arXiv:2302.01146v1 [math.AP] 2 Feb 2023

含外部粒子的不可压缩欧拉-泊松方程的旋转解

Diego Alonso-Orán Bernhard Kepka Juan J.L. Velázquez

2023年2月3日

摘要

我们研究一个二维不可压缩流体体及其自诱导相互作用。该流体体受到一个质量较小的外部粒子的扰动。整个构型围绕共同质心匀速旋转。我们采用微扰方法构造在旋转坐标系中静止的解。此外，我们还研究流体的一大类内部运动。角速度与外部粒子的位置相关，并选取为满足非共振条件。

关键词。欧拉-泊松方程；外部粒子；自由边界问题。

数学主题分类： 35Q35,35Q31, 76B07.

致谢： D. Alonso-Orán 获得西班牙经济与竞争力部通过胡安·德拉谢尔瓦奖学金 FJC2020-046032-I 提供的资助。B. Kepka 和 J. J. L. Velázquez 衷心感谢德国研究联合会（DFG）通过协作研究中心“新兴效应的数学”（CRC 1060，项目编号 211504053）提供的支持。B. Kepka 获得波恩豪斯多夫数学中心国际数学研究生院的资助（EXC 2047/1，项目编号 390685813）。J. J. L. Velázquez 获得 DFG 根据德国卓越战略提供的资助（EXC2047/1-390685813）。

目录

1 引言与已有结果 21.1 问题设定.22 问题的重新表述与主要结果 52.1 记号.82.2 主要结果与证明策略.93 预备结果 114 主问题的弗雷歇导数 144.1 流函数的弗雷歇导数.144.2 相互作用势的弗雷歇导数.154.3 完整问题的弗雷歇导数.185 线性化算子的可逆性 196 定理的证明 2.1及其推论 27参考文献 29

1 引言与前人研究成果

旋转与自引力共同作用下流体物体的形状，是一个经典研究领域，针对不同的流体模型已得到广泛研究。特别是，关于该领域历史发展的详细介绍可见 [9] 关于（三维）不可压缩欧拉方程。Lichtenstein 建立了进一步的结果 [25]。关于可压缩流体的情形，请参阅相关研究 [5, 10, 18, 21, 22,23, 24, 26, 27, 28, 33, 34] 及其中的参考文献。动理学模型，即 Vlasov-Poisson 方程，也得到了研究，参见例如 [13, 23]。事实上，Vlasov-Poisson 方程的稳态与可压缩欧拉方程之间存在联系，概述这些问题中所用变分方法的相关内容可参见 [30] 及其中的参考文献。

本文研究由欧拉方程描述的二维、自相互作用的不可压缩流体体。此外，我们还研究流体受到某个外部粒子扰动时，其几何形状发生变形的问题。假设流体体与外部粒子绕其质心旋转。这个问题（加入一个小粒子）可视为对旋转解稳定性的检验，也可作为潮汐的简单模型。此外，与 [9] 中回顾的结果（不包括黎曼研究的图形）不同，我们构造了欧拉-泊松方程的解，使得流体速度在任何坐标系中通常都不为零。

本文研究一类相互作用势，其中包括经典的（牛顿）引力。这类引力可解释为星系的极度简化模型。然而，这并不对应于将三维问题限制在平面几何中的情形。原因在于，压力必然只能作用于同时包含流体体和外部粒子的平面内。尽管如此，在 Vlasov-Poisson 方程中，若假设粒子的速度仅位于与流体相同的平面内，则可以考虑这样的模型。在这种情况下，描述压力的张量具有各向异性；它在垂直于平面的方向上产生的力为零，但在水平方向上并非如此，参见 [29]。

由于我们考虑的是二维流体体，因此可以运用两种无法用于三维问题的工具。具体而言，我们使用共形映射以及 Grad-Shafranov 方法 [16, 32]。

除了本文所处理的问题，过去几十年来，流体力学中还研究了各种不同的自由边界问题。例如，[2, 3, 4] 研究了有重力或无重力时射流与空腔的问题，而重力水波理论则在多项工作中得到发展，参见 [20, 35, 36]。以往的自由边界问题与本文所研究问题之间的一个重要区别是，相互作用力（例如引力）来自流体本身。与本文所考虑的问题有些相似的另一类问题，涉及旋转涡斑理论。Burbea [6] 给出了首个严格结果，他运用经典的 Crandall-Rabinowitch 分岔方法构造了接近圆盘的旋转涡斑。关于旋转涡斑的更深入研究，参见 [17, 19] 及其中的参考文献。

1.1 问题的设定

我们研究密度为 $\rho = \mathbb{1}_E$ 的平面不可压流体体。这里，$\mathbb{1}_E$ 表示集合 E 的示性函数。流体体 $E(t) \subset \mathbb{R}^2$ 的形状具有光滑边界，且接近一个圆盘；其精确定义见下文。我们还加入了一个粒子 $X = X(t) \in \mathbb{R}^2$，其质量 m 很小。不过，我们只考虑粒子与流体体之间距离为正的情形。于是，流体体的速度场 v

满足以下欧拉-泊松系统的自由边界问题

$$\begin{cases} \partial_t v + (v\cdot\nabla)v = -\nabla p - \nabla U_{E(t)} - m\nabla U_{X(t)} & \text{in } E(t), \\ \nabla\cdot v = 0 & \text{in } E(t), \\ n\cdot v = V_N & \text{on } \partial E(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， V_N 是界面 $\partial E(t)$ 的法向速度， n 是 $\partial E(t)$ 的外单位法向量。这里， $U_{E(t)}$ 和 $U_{X(t)}$ 是引力势，精确定义见下文。此外， $p = p(t,\ x)$ 是标量压力；当 $x \in E(t)$ 时，它表示流体体的内部压力；当 $x \in \mathbb{R}^2\backslash E(t)$ 时，它表示周围空间的外部压力。我们假设外部压力在 $\mathbb{R}^2\backslash E(t)$ 上为常数，并且不失一般性，可令该常数为零。这反映了该构型处于均匀介质的包围之中。因此，在将液体与外部空间分隔开的界面上，压力连续性意味着

$$p = 0 \quad \text{on } \partial E(t). \tag{1.2}$$

由于作用于由流体体和外部粒子构成的构型上的外力为零，它们的共同质心以恒定速度运动。因此，不失一般性，我们可以通过变换坐标系，假设质心位于原点，即

$$\int_{E(t)} x\,dx + mX(t) = 0. \tag{1.3}$$

如引言中所述，我们研究势 $U_{E(t)}$ 和 $U_{X(t)}$ 在（1.1）中的两种情况。

(A) 我们考虑一族幂律势，更具体地说，对于 $\nu \in (0,1]$，我们定义

$$U_{X(t)}(x) := -\frac{1}{|x - X(t)|^\nu}, \quad U_{E(t)}(x) := -\int_{E(t)} \frac{dy}{|x-y|^\nu}. \tag{1.4}$$

(B) 我们考虑由（二维）拉普拉斯算子的基本解给出的势，即

$$U_{X(t)}(x) := \ln|x - X(t)|, \quad U_{E(t)}(x) := \int_{E(t)} \ln|x-y|\,dy. \tag{1.5}$$

请注意，在两种情况下，符号的选取均使其产生吸引力。此外，情形（A）中 $\nu = 1$ 可解释为牛顿引力相互作用。

这里需要指出，在情形（A）中， $\nu = 1$ 定义（1.1）的解时需要格外小心，因为梯度 $\nabla U_{E(t)}$ 由于奇点的出现而未定义。不过，这并不会造成问题，因为压力梯度 ∇p 也有一个符号相反的类似奇点，恰好抵消了 $\nabla U_{E(t)}$的奇点。为避免这些奇异项，方便起见，我们从问题（1.1）中减去静水压力，将其改写。为此，我们定义 $p = P - U_{E(t)} - mU_{X(t)}$ 其中 P是非静水压力。于是，方程组（1.1）变为

$$\begin{cases} \partial_t v + (v\cdot\nabla)v = -\nabla P & \text{in } E(t), \\ \nabla\cdot v = 0 & \text{in } E(t), \\ n\cdot v = V_N & \text{on } \partial E(t), \\ P = U_{E(t)} + mU_{X(t)} & \text{on } \partial E(t), \end{cases} \tag{1.6}$$

其中最后一个方程由（1.2）得出。现在，这些方程不含奇异项。

本文研究的（1.6）的解都是经典解，即 $v:\ E(t)\to\mathbb{R}^2$ 和$\partial E(t)$均为正则函数。然而，函数 $P:\ E(t)\to\mathbb{R}$ 通常仅连续，即在情形（A）中，梯度 ∇P 在 $\partial E(t)$ 上未定义。正如我们将在下一节看到的，压力连续性条件以及（1.6）中的最后一个方程给出了一个自由边界方程。

此外，本文构造的解是带有 $m=0$ 的定常方程解的扰动，也就是说

$$\begin{cases}(v\cdot\nabla)v=-\nabla P & \text{in } E,\\ \nabla\cdot v=0 & \text{in } E,\\ n\cdot v=0 & \text{on } \partial E\\ P=U_E & \text{on } \partial E.\end{cases}\tag{1.7}$$

我们考虑的一个特解是单位圆盘 $E=\mathbb{D}$，以及与之对应的速度场 v 和非静水压力 P。

此外，我们假设受扰动的流体体和求解（1.1）的外部粒子绕其质心以旋转角速度 $\Omega_0>0$ 旋转。此外，我们寻找在角速度为 Ω_0,的旋转参考系中定常的构型，见图 1。变换到这样的旋转坐标系后，我们得到方程

$$\begin{cases}(v\cdot\nabla)v+2\Omega_0 Jv-\Omega_0^2x=-\nabla P & \text{in } E\\ \nabla\cdot v=0 & \text{in } E\\ n\cdot v=0 & \text{on } \partial E\\ P=U_E+mU_X & \text{on } \partial E\\ \Omega_0^2X=\nabla U_E(X)\\ |E|=\pi\\ \int_E x\,dx+mX=0.\end{cases}\tag{1.8}$$

在方程（1.8）中，我们使用了矩阵 J 定义如下

$$J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

它编码了二维情形下向量积的作用。

请注意，在这一设定中，物体的形状 E、速度场 v 和粒子 X 的位置都不随时间变化。此外，我们构造了解 $v\neq 0$，它们可以解释为由外部粒子的引力以及未受扰动流体的速度所引发的某种潮汐波。

我们简要评论一下方程组（1.8）。首先注意，项 $2\Omega_0 Jv$和 $-\Omega_0^2x$分别表示旋转参考系中出现的科里奥利力和离心力。（1.8）中的第三个方程保证自由边界静止，即流体体内部的流体不会穿过边界。如上所述，假设流体体外部的压力为常数。方程$\Omega_0^2X=\nabla U_E(X)$ 由牛顿定律得出，并保证外部粒子处于静止状态。注意，现在即使在情形（A）中，$\nabla U_E(X)$ 也定义良好，因为我们只考虑X 与 E相分离的情形。作用于 X 上的离心力与流体体的引力相平衡。此外，为明确起见，我们假设流体的总质量为$\pi=|\mathbb{D}|$。（1.8）中的最后一个方程保证质心位于原点。

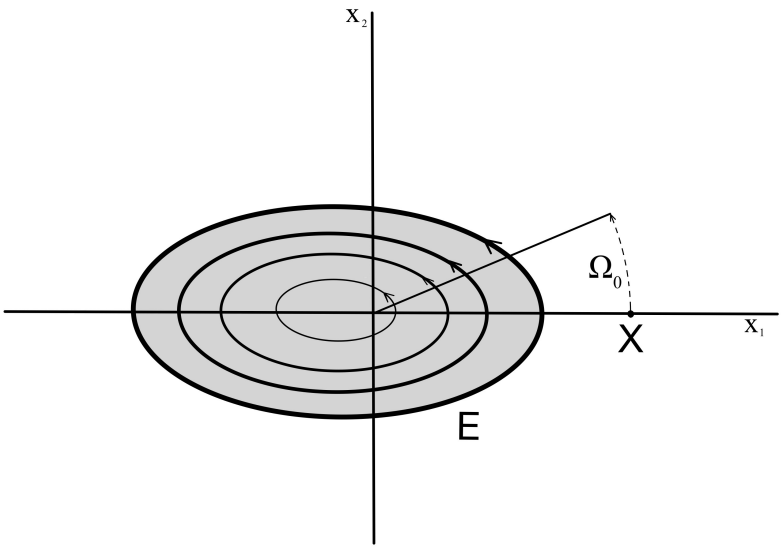


图 1：流体体 E 与外部粒子 X的构型。二者以角速度 Ω_0绕共同质心（位于原点）旋转。

最后还要提到，方程（1.8）在绕原点旋转时保持不变。因此，不失一般性，我们可以假设粒子 $X=(a,0)$ 位于 x_1 轴上。特别地，对（1.8）的一个解经旋转后可得到一族解。

本文利用赫尔德空间中的隐函数定理，构造了方程（1.8）的解，该解是对方程（1.7）的解进行 $E=\mathbb{D}$ 扰动后得到的。我们要求 Ω_0 满足非共振条件，并要求满足方程（1.7）的未扰动速度场满足非退化条件，详见定理 2.1 和推论2.2。

本文的结构安排如下。第 2 节利用 Grad-Shafranov 方程、伯努利方程和共形映射重述问题，以导出一个更便于数学分析的约化方程组。我们利用隐函数定理求解这一新方程组。为此，第 3 节给出了一些预备结果，包括共形映射性质、椭圆方程的估计，以及引力势的适当表示。第 4 节证明约化方程组关于问题未知量的弗雷歇可微性。此外，第 5 节证明弗雷歇导数在未扰动解处可逆。最后，第6节给出主要结果的证明。

