0^l+T_1^l}{2}\right|.$$

由于 θ 通过了安全检查，我们进一步有：

$$\left|\frac{d\mathcal{P}(d_t)}{dd_t}\right| \left\|\nabla_\theta d_t-\nabla_\theta d_m\right\| \leq L_3 \left|\frac{d\mathcal{P}(x)}{dx}\right|_{L_2(T_1^l-T_0^l)^\eta} \left| t-\frac{T_0^l+T_1^l}{2}\right|.$$

为界定第二项，我们注意到，由于其定义域有界，对于某个 L_4，有 $\|\nabla_\theta d_m\| \leq L_4$。根据中值定理，我们有：

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{d\mathcal{P}(d_t)}{dd_t}-\frac{d\mathcal{P}(d_m)}{dd_m}\right| \|\nabla_\theta d_m\| \leq L_4 \left| \int_{d_t}^{d_m} \frac{\partial^2 \mathcal{P}(x)}{\partial x^2} dx \right| \\
\leq & L_4 \left|\frac{\partial^2 \mathcal{P}(x)}{\partial x^2}\right|_{L_2(T_1^l-T_0^l)^\eta} \left| \left| t-\frac{T_0^l+T_1^l}{2}\right|,\right.
\end{aligned}
$$

其中我们用到了安全检查条件以及 $|\nabla_x^2 \mathbf{P}|$ 的单调性。综合上述结果，我们如下给出引理的证明：

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla_\theta \hat{\mathcal{P}}(\epsilon_2)-\nabla_\theta \tilde{\mathcal{P}}\right\| \leq \sum_{ijkl}^{\Delta T<\epsilon_2} \\
&L_3(T_1^l-T_0^l)\Gamma(T_1^l-T_0^l) + L_4(T_1^l-T_0^l)\Gamma'(T_1^l-T_0^l) \\
&\Gamma'(T_1^l-T_0^l) \triangleq \frac{T_1^l-T_0^l}{4} \left|\frac{\partial^2 \mathcal{P}(x)}{\partial x^2}\right|_{L_2(T_1^l-T_0^l)^\eta} \Bigg|.
\end{aligned}
$$

可以证明， Γ' 是主导项，并且通过直接验证可得 $\Gamma'(T_1^l-T_0^l) = \mathbf{O}(\epsilon_2^{1-6\eta})$，当 $T_1^l-T_0^l\to 0$ 时成立，这就证明了我们的引理。 □

A. 算法*3*的有限终止

现在我们准备证明线搜索算法 3 的有限终止性。如果算法3 不终止，则它必定会无限次调用细分函数。反之，假设细分函数只被调用有限次，那么在最后一次调用之后，算法 3 将简化为非线性规划的标准线搜索，并且该线搜索保证能够成功。然而，我们将证明，使用无限次细分会与 $\mathcal{E}(\theta)$的有限性矛盾。

引理 IX.4. 假设 *III.1*、*IV.1* 和 *IV.3*均成立。若算法 *3* 无限次调用细分，则 θ 是不安全的。换言之， θ 无法通过算法 *2* 在任何有限时空细分下进行的安全检查。

证明。 假设 θ 是安全的，且算法 3 正尝试将 θ更新为 $\theta'=\theta+d\alpha$。这种更新必然会失败，否则只需有限次细分即可完成。此外，必定存在某个区间 $[T_0^l,T_1^l]$需要无限次细分。因此，对于任意固定的 ϵ_3 和 ϵ_4，必定存在某个不安全区间 $[\bar{T}_0^l,\bar{T}_1^l]\subset[T_0^l,T_1^l]$满足：

$$\bar{T}_1^l-\bar{T}_0^l \leq \epsilon_3 \quad \alpha \leq \epsilon_4.$$

我们使用以下简写符号：

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{P}}_{ijkl} &\triangleq \mathcal{P}\left(\mathrm{dist}\left(b_{ij}\left(\frac{\bar{T}_0^l+\bar{T}_1^l}{2},\theta\right),o_k\right)-d_0\right) \\
\mathcal{P}'_{ijkl} &\triangleq \mathcal{P}\left(\mathrm{dist}\left(b_{ij}\left(\frac{\bar{T}_0^l+\bar{T}_1^l}{2},\theta'\right),o_k\right)-d_0\right) \\
d_m &\triangleq \mathrm{dist}\left(b_{ij}\left(\frac{\bar{T}_0^l+\bar{T}_1^l}{2},\theta\right),o_k\right)-d_0 \\
d'_m &\triangleq \mathrm{dist}\left(b_{ij}\left(\frac{\bar{T}_0^l+\bar{T}_1^l}{2},\theta'\right),o_k\right)-d_0.
\end{aligned}
$$

