arXiv:2302.01156v2 [math.PR] 8 Feb 2023

带限球面随机场的节点长度不存在平滑相变

ANNA PAOLA TODINO

摘要。本文研究带限球面随机波的节点长度方差。当频率窗口包含的特征函数数量线性增长时，节点长度的方差随频率线性增长；而在仅考虑单个特征函数时，方差则呈对数增长。因此，自然会猜想方差随频率窗口中特征函数的数量平滑过渡；然而，我们在此证明，只要特征函数数量呈次线性增长，渐近方差就呈对数增长，这意味着频率窗口在“收缩”。我们利用克里斯托费尔-达布公式建立场及其一阶和二阶导数的协方差函数，从而得出这一结果。由此，我们可以计算高频下的二点相关函数，进而推导出方差的渐近行为。

1. 引言

1.1. 拉普拉斯特征函数与 Berry 随机波模型。设 $(\mathscr{M}, g)$ 是一个紧致黎曼流形， Δ_g 是 $\mathscr{M}$ 上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子。我们将相应的特征值记为 $\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$ ，并以正交归一基 $L^2(\mathscr{M})$ 表示，该基由特征函数 $\{f_{\lambda_j}\}_{j\geq 0}$ 组成，即

$$\Delta_g f_{\lambda_j} + \lambda_j f_{\lambda_j} = 0. \tag{1.1}$$

f_λ 的结点集是其零点集

$$f_\lambda^{-1}(0) := \{x \in M : f_\lambda(x) = 0\}.$$

已知， f_λ^{-1} 除了有限个点 [6] 外，是光滑曲线的并集。Yau 猜想其体积（二维情形下的节点长度）满足

$$c\sqrt{\lambda} \leq Vol(f_\lambda^{-1}(0)) \leq C\sqrt{\lambda} \tag{1.2}$$

其中 c、$C > 0$ 是仅依赖于 $\mathscr{M}$ 的常数。Donnelly 和 Fefferman [8] 证明了 Yau 猜想对任意实解析流形（任意维数）均成立；最近，Logunov 和 Malinnikova [12, 14, 13] 在光滑情形下证明了下界，并给出了多项式上界。鉴于 Berry 猜想 [4]，近年来对拉普拉斯特征函数的研究进一步 intensifies。事实上，根据 Berry 的观点，高能（$\lambda \to \infty$）确定性特征函数的行为应当具有普适性，至少在一般的混沌曲面上如此；这意味着可以将大特征值 λ 对应的特征函数 f_λ 与波长为 $\sqrt{\lambda}$ 的随机单色平面波进行比较，也就是说，与定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的（按分布唯一的）中心高斯随机场进行比较，其协方差核为

$$J_0(\sqrt{\lambda}\|x-y\|), \qquad x, y \in \mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

J_0 为零阶第一类贝塞尔函数。事实上，Berry 随机波模型（RWM）是中心化高斯随机场 $u\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 由单色各向同性波构成，其协方差函数为

$$r(x, y) = r(x - y) := \mathbb{E}[u(x) \cdot u(y)] = J_0(|x - y|).$$

Berry 随机波模型近来受到了许多作者的研究；关于节点长度和结点集的一些最新研究，请参阅 [30], [20], [7], [21] 。

罗马第一大学统计系，电子邮件：annapaola.todino@uniroma1.it。2020年数学主题分类：60G60、42C10、33C55、62M15、35P20。关键词和短语：高斯特征函数、球谐函数、Berry 消去、带限函数。

1.2. 随机球谐函数。在形如（1.1）的模型中，随机球面特征函数这一情形引起了广泛关注。其动机主要有两个：一方面是 Berry 猜想；事实上，在缩放极限下，随机球面特征函数与欧几里得情形具有相同的协方差结构；另一方面则是其在宇宙微波背景中的应用 [15]。下面介绍该模型。

考虑 $\mathscr{M} = \mathbb{S}^2$，进而得到亥姆霍兹方程

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} T + \lambda_\ell T = 0, \tag{1.4}$$

其中，$\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 是球面拉普拉斯算子，且对于 $\ell \in \mathbb{N}$，$\lambda_\ell = \ell(\ell+1)$。球面特征函数定义为方程（1.4）的解。对于任意特征值 $-\lambda_\ell$，我们可以任意选取一个 L^2-正交归一基 $\{Y_{\ell m}(\cdot)\}_{m=-\ell,\ \ldots\ldots,\ \ell}$，并考虑如下形式的随机特征函数

$$T_\ell(x) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(x), \tag{1.5}$$

其中，$\{a_{\ell m}\}$ 是随机球谐系数数组；除条件$\bar{a}_{\ell m} = (-1)^m a_{\ell,\ -m}$外，它们相互独立；对于 $m \neq 0$，它们是标准复值高斯分布变量，而 $a_{\ell 0}$ 是标准实值高斯变量。它们满足

$$\mathbb{E}[a_{\ell m} \bar{a}_{\ell' m'}] = \delta_\ell^{\ell'} \delta_m^{m'}.$$

随机场 $\{T_\ell(x)\colon\ x \in \mathbb{S}^2\}$ 是各向同性中心高斯场，其协方差函数为

$$\mathbb{E}[T_\ell(x) T_\ell(y)] = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos d(x,y)) \quad \text{and then} \quad \mathrm{Var}(T_\ell(x)) = \frac{2\ell+1}{4\pi},$$

其中 P_ℓ 表示勒让德多项式，$d(x,y) = \arccos\langle x,\ y\rangle$ 表示球面上的测地距离，更多细节参见 [15]。T_ℓ 的结点集为

$$T_\ell^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{S}^2 : T_\ell(x) = 0\}.$$

其体积（即节点长度）及其在高能区域中的其他性质已得到广泛研究，例如参见 [19], [18], [33], [32], [16]。

值得强调的是，随机球谐函数的缩放极限就是 Berry 随机波模型（1.3）。事实上，Hilb 渐近公式（参见 [26] 中的公式 8.21.7 和 [32],）保证，对于每个 $\epsilon > 0$，关于 $\theta \in [0, \pi - \epsilon]$一致成立，

$$P_\ell(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}} J_0(\ell\theta), \qquad \ell \to +\infty. \tag{1.6}$$

在成立的情况下，Berry 假设蕴含（1.2）中的丘成桐猜想（参见 [35]）。

Berry 猜想远不止适用于宏观尺度，即随机波模型（1.3）也适用于收缩区域。例如，正如 [27], 所示，它应当是 $f_\lambda^{-1}(0) \cap B_{r_\lambda}$的良好模型，尤其适用于位于半径略大于普朗克尺度的收缩测地球 B_{r_λ} 内的节点长度：$r_\lambda \approx \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$，其中 $C \gg 0$足够大。关于随机场结点结构的最新综述，参见 [34]。

1.3. 带限函数。另一个重要而有趣的模型，是光滑黎曼流形 $\mathscr{M}$ 上所谓的带限函数。事实上，圆球面存在谱简并，而对于一般流形，每个特征空间的维数都为一，因此无法在特征空间上引入高斯系综。对于一般流形 $\mathscr{M}$，设 λ_j 为特征值，f_j 为相应的特征函数。在这种情况下，人们不考虑随机特征函数，而是考虑能量窗口逐渐增大的特征函数随机组合，窗口类型有以下两种：

$$f^L(x) = \sum_{\lambda_j \in [0,\lambda]} a_j f_j(x)$$

（称为长程相关）

$$f^S(x) = \sum_{\lambda_j \in [\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}+1]} a_j f_j(x)$$

（称为短程相关），如 $\lambda \to \infty$ 所示。在 [3] 和 [31] 中，作者求出了长程相关情形下节点长度的期望值；而在 [31] 中，他们求出了短程相关情形下的期望值。另请参见 [29]，了解一般台球系统上特征函数随机组合 $f^L(x)$ 和 $f^S(x)$ 的边界交点数量研究；参见 [24], 了解带限随机函数节点集的拓扑；参见 [2]，了解其节点域的体积分布；以及参见 [10], 了解非高斯带限随机函数的零点体积。

本文关注球面上带限函数的节点长度。下一节将介绍本文的模型和主要结果。

2. 主要结果

2.1. 节点长度 限函数在球面上的节点长度。本文考虑以下随机场 d,

$$\bar{T}_{\alpha_n}(x) = C_{\alpha_n} \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} T_\ell(x), \tag{2.1}$$

其中， T_ℓ 在 (1.5) 中定义， α_n 是一个序列，满足 $\alpha_n = 1 - g(n)$，且 $g(n) = o(1)$，当 $n \to \infty$ 时，并且满足$ng(n) \to \infty$。系数 C_{α_n} 选取为满足

$$Var(\bar{T}_{\alpha_n}(x)) = C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} Var(T_\ell(x)) = C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} = 1.$$

因此我们取

$$\begin{aligned} C_{\alpha_n}^2 &= \frac{4\pi}{n^2(1-\alpha_n^2)+2n+1} = \frac{4\pi}{n^2(1-(1-g(n))^2)+2n+1} = \frac{4\pi}{n^2(1-1+2g(n)-g(n)^2)+2n+1} \\ &= \frac{4\pi}{2g(n)n^2 - g(n)^2n^2 + 2n + 1}. \end{aligned}$$

$\bar{T}_{\alpha_n}(x)$ 的协方差函数为

$$\Gamma_{\alpha_n}(x,y) := \mathbb{E}[\bar{T}_{\alpha_n}(x)\bar{T}_{\alpha_n}(y)] = C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(x,y) \tag{2.2}$$

而随机场 T_{α_n} 的节点长度按定义为，

$$\mathscr{L}_{\alpha_n} := len(\bar{T}_{\alpha_n}^{-1}(0)) = len\{x \in \mathbb{S}^2 : \bar{T}_{\alpha_n}(x) = 0\}.$$

我们的主要结果如下。

定理 2.1. 当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$Var[\mathscr{L}_{\alpha_n}] = \frac{1}{32}\log n + O(1) + O(g(n)\log n). \tag{2.3}$$