2 问题的重新表述与主要结果

在本节中，我们将问题（1.8）化为一组方程，并在论文的主体部分对其进行研究。为此，我们特别采用共形映射以及 Grad-Shafranov 方法。

共形映射

我们使用共形映射，即双射解析函数，来参数化流体区域。回顾一下，根据黎曼映射定理，对于任意单连通域$E\subset\mathbb{C}$，都可以找到一个共形映射 $f:\mathbb{D}\to E$。这里，我们通过 $z=x_1+ix_2$ 将 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 等同起来。对于光滑区域，该映射可保角延拓至 $\mathbb{D}\to E$。

在我们的研究中，我们考虑形式为 $f_h:\mathbb{D}\to\mathbb{R}^2$, $f_h(z)=z+h(z)$ 的共形映射，其中 h 足够小，使得该区域接近圆盘。值得一提的是，在满足某个

关于某个任意解析函数的一般小量条件 h： $\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ 映射 f_h 是保角的，参见引理3.1。我们将相应的区域记为 $E_h=f_h(\mathbb{D})$，以强调其对 h的依赖。因此，我们使用记号 $U_h=U_{E_h}$。此外，我们用f_h' 表示复导数，即将 f_h 理解为映射 $\mathbb{D}\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$。

我们还引入所谓的布拉施克因子，参见 [31], 定义如下

$$b_{c,d}(z)=d\frac{z-c}{1-\bar{c}z},\quad c\in\mathbb{D},d\in\mathbb{C},|d|=1. \tag{2.1}$$

这些因子是唯一的保角映射 $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$。相应地选取 c， d 即可通过将 f_h 替换为 $f_h\circ b_{c,\ d}$，使 $h(0)=0$ 且 $h'(0)\in\mathbb{R}$。由此可唯一确定保角映射 f_h，进而也唯一确定 h。

Grad-Shafranov 方法

为了构造满足 (1.8) 的速度场 v，我们采用 Grad-Shafranov 方法。为方便起见，下面回顾该方法的思路。记 $\omega=\nabla\times v$为速度场 v的涡量。在这里，对于向量积，我们将速度场 $v=(v_1,v_2)$ 与 $(v_1,v_2,0)$ 等同起来。此外，我们使用记号 $\Omega=(0,0,\Omega_0)$。因此，涡量是一个具有形式 $\omega=(0,0,\omega_3)$ 的向量场。我们稍微滥用记号，用 ω同时表示该向量场及其唯一的非零分量 ω_3。

应用向量恒等式 $-\omega Jv=v\times\omega=-(v\cdot\nabla)v+\frac{1}{2}\nabla(|v|^2)$ 可推知,- 式（1.8）中的前三个方程可以写成

$$\begin{cases}-(\omega+2\Omega_0)Jv=v\times(\omega+2\Omega)=\nabla H, & \text{in } E_h\\ \nabla\cdot v=0, & \text{in } E_h\\ n_h\cdot v=0, & \text{on } \partial E_h.\end{cases} \tag{2.2}$$

这里， H 称为伯努利压头，其定义为

$$H:=P+\frac{1}{2}|v|^2-\frac{\Omega_0^2}{2}|x|^2.$$

项 $2\Omega_0$ 可以解释为速度场 $\Omega\times x=\Omega_0 Jx$ 的涡量，它是旋转参考系中科里奥利力作用的结果。对式（ $\nabla\times$ 2.2）中的第一个方程应用算子 $\nabla\cdot v=\nabla\cdot\omega=0$，可得

$$(v\cdot\nabla)(\omega+2\Omega)=0.$$

需要指出的是，这个恒等式一般仅在二维情形下成立，因此 Grad-Shafranov 方法仅适用于这类情形。由上述恒等式可推得 $\omega+2\Omega_0$，因此 ω沿着 v的流线（特征线）为常数。

Grad-Shafranov 方法中的主要对象是流函数 $\psi:E_h\to\mathbb{R}$，它满足 $v=\nabla^\perp\psi$: $=J\nabla\psi=(-\partial_{x_2}\psi,\partial_{x_1}\psi)$。值得一提的是，一般而言，在二维情况下， ψ 的存在性由 v 上的无散条件以及 E_h 的拓扑性质保证。这里， E_h 是单连通的。

现在，有了流函数，我们可以写出 $\omega=\Delta\psi$。由于 ψ 沿着 $v=J\nabla\psi$的特征线也保持常数，因此可以推断存在函数 G： $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得 $\Delta\psi=G(\psi)$。这里需要指出，一般只有在 $\nabla\psi\neq0$时，才能局部地推断出 G 的存在。此外，函数 G 可能是多值的；尽管这种情况很有趣，但本文不予讨论。另外，我们要求 $n_h\cdot v=0$ 在∂E_h上成立，因此

$$0=n_h\cdot J\nabla\psi=\tau_h\cdot\nabla\psi,$$

其中 τ_h 是 ∂E_h上的正向切向量。沿边界积分可得，对于 $x \in \partial E_h$，有 $\psi(x) = c_0$，其中 $c_0 \in \mathbb{R}$为某个常数。注意，势 ψ 只确定到一个常数，因此我们可以在必要时通过调整函数 G 来选取 $c_0 = 0$。因此，流函数满足方程

$$\begin{cases} \Delta\psi = G(\psi) & \text{in } E_h, \\ \psi = 0 & \text{on } \partial E_h, \end{cases} \tag{2.3}$$

在 Grad-Shafranov 方法中，上述推理的方向恰好相反：我们给定某个（足够正则的）函数 G，并通过求解方程（2.3）来构造流函数（从而也构造速度场）。

注意，$\psi\colon E_h \to \mathbb{R}$ 是 h的函数，因此有时我们写作 ψ_h，以强调其对 h的依赖。还要指出的是，通常只需假设 G 单调不减，即可保证方程（2.3）解的存在唯一性，参见引理 3.4。

现在，我们利用共形映射将方程（2.3）化到区域 $\mathbb{D}$上。令 $\phi_h := \psi_h \circ f_h$，它现在定义在圆盘 $\phi_h\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$上。相应的方程为

$$\begin{cases} \Delta\phi_h = |f_h'|^2 G(\phi_h) & \text{in } \mathbb{D}, \\ \phi_h = 0 & \text{on } \partial\mathbb{D}. \end{cases} \tag{2.4}$$

自由边界方程

确定自由边界的方程可由以下事实推导得出：非静水压力 P 沿自由边界连续。利用流函数 $v = \nabla^\perp \psi_h$，可写为

$$v \times (\omega + 2\Omega) = -(G(\psi_h) + 2\Omega_0) J\nabla^\perp \psi_h = (G(\psi_h) + 2\Omega_0)\nabla\psi_h, \quad \text{in } E_h.$$

我们得出

$$v \times (\omega + 2\Omega) = \nabla\left[F(\psi_h)\right], \quad F(\psi_h)\,|_{\partial E_h} = 0,$$

其中 $F' = G + 2\Omega_0$ 是满足 $F(0) = 0$的一个原函数。因此，为了确保方程（2.2）中的第一个等式成立，非静水压力（相差一个常数 λ）由下式给出：

$$P = F(\psi_h) - \frac{1}{2}|\nabla\psi_h|^2 + \frac{\Omega_0^2}{2}|x|^2 + \lambda \quad \text{in } E_h. \tag{2.5}$$

沿自由边界，P连续这一条件结合 $P = U_h + mU_X$ 在∂E_h 上以及 $F(\psi_h)\,|_{\partial E_h} = 0$，可得方程

$$\frac{1}{2}|\nabla\psi_h|^2 - \frac{\Omega_0^2}{2}|x|^2 + U_h + mU_X = \lambda \quad \text{on } \partial E_h. \tag{2.6}$$

在边界处的取值 $\partial E_h = f_h(\partial\mathbb{D})$ 可利用保角映射 f_h来计算。现在总结本文旨在求解的约化方程组

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{|\nabla\phi_h|^2}{|f_h'|^2} - \dfrac{\Omega_0^2}{2}|f_h|^2 + U_h \circ f_h + mU_X \circ f_h = \lambda & \text{on } \partial\mathbb{D}, \\ \Delta\phi_h = |f_h'|^2 G(\phi_h) & \text{in } \mathbb{D}, \\ \phi_h = 0 & \text{on } \partial\mathbb{D}. \\ \Omega_0^2 a = \partial_{x_1} U_h(X) & \\ |E_h| = \pi. & \end{cases} \tag{2.7}$$

回忆一下，粒子的位置选为 $X=(a,0)$。未知三元组为 (h,a,λ)。正如我们将看到的，参见推论 2.2，本文构造的方程组 (2.7) 的解也给出了方程 (1.8) 的解。需要指出的是，方程组 (2.7) 的第四个方程是粒子 x_1的牛顿方程的 X-分量，另见方程组 (1.8) 的第五个方程。正如我们将在推论 2.2中看到的，另一个分量可由区域 E 关于 x_1-轴的对称性推出。

$m=0$的解

在没有外部粒子的情况下，即 $m=0$，我们假设流体体呈圆盘形状 $\mathbb{D}$。此外，我们考虑在 $\mathbb{D}$ 上的速度场，其流函数ϕ_0 满足

$$\begin{cases}\Delta\phi_0 = G(\phi_0) & \text{in } \mathbb{D},\\ \phi_0 = 0 & \text{on } \partial\mathbb{D}.\end{cases} \tag{2.8}$$

注意，这与 2.4 对于 $h=0$一致。注意，由于旋转不变性$\phi_0=\phi_0(|x|)$，该方程可化简为常微分方程

$$\frac{1}{r}\left(r\phi_0'\right)' = G(\phi_0(r)), \quad \phi_0(1)=0.$$

该常微分方程还需满足条件：$\lim_{r\to 0}\phi_0(r)$ 存在。因此，速度场变为 $v(x) = \frac{\phi_0'(|x|)}{|x|}Jx$。它描述了一种非匀速旋转，其角速度取决于到中心的距离。由于速度场具有旋转对称性，非旋转坐标系中的速度由 $(\frac{\phi_0'(|x|)}{|x|}+\Omega_0)Jx$ 给出。此外，注意函数 ϕ_0可以延拓到 $r>1$。例如，在边界 ∂E_h 上计算 ϕ_0 时就需要这样做，因为该边界靠近 $\partial\mathbb{D}$。

未受扰动粒子的位置选为 $X_0=(a_0,0)$ 的形式。由于我们只考虑流体体与外部粒子严格分离的情形，因此不妨假设 $a_0\geq 2$。于是，当 h 足够小时， E_h 不包含 $X\approx X_0$。粒子的牛顿方程要求

$$\Omega_0^2 X_0 = \nabla U_0(X_0).$$

引理 3.5 和 3.6 给出了情形（A）和情形（B）下圆盘的势 U_0 的更多信息。对于 $a_0>1$，我们有 $U_0'(a_0)>0$，并且 $U_0'(a_0)/a_0\to 0$，因为 $a_0\to\infty$。此外， $a_0\mapsto U_0'(a_0)/a_0$ 在 $a_0>1$ 上严格递减。因此，$\Omega_0\in(0,\sqrt{U_0'(1)}]$ 与 $a_0\geq 1$ 之间存在一一对应关系，具体为

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{U_0'(a_0)}{a_0}}. \tag{2.9}$$

总而言之，这定义了一个映射 $\Omega_0\mapsto a_0(\Omega_0)$。最后，式（2.6）中的常数为 $\lambda_0 = \frac{1}{2}\phi_0'(1)^2 - \frac{1}{2}\Omega_0^2 + U_0(1)$。

2.1 符号约定

在全文中，我们将使用以下符号约定。

- 我们用 $\mathbb{D}$ 表示边界为 $\partial\mathbb{D}$ 的单位圆盘，并用 $\mathbb{T}=[0,2\pi]$ 表示端点识别的 2π-周期环面。

- 函数 $u:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 或 $u:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ 的 Hölder 半范数定义为

$$[u]_{k,\alpha}=\sup_{x_1\neq x_2}\frac{|u^{(k)}(x_2)-u^{(k)}(x_1)|}{|x_2-x_1|^{\alpha}},\quad \alpha\in(0,1),$$
$$[u]_{k,0}=\left\|u^{(k)}\right\|_{\infty},\quad \alpha=0.$$

- 我们将 $H^{k,\alpha}:=H^{k,\alpha}(\mathbb{D}):=H(\mathbb{D})\cap C^{k,\alpha}(\mathbb{D})$ 简记为，其中 $H(\mathbb{D})$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数空间，且 $k\in\mathbb{N}_0,\alpha\in(0,1)$。我们为其配备标准 Hölder 范数 $\|\cdot\|_{k,\alpha}$。
- 我们用 $H^{k,\alpha}_0\subset H^{k,\alpha}$ 表示解析函数 h 构成的子空间，其中满足 $h(0)=0$ 且 $h'(0)\in\mathbb{R}$。
- 此外，函数 $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 的傅里叶系数为

$$\hat{g}_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)e^{in\varphi}\,d\varphi.$$

  回顾一下，由于 g 是实值函数，因此 $\hat{g}_n=\hat{g}_{-n}$。
- 我们用 $C^{k,\alpha}_0(\mathbb{T})\subset C^{k,\alpha}(\mathbb{T})$ 表示那些零均值函数 g，即 $\hat{g}_0=0$。
- 我们用 $B_r=B_r(0)\subset H^{k,\alpha}_0$ 表示以零为中心、半径为 r 的球。
- 我们用 C 表示一个正的通用常数，它仅依赖于固定参数，包括 Ω_0 以及函数 G 在（2.7）中的范数。还需注意，该常数可能因行而异。

2.2 主要结果及证明策略

为了构造所需的解，我们将使用隐函数定理，参见引理3.3。为此，我们先引入以下函数空间

$$\mathbb{X}^{k+2,\alpha}:=H^{k+2,\alpha}_0(\mathbb{D})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad \mathbb{Z}^{k+1,\alpha}:=C^{k+1,\alpha}(\mathbb{T})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}.\tag{2.10}$$