由于该区间不安全，我们有：

$$\mathcal{P}'_{ijkl} \geq \mathcal{P}(\psi(\bar{T}_1^l - \bar{T}_0^l)).$$

最后，我们可以利用中值定理，对在 θ 处与在 θ' 处计算的惩罚函数之差进行界定：

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{P}'_{ijkl} - \bar{\mathcal{P}}_{ijkl}\right| = \left|\int_{d_m}^{d'_m} \frac{d\mathcal{P}(x)}{dx} dx\right| \\
\leq &\max_{x\in[d_m, d'_m]} \left|\frac{d\mathcal{P}(x)}{dx}\right| |d_m - d'_m| \\
\leq &L_4 \max_{x\in[d_m - L_4\|d\|\epsilon_4, d_m + L_4\|d\|\epsilon_4]} \left|\frac{d\mathcal{P}(x)}{dx}\right| \|d\| \epsilon_4.
\end{aligned}$$

上述结果表明，两个惩罚函数之差可通过 ϵ_4 控制。由于 ϵ_3 和 ϵ_4 均为任意且相互独立的量，我们可以先选择足够小的 ϵ_4，使得：

$$\bar{\mathcal{P}}_{ijkl} = \mathbf{\Theta}(\mathcal{P}'_{ijkl}) \geq \mathbf{\Theta}(\mathcal{P}(\psi(\bar{T}_1^l - \bar{T}_0^l))) \geq \mathbf{\Theta}(\mathcal{P}(\psi(\epsilon_3))),$$

然后选择足够小的 ϵ_3，使 $\mathcal{P}_{ijkl}$ 根据引理 IV.4 可以任意大。但要使 θ 安全，我们需要：

$$\bar{\mathcal{P}}_{ijkl} \leq \mathcal{P}(L_2(T_1^l - T_0^l)^\eta),$$

由此导致矛盾，因此 θ 不可能是安全的。 □

推论 IX.5. 算法*3* 进行有限次细分调用，即有限步终止。

证明. 算法 1 要求初始 θ 可行，因此初始 θ 是安全的。算法 1 的每次迭代都根据定理 V.1 生成可行迭代。若进行了无限次细分，则引理 IX.4 表明某个 θ 不安全，这与前述结论矛盾。 □

B. 算法的有限终止*1*

在证明引理 IX.4有限终止后，我们接下来证明主算法 1的有限终止。˜ ˆ我们的主要思路是比较 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}$，并对它们的 ˆ差值进行界定。我们首先证明：如果需要进行无限次细分，则 $\mathcal{P}$ 无界：

引理 IX.6. 假设 *III.1*、*IV.1*、*IV.3*成立，对于任意固定的ϵ_5，如果算法 *3*进行了无限次细分调用，则要么 ˆ$\mathcal{P}(\epsilon_5)$无界，要么 θ 是不安全的。

证明。沿用引理 IX.4 中相同的论证，对于任意固定的 ϵ_3，必定存在不安全区间 $[\bar{T}_0^l, \bar{T}_1^l] \subset [T_0^l, T_1^l]$，使得 P_{ijkl} =$\mathbf{\Theta}$(P'_{ijkl}) ≥ $\mathbf{\Theta}$(P($\psi(\epsilon_3)$))。由于定义域是紧集，必定存在某个 $t \in [T_0^l, T_1^l]$，使得 $\mathrm{P}_{ijk}(t) = \infty$。对于区间 $[T_0^l, T_1^l]$，有两种情况：（情况 I）如果 $T_1^l - T_0^l < \epsilon_5$，则 ˆP($\epsilon_5$) 使用该区间的积分公式，且根据引理 IV.4，P 无界。（情况 II）如果 $T_1^l - T_0^l \geq \epsilon_5$，则根据引理 IX.4，$\theta$ 是不安全的。 □

我们的最终证明利用 Wolfe 条件，在需要无限次细分时导出矛盾。具体而言，我们将证明，若用某个足够小的 ϵ_2替换 P，则搜索方向是下降的 ˜ ˆ dent。以下论证假设 $d = d^{(1)}$；对于 $d = d^{(2)}$ 的情形，论证几乎完全相同。

定理证明*V.2*。反设我们有 $\|d\|_\infty \geq \epsilon_d$，否则算法会立即终止。由度量等价性可得 $\|d\| \geq \epsilon_6$，其中 ϵ_6。我们引入以下简写符号：

$$\hat{\mathcal{E}}(\theta, \epsilon_2) = \mathcal{O}(\theta) + \mu\hat{\mathcal{P}}(\epsilon_2).$$