2.2. 无相变与 Berry 消去。我们将定理 2.1 与单个特征函数 T_ℓ （对应于 (2.1) 中的情形 $\alpha_n \equiv 1$ ）的结果进行比较。 T_ℓ 的节点长度已在 [32, 16] 中得到研究。更具体地，记

$$\mathscr{L}_\ell := len\{x \in \mathbb{S}^2 : T_\ell(x) = 0\},$$

已在 [32] 中证明

$$Var(\mathscr{L}_\ell) = \frac{\log \ell}{32} + O(1), \tag{2.4}$$

当 $\ell \to \infty$ 时。该结果表明，渐近方差呈对数级，因此其阶低于 ℓ ；根据问题的自然尺度分析，预期方差应为这一阶，而非零水平的情形也如此（例如参见 [23]）。事实上，最初的猜想是

$$Var(len(T_\ell^{-1}(z))) = c_1 \cdot \ell + c_2 \cdot \log \ell + O(1) \tag{2.5}$$

对于任意水平 $z \in \mathbb{R}$ 且满足 $c_1, c_2 \geq 0$，当 $z \in \mathbb{R}$时。然而，结果表明，当 $z = 0, c_1$ 会消失，并得到式（ 2.4），这正如 Berry 对随机波模型的预测 [5] 。这一现象称为 Berry 消去现象，这是因为二点相关函数的长程渐近中的首个非恒定项（见 [32]和第 3.2 节）是纯振荡的，因此不会对方差产生贡献，而非振荡的主导项则相互抵消。这一现象似乎具有普遍性。它也出现在环面 [11] 上，并且人们认为它适用于一般流形上的特征函数随机组合。从定理 2.1 可以看出，这一现象在我们的情形中也成立。然而，当我们考虑对数量呈线性增长的多个特征函数取平均时，方差会随频率线性增长。鉴于此，自然可以猜想，随着取平均的特征函数数量变化，存在一种平滑过渡。这正是我们研究模型（2.1）的原因。尽管我们预期这里的方差行为可能会因 α_n的选择而异，但定理 2.1 表明，只要频率窗口包含的特征函数数量呈次线性增长，渐近方差仍为对数级，因此不会随着序列 α_n 出现光滑相变。

2.3. 从 Wiener-Itˆo 混沌的角度进行诠释。定理 2.1 的结果可以从节点长度展开为 Wiener-Itˆo 混沌的 $L^2(\Omega)$ 展开的角度来诠释（另见 [34]中的讨论）；Wiener-Itˆo 混沌是由埃尔米特多项式张成的正交空间。首先，我们回顾一下，埃尔米特多项式 $H_q(x)$ 定义为 $H_0(x) = 1$，对于 $q = 2, 3, \ldots\ldots$

$$H_q(x) = (-1)^q \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^q \phi(x)}{dx^q},$$

其中 $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$。

我们考虑维纳–伊藤混沌展开

$$\mathscr{L}_{\alpha_n} = \sum_{q=0}^{\infty} \mathscr{L}_{\alpha_n}[q], \tag{2.6}$$

其中， $\mathscr{L}_{\alpha_n}[q]$ 表示 $\mathscr{L}_{\alpha_n}$ 在 q阶混沌分量上的投影；该分量空间由 L^2完备化生成，其元素为如下形式的线性组合:

$$H_{q_1}(\xi_1) \cdot H_{q_2}(\xi_2) \cdots H_{q_k}(\xi_k), \qquad k \geq 1,$$

其中 $q_i \in \mathbb{N}$ 满足 $q_1 + \cdots + q_k = q$，且（$\xi_1, \ldots, \xi_k$）是标准实高斯向量。

定理 2.1 的结果可与完整球面 $\mathbb{S}^2$ 上关于球谐函数节点长度 $T_\ell(x)$ 在 [32, 16] 中得到的结果进行比较。在该情形下，利用高斯场这些非线性泛函的维纳–伊藤混沌展开，可以得出（中心化后）单独一项主导了 $L^2(\Omega)$ 展开，即第四阶混沌分量。更确切地说，定义随机变量

$$h_{\ell,4} := \int_{\mathbb{S}^2} H_4(f_\ell(x))\, dx,$$

称为样本三谱，参见例如 [16, 17], 我们有

$$\mathrm{Var}(h_{\ell,4}) = \frac{\log \ell}{32} + O(1).$$

¯定理 2.1 的结果表明，节点长度 T_{α_n}也会出现同样的情况。也就是说，随机变量

$$h_{\alpha_n n;4} := \int_{\mathbb{S}^2} H_4(\bar{T}_{\alpha_n}(x))\, dx$$

在式 (2.6) 的维纳–伊藤混沌展开中占主导地位。

¯请注意，在 T_ℓ 的情形下，第二混沌投影恰好为零，而在 T_{α_n} 的情形下，它并不为零。不过，它并非维纳–伊藤混沌展开中的主导项。

作为进一步的结果，本文直接计算了 $\mathscr{L}_{\alpha_n}$ 的第二混沌分量，相关内容见下述命题。

命题 2.2. 如 $n \to \infty$，我们有

$$Var(\mathscr{L}_{\alpha_n}[2]) = \frac{2\pi^2}{3} g(n) \left[1 + O\left(g(n)\right) + O\left(\frac{1}{ng(n)}\right) \right]. \tag{2.7}$$

2.4. 定理 2.1 的证明。证明定理 2.1 时，我们沿用 [32] 中关于球面特征函数节点长度的相同思路。具体而言，我们采用 Kac-Rice公式，将长度¯的方差计算化简为二点相关函数的计算；该函数由值 T_{α_n} 及其梯度 $\nabla \bar{T}_{\alpha_n} \in T_x(\mathbb{S}^2)$的分布给出，其中所有 $x \in \mathbb{S}^2$ 均成立。接着，我们推导式 (2.1) 中定义的场的二点相关函数，并研究其渐近行为。为此，我们需要研究高能极限下的协方差函数 (2.2) 及其一阶和二阶导数。请注意，通常对 T_ℓ 方差的分析会利用 Hilb 渐近公式（第 197 [26] 页的公式 (8.21.17)）：

$$P_\ell(\cos\theta) = \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2} J_0((\ell + 1/2)\theta) + \delta(\theta), \tag{2.8}$$

对于 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 均一致，其中 J_0 是 0 阶贝塞尔函数，误差项为

$$\delta(\theta) \ll \begin{cases} \theta^{1/2} O(\ell^{-3/2}), & C\ell^{-1} < \theta < \pi/2 \\ \theta^2 O(1), & 0 < \theta < C\ell^{-1}, \end{cases}$$

其中， $C > 0$ 是任意常数，而“O”–记号中涉及的常数仅依赖于 C。

这里我们无法直接将 (2.8) 代入 (2.2)。事实上，将 Hilb 渐近公式代入 (2.2) 中的求和后，我们无法控制误差项 $\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\delta(\theta)$，因为它增长得比主项更快。为避免这一问题，我们利用以下公式，该公式见于 [9]，并由所谓的克里斯托费尔-达布公式推导得出 [1],

$$\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(x)Y_{\ell,m}(y) = \frac{n+1}{4\pi}P_n^{(1,0)}(\cos\theta(x,y)), \tag{2.9}$$

其中 $P_n^{(1,0)}$是雅可比多项式，通常定义为

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{s=0}^{n}\binom{n+\alpha}{s}\binom{n+\beta}{n-s}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-s}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{s},$$

$$R_{1,n}(\theta) = \begin{cases}\theta^3 O(n), & 0\le\theta\le c/n\\ \theta^{1/2}O(n^{-3/2}), & c/n\le\theta\le\pi-\epsilon\end{cases}$$

且 J_1 是 1 阶贝塞尔函数。注意，在我们的记号中，$P_\ell(x) = P_\ell^{(1,0)}(x)$。

(2.9) 可将协方差函数写为

$$\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta) = C_{\alpha_n}^2\left[\frac{n+1}{4\pi}P_n^{(1,0)}(\cos\theta(x,y)) - \frac{n\alpha_n}{4\pi}P_{n\alpha_n-1}^{(1,0)}(\cos\theta(x,y))\right]$$

从而消去求和。此时，我们可以利用 [26], 中的定理 8.21.13 给出的雅可比多项式渐近公式，即

$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta) = n^{-1/2}k(\theta)\cos(N\theta+\gamma) + O(n^{-1/2}),$$

其中

$$k(\theta) = \pi^{-1/2}(\sin\theta/2)^{-\alpha-1/2}(\cos\theta/2)^{-\beta-1/2},$$

$$N = n+(\alpha+\beta+1)/2 \quad \text{and} \quad \gamma = -(\alpha+1/2)\pi/2.$$

为推导出 t 关于协方差函数的一阶和二阶导数的渐近行为，我们利用了 t

$$\frac{d}{dx}P_n^{a,b}(x) = \frac{1}{2}(a+b+n+1)P_{n-1}^{(a+1,b+1)}(x)$$

（见 (4.5.5) [26]），并以类似方式进行。

2.5. 论文结构。本文的组织如下。在第3节中，我们首先给出$\mathscr{L}_{\alpha_n}$的一阶和二阶矩。特别地，我们给出用二点相关函数表示二阶矩的显式公式，并给出其在高能极限下的渐近展开（引理 3.1）。在第4节中，我们利用引理 3.1证明定理 2.1，而该引理已在第5节中得到证明。在第6节中，我们计算 $\mathscr{L}_{\alpha_n}$的第二混沌分量，并证明命题 2.2。最后，在附录 A中，我们研究协方差函数及其导数的渐近行为；附录 B汇总了证明引理 3.1时所使用的一些技术性结果。

致谢。作者谨向 Domenico Marinucci 和 Igor Wigman 致以感谢，感谢他们提出这一问题，并给予有益的讨论和评论。作者还感谢 Maurizia Rossi 的一些富有洞见的交流。本工作部分得到了“GNAMPA-INdAM 研究项目”（CUP代码：E55F22000270001）的资助。