我们定义一个与方程组（2.7）相关的函数。定义映射 $\mathbb{F}:U\times V\to\mathbb{Z}^{k+1,\alpha}$，其中 $U\subset H^{k+2,\alpha}_0(\mathbb{D})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $V\subset\mathbb{R}$，且 $X=(a,0)$,

$$\mathbb{F}(h,a,\lambda,m)=\begin{pmatrix}\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{|\nabla\phi_h|^2}{|f_h'|^2}-\dfrac{\Omega_0^2}{2}|f_h|^2+U_h\circ f_h+mU_X\circ f_h-\lambda\right]\Big|_{z=e^{i\varphi}}\\ \Omega_0^2a-\partial_{x_1}U_h(X)\\ |f_h(\mathbb{D})|-\pi\end{pmatrix}\tag{2.11}$$

子集 U 是 $(0,a_0,\lambda_0)$ 的一个充分小的邻域。特别地，它确保 h 定义了一个保角映射 $f_h(z)=z+h(z)$，见引理 3.1。

我们的目标是通过隐函数定理求解方程 $\mathbb{F}(h,a,\lambda,m)=0$。为此，我们研究点 $(0,a_0,\lambda_0,0)$处的弗雷歇导数。我们将对 $\mathbb{F}$ 的第一分量进行傅里叶分解，该分量是环面 $\mathbb{T}$上的函数。正如我们将看到的，参见引理5.7，相应的线性算子可以对角化，且傅里叶乘子具有如下形式

$$\omega_n=-\frac{1}{2}\Omega_0^2-\frac{1}{2}\phi_0'(1)^2(|n|+1)+\phi_0'(1)A'_{|n|}(1)(|n|+1)+c_{|n|}.\tag{2.12}$$

这些系数 ω_n 在主要结果中关于Ω_0 的非共振条件中是显式的，参见定理 2.1。在 ω_n 的定义中，函数 ϕ_0 是

$m=0$。这些系数 c_n 通过相互作用势 $h\mapsto(U_h\circ f_h)(e^{i\varphi})$引入。在情形（A）中，它们由下式给出（注意我们再次将 $\mathbb{R}^2\backsimeq\mathbb{C}$）

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}}\left(\nu\frac{1-y^{n+1}}{1-y}-2(n+1)y^n\right)\frac{dy}{|1-y|^{\nu}},\tag{2.13}$$

而在情形（B）中，通过

$$c_n=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) & n\geq 1,\\ \frac{\pi}{2} & n=0.\end{cases}\tag{2.14}$$

注意，（2.13）中的积分定义了一个实数。

最后，数值 $A_n'(1)$ 通过函数 A_n 计算得出：$(0,\ 1)\to\mathbb{R}$ 满足常微分方程

$$\frac{1}{r}(rA_n')'-\frac{n^2}{r^2}A_n-G'(\phi_0(r))A_n=r^{|n|}G(\phi_0(r)),\quad A_n(1)=0.\tag{2.15}$$

它们出现在流函数的弗雷歇导数中 $h\mapsto\phi_h$，参见第 5 节。

本文的主要结果如下。

定理 2.1。设 $k\in\mathbb{N}_0$，$\alpha\in(0,\ 1)$ 且 $a_0\geq 2$。假设 $G\in C^{k+3}(\mathbb{R};\ \mathbb{R})$ 为非递减函数。令 $\Omega_0\geq 0$ 与 $X_0=(a_0(\Omega_0),\ 0)$ 相关，如 (2.9) 所述，并令非共振条件

$$\forall n\in\mathbb{N}:\omega_n\neq 0\tag{2.16}$$

满足 ω_n 在(2.12)中给出的条件。此外，我们对未扰动流函数ϕ_0 作如下假设

$$\phi_0'(1)\neq 0.\tag{2.17}$$

于是，存在 $\delta>0,\varepsilon>0$，使得对于任意 $m\in[0,\delta)$，方程 $(h,a,\lambda)\in_{\mathbb{X}^{k+2,\alpha}}\mathbb{F}(h,a,\lambda,m)=0$ 都存在唯一解 $(h,a,\lambda)\in_{\mathbb{X}^{k+2}}$，满足

$$\|h\|_{k+2,\alpha}+|a-a_0|+|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon.$$

此外，$m\mapsto(h,a,\lambda)(m)$ 的依赖关系是连续的。

由此可推论，$\mathbb{F}(h,a,\lambda,m)=0$的一个解给出了原问题的一个解（1.8）。

推论 2.2。在定理2.1的假设下，定理 $E_h=f_h(\mathbb{D})$ 中的区域 $E_h=f_h(\mathbb{D})$ 关于 x_1-轴对称。最后，相应的速度场 $v=\nabla^{\perp}\psi_h$ 与粒子的位置 $X=(a,0)$ 以及非静水压力 P共同构成(1.8)的一个解。

注 2.3。我们来讨论一下非共振条件（2.16）。

（i）该条件确保线性化算子可逆，从而可以应用隐函数定理。若（2.16）不成立，则可能会分岔出其他形状。

(ii) 请注意，条件 (2.16) 仅在 $n\in\mathbb{N}$ 时才需要，因为 ω_n 仅取决于 $|n|$。此外，正如我们将在引理 5.3 和引理 5.5中看到的，(2.16) 右侧的首阶项为 $-\phi_0'(1)^2(|n|+1)$，而其他项的阶至多为 $\mathcal{O}(\ln n)$，当 $n\to\infty$ 时。特别地，当 2.16中的条件在 n充分大时自动成立。因此，可以通过数值方法验证该条件。

(iii) 在特殊情况下，对于 $m=0$，若流体在非旋转坐标系中没有内部运动，则有 $v(x)=-2\Omega_0 Jx$，因此 $\phi_0(x)=-\Omega_0|x|^2/2$。这对应于取 $G=-2\Omega_0$。于是，我们可以很容易地验证，方程 (2.15) 的解具有以下形式

$$A_n(r)=-2\Omega_0\frac{r^n(r^2-1)}{4n+4},\quad A_n'(1)=-\frac{\Omega_0}{n+1}.$$

因此，条件（2.16）可化简为

$$\omega_n=-\frac{|n|}{2}\Omega_0^2+c_{|n|}\neq 0.$$

注 2.4. 值得一提的是，要证明弗雷歇导数的可逆性并应用隐函数定理，还需要定理 2.1 中的假设（2.17）。该条件意味着函数 ϕ_0 在边界上没有局部极值。对这类极值进行扰动时，通常会产生鞍点。因此，涡旋便会出现。

注 2.5. 定理 2.1 中我们假设 $m\geq 0$，因为从物理角度来看，这是最自然的设定。不过，定理 2.1 的证明对以下情形 $m\in$ （$-\delta$，δ）同样成立。

注 2.6. 本文仅研究情形（A）和情形（B）中定义的相互作用势。研究更一般的相互作用需要进一步修改。特别是，需要更深入地理解关于环面上伪微分算子的结果，例如引理5.8 。

3 预备结果

我们在此汇集一些将在后续各节中用到的辅助结果。首先介绍复分析中一个关于解析函数的著名结果。

引理 3.1. 考虑解析函数 $f_h(z)=z+h(z)$，其中 $\|h\|_{C^1(\mathbb{D})}<1/\sqrt{2}$。那么，$f_h:\mathbb{D}\to f_h(\mathbb{D})$ 是保角的。

证明。 我们证明 f_h 是单射。定义函数 $\zeta(\varphi)=f_h(e^{i\varphi})$，$\varphi\in\mathbb{T}$。设 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{T}$。不妨设 $|\varphi_1-\varphi_2|\leq\pi$。若 $|\varphi_1-\varphi_2|\geq\pi/2$，则有

$$|\zeta(\varphi_2)-\zeta(\varphi_1)|\geq\left|e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi_1}\right|-2\|h\|_{C(\overline{\mathbb{D}})}=2\left|\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\right|-2\|h\|_{C(\overline{\mathbb{D}})}>0.$$

另一方面，若 $|\varphi_1-\varphi_2|<\pi/2$，则估计得

$$\begin{aligned}|\zeta(\varphi_2)-\zeta(\varphi_1)|&=\left|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}f_h'(e^{i\psi})ie^{i\psi}\,d\psi\right|\geq\left|e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi_1}\right|-|\varphi_2-\varphi_1|\,\|h\|_{C^1(\overline{\mathbb{D}})}\\&=2\left|\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\right|-|\varphi_2-\varphi_1|\,\|h\|_{C^1(\overline{\mathbb{D}})}\geq|\varphi_2-\varphi_1|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\|h\|_{C^1(\overline{\mathbb{D}})}\right).\end{aligned}$$

因此，f_h 在边界上是一一映射。由达布-皮卡定理（参见 [7, 定理 9。16]，f_h 在 $\mathbb{D}$ 上是单射。□

引理 3.2 (法阿·迪布鲁诺公式 [11])。 对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 以及两个函数 $f,g\in C^n(\mathbb{R};\mathbb{R})$，我们有如下公式

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\circ g)(x)=\sum_{\substack{\ell_1,\dots,\ell_n\\1\cdot\ell_1+\cdots+n\cdot\ell_n=n}}n!\left[\frac{d^{\ell_1+\cdots+\ell_n}}{dx^{\ell_1+\cdots+\ell_n}}f\right](g(x))\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\ell_j!\,j!}\frac{d^j}{dx^j}g(x)\right)^{\ell_j}.$$

我们回顾以下版本的隐函数定理。

引理 *3.3*（隐函数定理，[12]）。设 X、Y、Z 为巴拿赫空间，且 $U \subset X$、$V \subset Y$ 分别为 x_0、y_0 的邻域，其中 $\mathbb{F}(x_0, y_0) = 0$。假设 $\mathbb{F}: U \times V \to Z$ 连续，关于 $x \in U$ 连续可微，并且 $D_x\mathbb{F}(x_0, y_0) \in L(X, Z)$ 可逆。那么，存在球 $B_\varepsilon(x_0) \subset U$、$B_\delta(y_0) \subset V$，以及唯一的映射 $\xi: B_\delta(y_0) \to B_\varepsilon(x_0)$，使得对所有 $y \in B_\delta(y_0)$，都有 $\mathbb{F}(\xi(y), y) = 0$。此外，$\xi$ 连续。

这里，我们用 $\mathcal{L}(X, Z)$ 表示从 $X \to Z$ 的有界线性算子空间。此外，$D_x\mathbb{F}(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Z)$ 是关于第一个变量的弗雷歇导数，即有

$$\mathbb{F}(x_0 + \xi, y_0) = \mathbb{F}(x_0, y_0) + D_x\mathbb{F}(x_0, y_0)[\xi] + o(\|\xi\|_X)$$

作为 $\|\xi\|_X \to 0$。

我们还将给出方程（2.4）的存在唯一性结果。这类椭圆方程在 Hölder 空间和索伯列夫空间中都得到了广泛研究，参见例如 [14, 15]。

引理 3.4。设 $h \in B_{1/2} \subset H^{k+2,\,\alpha}_0$ 并假设 $G \in C^{k+3}(\mathbb{R};\ \mathbb{R})$ 为非递减函数。则方程（2.4）存在唯一的解 $\phi_h \in C^{k+2,\,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$。此外，存在一个与 $C > 0$无关的常数 h，使得

$$\|\phi_h\|_{C^{k+2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})} \le C. \tag{3.1}$$

证明。我们用 $\psi_h = \phi_h \circ f_h^{-1}$ 来证明该断言。存在性可由将变分法的标准方法应用于泛函得到

$$\psi \mapsto \int_{E_h} |\nabla \psi|^2 \, dx + \int_{E_h} F(\psi) \, dx,$$

其中 $F' = G$ 是原函数。注意，由于 G 单调不减，F 是凸的。回想 $G \in C^{k+3}(\mathbb{R};\mathbb{R})$，通过自举论证可得正则性。注意，由于$f_h \in H^{k+2,\,\alpha}$，边界 ∂E_h 足够正则。由于 G 单调不减，可利用比较原理证明唯一性。

估计式（3.1）是最大值原理和 Schauder估计的推论。事实上，我们将分两种情形来证明。

情形 1。假设存在 $y_0 \in \mathbb{R}$，使得 $G(y_0) = 0$。由于 G 单调不减，我们可以找到充分大的 $N > 0$，使得 $G(-N) \le 0 \le G(N)$。由比较原理可得 $\mathrm{k}\phi_h\mathrm{k}_\infty \le N$。因此，(2.4) 右端在 h 中一致有界。我们应用索伯列夫空间中的正则性理论，得出 $\phi_h \in W^{2},2$，且其界与 $h \in B_{1/2}$ 无关。因此，由索伯列夫嵌入可得 $\phi_h \in C^\alpha$。此时，(2.4) 右端在 C^α 中一致有界。因此，我们反复应用 Schauder估计即可得到所需结果。

情形 *2*. 如果 G 始终非零，则不失一般性，我们可以假设 $G > 0$。在这种情况下，由$\phi_h \le 0$ 的最大值原理可知。因此，式（2.4）右侧一致有界。现在可以按照情形 1 的方法进行论证。

□

接下来，我们给出 $\mathbb{D}$的未扰动相互作用势公式，即在情形（A）中，$\nu = 1$ 对应的 $m = 0$未扰动解，以及情形（B）。

引理 3.5。在情形 (A) 下，以下公式成立：$\nu = 1$

$$\begin{aligned} U_0(r) &= -\frac{4}{\pi^2} \sum_{k \ge 0} W_{2k}^2 \left(\frac{r}{2k+2} + \frac{r}{2k-1} - \frac{r^{2k}}{2k-1} \right), \quad 0 \le r \le 1, \\ U_0(r) &= -\frac{4}{\pi^2} \sum_{k \ge 0} \frac{W_{2k}^2}{2k+2} \frac{1}{r^{2k+1}}, \quad r \ge 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