我们考虑算法 1 的一次迭代，该迭代将 θ更新为 θ'。由于第一个 Wolfe 条件成立，我们有：

$$\mathcal{E}(\theta') \leq \mathcal{E}(\theta) - c\|\nabla_\theta \mathcal{E}(\theta)\|^2\alpha \leq \mathcal{E}(\theta) - c\|\nabla_\theta \mathcal{E}(\theta)\|\alpha\epsilon_6.$$

ˆE(θ, ϵ_2) 的相应变化可界定如下：

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{E}}(\theta', \epsilon_2) = \hat{\mathcal{E}}(\theta, \epsilon_2) + \int_\theta^{\theta'} \left\langle \nabla_\theta \hat{\mathcal{E}}(\theta, \epsilon_2), d\theta \right\rangle \\
\leq &\hat{\mathcal{E}}(\theta, \epsilon_2) + \int_\theta^{\theta'} \left\langle \nabla_\theta \hat{\mathcal{E}}(\theta, \epsilon_2) - \nabla_\theta \mathcal{E}(\theta) + \nabla_\theta \mathcal{E}(\theta), d\theta \right\rangle \\
\leq &\hat{\mathcal{E}}(\theta, \epsilon_2) + \int_\theta^{\theta'} \|\nabla_\theta \hat{\mathcal{E}}(\theta, \epsilon_2) - \nabla_\theta \mathcal{E}(\theta)\| \|d\theta\| + \mathcal{E}(\theta') - \mathcal{E}(\theta) \\
\leq &\hat{\mathcal{E}}(\theta, \epsilon_2) + \mathbf{O}(\epsilon_2^{1-6\eta}) \|d^{(1)}\|\alpha - c\|\nabla_\theta \mathcal{E}(\theta)\|\alpha\epsilon_6 \\
= &\hat{\mathcal{E}}(\theta, \epsilon_2) + \|\nabla_\theta \mathcal{E}(\theta)\|\alpha(\mathbf{O}(\epsilon_2^{1-6\eta}) - c\epsilon_6).
\end{aligned}$$

只要 $\eta < 1/6$，我们就可以选择足够小的 ϵ_2，使得 ˆE(θ', ϵ_2) < ˆE(θ, ϵ_2)。由于我们假设存在无限次细分，且推论 IX.5 表明线搜索算法3 总能在有限步内终止，因此我们得出结论：对于足够小的 ϵ_2，算法 1 将生成一个无限序列 θ ˆ，使 E(θ, ϵ_2) 递减。此外，根据运动界，每个 θ 都是安全的，且每个 ˆE(θ, ϵ_2) 都是有限的。但这些性质与引理 IX.6 矛盾。

□

X. 将算法 1 用作半无限规划求解器

我们证明算法 1确实是方程式 (1) 中半无限规划问题的求解器。为此，我们考虑运行算法 1无限多次迭代，并使用上标表示迭代次数。在第 k次迭代中，我们使用 $\mu = \mu^k$, $\epsilon_d = \epsilon_d^k$，并假设序列 $\{\mu^k\}$ 和 $\{\epsilon_d^k\}$ 均为零序列。这将生成一个解序列 $\{\theta^k\}$，我们考虑其中一个收敛子序列，也记作 $\{\theta^k\} \to \theta^0$。我们考虑在 θ^0处的一阶最优性条件：

定义X.1。 如果 θ^0 满足一阶最优性条件，那么对于每个满足以下条件的方向 D_θ：

$$\left\langle D_\theta, \nabla_\theta dist(b_{ij}(t, \theta^0), o_k) \right\rangle \geq 0 \quad \forall dist(b_{ij}(t, \theta^0), o_k) = 0,$$

我们有 $\left\langle D_\theta, \nabla_\theta \mathcal{O}(\theta^0) \right\rangle \geq 0$。

我们进一步假设以下广义 Mangasarian-Fromovitz 约束资格条件（广义混合约束资格条件）在 θ^0处成立：

假设 X.2。 存在某个方向 D_θ 和正数ϵ_7，使得：

$$\left\langle D_\theta, \nabla_\theta dist(b_{ij}(t, \theta^0), o_k) \right\rangle \geq \epsilon_7 \quad \forall dist(b_{ij}(t, \theta^0), o_k) = 0.$$