3. 二阶矩的显式积分公式

本节给出节点长度的一阶矩 $\mathscr{L}_{\alpha_n}$，并通过引入两点相关函数，利用Kac-Rice公式表示其二阶矩。

首先考虑梯度

$$\nabla\bar{T}_{\alpha_n}(x) = C_{\alpha_n}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\nabla T_\ell(x);$$

节点长度可以形式化地写为

$$\mathscr{L}_{\alpha_n} = \int_{\mathbb{S}^2}\delta_0(\bar{T}_{\alpha_n}(x))||\nabla\bar{T}_{\alpha_n}(x)||\,dx$$

（例如见 [16]）。

$\bar{\nabla} T_{\alpha_n}(x)$ 的每个分量的方差为

$$D_{\alpha_n} := C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{\ell(\ell+1)}{2}.$$

我们对梯度进行归一化，使其各分量的方差等于 1。因此

$$\mathscr{L}_{\alpha_n} = \sqrt{D_{\alpha_n}} \int_{\mathbb{S}^2} \delta_0(\bar{T}_{\alpha_n}(x)) ||\tilde{\nabla} \bar{T}_{\alpha_n}(x)|| \, dx, \quad \text{with} \quad \tilde{\nabla} \bar{T}_{\alpha_n}(x) := \frac{\nabla \bar{T}_{\alpha_n}(x)}{\sqrt{D_{\alpha_n}}}.$$

3.1. 节点长度的一阶矩。对于 $\epsilon > 0$，我们定义

$$\mathscr{L}_{\alpha_n}^{\epsilon} := \int_{\mathbb{S}^2} ||\nabla \bar{T}_{\alpha_n}(x)|| \chi_{\epsilon}(\bar{T}_{\alpha_n}(x)) \, dx.$$

在 [16] 和 [25] 中采用相同步骤可证明，当 $\epsilon \to 0$ 时，

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{E}[|\mathscr{L}_{\alpha_n}^{\epsilon} - \mathscr{L}_{\alpha_n}|^2] = 0$$

在 L^2- 意义下。于是，节点长度的均值为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathscr{L}_{\alpha_n n}] &= \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{E}[\mathscr{L}_{\alpha_n n}^{\epsilon}] = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \sqrt{D_{\alpha_n}} \mathbb{E}[1_{-\epsilon,\epsilon}(\bar{T}_{\alpha_n}(x)) ||\tilde{\nabla} \bar{T}_{\alpha_n}(x)||] \\ &= \sqrt{D_{\alpha_n}} \frac{|\mathbb{S}^2|}{2}. \end{aligned}$$

3.2. 二点相关函数与二阶矩。本节针对我们的 $\tilde{}$ 场，沿用并调整了 [32] 中的步骤。二点相关函数 $K(x,y)$ 可内在地定义为

$$\tilde{K}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{1-\Gamma_{\alpha_n}(x,y)^2}} \mathbb{E}[||\nabla \bar{T}_{\alpha_n}(x)|| \cdot ||\nabla \bar{T}_{\alpha_n}(y)|| | \bar{T}_{\alpha_n}(x) = \bar{T}_{\alpha_n}(x) = 0].$$

现在我们给出 Kac-Rice公式。给定 $x, y \in \mathbb{S}^2$，我们考虑两个局部标准正交标架 $F^x(z) = \{e_1^x, e_2^x\}$ 和 $F^y(z) = \{e_1^y, e_2^y\}$，它们分别定义在 x 和 y 的某个邻域内。

对于 $x, y \in \mathbb{S}^2$，我们定义以下随机向量：

$$Z = (\bar{T}_{\alpha_n}(x), \bar{T}_{\alpha_n}(y), \tilde{\nabla} \bar{T}_{\alpha_n}(x), \tilde{\nabla} \bar{T}_{\alpha_n}(y)) \in \mathbb{R}^2 \times T_x(\mathbb{S}^2) \times T_y(\mathbb{S}^2). \tag{3.1}$$

随机向量 Z 是一个均值为零的高斯分布，其协方差矩阵为

$$\Sigma = \Sigma(x,y) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix},$$

其中

$$A = A_{\alpha_n}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \Gamma_{\alpha_n} \\ \Gamma_{\alpha_n} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$B = B_{\alpha_n}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_y \Gamma_{\alpha_n} \\ \nabla_x \Gamma_{\alpha_n} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

and

$$C = C_{\alpha_n}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{C_{\alpha_n}^2}{2} \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1) I_2 & H \\ H^t & \frac{C_{\alpha_n}^2}{2} \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1) I_2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

其中 H 为“伪海森矩阵”

$$H_{\alpha_n}(x,y) = (\nabla_x \otimes \nabla_y) \Gamma_{\alpha_n}(x,y),$$

i.e.

$H = (h_{jk})_{j,\ k=1,\ 2}$ 其各项由 $h_{jk} = \frac{\partial^2}{\partial e_j^x \partial e_k^y} \Gamma_{\alpha_n}(x,y)$ 给出。

在给定 $\bar{T}_{\alpha_n}(x) = \bar{T}_{\alpha_n}(y) = 0$ 的条件下，(3.1) 中 Z 的高斯分布的协方差矩阵为

$$\Omega_{\alpha_n}(x,y) = C - B^t A^{-1} B.$$

那么，二点相关函数为

(3.5) $$\tilde{K}_{\alpha_n}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-\Gamma_{\alpha_n}(x,y)^2}}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}||W_1||||W_2||e^{-\frac{1}{2}(w_1,w_2)\Omega_{\alpha_n}^{-1}(w_1,w_2)^T}\frac{dw_1dw_2}{(2\pi)^3\sqrt{det\Omega_{\alpha_n}(x,y)}}.$$

设 θ,φ 是 $\mathbb{S}^2$ 上的标准球面坐标。利用二点相关函数的旋转不变性（见注 2.4 [32]），我们得到

(3.6) $$\mathbb{E}[\mathscr{L}^2_{\alpha_n}]=\int_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2}\tilde{K}(x,y)\,dxdy=2\pi|\mathbb{S}^2|\int_0^\pi\tilde{K}_{\alpha_n}(N,x(\theta))\sin\theta\,d\theta$$

其中，$x(\theta)\in\mathbb{S}^2$ 是对应于球面坐标（$\theta,\varphi=0$）的点。注意，对任意满足 $d(x,y)=\theta.$ 的 $x,y\in\mathbb{S}^2$，均有 $\tilde{K}(N,x(\theta))=\tilde{K}(x,y)$。我们有

(3.7) $$\mathbb{E}[\mathscr{L}^2_{\alpha_n}]=2\pi|\mathbb{S}^2|\int_0^\pi\tilde{K}_{\alpha_n}(\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

where $\tilde{K}_{\alpha_n}(\theta)=\tilde{K}_{\alpha_n}(x,y)$, $x,y\in\mathbb{S}^2$ 是满足 $d(x,y)=\theta$ 的任意一对点（见推论 2.5 [32]）.

我们回顾一下，由于 $K_{\alpha_n}(\psi)$ 实际上在半球上积分（见 [32]），然后由（3.7）式，对 $\theta=\psi/(\alpha_n m)$ 进行缩放，可知节点长度的方差可写为

(3.8) $$Var[\mathscr{L}_{\alpha_n}]=16\pi^2\frac{D_{\alpha_n}}{m\alpha_n}\int_0^{m\alpha_n\pi/2}\left(K_{\alpha_n}(\psi)-\frac{1}{4}\right)\sin\frac{\psi}{m\alpha_n}\,d\psi,$$

与 $m=n+1/2$（更多详情见 [32]）。

本文的主要目标归结为理解函数 $K_{\alpha_n}(\psi)$ 的渐近行为，该函数见下文引理，其证明可见第5节。

引理 3.1. 对于 $C<\psi<(\pi/2)m\alpha_n$，其中 $C>0$，记

$$h:=\sum_{k=1}^{\infty}g(n)^k+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{\infty}g(n)^k,$$

则当 $n\to\infty$时,

$$\begin{aligned}K(\psi) &= \frac{1}{4}+\frac{1}{256\pi^2\psi^2}+\frac{1}{2\pi\psi}\sin\left(h\psi+2\psi+\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)-\frac{75}{256\pi^2\psi^2}\cos\left(2h\psi+4\psi+\frac{2\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\ &+\frac{27}{64\pi^2\psi^2}\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{4\pi\psi^2}\cos\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\ &+\frac{1}{4\pi\psi^2}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\ &-\frac{3}{2\pi\psi^2}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)\\ &+O\left(\frac{1}{\psi^3}+\frac{g(n)}{\psi^2}+\frac{1}{g(n)n\psi^2}\right).\end{aligned}$$

4. 方差的渐近行为：定理 2.1 的证明

本节证明定理 2.1。定义

$$I_1:=16\pi^2\frac{D_{\alpha_n}}{m\alpha_n}\int_0^C\left(K_{\alpha_n}(\psi)-\frac{1}{4}\right)\sin\frac{\psi}{m\alpha_n}\,d\psi$$

and

$$I_2:=16\pi^2\frac{D_{\alpha_n}}{m\alpha_n}\int_C^{m\alpha_n\pi/2}\left(K_{\alpha_n}(\psi)-\frac{1}{4}\right)\sin\frac{\psi}{m\alpha_n}\,d\psi.$$

我们有以下两个命题。

命题4.1. 对于任意常数 $C>0$ 和 $C<\psi<m\alpha_n\pi/2$，当 $n\to\infty$ 时,

$$I_2=\frac{1}{32}\log n+O(1)+O(g(n)\log n).$$

证明。利用引理 (3.1) 中的展开式，我们得到

$$\begin{aligned} I_2 &= 16\pi^2 n^2 \frac{1}{2(m\alpha_n)^2}\int_C^{m\alpha_n\pi/2}\left(\frac{1}{256\pi^2\psi^2}+\frac{1}{2\pi\psi}\sin\left(h\psi+2\psi+\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\right.\\ &-\frac{75}{256\pi^2\psi^2}\cos\left(2h\psi+4\psi+\frac{2\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\ &+\frac{27}{64\pi^2\psi^2}\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{4\pi\psi^2}\cos\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\ &+\frac{1}{4\pi\psi^2}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\ &-\frac{3}{2\pi\psi^2}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)\\ &\left.+O\left(\frac{1}{\psi^3}+\frac{g(n)}{\psi^2}+\frac{1}{g(n)n\psi^2}\right)\right)\psi\,d\psi. \end{aligned}$$