这里， $W_\ell = \frac{\pi}{2}\frac{(\ell-1)!!}{\ell!!}$ 是瓦利斯公式，参见 *[1, 公式 6.1。49]*。在情形 (B) 我们有：

$$U_0(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}(1-r^2) & r \le 1, \\ \pi \ln r & r \ge 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

回顾一下，$\lim_{\ell\to\infty}\sqrt{\ell}W_\ell = \sqrt{\pi/2}$。因此，式（3.2）中的级数在临界值 $r=1$ 处也收敛。

证明。为此，我们对 $x = x(r,\theta,\varphi)$、$y = y(s,\theta',\varphi') \in \mathbb{R}^3$ 作多极展开

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x-y|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2+s^2-2rs(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'))}} \\ &= \sum_{\ell\ge 0}\sum_{|m|\le\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(r\wedge s)^\ell}{(r\vee s)^{\ell+1}} Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)Y_{\ell,m}(\theta',\varphi')^*, \end{aligned}$$

其中，球谐函数定义为

$$Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}e^{im\varphi}P_\ell^m(\cos\theta).$$

这里，P_ℓ^m 是缔合勒让德多项式。对于 $\theta = \theta' = \pi/2$，有

$$U_0(r) = -\sum_{\ell\ge 0}\frac{4\pi c_\ell^2}{2\ell+1}\int_0^1 \frac{(r\wedge s)^\ell s\,ds}{(r\vee s)^{\ell+1}}, \quad c_\ell := Y_{\ell 0}(\pi/2,0) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(0).$$

计算可得

$$P_\ell(0) = \begin{cases} (-1)^{\ell/2}\frac{(\ell-1)!!}{\ell!!} & \ell \text{ even}, \\ 0 & \ell \text{ odd}. \end{cases}$$

将级数的系数用瓦利斯公式改写，并取 $\ell = 2k$，即可得到式（3.2）中的两个公式。式（3.3）可通过求解泊松方程 $\Delta U_0 = \mathbb{1}_{\mathbb{D}}$ 得到。

□

下面的引理给出了所有所考虑情形下未扰动势 U_0 的信息。

引理 3.6。 势 U_0 在情形 (A) 和 (B) 下分别满足

(i) $U_0'(r) > 0$ 当 $r > 1$ 时，

(ii) $U_0''(r) < 0$ 当 $r > 1$ 时，

(iii) $r \mapsto U_0'(r)/r$ 在 $r \ge 1$ 时严格递减，且 $\lim_{r\to\infty} U_0'(r)/r = 0$。

证明。在情形 (A) 中，利用显式公式（以及关于 $r > 1$ 的导数）进行一些计算即可得到这些结论

$$U_0(r) = -\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{s\,ds\,d\varphi}{(r^2+s^2-2rs\cos\varphi)^{\nu/2}},$$

以及积分中 $r \ge s$ 这一事实。对于情形（B），可以使用引理 3.5中的显式解。

□

4 主问题的弗雷歇导数

本节证明函数 $\mathbb{F}$ 的弗雷歇可微性。我们分别考察流函数 ϕ_h 和相互作用势 $U_h \circ f_h$。

4.1 流函数的弗雷歇导数

在本小节中，我们推导函数 $h \mapsto \phi_h$ 的弗雷歇微分。

引理 4.1。 设 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $\alpha \in (0,1)$。存在充分小的 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于 $B_{\varepsilon_0} \subset H^{k+2,\alpha}_0$

$$h \mapsto \phi_h \in C^1(B_{\varepsilon_0}; C^{k+2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})).$$

更准确地说，线性算子 $D_h\phi_h$ 定义为 $g \mapsto D_h\phi_h[g] =: \bar{\phi}$ 其中

$$\begin{cases} \Delta\bar{\phi} = |f_h'|^2 G'(\phi_h)\bar{\phi} + 2\mathrm{Re}\left[(1+h')\overline{g'}\right] G(\phi_h) & \text{in } \mathbb{D}, \\ \bar{\phi} = 0 & \text{on } \partial\mathbb{D}. \end{cases} \tag{4.1}$$

证明。 首先，方程（4.1）有唯一解 $\bar{\phi}$，因为 $G' \geq 0$。我们对拉普拉斯算子应用Schauder估计，并通过选择足够小的 $\|h\|_{k+2,\alpha} \leq \varepsilon_0$，将项 $|f_h'|^2 G'(\phi_h)\,\bar{\phi}$ 吸收到等式左边。这就得到

$$\left\|\bar{\phi}\right\|_{k+2,\alpha} \leq C\,\|g\|_{k+2,\alpha}, \tag{4.2}$$

其中 $C > 0$ 与 $h \in B_{\varepsilon_0} \subset H^{k+2,\alpha}_0$ 无关。 由引理 3.4可知。

此外，将关于 ϕ_{h+g} 和 ϕ_h 的方程相减，可得

$$\left[-\Delta + \int_0^1 G'((1-t)\phi_h + t\phi_{h+g})dt\right](\phi_{h+g} - \phi_h) = -\left[|f_{h+g}'|^2 - |f_h'|^2\right] G(\phi_{h+g}).$$

因此，利用Schauder估计，我们推得

$$\|\phi_{h+g} - \phi_h\|_{k+2,\alpha} \leq C\,\|g\|_{k+2,\alpha}, \tag{4.3}$$

其中 $C > 0$ 与 h无关。

接下来，对于 $D_h\phi_h[g] = \bar{\phi}$，记 $R := \phi_{h+g} - \phi_h - \bar{\phi}$

$$\begin{aligned} \Delta R &= \left(|f_{h+g}'|^2 - |f_h'|^2 - 2\mathrm{Re}\left[(1+h')\overline{g'}\right]\right) G(\phi_h) \\ &\quad + \left(|f_{h+g}'|^2 - |f_h'|^2\right) G'(\phi_h)\bar{\phi} + |f_{h+g}'|^2 \left(G(\phi_{h+g}) - G(\phi_h) - G'(\phi_h)\bar{\phi}\right) \\ &= |g'|^2 G(\phi_h) + \left(|f_{h+g}'|^2 - |f_h'|^2\right) G'(\phi_h)\bar{\phi} + G'(\phi_h)R \\ &\quad + \int_0^1 G''((1-t)\phi_h + t\phi_{h+g})\,dt\,(\phi_{h+g} - \phi_h)^2. \end{aligned}$$

类似地，利用Schauder估计和界（4.2）-（4.3），我们得到（注意$G \in C^{k+3}(\mathbb{R};\mathbb{R})$）

$$\|R\|_{k+2,\alpha} \leq C\,\|g\|^2_{k+2,\alpha}.$$

这里，常数 $C > 0$ 与 h 无关。

最后，我们需要证明 $h \mapsto D_h\phi_h \in \mathcal{L}(H^{k+2,\alpha}_0; C^{k+2,\alpha}(\overline{\mathbb{D}}))$ 是连续的。为此，需要考察 4.1 式中 h_1，$h_2 \in B_{\varepsilon_0}$对应的解之差。应用 Schauder估计，可得如下界

$$\|D_h\phi_{h_2}[g] - D_h\phi_{h_1}[g]\|_{k+2,\alpha} \leq C\,\|g\|_{k+2,\alpha}\left(\|h_1 - h_2\|_{k+2,\alpha} + \|\phi_{h_1} - \phi_{h_2}\|_{k+2,\alpha}\right).$$

这表明了连续性性质。 □

4.2 相互作用势的弗雷歇导数

在此，我们推导映射的弗雷歇导数 $h \mapsto (U_h \circ f_h)(e^{i\varphi})$。我们只详细证明情形（A），其中 $\nu = 1$。其余情形也可用类似方法证明（事实上更简单，因为积分的奇异性较弱）。本节末尾总结情形（B）的相应结果。

首先，采用变量替换会比较方便

$$(U_h \circ f_h)(e^{i\varphi}) = -\int_{\mathbb{D}} \frac{|f_h'(y)|^2}{|f_h(e^{i\varphi}) - f_h(y)|^\nu}\, dy = -\int_{\mathbb{D}} \frac{|f_h'(e^{i\varphi}y)|^2}{|f_h(e^{i\varphi}) - f_h(e^{i\varphi}y)|^\nu}\, dy.$$

于是得到以下结果。

命题 4.2. 设 U_h 如情形 (A) 中所定义，且 $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0,1)$。存在$\varepsilon_0 > 0$ 充分小，使得对于 $h \in B_{\varepsilon_0} \subset H^{k+2}_{,0}{}^{\alpha}$，有

$$h \mapsto (U_h \circ f_h)(e^{i\varphi}) \in C^1(B_{\varepsilon_0}, C^{k+1,\alpha}(\mathbb{T})).$$

更确切地说，对于 $h + g \in B_{\varepsilon_0}$，有

$$D_h(U_h \circ f_h)[g](e^{i\varphi}) = -\int_{\mathbb{D}} \frac{\sigma_h^1[g](\varphi, y)}{d_h(\varphi, y)^\nu}\, dy + \nu \int_{\mathbb{D}} \frac{\sigma_h^2[g](\varphi, y)}{d_h(\varphi, y)^{\nu+2}} |f_h'(e^{i\varphi}y)|^2\, dy,$$

其中定义

$$\begin{aligned} d_h(\varphi, y) &:= |f_h(e^{i\varphi}) - f_h(e^{i\varphi}y)|, \\ \sigma_h^1[g](\varphi, y) &:= 2\mathrm{Re}\left[(1 + h'(e^{i\varphi}y))\overline{g'(e^{i\varphi}y)}\right], \\ \sigma_h^2[g](\varphi, y) &:= \mathrm{Re}\left[\left(e^{i\varphi}(1-y) + h(e^{i\varphi}) - h(e^{i\varphi}y)\right)\overline{(g(e^{i\varphi}) - g(e^{i\varphi}y))}\right]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

从现在起，我们将研究以下情形 $\nu = 1$。为了证明命题 4.2，引入以下记号会很方便

$$e_h(\varphi, y) = d_h(\varphi, y)^2 = |f_h(e^{i\varphi}) - f_h(e^{i\varphi}y)|^2.$$

此外，我们还需要对 $t \in [0,1]$ 进行以下计算

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\left[-\frac{|f_{h+tg}'(e^{i\varphi}y)|^2}{d_{h+tg}(\varphi, y)}\right] &= T^0_{h+tg,g}(\varphi, y) + T^1_{h+tg,g}(\varphi, y) + T^2_{h+tg,g}(\varphi, y), \\ T^0_{h+tg,g}(\varphi, y) &:= -\frac{2|g'(e^{i\varphi}y)|^2}{d_{h+tg}(\varphi, y)}, \\ T^1_{h+tg,g}(\varphi, y) &:= \frac{\tau^1_{h+tg,g}(\varphi, y)}{d_{h+tg}(\varphi, y)^3}, \\ \tau^1_{h+tg,g}(\varphi, y) &:= 2\,\sigma^1_{h+tg}[g](\varphi, y)\,\sigma^2_{h+tg}[g](\varphi, y) + |f_{h+tg}'(e^{i\varphi}y)|^2 |g(e^{i\varphi}) - g(e^{i\varphi}y)|^2, \\ T^2_{h+tg,g}(\varphi, y) &:= \frac{\tau^2_{h+tg,g}(\varphi, y)}{d_{h+tg}(\varphi, y)^5}, \\ \tau^2_{h+tg,g}(\varphi, y) &:= -3|f_{h+tg}'(e^{i\varphi}y)|^2 (\sigma^2_{h+tg}(\varphi, y))^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

引理 4.3. 令 $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in [0,1)$。当 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小时，且 $g, h \in B_{\varepsilon_0} \subset H^{k+2}_{,0}{}^{\alpha}$ 以下估计成立

(i) 对于 $\ell \in \mathbb{N}_0, \ell \le k+1, y \in \mathbb{D}$，有

$$\sup_{t\in[0,1]} \left[\sigma^2_{h+tg}[g](\cdot,y)\right]_{\ell,\alpha} \le C\,\|g\|_{k+2,\alpha}\,|1-y|^{2-\alpha}.$$

(ii) 对于 $\ell \in \mathbb{N}_0$、$\ell \le k+1$、$m=1$、2、$y \in \mathbb{D}$，我们有

$$\sup_{t\in[0,1]} \left[\tau^m_{h+tg}[g](\cdot,y)\right]_{\ell,\alpha} \le C\,\|g\|^2_{k+2,,\alpha}\,|1-y|^{2m-\alpha}.$$

(iii) 对于 $\ell \in \mathbb{N}_0$、$\ell \le k+1$、$y \in \mathbb{D}$，我们有

$$\sup_{t\in[0,1]} [e_{h+tg}[g](\cdot,y)]_{\ell,\alpha} \le C|1-y|^{2-\alpha}.$$

证明。这个引理的证明很直接。事实上，利用以下一般估计即可轻松验证这些界。对于任意 $u \in H^1(\mathbb{D})$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\varphi_2-\varphi_1|^\alpha}&\left|\left[u(e^{i\varphi_1}y)-u(e^{i\varphi_1})\right]-\left[u(e^{i\varphi_2}y)-u(e^{i\varphi_2})\right]\right| \\ &\le \left(2\,\|u'\|_\infty\right)^\alpha \left(2|1-y|\,\|u'\|_\infty\right)^{1-\alpha} \le 2\,\|u\|_{C^1}\,|1-y|^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