MFCQ 是一项标准假设，用于建立 NLP 的一阶最优性条件与拉格朗日函数梯度之间的联系。我们对 MFCQ 的广义版本要求一个正的常数 ϵ_7，这对于将其

推广到 SIP 至关重要。请注意，对于 NLP，GMFCQ 等价于标准 MFCQ。我们首先展示假设 GMFCQ 所带来的一个标准推论：

引理 X.3. 根据假设*X.2*，若某条轨迹处的一阶最优性条件不成立 θ^0，则存在一个方向 D_θ 使得：

$$\left\langle D_\theta, \nabla_\theta \mathcal{O}(\theta^0)\right\rangle < -\epsilon_8$$
$$\left\langle D_\theta, \nabla_\theta dist(b_{ij}(t,\theta^0), o_k)\right\rangle > \epsilon_9 \quad \forall dist(b_{ij}(t,\theta^0), o_k) = 0.$$

证明。 根据我们的假设，存在一个满足广义混合约束资格条件的方向 D_θ^1，以及另一个违反一阶最优性条件的方向 D_θ^2。接下来我们可以考虑第三个方向$D_\theta^3 = D_\theta^1\epsilon_{10} + D_\theta^2$，使得：

$$\left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \mathcal{O}(\theta^0)\right\rangle = \epsilon_{10}\left\langle D_\theta^1, \nabla_\theta \mathcal{O}(\theta^0)\right\rangle - \epsilon_{11}$$
$$\left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \text{dist}(b_{ij}(t,\theta^0), o_k)\right\rangle \geq \epsilon_{10}\epsilon_7,$$

其中， ϵ_{11} 是某个正的常数。因此，我们可以选取足够小的 ϵ_{10}，使第一个等式右侧为负，第二个等式右侧为正。

□

假设存在一个失败方向 D_θ^3，我们现在开始证明，目标函数 E 沿 D_θ^3 的方向导数有一个严格大于零的下界，这与梯度范数阈值 $\{\epsilon_d^k\}$ 趋于零这一事实矛盾。为了对 θ^0附近的导数进行界定，我们需要将 $b_{ij}(t,\ \theta^0)$分为两类：1）它到 o 的距离有一个严格大于零的下界；2）它到 o 的距离接近零，但 b_{ij} 正沿D_θ^3远离。下面将此结果形式化表述：

引理 X.4。 取假设 *III.1*，对于 D_θ^3 引理 *X.3* 中所述的以及每个由$\langle i,\ j,\ k\rangle$组成的元组，以下条件之一成立：

$$dist(b_{ij}(t,\theta^0), o_k) > \epsilon_{12}$$
$$dist(b_{ij}(t,\theta^0), o_k) \leq \epsilon_{12} \wedge \left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta dist(b_{ij}(t,\theta^0), o_k)\right\rangle \geq \frac{\epsilon_9}{2},$$

其中， ϵ_{12} 是某个正常数。

证明。 反设，对于任意小的 ϵ_{12}，我们都可以找到某些 i、j、k、t，使得：

$$\begin{aligned}&\text{dist}(b_{ij}(t,\theta^0), o_k) \leq \epsilon_{12} \wedge \\ &\left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \text{dist}(b_{ij}(t,\theta^0), o_k)\right\rangle < \frac{\epsilon_9}{2}.\end{aligned} \tag{13}$$

我们可以构造一个由 $\{\langle i,\ j,\ k,\ t,\ \epsilon_{12}\rangle\}$ 以及递减的 ϵ_{12}组成的序列，使得对于每个 $i,\ j,\ k,\ t,\ \epsilon_{12}\rangle$元组，等式（13）均成立。若该序列是有限的，则必定存在某个：

$$\text{dist}(b_{ij}(t,\theta^0), o_k) = 0 \wedge \left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \text{dist}(b_{ij}(t,\theta^0), o_k)\right\rangle < \frac{\epsilon_9}{2},$$

这与引理 X.3矛盾。若该序列是无限的，则根据假设 III. 1，存在一个无限子序列，使得 $\langle i,\ j,\ k\rangle$在整个子序列中保持不变。我们将该子序列记为：$\{\langle t,\ \epsilon_{12}\rangle\}$，它趋于 $\{\langle t^0,\ 0\rangle\}$。根据函数的连续性，我们有：

$$\text{dist}(b_{ij}(t^0,\theta^0), o_k) = 0 \wedge \left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \text{dist}(b_{ij}(t^0,\theta^0), o_k)\right\rangle \leq \frac{\epsilon_9}{2},$$