计算这些积分，并注意到 $\int_C^{\alpha_n n}{}_{\text{正弦}_x}{}^{x}\,dx = O(1)$ 和 $\int_C^{\alpha_n n}$ 正弦 $x\,dx = O(1)$，我们便得到命题的结论。□

命题 4.2. 对任意常数 $C>0$，当 $n\to\infty$ 时，我们有

$$\int_0^C \left|K_{\alpha_n}(\psi)-\frac{1}{4}\right|\sin\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\,d\psi = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

命题 4.2 的证明见附录 B.2。

命题 4.2 和命题 4.1 完成了定理 2.1 的证明。事实上，当 $n\to\infty$ 时，我们得到

$$\begin{aligned} Var[\mathscr{L}_{\alpha_n}] &= 16\pi^2\frac{D_{\alpha_n}}{m\alpha_n}\int_0^{m\alpha_n\pi/2}\left(K_{\alpha_n}(\psi)-\frac{1}{4}\right)\sin\frac{\psi}{m\alpha_n}\,d\psi = I_1+I_2\\ &= \frac{1}{32}\log n + O(g(n)\log n)+O(1) \end{aligned}$$

5. 二点相关函数：引理 3.1 的证明

这里我们写出二点相关函数的显式表达式，并证明引理 3.1。记 N为北极，固定 $x=N$，鉴于各向同性，使用 $\mathbb{S}^2$ 上的球面坐标，我们写作 $\Gamma_{\alpha_n}(x,y)=\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta)$，其中 $\theta\in[0,\pi)$，于是，定义于 (3.2) 中的 A 的行列式为

$$detA = 1-\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta)^2 = 1-\left(C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\cos\theta)\right)^2.$$

(3.3) 中的矩阵 B 可写为

$$B = \pm C_{\alpha_n}^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}P'_\ell(\cos\theta)\sin\theta & 0\\ -\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}P'_\ell(\cos\theta)\sin\theta & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5.1}$$

and

$$B^tA^{-1}B = \frac{1}{1-\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta)^2}\times\begin{pmatrix}\Gamma'_{\alpha_n}(\cos\theta)^2 & 0 & \Gamma'_{\alpha_n}(\cos\theta)^2\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \Gamma'_{\alpha_n}(\cos\theta)^2\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta) & 0 & \Gamma'_{\alpha_n}(\cos\theta)^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

这里回顾一下，$\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta)=C_{\alpha_n}^2\sum_{\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\cos\theta)$ 定义于 (2.2) 中，其导数为

$$\Gamma'_{\alpha_n}(\cos\theta) = -C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}P'_\ell(\cos\theta)\sin\theta.$$

此外，

$$H = C_{\alpha_n}^2 \begin{pmatrix} \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell'(\cos\theta)\cos\theta - \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell''(\cos\theta)\sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell'(\cos\theta) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

and

$$\Omega_{\alpha_n}(x,y) = C - B^t A^{-1} B$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{C_{\alpha_n}^2}{2}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1) + \tilde{a} & 0 & \tilde{b} & 0 \\ 0 & \frac{C_{\alpha_n}^2}{2}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1) & 0 & \tilde{c} \\ \tilde{b} & 0 & \frac{C_{\alpha_n}^2}{2}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1) + \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{c} & 0 & \frac{C_{\alpha_n}^2}{2}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1) \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \tilde{a}_{\alpha_n}(\theta) = -\frac{1}{1-\left(C_{\alpha_n}^2 \sum_{\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta)\right)^2} \left(C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell'(\cos\theta)\sin\theta \right)^2, \\ \tilde{b} &= \tilde{b}_{\alpha_n}(\theta) = C_{\alpha_n}^2 \left(\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell'(\cos\theta)\cos\theta - \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell''(\cos\theta)\sin^2(\theta) \right) \\ &\quad - \frac{\left(C_{\alpha_n}^2 \sum_{\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell'(\cos\theta)\sin\theta\right)^2}{1-\left(C_{\alpha_n}^2 \sum_{\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta)\right)^2} \left(C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta) \right), \\ \tilde{c} &= \tilde{c}_{\alpha_n}(\theta) = C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell'(\cos\theta). \end{aligned}$$

现在对 $\theta = \frac{\psi}{\alpha_n m}$ 进行重新缩放，我们定义

$$\Delta_{\alpha_n}(\psi) := \frac{\Omega_{\alpha_n}(\psi/m\alpha_n)}{\frac{C_{\alpha_n}^2}{2}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1)} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2c \\ 2b & 0 & 1+2a & 0 \\ 0 & 2c & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

其中

$$\begin{aligned} a &:= a_{\alpha_n}(\psi) = -\frac{1}{C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1)} \tilde{a}_{\alpha_n}(\psi/(\alpha_n m)), \\ b &:= b_{\alpha_n}(\psi) = \frac{1}{C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1)} \tilde{b}_{\alpha_n}(\psi/(\alpha_n m)), \\ c &:= c_{\alpha_n}(\psi) = \frac{1}{C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1)} \tilde{c}_{\alpha_n}(\psi/(\alpha_n m)). \end{aligned}$$

根据 [32], 中的备注 2.10，我们知道

$$K_{\alpha_n}(\psi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\left(\Gamma_{\alpha_n}(\cos(\psi/(\alpha_n m)))\right)^2}} \mathbb{E}[||U||||V||], \tag{5.6}$$

其中 (U,V) 是一个均值为零的高斯随机向量，其协方差矩阵为 $\Delta_{\alpha_n}(\psi)$，并且

$$\mathbb{E}[||U||||V||] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{4}b^2 - \frac{\pi}{16}a^2 - \frac{3\pi}{8}ab^2 + \frac{3\pi}{64}b^4 + O(a^3+b^5+c^2).$$

现在我们也有 e 的展开式 i

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^4 + O\left(\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^6\right)$$

因此

(5.7)

$$\begin{aligned}K_{\alpha_n}(\psi) &= \frac{1}{2\pi}\left[1+\frac{1}{2}\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2+\frac{3}{8}\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^4+O\left(\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^6\right)\right.\\ &\quad\left.\times\frac{\pi}{2}\left[1+a+\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{8}-\frac{3}{4}ab^2+\frac{3}{32}b^4+O(a^3+b^5+c^2)\right]\right.\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2}\left[1+a+\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{8}-\frac{3}{4}ab^2+\frac{3}{32}b^4+\frac{1}{2}\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2+\frac{1}{2}\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2 a\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{4}\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2 b^2+\frac{3}{8}\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^4+O\left(\left(\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^6+a^3+b^5+c^2\right)\right].\\ &= \frac{1}{4}\left\{1+a+\frac{b^2}{2}+\frac{1}{2}\Gamma^2_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)-\frac{a^2}{8}-\frac{3}{4}ab^2+\frac{3}{32}b^4+\frac{1}{2}\Gamma^2_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)a\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{4}\Gamma^2_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)b^2+\frac{3}{8}\Gamma^4_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)+O\left(\Gamma^6_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)+a^3+b^5+c^2\right)\right\}.\end{aligned}$$

现在，利用每个单项的渐近行为（可见附录 A 和 B），我们得到

$$\begin{aligned}K_{\alpha_n}(\psi) &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{64\pi^2\psi^2}+\frac{2}{\pi\psi}\sin\left(h\psi+2\psi+\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)-\frac{75}{64\pi^2\psi^2}\cos\left(2h\psi+4\psi+\frac{2\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\right.\\ &\quad+\frac{54}{32\pi^2\psi^2}\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{\pi\psi^2}\cos\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\ &\quad+\frac{1}{\pi\psi^2}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\ &\quad-\frac{6}{\pi\psi^2}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)\\ &\quad\left.+O\left(\frac{1}{\psi^3}+\frac{g(n)}{\psi^2}+\frac{1}{g(n)n\psi^2}\right)\right\},\end{aligned}$$

由此得到 (3.9)。

6. 第二混沌分量：命题 2.2 的证明

本节将显式计算第 2.3 节中提到的 Wiener-Itˆo 混沌展开的第二混沌分量。我们证明其方差为 $O(g(n))$，进而 $\mathscr{L}_{\alpha_n}[2]$ 不可能是 (2.6) 中给出的节点长度 $\mathscr{L}_{\alpha_n}$ 的混沌展开的主导项。

在证明命题 2.2 之前，请注意

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi} &= \frac{1}{4\pi}\left[n^2+n-(n\alpha_n)^2+n\alpha_n+n-\alpha_n n+1\right]\\ &= \frac{2n^2g(n)}{4\pi}\left[1-\frac{g(n)}{2}+\frac{1}{g(n)n}+\frac{1}{2n^2g(n)}\right]\end{aligned}$$

然后

$$C^2_{\alpha_n}=\frac{1}{\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}}=\frac{4\pi}{2n^2g(n)\left[1-\frac{g(n)}{2}+\frac{1}{g(n)n}+\frac{1}{2n^2g(n)}\right]} \tag{6.1}$$

这意味着

$$C^2_{\alpha_n}=\frac{4\pi}{2n^2g(n)}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{g(n)}{2}-\frac{1}{g(n)n}-\frac{1}{2n^2g(n)}\right)^k\right).$$