□

下面的引理也很有用。

引理 4.4。设 $k \in \mathbb{N}_0$、$\alpha \in [0,1)$。存在一个充分小的 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于任意 $h \in B_{\varepsilon_0} \subset H^{k+2,\alpha}_0$ 和 $y \in \mathbb{D}$，我们有

$$d_h(\varphi,y) \ge c|1-y|. \tag{4.6}$$

此外，对于任意 $q \in \mathbb{N}$、$n \in \mathbb{N}_0$、$n \le k+1$ 和 $y \in \mathbb{D}$，估计

$$\left[\frac{1}{d_h(\cdot,y)^q}\right]_{n,\alpha} \le \frac{C_{k,q}}{|1-y|^{q+\alpha}}.$$

成立。$c>0$ 和 $C_{k,\ q>}>0$ 均与 h无关。

证明。第一个断言由中值定理得出，只需选取足够小的 $\varepsilon_0>0$。为证明第二个断言，我们先考虑 $n=0$。于是只需考虑 $q=1$。我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\varphi_1-\varphi_2|^\alpha}\left|\frac{1}{d_h(\varphi_1,y)}-\frac{1}{d_h(\varphi_2,y)}\right| &= \frac{|d_h(\varphi_1,y)-d_h(\varphi_2,y)|}{|\varphi_1-\varphi_2|^\alpha}\frac{1}{d_h(\varphi_1,y)d_h(\varphi_2,y)} \\ &\le \frac{C}{|1-y|^2}\frac{|f_h(e^{i\varphi_1})-f_h(e^{i\varphi_2})+f_h(e^{i\varphi_1}y)-f_h(e^{i\varphi_2}y)|}{|\varphi_1-\varphi_2|^\alpha} \\ &\le \frac{C}{|1-y|^{1+\alpha}}.\end{aligned}$$

现在我们计算 n阶导数，$n \le k+1$。根据 Faà di Bruno 公式，参见引理 3.2，将其应用于函数 $x \mapsto x^{-q/2}$ 和 $e_h = d_h^2$ 的复合，前述表达式可写成如下形式各项之和：

$$\frac{1}{d_h(\varphi,y)^{2(\ell_1+\cdots+\ell_n)+q}}\prod_{j=1}^n\left(\frac{d^j}{d\varphi^j}e_h(\varphi,y)\right)^{\ell_j} = \frac{1}{d_h(\varphi,y)^q}\prod_{j=1}^n\left(\frac{1}{d_h(\varphi,y)^2}\frac{d^j}{d\varphi^j}e_h(\varphi,y)\right)^{\ell_j},$$

其中 ℓ_1，ℓ_2，…，$\ell_n \in \mathbb{N}_0$ 满足 $\ell_1 + 2\ell_2 + \cdots + n\ell_n = n$。乘积 $j = 1$，…，n 中每一项的上确界范数均由引理 4.3 (iii) 和 (4.6) 得到界定。

现在我们估计该表达式的半范数 $[\cdot]_\alpha$。注意，对于乘积，在这个半范数中只估计其中一项，其余各项则用上确界范数估计。对于半范数，我们应用引理 4.3 (iii) 以及 $n = 0$ 的情形（前文已讨论）。因此，该半范数可由以下量乘以一个常数来控制：$|1-y|^{-q-\alpha}$。

□

根据前面的引理，我们得到以下估计。

引理 4.5. 设 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $\alpha \in (0,\ 1)$。当 $\varepsilon_0 > 0$，$g, h \in B_{\varepsilon_0} \subset H^{k+2,\alpha}_0$ 和 $m = 0$ 充分小时，有 1,2

$$\left\| \frac{\sigma_h^1[g](\cdot,y)}{d_h(\cdot,y)} \right\|_{k+1,\alpha} + \left\| \frac{\sigma_h^2[g](\cdot,y)}{d_h(\cdot,y)^3} \right\|_{k+1,\alpha} \le C\|g\|_{k+2,\alpha}|1-y|^{-1-\alpha},$$

$$\left\| T^m_{h+tg,g}(\cdot,y) \right\|_{k+1,\alpha} \le C\|g\|^2_{k+2,\alpha}|1-y|^{-1-\alpha}.$$

常数 $C > 0$ 与 h, g 无关。

证明。前面的引理可以直接应用。注意，在 $T^2_{h+tg,g}$ 的情形下，分母中有因子 d^5_{h+tg}。引理 4.3 (ii) 中针对 $m = 2$ 的额外因子可以抵消这一项。

□

利用前面的引理，我们可以给出命题 4.2 的证明。

命题 *4.2* 的证明。我们只考虑 $\nu = 1$。为便于阐述，我们将证明分为两步。

步骤 *1*。我们首先证明弗雷歇可微性。记为

$$\begin{aligned} R(\varphi) :=& (U_{h+g} \circ f_{h+g})(e^{i\varphi}) - (U_h \circ f_h)(e^{i\varphi}) - D_h(U_h \circ f_h)[g](e^{i\varphi}) \\ =& \int_{\mathbb{D}} \int_0^1 (1-t) \frac{d^2}{dt^2} \left[-\frac{|f'_{h+tg}(e^{i\varphi}y)|^2}{d_{h+tg}(\varphi,y)} \right] dtdy \\ =& \int_{\mathbb{D}} \int_0^1 (1-t) \left[T^0_{h+tg,g}(\varphi,y) + T^1_{h+tg,g}(\varphi,y) + T^2_{h+tg,g}(\varphi,y) \right] dtdy, \end{aligned}$$

回顾（4.5）。应用引理 4.5 可得（注意 $-1-\alpha > -2$）

$$\|R\|_{k+1,\alpha} \le C\|g\|^2_{k+2,\alpha},$$

这意味着其具有弗雷歇可微性。

步骤 *2*。现在，我们证明 $h \mapsto D_h(U_h \circ f_h)[g]$ 是连续的。首先，利用引理 4.5

$$\|D_h(U_h \circ Y_h)[g]\|_{k+1,\alpha} \le C_k\|g\|_{k+2,\alpha}.$$

其中 $C_k > 0$ 与 h、$g \in B_{\varepsilon_0} \subset H^{k+2,\alpha}_0$ 无关。我们可以利用这些估计，在 h、$g \in B_{\varepsilon_0}$ 上一致地去除积分中的奇点。剩余的被积函数于是关于 h 是光滑函数。因此，它关于 h 连续。上述界表明，这对 $\|g\|_{k+2,\alpha}$ 也一致成立，从而保证了这些估计在算子范数意义下成立。因此，$h \mapsto D_h(U_h \circ f_h)[\cdot](e^{i\varphi}) \in \mathcal{L}(H^{k+2,\alpha}_0; C^{k+1,\alpha}(\mathbb{T}))$ 是连续的。

□

我们给出命题 4.2 在情形（B）下的相应结果。为此，我们写作

$$(U_h \circ f_h)(e^{i\varphi}) = \int_{\mathbb{D}} |f'_h(y)|^2 \ln|f_h(e^{i\varphi}) - f_h(y)|\, dy = \int_{\mathbb{D}} |f'_h(e^{i\varphi}y)|^2 \ln|f_h(e^{i\varphi}) - f_h(e^{i\varphi}y)|\, dy.$$

命题 4.6。 设 U_h 按情形 (B) 中的定义给出，且 $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0,1)$。存在$\varepsilon_0 > 0$ 充分小，使得对于 $h \in B_{\varepsilon_0} \subset H^{k+2,\alpha}_0$，我们有

$$h \mapsto (U_h \circ f_h)(e^{i\varphi}) \in C^1(B_{\varepsilon_0}, C^{k+1,\alpha}(\mathbb{T})).$$

更准确地说，对于 $h+g \in B_{\varepsilon_0}$，有

$$D_h(U_h \circ f_h)[g](e^{i\varphi}) = \int_{\mathbb{D}} \sigma_h^1[g](\varphi,y) \ln d_h(\varphi,y)\, dy + \int_{\mathbb{D}} \frac{\sigma_h^2[g](\varphi,y)}{d_h(\varphi,y)^2} |f_h'(e^{i\varphi}y)|^2\, dy,$$

其中 $\sigma_h^1[g]$, $\sigma_h^2[g]$ 和 d_h（φ, y）见 （4.4）。

4.3 完整问题的弗雷歇导数

在此，我们 给出完整问题（ $\mathbb{F}$ ）中第二个和第三个分量的弗雷歇导数计算2 .11)
。对于第二个分量，注意到 $(h,\ X) \mapsto \nabla U_h(X)$ 的连续可微性不会带来任何困难，因为假设 $X = (a,\ 0)$ 与 $X_0 = (a_0,\ 0)$ 足够接近，且 $a_0 \geq 2$。因此， ∇U_h 在 X_0 的一个邻域内是光滑的，并且

$$\nabla U_h(X) = \nu \int_{E_h} \frac{X-y}{|X-y|^{\nu+2}}\, dy = \nu \int_{\mathbb{D}} \frac{X-f_h(y)}{|X-f_h(y)|^{\nu+2}} |f_h'(y)|^2\, dy,$$

在情形（A）中以及

$$\nabla U_h(X) = \int_{\mathbb{D}} \frac{X-f_h(y)}{|X-f_h(y)|^2} |f_h'(y)|^2\, dy,$$

在情形（B）中。这里，我们将 f_h 视为函数 $\mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$。我们得到弗雷歇导数的以下结果（我们再次将 $X = (a,0) \in \mathbb{R}^2 \backsimeq \mathbb{C}$视为函数）。

引理 4.7。 设 U_h 如情形(A) 或情形(B) 中所定义，且 $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0,1)$。映射$(h,a) \mapsto \partial_{x_1} U_h$ $(a,0)$ 对于充分小的 $|a-a_0| \leq \varepsilon_0$, $h \in B_{\varepsilon_0} \subset H^{k+2,\alpha}_0$, $\varepsilon_0 > 0$ 是连续可微的，其导数为

$$D_{(h,a)} \left(\partial_{x_1} U_h(a,0)\right)[g,b] = \partial_{x_1}^2 U_h(a,0) b + W_{h,a}[g].$$

函数 $W_{h,a}[g]$ 定义为

$$\begin{aligned} W_{h,a}[g] := \nu \int_{\mathbb{D}} & \frac{-\mathrm{Re}[g(y)] |f_h'(y)|^2 + 2\mathrm{Re}[(1+h'(y))\overline{g'(y)}]\, \mathrm{Re}[a-f_h(y)]}{|a-f_h(y)|^{\nu+2}}\, dy \\ & - \nu(\nu+2) \int_{\mathbb{D}} \frac{\mathrm{Re}[(a-f_h(y))\overline{g(y)}]\, \mathrm{Re}[a-f_h(y)]}{|a-f_h(y)|^{\nu+4}} |f_h'(y)|^2\, dy \end{aligned}$$

在情形 (A)中定义为

$$\begin{aligned} W_{h,a}[g] := & \int_{\mathbb{D}} \frac{-\mathrm{Re}[g(y)] |f_h'(y)|^2 + 2\mathrm{Re}[(1+h'(y))\overline{g'(y)}]\, \mathrm{Re}[a-f_h(y)]}{|a-f_h(y)|^2}\, dy \\ & - \int_{\mathbb{D}} \frac{2\mathrm{Re}[(a-f_h(y))\overline{g(y)}]\, \mathrm{Re}[a-f_h(y)]}{|a-f_h(y)|^4} |f_h'(y)|^2\, dy \end{aligned}$$

在情形 (B)中定义，分别为。

质量约束，即 $\mathbb{F}$ 的第三个分量，给出如下弗雷歇导数。

引理 4.8. 该映射的弗雷歇导数

$$h \mapsto |E_h| = \int_{\mathbb{D}} |f_h'(x)|^2 \, dx$$

由下式给出

$$g \mapsto 2\mathrm{Re} \int_{\mathbb{D}} (1+h')\overline{g'} \, dx.$$

我们省略了前面几个引理的证明，因为它们很容易验证。最后，结合引理 4.1、命题 4.2，以及命题 4.6和引理 4.7、4.8，可得以下可微性结果。

命题 4.9。 令 $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0,1)$。存在足够小的 $\varepsilon_0 > 0$，使得 $\mathbb{F} \in C^1(U;\ \mathbb{Z}^{k+1,\ \alpha})$，其中

$$U = B_{\varepsilon_0}(0) \times (a_0 - \varepsilon_0, a_0 + \varepsilon_0) \times (\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0) \subset \mathbb{X}^{k+2,\alpha}.$$

5 线性化算子的可逆性

为了应用隐函数定理，我们需要求出点 $(0,\ X_0,\ \lambda_0,\ 0)$ 处线性化算子的逆，即线性算子

$$\mathbb{X}^{k+2,\alpha} \to \mathbb{Z}^{k+1,\alpha} : (g,b,\mu) \mapsto D_{(h,a,\lambda)}\mathbb{F}(0,a_0,\lambda_0,0)[g,b,\mu]. \tag{5.1}$$

回顾一下，函数空间定义见（2.10）。将函数 $g \in H^{k+2,\ 0}{}^{\ \alpha}$ 写成如下形式的幂级数较为方便

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \hat{g}_n z^{n+1}. \tag{5.2}$$

回顾一下，由于 $g \in H^{k+2,\ 0}{}^{\ \alpha}$，有 $g(0) = 0$ 和 $g'(0) = \hat{}g_0 \in \mathbb{R}$。

注释 5.1。 我们简要说明幂级数（5.2）的形式。

（i）我们对（5.2）中的系数选取了一个指标平移，以便在线性化算子（5.1）进行傅里叶分解时将其对角化，参见引理5.7。

（ii）采用这一选择后，系数 $\hat{}g_0$ 对应于重标度 $z \mapsto (1+\hat{}g_0)\, z$。因此，它出现在 $h \mapsto |E_h|$ 的线性化中，参见引理 5.7。在傅里叶级数中，它作为零阶系数出现。