再次与引理 X.3相矛盾。 □

上述分析是在 θ^0 处进行的。但根据问题数据的连续性，我们可以将这些条件扩展到 θ^0 附近的一个小邻域。我们将以 θ^0 为中心、半径等于 ϵ_{13} 的闭球记为 B(θ^0, ϵ_{13})。我们在以下引理中将这一观察形式化：

引理 X.5。 取假设 *X.2*、*III.1*，并根据引理 D_θ^3 中给出的 *X.3*，我们有：

$$\left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \mathcal{O}(\theta)\right\rangle < -\frac{\epsilon_8}{2},$$

对于每个元组$\langle i, j, k\rangle$，以下条件之一成立：

$$dist(b_{ij}(t,\theta), o_k) > \frac{\epsilon_{12}}{2} \tag{14}$$
$$\left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta dist(b_{ij}(t,\theta), o_k)\right\rangle \geq \frac{\epsilon_9}{4}, \tag{15}$$

对于任意 $\theta \in \mathcal{B}(\theta^0, \epsilon_{13})$。

证明。结合引理 X.3、X.4以及问题数据的连续性。

□

引理 X.5 使我们能够量化$\mathcal{E}(\theta,\mu)$ 的梯度范数（为方便起见，我们将 μ 写作 $\mathcal{E}$ 的附加参数）。当$k \to \infty$时，梯度范数应趋于零。然而，引理 X.5 会给它设定一个正下界，从而导致矛盾。

引理 X.6。 取假设 *X.2*、*III.1*、*IV.1*，假设 $\{\mu^k\}$是一个零序列，并根据引理 D_θ^3 *X.3* 中给出的条件，存在 D_θ^3 和充分大的 k，使得对于任意 $\theta \in \mathcal{B}(\theta^0, \epsilon_{14})$：

$$\left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \mathcal{E}(\theta,\mu^k)\right\rangle < -\epsilon_{15},$$

对于某个正的常数 ϵ_{14}。

证明。 梯度由三个子项组成：

$$\nabla_\theta \mathcal{E}(\theta,\mu^k) = \nabla_\theta \mathcal{O}(\theta) + \nabla_\theta \bar{\mathcal{P}}_1(\theta,\mu^k) + \nabla_\theta \bar{\mathcal{P}}_2(\theta,\mu^k)$$
$$\bar{\mathcal{P}}_1(\theta,\mu^k) \triangleq \mu^k \sum_{ijkl}^{I} (T_1^l - T_0^l)\mathcal{P}_{ijkl}$$
$$\bar{\mathcal{P}}_2(\theta,\mu^k) \triangleq \mu^k \sum_{ijkl}^{II} (T_1^l - T_0^l)\mathcal{P}_{ijkl}.$$

这里我们用 $\sum_{ijkl}^{I}$ 表示对满足方程（$\mathcal{P}_{ijkl}$ 其中方程（14）成立的项求和，并用 $\sum_{ijkl}^{II}$ 表示对方程（14）不成立但方程（15）成立的项求和。根据引理 X.5，前两项满足以下结论：

$$\left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \mathcal{O}(\theta)\right\rangle < -\frac{\epsilon_8}{2} \quad \left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \bar{\mathcal{P}}_2(\theta,\mu^k)\right\rangle < 0.$$

只要 k足够大，第三项就可以任意小，因为：

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \bar{\mathcal{P}}_1(\theta,\mu^k)\right\rangle\right| \\ \leq &\mu^k \sum_{ijkl}^{I} (T_1^l - T_0^l)\left|\left\langle D_\theta^3, \frac{\partial \mathcal{P}(x)}{\partial x}\Big|_{\epsilon_{12}/2} \nabla_\theta \bar{\text{dist}}\right\rangle\right| \\ \leq &\mu^k T \left|\frac{\partial \mathcal{P}(x)}{\partial x}\Big|_{\epsilon_{12}/2}\right| \left|\left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \bar{\text{dist}}\right\rangle\right|.\end{aligned}$$

¯这里我们使用了假设IV.1 ，并将 ∇_θdist 表示为轨迹上 $\left|\left\langle D_\theta^3, \nabla_\theta \bar{}\text{dist}\right\rangle\right|$ 取得最大值的位置。由于$\{\mu^k\}$ 是一个零序列，第三项可以任意小，因此引理得证。 □

现在我们可以证明主要结果：

定理证明*V.3*。 反设一阶最优性条件不成立，即引理 X.6 的条件成立，这表明 $\|\nabla_\theta \mathcal{E}(\theta^k, \mu^k)\|_\infty$ 与零之间存在正距离。但这与以下事实矛盾：$\{\epsilon_d^k\}$ 是零测集。 □