命题 2.2 的证明。第二混沌投影为

$$\mathscr{L}_{\alpha_n}[2]=\sqrt{D_{\alpha_n}}\left(\frac{\beta_0\alpha_{00}}{2}\int_{\mathbb{S}^2}H_2(T_{\alpha_n}(x))\,dx+\frac{\beta_0\alpha_{20}}{2}\int_{\mathbb{S}^2}(\langle\tilde{\nabla}T_{\alpha_n}(x),\tilde{\nabla}T_{\alpha_n}(x)\rangle-2)\,dx\right) \tag{6.2}$$

（例如参见 [22]），其中 $\alpha_{00}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\alpha_{20}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}$, $\beta_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\beta_2=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
格林公式意味着

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^2}\langle\tilde{\nabla}T_{\alpha_n}(x),\tilde{\nabla}T_{\alpha_n}(x)\rangle\,dx &= \frac{1}{D_{\alpha_n}}\int_{\mathbb{S}^2}\langle\nabla T_{\alpha_n}(x),\nabla T_{\alpha_n}(x)\rangle dx=\frac{1}{D_{\alpha_n}}\Big(-\int_{\mathbb{S}^2}T_{\alpha_n}(x)\Delta T_{\alpha_n}(x)dx\Big)\\ &= \frac{1}{D_{\alpha_n}}\Big(-\int_{\mathbb{S}^2}(C_{\alpha_n}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}T_\ell(x))(C_{\alpha_n}\sum_{\ell'=\alpha_n n}^{n}\Delta T_{\ell'}(x))\,dx\Big)\\ &= \frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\sum_{\ell'=\alpha_n n}^{n}\ell'(\ell'+1)\int_{\mathbb{S}^2}T_\ell(x)T_{\ell'}(x)\,dx\\ &= \frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\ell(\ell+1)\int_{\mathbb{S}^2}T_\ell^2(x)\,dx.\end{aligned}$$

于是，第二混沌投影变为

$$\mathscr{L}_{\alpha_n}[2]=\sqrt{D_{\alpha_n}}\Big(\frac{\beta_0\alpha_{00}}{2}\int_{\mathbb{S}^2}H_2(T_{\alpha_n}(x))\,dx+\frac{\beta_0\alpha_{20}}{2}\int_{\mathbb{S}^2}\Big(\frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\ell(\ell+1)\int_{\mathbb{S}^2}T_\ell^2(x)-2\Big)\,dx\Big). \tag{6.3}$$

现在我们注意到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^2}H_2(T_{\alpha_n}(x))\,dx &= \int_{\mathbb{S}^2}C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell,\ell'=\alpha_n n}^{n}T_\ell(x)T_{\ell'}(x)-1\,dx=\int_{\mathbb{S}^2}C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}T_\ell(x)^2-1\,dx\\ &= \int_{\mathbb{S}^2}C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}T_\ell(x)^2-C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}\,dx=C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}\frac{T_\ell(x)^2}{Var[T_\ell(x)]}-1\,dx\\ &= C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell,\ell'=\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}H_2(\tilde{T}_\ell(x))\,dx.\end{aligned}$$

由此可得

$$\int_{\mathbb{S}^2}\Big(\frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\ell(\ell+1)T_\ell^2(x)-2\Big)\,dx=2\int_{\mathbb{S}^2}\Big(\frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}T_\ell^2(x)-1\Big)\,dx.$$

由于

$$D_{\alpha_n}=C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}\frac{2\ell+1}{4\pi},$$

我们可以写成

$$1=\frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}\frac{2\ell+1}{4\pi}$$

然后

$$\begin{aligned}2\int_{\mathbb{S}^2}\Big(\frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}T_\ell^2(x)-1\Big)\,dx &= 2\int_{\mathbb{S}^2}\frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}\Big(T_\ell^2(x)-\frac{2\ell+1}{4\pi}\Big)\,dx\\ &= 2\int_{\mathbb{S}^2}\frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}\frac{2\ell+1}{4\pi}\Big(\frac{T_\ell^2(x)}{\frac{2\ell+1}{4\pi}}-1\Big)\,dx\\ &= 2\int_{\mathbb{S}^2}\frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}\frac{2\ell+1}{4\pi}\Big(\frac{T_\ell^2(x)}{Var[T_\ell(x)]}-1\Big)\,dx\\ &= 2\frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}\frac{2\ell+1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}H_2(\tilde{T}_\ell(x))\,dx,\end{aligned}$$

其中在最后一行，我们写作

$$\tilde{T}_\ell(x) = T_\ell(x)/\sqrt{Var[T_\ell(x)]}.$$

因此，第二个投影为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\alpha_n}[2] &= \sqrt{D_{\alpha_n}}\left(\frac{\beta_0\alpha_{00}}{2}\int_{\mathbb{S}^2} H_2(T_{\alpha_n}(x))\,dx + \frac{\beta_0\alpha_{20}}{2}2\frac{C_{\alpha_n}^2}{D_{\alpha_n}}\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}\frac{2\ell+1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} H_2(\tilde{T}_\ell(x))\,dx\right)\\ &= \frac{\sqrt{D_{\alpha_n}}}{4}C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\left(\frac{\ell(\ell+1)}{2D_{\alpha_n}}-1\right)\frac{2\ell+1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} H_2(\tilde{T}_\ell(x))\,dx.\end{aligned} \tag{6.4}$$

我们来计算其方差。可得

$$\begin{aligned}Var(\mathscr{L}_{\alpha_n}[2]) &= \frac{D_{\alpha_n}}{16}C_{\alpha_n}^4\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\left(\frac{\ell(\ell+1)}{2D_{\alpha_n}}-1\right)^2\left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)^2\int_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2} 2P_\ell(\cos d(x,y))^2\,dxdy\\ &= 2\pi^2 D_{\alpha_n}C_{\alpha_n}^4\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\left(\frac{\ell(\ell+1)}{2D_{\alpha_n}}-1\right)^2\left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)^2\int_0^{\pi/2} P_\ell(\cos\theta)^2\sin\theta\,d\theta\\ &= 2\pi^2 D_{\alpha_n}C_{\alpha_n}^4\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\left(\frac{\ell(\ell+1)}{2D_{\alpha_n}}-1\right)^2\left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)^2\frac{1}{2\ell+1}\\ &= \frac{2\pi^2C_{\alpha_n}^4D_{\alpha_n}}{16\pi^2}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\left\{\frac{(\ell(\ell+1))^2(2\ell+1)}{4D_{\alpha_n}^2}+(2\ell+1)-\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{D_{\alpha_n}}\right\}\\ &= \frac{C_{\alpha_n}^4D_{\alpha_n}}{8\cdot 4D_{\alpha_n}^2}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\left\{(\ell(\ell+1))^2(2\ell+1)+4D_{\alpha_n}^2(2\ell+1)-4D_{\alpha_n}\ell(\ell+1)(2\ell+1)\right\}.\end{aligned} \tag{6.5}$$

注意到 $C_{\alpha_n}^2=\frac{1}{\sum\frac{2\ell+1}{4\pi}}$，于是 $\frac{1}{C_{\alpha_n}^2}=\sum\frac{2\ell+1}{4\pi}$，且 $D_{\alpha_n}=C_{\alpha_n}^2\sum^{\ell}\underline{\frac{(\ell+1)}{2}}\frac{2\ell+1}{4\pi}$，因此

$$\begin{aligned}Var(\mathscr{L}_{\alpha_n}[2]) &= \frac{C_{\alpha_n}^4D_{\alpha_n}}{8\cdot 4D_{\alpha_n}^2}\left\{\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}(\ell(\ell+1))^2(2\ell+1)+\frac{4D_{\alpha_n}^2}{C_{\alpha_n}^2}4\pi-4D_{\alpha_n}\frac{D_{\alpha_n}}{C_{\alpha_n}^2}8\pi\right\}\\ &= \frac{C_{\alpha_n}^4}{32D_{\alpha_n}}\left\{\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\ell^2(\ell+1)^2(2\ell+1)-16\pi\frac{D_{\alpha_n}^2}{C_{\alpha_n}^2}\right\}.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{D_{\alpha_n}^2}{C_{\alpha_n}^2}=\frac{(C_{\alpha_n}^2\sum_{\alpha_n n}^{n}\frac{\ell(\ell+1)}{2}\frac{2\ell+1}{4\pi})^2}{C_{\alpha_n}^2}=\frac{C_{\alpha_n}^2(\sum_{\alpha_n n}^{n}\ell(\ell+1)(2\ell+1))^2}{64\pi^2},$$

我们得到

$$\begin{aligned}Var(\mathscr{L}_{\alpha_n}[2]) &= \frac{C_{\alpha_n}^4}{32D_{\alpha_n}}\left\{\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\ell^2(\ell+1)^2(2\ell+1)-16\pi\frac{C_{\alpha_n}^2(\sum_{\alpha_n n}^{n}\ell(\ell+1)(2\ell+1))^2}{64\pi^2}\right\}\\ &= \frac{C_{\alpha_n}^6}{32D_{\alpha_n}}\left\{\frac{1}{C_{\alpha_n}^2}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\ell^2(\ell+1)^2(2\ell+1)-16\pi\frac{(\sum_{\alpha_n n}^{n}\ell(\ell+1)(2\ell+1))^2}{64\pi^2}\right\}.\end{aligned} \tag{6.6}$$

由（6.1）可得

$$\frac{1}{C_{\alpha_n}^2}=\frac{2g(n)n^2-g(n)^2n^2+2n+1}{4\pi}.$$

现在我们需要计算式 (6.6) 中出现的两个求和。首先考虑

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\ell(\ell+1)(2\ell+1) &= \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}2\ell^3+3\ell^2+\ell=\sum_{\ell=1}^{n}(2\ell^3+3\ell^2+\ell)-\sum_{\ell=1}^{\alpha_n n-1}(2\ell^3+3\ell^2+\ell)\\ &= \frac{1}{2}\left[n(n+1)^2(n+2)-(\alpha_n n-1)(\alpha_n n)^2(\alpha_n n+1)\right]\\ &= \frac{n^4}{2}\left[1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\alpha^4+\frac{\alpha^2}{n^2}\right].\end{aligned}$$