（iii）此外，无穷小平移由保角映射 T_ε 给出： $z \mapsto z + \varepsilon$当 $\varepsilon > 0$较小时。为了满足条件 $T_\varepsilon(0) = 0$ 和 $T_\varepsilon'(0) \in \mathbb{R}$，我们使用一个布拉施克因子，见（2.1），从而得到保角映射

$$z \mapsto \frac{z-\varepsilon}{1-\varepsilon z} + \varepsilon = \frac{z-\varepsilon^2 z}{1-\varepsilon z} = z + h_\varepsilon(z), \quad h_\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon z^2 - \varepsilon^2 z}{1-\varepsilon z} = \varepsilon z^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{5.3}$$

作为 $\varepsilon \to 0$。特别地，无穷小平移对应于系数 z^2，即$\hat{}g_1$ 在（5.2）中。在傅里叶级数中，它们分别对应于 $e^{\pm i\varphi}$的系数，即 $\hat{}g_1$和 $\hat{}g_1$ 线性化中的系数，参见引理 5.7。

本节的主要结果如下命题所示。

命题 5.2。 设 $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0,\ 1)$。算子 (5.1) 在定理 *2.1*的假设下是一个同构。

为了证明命题 5.2，有必要明确计算线性算子 (5.1) 的形式。以下各小节将完成这项工作，并给出所需的其他辅助结果。

流函数的线性化。

在证明中，我们将算子 $\phi[g]:=D_h\phi_h(0)[g]$，即 ϕ_h 在$h=0$处的弗雷歇导数，更明确地写出。根据引理 4.1，它满足方程

$$\Delta\bar{\phi}=G'(\phi_0)\bar{\phi}+2\mathrm{Re}\left[g'\right]G(\phi_0),\quad \bar{\phi}\,|_{\partial\mathbb{D}}=0. \tag{5.4}$$

因此，利用表达式（5.2），我们得到

$$2\mathrm{Re}\left[g'(re^{i\varphi})\right]=2\mathrm{Re}\left[\sum_{n\geq 0}(n+1)\hat{g}_n r^n e^{in\varphi}\right]=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(|n|+1)\hat{\xi}_n[g]\,r^{|n|}e^{in\varphi}, \tag{5.5}$$

其中，系数 $\hat{\xi}_n[g]$ 由下式给出

$$\hat{\xi}_n[g]:=\begin{cases}\hat{g}_n & n\geq 1,\\ 2\hat{g}_0 & n=0,\\ \overline{\hat{g}_n} & n\leq -1.\end{cases} \tag{5.6}$$

回忆一下，$g'(0)=\hat{g}_0\in\mathbb{R}$，因为 $g\in H^{k+2,\alpha}_0$。我们利用傅里叶分解得到公式

$$\bar{\phi}[h](r,\varphi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(|n|+1)\hat{\xi}_n[g]\,A_n(r)e^{in\varphi},$$

其中 $A_n(r)$ 满足常微分方程，见（2.15），

$$\frac{1}{r}(rA_n')'-\frac{n^2}{r^2}A_n-G_1A_n=r^{|n|}G_0,\quad A_n(1)=0. \tag{5.7}$$

上文使用了简写记号 $G_0(r):=G(\phi_0(r))$，$G_1(r):=G'(\phi_0(r))$。此外，注意到 $A_n=A_{-n}$，这是由对称性得到的。

函数 ϕ 以如下方式进入 $\mathbb{F}$ 的线性化

$$\left[\nabla\phi_0\cdot\nabla\bar{\phi}\right](e^{i\varphi})=\phi_0'(1)\partial_r\bar{\phi}(1,\varphi)=\phi_0'(1)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(|n|+1)\hat{\xi}_n[g]A_n'(1)e^{in\varphi}. \tag{5.8}$$

回顾一下，未扰动流函数 ϕ_0 是径向的。下面我们给出关于 $A_n'(1)$ 在 $n\to\infty$时的渐近行为的一个关键结果。

引理 5.3。 考虑解 ϕ（对应于 (5.4)）。则，系数 A_n 具有如下渐近行为

$$\lim_{n\to\infty}nA_n'(1)=\frac{G(\phi_0(1))}{2}. \tag{5.9}$$

Rem备注 5.4。 将（5.9）与备注 Ω_0 2.3 中关于 $G\equiv -2$（iii ）.

引理 5.3的证明。 在整个证明中令 $n\geq 1$。记 $\widetilde{\phi}_n(r,\varphi)=A_n(r)e^{in\varphi}$，则有

$$(\Delta-G_1)\widetilde{\phi}_n=r^ne^{in\varphi}G_0,\quad \widetilde{\phi}_n(1,\varphi)=0. \tag{5.10}$$

由于 $G_1=G'\circ\phi_0\geq 0$，带有零边界条件的算子 $\Delta-G_1$ 是可逆的。此外，由于 $G_0\in C^{k+3,\alpha}$ 我们有 $\widetilde{\phi}_n\in C^{k+5,\alpha}(\mathbb{D})$。

来看下面的辅助常微分方程

$$\frac{1}{r}(rb_n')'-\frac{n^2}{r^2}b_n=r^nG_0,\quad b_n(1)=0.$$

注意，将其与 A_n 中给出的常微分方程（见（5.7））进行比较，只有 G_1 这一项被去掉了；对于 $n\to\infty$，预期该项是较低阶的。将 $b_n(r)=r^n\beta_n(r)$写成如下形式会更方便，其中

$$\frac{1}{r}(r\beta_n')'+\frac{2n}{r}\beta_n'=G_0,\quad \beta_n(1)=0.$$

我们可以将解显式地表示为一个参数的函数

$$\beta_n(r)=-\frac{\beta_n'(1)}{2n}\frac{1-r^{2n}}{r^{2n}}-\frac{1}{2n}\int_r^1 G_0(s)s\,ds+\frac{1}{2n}\frac{1}{r^{2n}}\int_r^1 G_0(s)s^{2n+1}\,ds.$$

为了使 β_n 存在，我们取

$$B_n:=\beta_n'(1):=\int_0^1 G_0(s)s^{2n+1}\,ds \tag{5.11}$$

从而得到

$$\beta_n(r)=\frac{B_n}{2n}-\frac{1}{2n}\int_r^1 G_0(s)s\,ds-\frac{1}{2n}\frac{1}{r^{2n}}\int_0^r G_0(s)s^{2n+1}\,ds.$$

注意，$|\beta_n(r)|\le C/n$，其中 $C>0$ 是与 r 和 n 无关的常数。

现在我们将其分解为

$$\widetilde{\phi}_n(r,\varphi)=\widetilde{\phi}_n^1(r,\varphi)+\widetilde{\phi}_n^2(r,\varphi),\quad \widetilde{\phi}_n^1(r,\varphi):=r^n\beta_n(r)e^{in\varphi}.$$

因此，我们得到如下分解

$$A_n(r)=A_n^1(r)+A_n^2(r),\quad A_n^1(r)=r^n\beta_n(r). \tag{5.12}$$

因此，根据上述计算可得

$$(\Delta-G_1)\widetilde{\phi}_n^2=(\Delta-G_1)(\widetilde{\phi}_n-\widetilde{\phi}_n^1)=G_1\widetilde{\phi}_n^1,\quad \widetilde{\phi}_n^2\,|_{\partial\mathbb{D}}=0.$$

我们可以应用索伯列夫空间中的正则性估计，得到

$$\left\|\widetilde{\phi}_n^2\right\|_{W^{2,2}(\mathbb{D})}\le C\left\|g\widetilde{\phi}_n^1\right\|_{L^2(\mathbb{D})}\le\frac{C}{n}\left(\int_0^1 s^{2n+1}\,ds\right)^{1/2}\le\frac{C}{n^{3/2}}.$$

这里我们用到了 $|\widetilde{\phi}_n^1(r,\ \varphi)|\le|\beta_n(r)|\le C/n$。应用迹定理（参见 [15]）可得

$$\left\|\partial_r\widetilde{\phi}_n^2(1,\cdot)\right\|_{L^2(\partial\mathbb{D})}\le\frac{C}{n^{3/2}},$$

因此 $|(A_n^2)'(1)|\le C/n^{3/2}$。总之，结合（5.12）和（5.11），我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\,A_n'(1)&=\lim_{n\to\infty}n\,(A_n^1)'(1)=\lim_{n\to\infty}n\,\beta_n'(1)=\lim_{n\to\infty}n\,B_n\\&=\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 G_0(s)s^{2n+1}\,ds\\&=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{G_0(1)}{2n+2}-\frac{1}{2n+2}\int_0^1 G_0'(s)s^{2n+2}\,ds\right)\\&=\frac{G_0(1)}{2}=\frac{G(\phi_0(1))}{2},\end{aligned}$$

从而得到所需结果。 □

相互作用势的线性化，情形 (A)。

由于 t o 命题 4.2 我们有 $x = e^{i\varphi}$ （这里使用变量替换 $e^{i\varphi} y \mapsto y$）

$$D_h(U_h \circ f_h)\,|_{h=0}\,[g](x) = -\int_{\mathbb{D}} \frac{2\mathrm{Re}[g'(y)]}{|x-y|^{\nu}}\,dy + \nu \int_{\mathbb{D}} \frac{\mathrm{Re}[(\overline{x-y})(g(x)-g(y))]}{|x-y|^{2+\nu}}\,dy.$$

与之前一样，我们使用 g 在（5.2）中给出的幂级数展开。于是有

$$D_h(U_h \circ f_h)\,|_{h=0}\,[g](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\hat{g}_n \int_{\mathbb{D}} \left(\nu \frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y} - 2(n+1)y^n\right) \frac{dy}{|x-y|^{\nu}}\right].$$

由于 $x = e^{i\varphi}$，我们可以通过旋转得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\hat{g}_n e^{in\varphi} \int_{\mathbb{D}} \left(\nu \frac{1-y^{n+1}}{1-y} - 2(n+1)y^n\right) \frac{dy}{|1-y|^{\nu}}\right].$$

回顾（ c_n 2.13）中 c_n 的定义，注意到它们是实数，并根据（ˆ $\xi_n[g]$ 5.5）中的定义，我们得到

$$D_h(U_h \circ f_h)\,|_{h=0}\,[g](e^{i\varphi}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \hat{\xi}_n[g]\, e^{in\varphi}, \tag{5.13}$$

其中我们定义 $c_n = c_{|n|}$，其中 $n < 0$。以下结果将会用到。

引理 5.5. 序列 c_n 定义于 (2.13) 且 $\nu = 1$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\ln n} = \gamma_0 \quad with \quad \gamma_0 := \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{e^{-r}\zeta \sin(\zeta)}{(r^2+\zeta^2)^{3/2}}\,dr d\zeta. \tag{5.14}$$

对于 $\nu \in (0,\ 1)$，有 上确界$_{n\geq 0}\,|c_n| < \infty$。

证明。 首先，我们有

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\nu}{2} \int_{\mathbb{D}} \frac{y^k}{|1-y|^{\nu}}\,dy - (n+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{y^n}{|1-y|^{\nu}}\,dy.$$

定义

$$\widetilde{c}_k := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \frac{y^k}{|1-y|^{\nu}}\,dy.$$

下面证明

$$\lim_{k\to\infty} k^{2-\nu}\,\widetilde{c}_k = \gamma_0^{\nu}, \quad \gamma_0^{\nu} := \nu \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{e^{-r}\zeta \sin(\zeta)}{(r^2+\zeta^2)^{(2+\nu)/2}}\,dr d\zeta. \tag{5.15}$$

注意， $\gamma_0^1 = \gamma_0$ 对于 $\nu = 1$。由此可推得，对于 $\nu = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{H_n} = \gamma_0, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

由于 $H_n = \ln(n)(1+o(1))$ 当 $n \to \infty$时，这意味着5.14） $\nu = 1$的渐近行为。关于 $\nu \in (0,1)$ 的结论也可由上述渐近行为得出。

现在证明（5.15）。项 $\widetilde{c}_k$ 为实值，因此

$$\widetilde{c}_k = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^{k+1}\cos(k\varphi)}{(1+r^2-2r\cos\varphi)^{\nu/2}}\,d\varphi dr = I_k^1 + I_k^2. \tag{5.16}$$

两项 I_k^1 和 I_k^2 通过将关于 r 的积分（5.16）按区域 $(0,1/2)$ 和 $(1/2,1)$ 拆分来定义。容易验证

$$k^{2-\nu}|I_k^1| \le \frac{Ck^{2-\nu}}{2^{k+1}} \to 0. \tag{5.17}$$

为处理 I_k^2，我们注意到，作变量替换 $r = 1-s$

$$\begin{aligned} k^{2-\nu} I_k^2 &= \frac{k^{2-\nu}}{2} \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \frac{(1-s)^{k+1}\cos(k\varphi)}{\left(s^2+4(1-s)\sin^2(\varphi/2)\right)^{\nu/2}} d\varphi ds \\ &= \frac{k^{1-\nu}}{2} \int_0^{k/2} \int_0^{2\pi} \frac{\left(1-\frac{r}{k}\right)^{k+1}\cos(k\varphi)}{\left[\left(\frac{r}{k}\right)^2+4\left(1-\frac{r}{k}\right)\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]^{\nu/2}} d\varphi dr. \end{aligned}$$

在第二个等式中，我们使用了变量替换 $ks = r$。此外，写作 $k\varphi = \psi$，我们得到

$$\begin{aligned} k^{2-\nu} I_k^2 &= \frac{1}{2} \int_0^{k/2} \int_0^{2k\pi} \frac{\left(1-\frac{r}{k}\right)^{k+1}\cos(\psi)}{\left[r^2+4\left(1-\frac{r}{k}\right)k^2\sin^2\left(\frac{\psi}{2k}\right)\right]^{\nu/2}} d\psi dr \\ &= \int_0^{k/2} \int_0^{k\pi} \frac{\left(1-\frac{r}{k}\right)^{k+1}\cos(\psi)}{\left[r^2+4\left(1-\frac{r}{k}\right)k^2\sin^2\left(\frac{\psi}{2k}\right)\right]^{\nu/2}} d\psi dr, \end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了对称性。现在定义函数 $\zeta_k : (0, k\pi) \to (0, 2k)$，如下：

$$\zeta_k(\psi) = 2k\sin\left(\frac{\psi}{2k}\right),$$

该函数是一一对应的。此外，通过泰勒展开可知，对于任意 $\psi \in (0, k\pi)$，当 $k \to \infty$ 时，$\zeta_k(\psi) \to \psi$。因此，对于反函数 $\psi_k(\zeta)$，当 $k \to \infty$ 时，$\to \zeta$。作变量替换 $\psi \mapsto \zeta$，得到

$$k^{2-\nu} I_k^2 = \int_0^{k/2} \int_0^{2k} \frac{\left(1-\frac{r}{k}\right)^{k+1}}{\left[r^2+\left(1-\frac{r}{k}\right)\zeta^2\right]^{\nu/2}} \cos(\psi_k(\zeta))\psi_k'(\zeta) d\zeta dr.$$

现在我们对 ζ 分部积分，得到（注意，由于 $\psi_k(0) = 0, \psi_k(2k) = k\pi$，边界项为零）

$$k^{2-\nu} I_k^2 = \nu \int_0^{k/2} \int_0^{2k} \frac{\left(1-\frac{r}{k}\right)^{k+2}\zeta\sin(\psi_k(\zeta))}{\left[r^2+\left(1-\frac{r}{k}\right)\zeta^2\right]^{(\nu+2)/2}} d\zeta dr.$$

被积函数逐点收敛到

$$\frac{e^{-r}\zeta\sin(\zeta)}{(r^2+\zeta^2)^{(\nu+2)/2}}$$

当 $k\to\infty$ 时。由于

$$\left(1-\frac{r}{k}\right)^{k+2}=\exp\left((k+2)\ln\left(1-\frac{r}{k}\right)\right)\le e^{-r},$$
$$\psi_k(\zeta)=2k\arcsin\left(\frac{\zeta}{2k}\right)\le C\zeta$$

例如，对于 $\zeta\in(0,1)$，一个主控函数为

$$\frac{e^{-r}\min(C\zeta^2,\zeta)}{(r^2+\zeta^2/2)^{(2+\nu)/2}}.$$

因此，我们得到 $k^{2-\nu}I_k^2\to\gamma_0^\nu$。将其与 (5.17) 和 (5.16) 结合可得 (5.15)。 □

相互作用势的线性化，情形 (B)。

由命题 4.6 可知，对于 $x=e^{i\varphi}$

$$D_h(U_h\circ f_h)\,|_{h=0}\,[g](x)=2\int_{\mathbb{D}}\ln|x-y|\,\mathrm{Re}[g'(y)]\,dy+\int_{\mathbb{D}}\frac{\mathrm{Re}[(\overline{x-y})(g(x)-g(y))]}{|x-y|^2}\,dy.$$

再次，我们使用 g 的幂级数展开，参见 (5.2)，得到

$$D_h(U_h\circ f_h)\,|_{h=0}\,[g]\left(e^{i\varphi}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}2\mathrm{Re}\left[\hat{g}_n\int_{\mathbb{D}}\left((n+1)y^n\ln|x-y|+\frac{1}{2}\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}\right)dy\right].$$

对于 $x=e^{i\varphi}$ 并进行变量替换 $y\mapsto e^{i\varphi}y$，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}2\mathrm{Re}\left[\hat{g}_ne^{in\varphi}\int_{\mathbb{D}}\left((n+1)y^n\ln|1-y|+\frac{1}{2}\frac{1-y^{n+1}}{1-y}\right)dy\right].$$

正如我们下面将看到的，根据式（2.14），有

$$c_n=\int_{\mathbb{D}}\left((n+1)y^n\ln|1-y|+\frac{1}{2}\frac{1-y^{n+1}}{1-y}\right)dy=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) & n\ge 1,\\ \frac{\pi}{2} & n=0.\end{cases}\tag{5.18}$$

回顾式（5.5）中 $\hat{\xi}_n[g]$ 的定义，我们有（见式（5.13））

$$D_h(U_h\circ f_h)\,|_{h=0}\,[g](e^{i\varphi})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\,\hat{\xi}_n[g]\,e^{in\varphi},$$

其中我们再次定义 $c_n=c_{|n|}$ for $n<0$。

现在证明式（5.18）。对于 $n=0$，积分化简为 $U_0(1)+\pi/2=\pi/2$，参见引理3.5。对于其他情形，我们先注意到

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}}\frac{1-y^{n+1}}{1-y}\,dy=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_{\mathbb{D}}y^k\,dy=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^ke^{ik\varphi}\,rdrd\varphi=\frac{\pi}{2}.\tag{5.19}$$

此外，我们还可以写成

$$(n+1)\int_{\mathbb{D}}y^n\ln|1-y|\,dy=(n+1)\int_0^1\int_0^{2\pi}r^ne^{in\varphi}\ln|1-re^{i\varphi}|\,rdrd\varphi.\tag{5.20}$$

因此，利用以下展开式

$$\begin{aligned}\ln|1-re^{i\varphi}| &= \frac{1}{2}\Big(\ln(1-re^{i\varphi})+\ln(1-re^{-i\varphi})\Big)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{k+1}e^{i(k+1)\varphi}}{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{k+1}e^{-i(k+1)\varphi}}{k+1}\right).\end{aligned}$$

将其代入（5.20）后，我们得到

$$(n+1)\int_{\mathbb{D}} y^n \ln|1-y|\,dy = -2\pi\frac{n+1}{2n}\int_0^1 r^{2n+1}\,dr = -\frac{\pi}{2n}.$$

因此，结合（5.19）和（5.20），我们推得（5.18）。

注 5.6。请注意，在情形（A）和情形（B）中，我们都有 $c_1=0$。这一般成立，因为 $(U_{h_\varepsilon}\circ f_{h_\varepsilon})(1)=U_0(1)$，其中 $h_\varepsilon(z)=\varepsilon z^2+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 与平移相关，见注 5.3中的公式（5.1）。因此我们得到

$$c_1 = D_h(U_h\circ f_h)\,|_{h=0}\,[z^2](1) = \frac{d}{d\varepsilon}\,|_{\varepsilon=0}\,(U_{h_\varepsilon}\circ f_{h_\varepsilon})(1)=0.$$

如注5.1所述，由平移引起的保角映射效应在傅里叶模态 $n=\pm1$ 和系数 c_1中均以一阶项出现。

完整问题的线性化。

我们在以下引理中总结点 $(h_0\equiv 0,\ a_0,\ \lambda_0,\ m=0)$ 处的完整线性化算子。

引理 5.7. 算子 $D_{(h,a,\lambda)}\mathbb{F}(0,a_0,\lambda_0,0)$ 具有如下形式

$$\begin{aligned}(g,b,\mu)\mapsto&\begin{pmatrix}\mathscr{L}g-\mu\\ \Omega_0^2 b-\partial_{x_1}^2U_0(a_0,0)b-W_{0,a_0}[g]\\ \pi\hat{h}_0\end{pmatrix},\\ \mathscr{L}g(\varphi):=&\,2\omega_0\hat{g}_0+\sum_{n\geq 1}\omega_n\hat{g}_n e^{in\varphi}+\sum_{n\leq -1}\omega_n\overline{\hat{g}_{|n|}}e^{in\varphi},\\ \omega_n=&-\frac{1}{2}\phi_0'(1)^2(|n|+1)+\phi_0'(1)A_n'(1)(|n|+1)-\frac{1}{2}\Omega_0^2+c_{|n|},\end{aligned}$$

这里，$W_{0,a_0}[g]$ 在情形 4.7 的情形 (A) 和情形 (B)中均有定义。

注意，在该线性化算子的最后一个分量中，我们再次识别出 $\mathbb{R}^2\backsimeq\mathbb{C}$。此外，系数 ω_n 已在（2.12）中出现。

引理 5.7 的证明。式（ $\mathbb{F}$ 2.11）中第一分量在点$(h=0,X_0,\lambda_0,m=0)$处的线性化为

$$\begin{aligned}(g,\mu)\mapsto&\,\phi_0'(1)\,\partial_r\bar{\phi}(1,\varphi)-\phi_0'(1)^2\mathrm{Re}[g'(e^{i\varphi})]\\ &-\Omega_0^2\,\mathrm{Re}\left[e^{-i\varphi}g(e^{i\varphi})\right]+D_h(U_h\circ f_h)\,|_{h=0}\,[g](e^{i\varphi})-\mu.\end{aligned}$$

利用（5.2）和（5.5）可得

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\varphi}g(e^{i\varphi})\right]=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{\xi}_n[g]\,e^{in\varphi}.$$

结合（5.8）和（5.13）可得第一分量的表达式。根据（$\hat{}$）中 $\xi_n[g]$ （5.5）的定义，可得算子 $\mathscr{L}g$ 的形式。

（2.11）中第二个分量的线性化是引理 4.7 的推论。对于最后一个分量，注意到引理 4.8 中质量约束的线性化变为$g\mapsto\pi\mathrm{Re}[\hat{}\,g_0]=\pi\hat{}\,g_0$，因为 $g\in H^{k+2}_{,0}{}^{\alpha}$。证明至此完成。□

在给出命题 5.2 的证明之前，我们需要证明以下关于环面上的霍尔德空间中的傅里叶乘子的结果。

引理 5.8. 设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in (0,1)$。考虑一个形式为 $\beta_n = \kappa/(|n| + b_n)$，$\beta_0 = 0$，$n \in \mathbb{Z}$ 的序列 $\beta = (\beta_n)_n$，其中 $\kappa \neq 0$ 为某个实常数。假设 $b_n \neq -|n|$ 是满足上确界 $\sup_{n\neq 0} |b_n||n|^{-\gamma} \leq C$ 的序列，其中 $0 \leq \gamma \leq 1/2$ 为某个常数。那么，周期伪微分算子

$$OP(\beta)\xi(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \beta_n \hat{\xi}_n e^{in\varphi}$$

定义了一个有界映射 $C^{k,\alpha}_{0}(\mathbb{T}) \to C^{k+1,\alpha}_{0}(\mathbb{T})$。

证明。回忆一下，由傅里叶乘子 $-i\mathrm{sgn}(n)$ 定义的希尔伯特变换 $\mathscr{H}$ 是一个有界映射 $C^{k,\alpha}_{0}(\mathbb{T}) \to C^{k,\alpha}_{0}(\mathbb{T})$，对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\alpha \in (0,1)$ 均成立。由于乘子为 $1/in$ 的算子对应于积分，我们得出，乘子为 $1/|n| = i\mathrm{sgn}(n)/in$ 的算子是一个有界映射 $C^{k,\alpha}_{0}(\mathbb{T}) \to C^{k+1,\alpha}_{0}(\mathbb{T})$。

现在我们写出

$$\beta_n = \frac{\kappa}{|n|} - \frac{\kappa}{|n|}\cdot\frac{b_n}{(|n|+b_n)} = \frac{\kappa}{|n|}(1+r_n).$$

根据假设，$c_1 \leq |1 + b_n/|n||$ 对某个常数 $c_1 > 0$ 成立。因此，我们有

$$|r_n| \leq \frac{|b_n|}{c_1|n|} \leq \frac{C}{|n|^{1-\gamma}} \leq \frac{C}{|n|^{1/2}}.$$

因此，序列 $r = (r_n)_n$ 满足 ρ-条件（见 [8, 定理 3.1]），其中 $\rho = 1/2$，因此 OP(r) 构成一个有界映射 $C^{k,\alpha}_{0}(\mathbb{T}) \to C^{k,\alpha}_{0}(\mathbb{T})$，对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\alpha \in (0,1)$ 均成立。在所提及的参考文献中，使用了周期贝西科维奇空间 $B^{s}_{\infty,\infty}$。回顾一下，$B^{s}_{\infty,\infty}$ 与经典赫尔德空间 $C^{k,\alpha}(\mathbb{T})$ 在 $s = k + \alpha \notin \mathbb{N}$ 时一致。证明至此完成。 □

命题5.2 的证明

我们同时考虑情形 (A) 和情形 (B)，因为证明相同。给定 $(S, Z, M) \in \mathbb{Z}^{k+1,\alpha} = C^{k+1,\alpha}(\mathbb{T}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，我们希望求解 $(g, b, \mu) \in H^{k+2,\alpha}_{0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 使其满足方程

$$\begin{aligned} \mathscr{L} g - \mu &= S, \\ \Omega_0^2 b - \partial_{x_1}^2 U_0(a_0,0) b - W_{0,a_0}[g] &= Z, \\ \pi \hat{g}_0 &= M. \end{aligned} \tag{5.21}$$

首先，我们有 $\hat{g}_0 = M/\pi$。对于（5.21）中的第一个方程，我们将 S 按其傅里叶系数 $(\hat{S}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 展开。于是，（5.21）中的第一个方程变为

$$\sum_{n\geq 1} \omega_n \hat{g}_n e^{in\varphi} + \sum_{n\leq -1} \omega_n \overline{\hat{g}_{|n|}} e^{in\varphi} = \hat{S}_0 - \frac{2\omega_0 M}{\pi} + \mu + \sum_{n\geq 1} \hat{S}_n e^{in\varphi} + \sum_{n\leq -1} \overline{\hat{S}_{|n|}} e^{in\varphi}.$$