代入 $\alpha_n = 1 - g(n)$ 后，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell(\ell+1)(2\ell+1) &= \frac{n^4}{2}\left[4g(n) - 6g(n)^2 + 4g(n)^3 - g(n)^4 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{g(n)^2}{n^2} - \frac{2g(n)}{n^2}\right] \\ &= \frac{n^4 4g(n)}{2}\left[1 - \frac{6}{4}g(n) + g(n)^2 - \frac{g(n)^3}{4} + \frac{1}{ng(n)} + \frac{6}{4g(n)n^2} + \frac{2}{4g(n)n^3}\right. \\ &\quad \left. + \frac{g(n)}{4n^2} - \frac{2}{4n^2}\right].\end{aligned}$$

同理，对于（6.6）的另一项求和，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \ell^2(\ell+1)^2(2\ell+1) &= \sum_{\ell=1}^{n}(\ell^2(\ell+1)^2(2\ell+1)) - \sum_{1}^{\alpha_n n-1}(\ell^2(\ell+1)^2(2\ell+1)) \\ &= \frac{1}{3}n^2(n+1)^2(n+2)^2 - \frac{1}{3}(\alpha_n n-1)^2(\alpha_n n)^2(\alpha_n n+1)^2 \\ &= \frac{n^6}{3} + 2n^5 + \frac{13n^4}{3} + 4n^3 + \frac{4n^2}{3} - \left[\frac{(\alpha_n n)^6}{3} + 2(\alpha_n n)^5 + \frac{13(\alpha_n n)^4}{3} + 4(\alpha_n n)^3 + \frac{4(\alpha_n n)^2}{3}\right] \\ &= \frac{-n^2}{3}(ng(n) - 2n - 1)(g(n)n+1)(g(n)^2 n - 3g(n)n - g(n) + 3n + 3)(g(n)^2 n \\ &\quad -g(n)n + g(n) + n + 1) \\ &= \frac{-n^2}{3}\left[n^4 g(n)^6 - 6n^4 g(n)^5 - 2g(n)^4 n^2 + 15g(n)^4 n^4 + 8g(n)^3 n^2\right. \\ &\quad -20n^4 g(n)^3 - 12g(n)^2 n^2 + 15g(n)^2 n^4 + 8g(n)n^2 \\ &\quad \left. +2g(n)n + g(n)^2 - 2g - 6n^4 g - 6n^3 - 15n^2 - 12n - 3\right] \\ &= n^2\left[-\frac{n^4 g(n)^6}{3} + 2n^4 g(n)^5 + \frac{2}{3}g(n)^4 n^2 - 5g(n)^4 n^4 - \frac{8}{3}g(n)^3 n^2\right. \\ &\quad +\frac{20}{3}n^4 g(n)^3 + 4g(n)^2 n^2 - 5g(n)^2 n^4 - \frac{8}{3}g(n)n^2 \\ &\quad \left. -\frac{2}{3}g(n)n - \frac{1}{3}g(n)^2 + \frac{2}{3}g(n) + 2n^4 g(n) + 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1\right]\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}Var(\mathscr{L}_{\alpha_n}[2]) &= \frac{C_{\alpha_n}^6}{32D_{\alpha_n}}\left\{\frac{1}{C_{\alpha_n}^2}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\ell^2(\ell+1)^2(2\ell+1) - 16\pi\frac{(\sum_{\alpha_n n}^{n}\ell(\ell+1)(2\ell+1))^2}{64\pi^2}\right\} \\ &= \frac{C_{\alpha_n}^6}{32D_{\alpha_n}}\left\{\frac{2g(n)n^2 - g(n)^2n^2 + 2n + 1}{4\pi}\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\ell^2(\ell+1)^2(2\ell+1) - \frac{(\sum_{\alpha_n n}^{n}\ell(\ell+1)(2\ell+1))^2}{4\pi}\right\} \\ &= \frac{C_{\alpha_n}^6 n^2}{32D_{\alpha_n}4\pi}\left\{(2g(n)n^2 - g(n)^2n^2 + 2n + 1)\left[-\frac{n^4g(n)^6}{3} + 2n^4g(n)^5 + \frac{2}{3}g(n)^4n^2 - 5g(n)^4n^4\right.\right. \\ &\quad -\frac{8}{3}g(n)^3n^2 + \frac{20}{3}n^4g(n)^3 + 4g(n)^2n^2 - 5g(n)^2n^4 - \frac{8}{3}g(n)n^2 - \frac{2}{3}g(n)n - \frac{1}{3}g(n)^2 + \frac{2}{3}g(n) \\ &\quad \left.+2n^4g(n) + 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1\right] \\ &\quad \left. -\left[2n^3g(n) - 3g(n)^2n^3 + 2g(n)^3n^3 - \frac{g(n)^4}{2}n^3 + 2n^2 + 3n + 1 + \frac{g(n)^2n}{2} - ng(n)\right]^2\right\} \\ &= \frac{C_{\alpha_n}^6 n^2}{32D_{\alpha_n}4\pi}\left\{1 + 6n + 13n^2 + 12n^3 + 4n^4 + 4g(n)^2n^6 + 8g(n)n^5 - 12g(n)^2n^5 + 12g(n)n^4\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{46}{3}g(n)^2n^4+\frac{8}{3}g(n)^2n^3+\frac{8}{3}g(n)n^3+\frac{13}{3}g(n)^2n^2-2g(n)n^2+\frac{2}{3}g(n)n-\frac{2}{3}g(n)^2n+\frac{2}{3}g(n)-\frac{1}{3}g(n)^2$$
$$-\left[2n^3g(n)-3g(n)^2n^3+2g(n)^3n^3-\frac{g(n)^4}{2}n^3+2n^2+3n+1+\frac{g(n)^2n}{2}-ng(n)\right]^2\Bigg\}.$$

约去后，我们得到

$$\begin{aligned}
Var(\mathscr{L}_{\alpha_n}[2]) &= \frac{C_{\alpha_n}^6n^2}{32D_{\alpha_n}4\pi}\Bigg\{n^6g(n)\Bigg[\frac{8}{3n^3}-\frac{46g(n)}{3n^2}+\frac{52g(n)^2}{3n^2}+\frac{55g(n)^3}{3}+\frac{40g(n)^2}{3n}-17g(n)^3\\
&\quad -\frac{8g(n)^2}{n}-\frac{20g(n)^2}{n^2}+\frac{22g(n)}{n^2}+O\left(\frac{g(n)}{n^3}\right)+O\left(\frac{g(n)^3}{n^2}\right)\Bigg]\Bigg\}\\
&= \frac{C_{\alpha_n}^6n^2}{32D_{\alpha_n}4\pi}\Bigg\{n^6g(n)^3\Bigg[\frac{8}{3n^3g(n)^2}-\frac{46g(n)}{3n^2g(n)^2}+\frac{52g(n)^2}{3n^2g(n)^2}+\frac{55g(n)^3}{3g(n)^2}+\frac{40g(n)^2}{3ng(n)^2}\\
&\quad -17\frac{g(n)^3}{g(n)^2}-\frac{8g(n)^2}{ng(n)^2}-\frac{20g(n)^2}{n^2g(n)^2}+\frac{22g(n)}{n^2g(n)^2}\quad+O\left(\frac{g(n)}{n^3g(n)^2}\right)+O\left(\frac{g(n)^3}{g(n)^2n^2}\right)\Bigg]\Bigg\}\\
&= \frac{C_{\alpha_n}^6n^2}{32D_{\alpha_n}4\pi}\Bigg\{n^6g(n)^3\Bigg[\frac{8}{3n^3g(n)^2}-\frac{46}{3n^2g(n)}+\frac{52}{3n^2}+\frac{55g(n)}{3}+\frac{40}{3n}-17g(n)-\frac{8}{n}-\frac{20}{n^2}\\
&\quad +\frac{22}{n^2g(n)}+O\left(\frac{1}{n^3g(n)}\right)+O\left(\frac{g(n)}{n^2}\right)\Bigg]\Bigg\}\\
&= \frac{C_{\alpha_n}^6n^2}{32D_{\alpha_n}4\pi}\Bigg\{n^6g(n)^4\Bigg[\frac{8}{3n^3g(n)^3}-\frac{46}{3n^2g(n)^2}+\frac{52}{3n^2g(n)}+\frac{55}{3}+\frac{40}{3ng(n)}-17-\frac{8}{ng(n)}\\
&\quad -\frac{20}{n^2g(n)}+\frac{22}{n^2g(n)^2}+O\left(\frac{1}{n^3g(n)^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\Bigg]\Bigg\}\\
&= \frac{C_{\alpha_n}^6}{32D_{\alpha_n}4\pi}n^8g(n)^4\Bigg[\frac{8}{3n^3g(n)^3}-\frac{46}{3n^2g(n)^2}+\frac{52}{3n^2g(n)}+\frac{55}{3}+\frac{40}{3ng(n)}-17-\frac{8}{ng(n)}-\frac{20}{n^2g(n)}\\
&\quad +\frac{22}{n^2g(n)^2}+O\left(\frac{1}{n^3g(n)^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

现在我们注意到

$$\frac{C_{\alpha_n}^6}{D_{\alpha_n}}=\frac{8\pi C_{\alpha_n}^4}{\sum_{\alpha_n n}^n\ell(\ell+1)(2\ell+1)}=\frac{64\pi^3}{n^8g(n)^3}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{g(n)}{2}-\frac{1}{ng(n)}-\frac{1}{2n^2g(n)}\right)^k\right)^2$$
$$\times\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6g(n)}{4}-g(n)^2+\frac{g(n)^3}{4}-\frac{1}{ng(n)}-\frac{6}{4n^2g(n)}-\frac{2}{4g(n)n^3}-\frac{g(n)}{4n^2}+\frac{1}{2n^2}\right)^k\right].$$