回顾一下，$\overline{\hat{S}_{-n}} = \hat{S}_n$ 对于 $n \geq 0$ 由于 S 是一个实值函数。于是我们选择 $\mu = 2\omega_0 M/\pi - \hat{S}_0$。由于乘子 ω_n 的 $\mathscr{L}$ 根据假设均非零（2.16），我们可以定义 $\mathscr{L}^{-1} = OP(\omega_n^{-1})$。根据引理5.3 和5.5，我们可以写成

$$\omega_n = \frac{|n| + b_n}{\kappa}, \quad \kappa^{-1} := -\phi_0'(1)^2,$$

满足上确界$_{n\neq 0}|b_n||n|^{-\gamma}\leq C$对任意$\gamma>0$。注意，根据定理2.1中的假设，我们还有$\phi_0'(1)\neq 0$。因此可以应用引理5.8，得到$F\in C^{k+2,\alpha}_0(\mathbb{T})$定义为

$$F=OP(\omega_n^{-1})(S-\hat{S}_0).$$

注意，F是实值的，且对于$n\geq 1$，有$\hat{F}_n=\hat{S}_n/\omega_n$。

The 函数F仅在环面上定义。现在我们通过以下方式定义函数g：

$$g(z)=\hat{g}_0 z+\sum_{n\geq 1}\hat{F}_n z^{n+1}=\frac{M}{\pi}z+\sum_{n\geq 1}\frac{\hat{S}_n}{\omega_n}z^{n+1}. \tag{5.22}$$

我们需要证明$g\in H^{k+2,\alpha}_0$。为此，定义函数$\tilde{F}:=\frac{1}{2}(I+\mathscr{H})F$，回忆一下，$\tilde{\mathscr{H}}$表示希尔伯特变换。函数$F$的傅里叶分解为

$$\tilde{F}(\varphi)=\sum_{n\geq 1}\hat{F}_n e^{in\varphi},\quad \left\|\tilde{F}\right\|_{C^{k+2,\alpha}(\mathbb{T})}\leq\|F\|_{C^{k+2,\alpha}(\mathbb{T})}.$$

最后一个不等式源于以下事实：$\mathscr{H}:C^{k+2,\alpha}(\mathbb{T})\to C^{k+2,\alpha}(\mathbb{T})$有界，且$\tilde{\|\mathscr{H}\|}=1$。由于$F$仅包含傅里叶模态$n\geq 0$，因此在$C^{k+2,\alpha}(\mathbb{D})$中存在唯一的全纯延拓。该延拓的幂级数展开为

$$\tilde{F}(z)=\sum_{n\geq 1}\hat{F}_n z^{n+1}.$$

因此，函数$g(z):=\hat{g}_0 z+\tilde{F}(z)\in H^{k+2,\alpha}_0$满足（5.22），因而也满足（5.21）。最后，我们确定b在（5.21）中的值。为此，我们利用势U_0的径向对称性，得到

$$D_Y^2U_0(Y)=D_Y^2[U_0(|Y|)]=U_0'(|Y|)\left(\frac{|Y|^2I-Y\otimes Y}{|Y|^3}\right)+U_0''(|Y|)\frac{Y\otimes Y}{|Y|^3}.$$

因此，我们需要将$Y=X_0=(a_0,0)$代入前面的公式来求解，

$$\left(\Omega_0^2-\frac{U_0''(a_0)}{a_0}\right)b=Z+W_{0,a_0}[g].$$

此时$W_{0,a_0}[g]$是一个确定的实数。根据引理3.6，我们有$U_0''(a_0)\leq 0$。因此，我们可以根据b将上述方程求逆。

上述论证表明，$D_{(h,a,\lambda)}\mathbb{F}(0,a_0,\lambda_0,0)$是一一对应的。因此，它是一个同构，从而证明了该结论。

6 定理2.1 的证明及其推论

在最后一节中，我们首先给出定理2.1的证明。我们还将详细说明推论2.2，它是前述主要结果的直接推论。

定理2.1的证明

根据命题4.9函数$\mathbb{F}$是连续可微的。在假设（2.16）下，我们可以通过命题$D_{(h,a,\lambda)}\mathbb{F}(0,a_0,\lambda_0,0)$反演线性化算子5.2。因此，我们可以应用隐函数定理，参见引理3.3。证明至此完成。

推论 2.2的证明

为使论证清晰，我们将证明分为三个步骤。

步骤 1：对称性。我们首先证明区域 E_h 的对称性。为此，我们证明函数 $g(z) := h(z) \in H^{k+2,\alpha}_0$ 满足 $\mathbb{F}(g, a, \lambda, m) = 0$。注意，$g$ 导出一个保角映射 f_g，该映射将区域 $R(E_h)$ 参数化，其中 $R(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$。由 (2.3) 的解的唯一性可知，流函数满足 $\psi_g(x) = \psi_h(Rx)$。此外，回顾 $X = (a, 0)$，我们有，

$$U_g(x) = U_{R(E_h)}(x) = U_h(Rx),$$
$$U_X(x) = U_X(Rx).$$

由于 (h, a, λ, m) 是一个解，由（2.6）可得，它等价于 $\mathbb{F}$ 的第一分量；再应用 $x \mapsto Rx$

$$\frac{1}{2}|\nabla^\perp \psi_g(x)|^2 - \frac{\Omega_0^2}{2}|x|^2 + U_g(x) + mU_X(x) = \lambda \quad x \in \partial E_g,$$

$\mathbb{F}(g, a, \lambda, m) = 0$ 的其他分量可同理得到。根据隐函数定理的唯一性结论，我们有 $f_h(z) = f_g(z) = f_h(z)$，即区域 E_h 具有对称性。

步骤 2：解。 区域 E_h 的对称性意味着

$$\partial_{x_2} U_h(X) = 0 = \Omega_0^2 X_2.$$

现在，我们可以按照（P）中的定义来定义非静水压力 2.5，并注意到，对于 1.8）中的方程组，除了最后一个方程外，其余方程均满足 $v = \nabla^\perp \psi_h$，$X = (a, 0)$ 以及 P。

步骤 3：质心。 现在证明（1.8）中的最后一个方程是（1.8）中其他方程的推论。更确切地说，它们意味着质心为零

$$X_c := \frac{1}{\pi + m}\left(\int_{E_h} x\, dx + mX\right) = 0.$$

结合式（1.8）中的第一个方程和第五个方程可得

$$(\pi + m)\Omega_0^2 X_c = \int_{E_h} ((v \cdot \nabla)v + 2\Omega_0 Jv + \nabla P)\, dx + m\nabla U_h(X).$$

由于 $(v \cdot \nabla)v = \mathrm{div}(v \otimes v)$ 且 $v \cdot n_h = 0$ 在 ∂E_h 上成立，第一项为零。此外，由于 $v = \nabla^\perp \psi_h = J\nabla \psi_h$ 且 $\psi_h = 0$ 在 ∂E_h 上成立，我们有

$$\int_{E_h} Jv\, dx = -\int_{E_h} \nabla \psi_h\, dx = -\int_{\partial E_h} \psi_h n_h\, dS = 0.$$

对于非静水压力，我们有

$$\int_{E_h} \nabla P\, dx = \int_{E_h} P n_h\, dS = \int_{\partial E_h} (U_h + mU_X) n_h\, dS,$$

其中用到了式（1.8）中的第四个方程。此外，在情形（A）中，我们有

$$m\nabla U_h(X) = -m\int_{E_h} \nabla_y \left[\frac{1}{|X - y|^\nu}\right] dy = -m\int_{\partial E_h} \frac{n_h}{|X - y|^\nu}\, dS(y) = -m\int_{\partial E_h} U_X n_h\, dS.$$

在情形（B）中，我们得到相应的等式。因此

$$(\pi + m)\Omega_0^2 X_c = \int_{\partial E_h} U_h n_h\, dS.$$

根据相互作用势的对称性，在情形（A）

$$\int_{\partial E_h} U_h \, n_h \, dS = \int_{E_h} \nabla U_h(x) \, dx = \nu \int_{E_h} \int_{E_h} \frac{x-y}{|x-y|^{\nu+2}} \, dxdy = 0.$$

然而，由于奇点，该论证仅适用于 $\nu < 1$ 。对于 $\nu = 1$ ，我们采用一种近似方法。在情形（B）中，同样的结论也成立。这意味着 $X_c = 0$，因为$\Omega_0 \neq 0$，从而证明得证。

参考文献

[1] M. Abramowitz 和 I. Stegun。《数学函数手册：公式、图表与数学表格》。应用数学丛书。Dover Publications，1965年。[2] H. W. Alt、L. A. Caffarelli 和 A. Friedman。非对称射流。《纯粹与应用数学通讯》，35(1):29–68，1982年。[3] H. W. Alt、L. A. Caffarelli 和 A. Friedman。重力作用下的射流。《纯粹与应用数学杂志》，331:58–103，1982年。[4] H. W. Alt、L. A. Caffarelli 和 A. Friedman。轴对称射流。*Arch. RationalMech. Anal.*，81(2):97–149，1983年。[5] J. F. G. Auchmuty 和 R. Beals。旋转恒星模型。《天体物理学杂志》，165:79– 82，1971年。[6] J. Burbea。涡斑的运动。《数学物理快报》，6:1–16，1982年。[7] R. B. Burckel。《经典复分析导论，第1卷》，纯粹与应用数学第82卷。Academic Press，纽约-伦敦，1979年。[8] D. Cardona。周期伪微分算子的Hölder-Besov有界性。《伪微分算子及其应用杂志》，8(1):13–34，2017年。[9] S. Chandrasekhar。《椭球形平衡构形》。耶鲁大学出版社，1969年。[10] S. Chanillo 和 Y. Y. Li。关于匀速旋转恒星的直径。《数学物理通讯》，166(2):417–430，1994年。[11] G. M. Constantine 和 T. H. Savits。带应用的多元法阿·迪布鲁诺公式。《美国数学会汇刊》，348(2):503–520，1996年。[12] K. Deimling。《非线性泛函分析》。Springer，第2版，1985年。[13] J. Dolbeault 和 J. Fernández。扁平旋转引力系统的局部化极小化子。《亨利·庞加莱研究所年刊*C*辑：非线性分析》，25(6):1043–1071，2008年。[14] M. Giaquinta 和 L. Martinazzi。《椭圆方程组、调和映射与极小图形正则性理论导论》。高等师范学校丛书。比萨高等师范学校，2013年。[15] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger。《二阶椭圆偏微分方程》。Springer柏林海德堡，2001年。[16] H. Grad。等离子体的环形约束。《流体物理学》，10(1):137–154，1967年。

[17] Z. Hassainia、N. Masmoudi 和 M. H. Wheeler。旋转涡斑的整体分岔。《纯粹与应用数学通讯》，73(9):1933–1980，2020年。[18] U. Heilig。关于Lichtenstein对旋转牛顿恒星的分析。*Ann. Inst. H. PoincaréPhys. Théor.*，60(4):457–487，1994年。[19] T. Hmidi、J. Mateu 和 J. Verdera。旋转涡斑的边界正则性。*Archive for Rational Mechanics and Analysis*，209:171–208，2013年。[20] A. Ionescu 和 F. Pusateri。二维重力水波方程组的整体解。《数学发明》，199:653–804，2015年。[21] J. Jang 和 T. Makino。关于Euler-Poisson方程的缓慢旋转轴对称解。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，225(2):873–900，2017年。[22] J. Jang 和 T. Makino。关于Euler-Poisson方程的旋转轴对称解。*J. Differential Equations*，266(7):3942–3972，2019年。[23] J. Jang 和 J. Seok。关于匀速旋转双星与星系。*Arch. Ration.Mech. Anal.*，244(2):443–499，2022年。[24] Y. Y. Li。关于匀速旋转恒星。*Arch. Rational Mech. Anal.*，115(4):367–393，1991年。[25]L. Lichtenstein。《关于旋转流体平衡构形的研究：其粒子依据牛顿定律相互吸引。第一篇论文：均匀流体。一般存在性定理。》*Math. Z.*，1(2-3):229–284，1918年。[26]L. Lichtenstein。《关于旋转流体平衡构形的研究：其粒子依据牛顿定律相互吸引。第三篇论文：非均匀流体。地球的形状。》*Math. Z.*，36(1):481–562，1933年。[27] T. Luo 和 J. Smoller。有界区域内具有自引力的旋转流体。*Arch.Ration. Mech. Anal.*，173(3):345–377，2004年。[28] T. Luo 和 J. Smoller。可压缩Euler-Poisson方程旋转恒星解的存在性与非线性稳定性。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，191(3):447–496，2009年。[29] G. Rein。恒星动力学中的扁平稳态——存在性与稳定性。*Communicationsin Mathematical Physics*，205(1):229–247，1999年。[30] G. Rein。第5章——天体物理学中的无碰撞动理学方程：Vlasov-Poisson方程组。载于C. Dafermos和E. Feireisl（编），《微分方程手册：演化方程》，第3卷，第383–476页。North-Holland，2007年。[31] W. Rudin。《实分析与复分析》。数学丛书。McGraw-Hill，1987年。[32] V. D. Shafranov。磁场中的等离子体环面平衡。*Soviet Physics.JETP*，10:775–779，1960年。[33] W. A. Strauss 和 Y. Wu。旋转恒星与星系的稳态。*SIAM J. Math.Anal.*，49(6):4865–4914，2017年。[34] W. A. Strauss 和 Y. Wu。快速旋转恒星。《数学物理通讯》，368(2):701–721，2019年。[35] S. Wu。二维完整水波问题在索伯列夫空间中的适定性。《数学发明》，130(1):39–72，1997年。

[36]S. Wu. 三维完整水波问题的整体适定性。《数学发明》, 184(1):125–220, 2011.

Diego Alonso-Orán拉拉古纳大学，数学分析系，
C/Astrofísico Francisco Sánchez s/n，38271 拉拉古纳，西班牙
电子邮箱：dalonsoo@ull.edu.es

Bernhard Kepka波恩大学，应用数学研究所，
Endenicher Allee 60，D-53115 波恩，德国电子邮箱：
kepka@iam.uni-bonn.de

Juan J. L.Velázquez波恩大学，应用数学研究所，
Endenicher Allee 60，D-53115 波恩，德国电子邮箱：
velazquez@iam.uni-bonn.de