最终我们得到

$$\begin{aligned}
Var(\mathscr{L}_{\alpha_n}[2]) &= \frac{1}{32*4\pi}\frac{64\pi^3}{n^8g(n)^3}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{g(n)}{2}-\frac{1}{ng(n)}-\frac{1}{2n^2g(n)}\right)^k\right)^2\\
&\quad\times\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6g}{4}-g(n)^2+\frac{g(n)^3}{4}-\frac{1}{ng(n)}-\frac{6}{4n^2g(n)}-\frac{2}{4g(n)n^3}-\frac{g(n)}{4n^2}+\frac{1}{2n^2}\right)^k\right]\\
&\quad\times n^8g(n)^4\Bigg[\frac{8}{3n^3g(n)^3}-\frac{46}{3n^2g(n)^2}+\frac{52}{3n^2g(n)}+\frac{4}{3}+\frac{40}{3ng(n)}-\frac{8}{ng(n)}-\frac{20}{n^2g(n)}\\
&\quad +\frac{22}{n^2g(n)^2}+O\left(\frac{1}{n^3g(n)^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\Bigg]\\
&= \frac{1}{32*4\pi}\frac{64\pi^3}{n^8g(n)^3}n^8g(n)^4\frac{4}{3}\Bigg[1+\frac{g(n)}{2}-\frac{1}{ng(n)}+\frac{6}{4}g(n)-\frac{1}{ng(n)}+O\left(g(n)^2\right)\\
&\quad +O\left(\frac{1}{n^2g(n)^2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\Bigg]\\
&= \frac{2\pi^2}{3}g(n)\Bigg[1+2g(n)-\frac{2}{ng(n)}+O\left(g(n)^2\right)+O\left(\frac{1}{n^2g(n)^2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\Bigg],
\end{aligned}$$

由此完成证明。

□

附录 A. 协方差核及其导数的渐近分析

A.1. 协方差函数的渐近分析。下面的引理给出了 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2$ 的协方差函数在高频极限下的渐近行为，其中 $C>0$。

引理 A.1. 给定 (2.2) 中的 $\Gamma_{\alpha_n}(x,y)$，并记

$$h:=\sum_{k=1}^{\infty}g(n)^k+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{\infty}g(n)^k, \tag{A.1}$$

我们有，对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2, C>0$，当 $n\to\infty$ 时，

(A.2)

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)=&\frac{C_{\alpha_n}^2\sqrt{n}}{4\pi\sqrt{\pi}}\left(\sin\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-3/2}\left(\cos\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-1/2}\frac{\psi h}{2}\\&\left[2\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{2n}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\sin\psi h}{\psi h}\right)+\frac{g(n)}{\psi h}\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{2n}\right)-\frac{3}{4}\pi\right)\right.\\&\left.+O\left(\frac{1}{g(n)n\psi}+\frac{g(n)}{\psi}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2g(n)\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

推论 A.2. 对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2, C>0$，当 $n\to\infty$ 时，我们有，

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)=&\sqrt{\frac{2}{\pi\psi}}\left\{\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O(\frac{\psi}{2n})+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2\psi}\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{3}{4}\pi\right)\right.\\&\left.+O\left(\frac{1}{ng(n)\psi}+\frac{g(n)}{\psi}\right)\right\}+O\left(\frac{g(n)}{\sqrt{\psi}}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\psi}ng(n)}\right)+O\left(\frac{1}{n^2g(n)\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

推论 A.3. 对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2$、$C>0$，当 $n\to\infty$ 时，我们有，

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)^2=&\frac{C_{\alpha_n}^4 n}{(4\pi)^2\pi}\left(\sin\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-3}\left(\cos\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-1}\frac{\psi^2h^2}{4}\\&\left[\left(2+2\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\right)\left(\frac{\sin h\psi}{h\psi}\right)^2\right.\\&+4\frac{g(n)}{\psi h}\left(\frac{\sin h\psi}{h\psi}\right)\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O(\frac{\psi}{n^2})+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{3}{4}\pi\right)\\&\left.+O\left(\frac{1}{g(n)n\psi}+\frac{g(n)}{\psi}\right)+O\left(\frac{1}{\psi^2}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^{5/2}g(n)\sqrt{\psi}}\right).\end{aligned}$$

利用 $\sin x\sim x$ and $C^2=\frac{4\pi}{2n^2g(n)}(1+O(g(n)))$ 这一事实，我们得到以下推论。

推论 A.4. 对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2$、$C>0$，当 $n\to\infty$ 时，我们有，

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)^2=&\frac{2}{\pi\psi}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\right)+\frac{g(n)}{\psi h}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O(\frac{\psi}{n^2})+\frac{\pi}{4}\right)\right.\\&\times\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\&\left.+O\left(\frac{1}{\psi^2}\right)+O\left(\frac{1}{g(n)n\psi}+\frac{g(n)}{\psi}\right)\right\}+O\left(\frac{g(n)}{\psi}\right)+O\left(\frac{1}{ng(n)\psi}\right).\end{aligned}$$

引理 A.1 的证明。观察 (2.2) 中的协方差函数，我们可以将 $\Gamma_{\alpha_n}(x,y)$ 写为

$$\Gamma_{\alpha_n}(x,y)=C_{\alpha_n}\left(\sum_{\ell=0}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\langle x,y\rangle)-\sum_{\ell=0}^{n\alpha_n-1}\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\langle x,y\rangle)\right). \tag{A.3}$$

（另见 [28]）。借助下列公式（[9], 第 6 页），该公式由克里斯托费尔-达布公式（[1]）推导得出，

$$\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_{\ell,m}(x)Y_{\ell,m}(y)=\frac{n+1}{4\pi}P_n^{(1,0)}(\cos\theta(x,y)), \tag{A.4}$$

其中 $P_n(\cos\theta) = P_n^{(1,0)}(\cos\theta)$，以及加法公式（[15] 第 66 页）：

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(x)Y_{\ell,m}(y) = \frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\cos\theta(x,y)), \tag{A.5}$$

我们得到

$$\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta) = C_{\alpha_n}^2\left[\frac{n+1}{4\pi}P_n^{(1,0)}(\cos\theta(x,y)) - \frac{n\alpha_n}{4\pi}P_{n\alpha_n-1}^{(1,0)}(\cos\theta(x,y))\right]. \tag{A.6}$$

利用定理 8.21.13 [26],

$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta) = n^{-1/2}k(\theta)\cos(N\theta+\gamma) + O(n^{-1/2}), \tag{A.7}$$

$$k(\theta) = \pi^{-1/2}(\sin\theta/2)^{-\alpha-1/2}(\cos\theta/2)^{-\beta-1/2},$$

$$N = n + (\alpha+\beta+1)/2, \quad \gamma = -(\alpha+1/2)\pi/2;$$

我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta) = \frac{C_{\alpha_n}^2}{4\pi\sqrt{\pi}}\Bigg[&(n+1)\left(n^{-1/2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-3/2}(\cos\theta)^{-1/2}\cos\left((n+1)\theta-\frac{3}{4}\pi\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\\ &-n\alpha_n\left((n\alpha-1)^{-1/2}(\sin\theta/2)^{-3/2}\cos(\theta/2)^{-1/2}\cos\left(n\alpha\theta-\frac{3}{4}\pi\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha n-1}}\right)\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{A.8}$$

展开 $(1+1/n)$ 和 $(1-g(n))$（因为 $g(n)\to 0$ 当 $n\to\infty$）

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta) = \frac{\sqrt{n}}{4\pi\sqrt{\pi}}C_{\alpha_n}^2(\sin\theta/2)^{-3/2}(\cos\theta/2)^{-1/2}\Bigg[&\cos\left((n+1)\theta-\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{n}\cos\left((n+1)\theta-\frac{3}{4}\pi\right)\\ &-(1-g(n))\left(1+\frac{g(n)}{2}+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8g(n)^2}+\frac{3}{8n^2}+O(g(n)^3)\right)\cos\left(n\alpha\theta-\frac{3}{4}\pi\right)\Bigg]+O\left(\frac{1}{n^2g(n)\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

我们作变量代换 $\theta = \psi/(\alpha_n m)$，得到

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right) = \frac{\sqrt{n}}{4\pi\sqrt{\pi}}C_{\alpha_n}^2&\left(\sin\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-3/2}\left(\cos\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-1/2}\Bigg[\cos\left((n+1)\frac{\psi}{2\alpha_n m}-\frac{3}{4}\pi\right)\\ &-\cos\left(\psi\frac{n}{m}-\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{g(n)}{2}\cos\left(\psi\frac{n}{m}-\frac{3}{4}\pi\right)\\ &+\frac{1}{n}\left[\cos\left((n+1)\frac{\psi}{2\alpha_n m}-\frac{3}{4}\pi\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\psi\frac{n}{m}-\frac{3}{4}\pi\right)\right]+O(g(n)^2)\Bigg]+O\left(\frac{1}{n^2g(n)\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

现在我们注意到

$$\frac{n\psi}{m} = \psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)$$

and

$$\frac{(n+1)\psi}{\alpha_n m} = \psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) + h\psi,$$

其中 h 在 (A.1) 中定义。代入这些表达式，并利用以下事实：

$$\begin{aligned}\cos\left((n+1)\frac{\psi}{2\alpha_n m}-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(\psi\frac{n}{m}-\frac{3}{4}\pi\right) &= -2\sin\left(\psi-\frac{3}{4}\pi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{h\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{h\psi}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{h\psi}{2},\end{aligned}$$

我们最终得到

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right) &= \frac{\sqrt{n}}{4\pi\sqrt{\pi}}C_{\alpha_n}^2\left(\sin\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-3/2}\left(\cos\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-1/2}\psi h\frac{1}{2}\\ &\times\left\{2\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\sin h\psi}{h\psi}\right)+\frac{g(n)}{h\psi}\right.\\ &\left.\times\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{3}{4}\pi\right)+O\left(\frac{1}{g(n)n\psi}+\frac{g(n)}{\psi}\right)\right\}+O\left(\frac{1}{n^2g(n)\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

□

A.2. 协方差函数的一阶导数的渐近表达式。

引理 A.5. 对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2,\quad C>0,$ 当 $n\to\infty$时,

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right) &= C_{\alpha_n}^2\frac{n\sqrt{n}}{8\pi\sqrt{\pi}}\left(-\sin\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\left(\sin\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-5/2}\left(\cos\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-3/2}\psi h\\ &\times\left[2\frac{\sin\frac{h\psi}{2}}{h\psi}\sin\left(\frac{\psi h}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3g(n)}{2\psi h}\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)\right.\\ &\left.-\frac{3}{8}g(n)^2\frac{1}{\psi h}\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)+O\left(\frac{1}{n\psi}+\frac{g(n)^2}{\psi}\right)\right]\quad+O\left(\frac{\psi}{n^3\sqrt{n}g(n)}\right).\end{aligned}$$

推论 A.6. 对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2,\quad C>0,$ 当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)^2 &= \frac{C_{\alpha_n}^4}{64\pi^3}n^3h^2\psi^2\left(\sin\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)^2\left(\sin\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-5}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)^{-3}\\ &\left\{\left(\frac{\sin\frac{\psi h}{2}}{\psi h/2}\right)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\right)\right.\\ &+\frac{3g(n)}{\psi h}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)\frac{\sin(\psi h/2)}{\psi h/2}\\ &-\frac{3}{4\psi h}g(n)^2\sin\left(\frac{h}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\psi-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\left.+O\left(\frac{g(n)^2}{\psi}\right)+O\left(\frac{1}{\psi n}\right)+O\left(\frac{1}{\psi^2}\right)\right\}+O\left(\frac{\sqrt{\psi}}{n^2\sqrt{n}g(n)}\right).\end{aligned}$$

推论 A.7. 对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2,\quad C>0,$ 当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)^2 &= \frac{2n^2}{\pi\psi}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\right)\right.\\ &+\frac{3g(n)}{\psi h}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)\\ &-\frac{3}{4\psi h}g(n)^2\sin\left(\frac{h}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\psi-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\left.+O\left(\frac{g(n)^2}{\psi}\right)+O\left(\frac{1}{\psi n}\right)+O\left(\frac{1}{\psi^2}\right)\right\}+O\left(\frac{\sqrt{\psi}}{n^2\sqrt{n}g(n)}\right).\end{aligned}$$

引理 A.5 的证明。由 (A.6)，我们得到

$$\Gamma'_{\alpha_n}(\cos\theta)=C_{\alpha_n}^2\left[\frac{n+1}{4\pi}\frac{d}{d\theta}P_n^{(1,0)}(\cos\theta(x,y))-\frac{n\alpha_n}{4\pi}\frac{d}{d\theta}P_{n\alpha_n-1}^{(1,0)}(\cos\theta(x,y))\right].$$

由 [26] (4.5.5) 我们还知道

$$\frac{d}{dx}P_n^{a,b}(x)=\frac{1}{2}(a+b+n+1)P_{n-1}^{(a+1,b+1)}(x) \tag{A.9}$$

因此

$$\Gamma'_{\alpha_n}(\cos\theta)=\frac{C_{\alpha_n}^2}{8\pi}(-\sin\theta)\left[(n+1)(n+2)P_{n-1}^{(2,1)}(\cos\theta)-n\alpha_n(n\alpha_n+1)P_{n\alpha_n-2}^{(2,1)}(\cos\theta)\right].$$

现在利用（A.7）可得

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\alpha_n}(\cos\theta) &= C^2_{\alpha_n}(-\sin\theta)\Big\{(\sin\theta/2)^{-5/2}(\cos\theta/2)^{-3/2}\frac{1}{8\pi\sqrt{\pi}}\Big[\frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{n-1}}\cos\Big((n+1)\theta-\frac{5}{4}\pi\Big)\\ &\quad -\frac{n\alpha_n(n\alpha_n+1)}{\sqrt{n\alpha_n-2}}\cos\Big(n\alpha_n\theta-\frac{5}{4}\pi\Big)\Big]+O(\sqrt{1/n})\Big\}.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{n-1}}=n\sqrt{n}\Big[1+\frac{7}{2n}+\frac{31}{8n^2}+O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]$$

and

$$\frac{n^2\alpha_n(\alpha_n+1/n)}{\sqrt{n}\sqrt{\alpha_n-2/n}}=n\sqrt{n}\left[1+\frac{2}{n}+\frac{5}{2n^2}-\frac{3}{2}g(n)-\frac{g(n)}{n}+\frac{3}{8}g(n)^2+O(g(n)^3)\right].$$

将上面的这两个表达式代入，可得

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\alpha_n}(\cos\theta) &= C^2_{\alpha_n}(-\sin\theta)\Big\{(\sin\theta/2)^{-5/2}(\cos\theta/2)^{-3/2}\frac{1}{8\pi\sqrt{\pi}}n\sqrt{n}\\ &\quad\times\Big[\cos\Big((n+1)\theta-\frac{5}{4}\pi\Big)-\cos\Big(n\alpha_n\theta-\frac{5}{4}\pi\Big)+\frac{3}{2}g(n)\cos\Big(n\alpha_n\theta-\frac{5}{4}\pi\Big)\\ &\quad+\frac{7}{2n}\cos\Big((n+1)\theta-\frac{5}{4}\pi\Big)-\frac{2}{n}\cos\Big(n\alpha_n\theta-\frac{5}{4}\pi\Big)-\frac{3}{8}g(n)^2\cos\Big(n\alpha_n\theta-\frac{5}{4}\pi\Big)\\ &\quad+O\Big(\frac{g(n)}{n}+g(n)^3\Big)\Big]+O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

改变 $\theta=\frac{\psi}{\alpha_n m}$，得到

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\alpha_n}\Big(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\Big) &= C^2_{\alpha_n}\frac{n\sqrt{n}}{8\pi\sqrt{\pi}}\Big(-\sin\frac{\psi}{\alpha_n m}\Big)\Big(\sin\frac{\psi}{2\alpha_n m}\Big)^{-5/2}\Big(\cos\frac{\psi}{2\alpha_n m}\Big)^{-3/2}\psi h\\ &\quad\times\Big[2\frac{\sin\frac{h\psi}{2}}{h\psi}\sin\Big(\frac{\psi h}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\Big(\frac{\psi}{n^2}\Big)-\frac{\pi}{4}\Big)+\frac{3g(n)}{2\psi h}\cos\Big(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\Big(\frac{\psi}{n^2}\Big)-\frac{5}{4}\pi\Big)\\ &\quad-\frac{3}{8}g(n)^2\frac{1}{\psi h}\cos\Big(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\Big(\frac{\psi}{n^2}\Big)-\frac{5}{4}\pi\Big)+O\Big(\frac{1}{n\psi}+\frac{g(n)^2}{\psi}\Big)\Big]\quad+O\Big(\frac{\psi}{n^3\sqrt{n}g(n)}\Big).\end{aligned}$$

□

A.3. 协方差函数二阶导数的渐近行为。

引理 A.8. 对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2$，当 $C>0$ 时，随着 $n\to\infty$，我们有

$$\begin{aligned}\Gamma''_{\alpha_n}\Big(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\Big) &= \frac{C^2_{\alpha_n}}{8\pi\sqrt{\pi}}\Big\{\Big(\sin\frac{\psi}{2\alpha_n m}\Big)^{-7/2}\Big(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\Big)^{-5/2}\sin^2\frac{\psi}{\alpha_n m}\frac{n^2\sqrt{n}}{2}\Big[-2\sin\frac{h\psi}{2}\\ &\quad\sin\Big(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\Big(\frac{\psi}{n^2}\Big)+\frac{\pi}{4}\Big)+\frac{5}{2}g(n)\cos\Big(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\Big(\frac{\psi}{n^2}\Big)-\frac{7}{4}\pi\Big)\\ &\quad+O\Big(\frac{1}{n}+g(n)^2\Big)\Big]-\sin\left(\psi/2\alpha_n m\right)^{-5/2}\left(\cos\psi/2\alpha_n m\right)^{-3/2}\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\\ &\quad\times n\sqrt{n}\Big[2\sin\frac{h\psi}{2}\sin\Big(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\Big(\frac{\psi}{n^2}\Big)-\frac{\pi}{4}\Big)+\frac{3}{2}g(n)\\ &\quad\times\cos\Big(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\Big(\frac{\psi}{n^2}\Big)-\frac{5}{4}\pi\Big)-\frac{3}{8}g(n)^2\cos\Big(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\Big(\frac{\psi}{n^2}\Big)-\frac{5}{4}\pi\Big)\\ &\quad+O\Big(\frac{1}{n}\Big)+O\Big(\frac{g(n)}{n}+g(n)^3\Big)\Big]+O\left(n\sqrt{n}+\psi^2\sqrt{n}\right)\Big\}.\end{aligned}$$

推论 A.9. 对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2,\quad C>0,$ 随着 $n\to\infty,$

$$\begin{aligned}\Gamma''_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\psi}}n^2\frac{h}{g(n)}\Big\{-\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{5g(n)}{2h\psi}\\ &\quad\times\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{7}{4}\pi\right)-\frac{1}{\psi}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\quad+O\left(\frac{1}{n\psi g(n)}\right)+O\left(\frac{g(n)}{\psi}\right)\Big\}+O\left(\frac{n^2}{g(n)n\sqrt{\psi}}\right).\end{aligned}$$

引理 A.8 的证明。我们有

$$\bar{\Gamma}''_{\alpha_n}(\cos\theta)=C^2_{\alpha_n}\left[\frac{n+1}{4\pi}P''_n(\cos\theta(x,y))-\frac{n\alpha_{n,\beta}}{4\pi}P''_{n\alpha_{n,\beta}-1}(\cos\theta(x,y))\right].$$

我们再次利用 (A.9) 推导出

$$P''_n(\cos\theta)=\frac{n+2}{2}\left\{\frac{1}{2}(3+n)P^{(3,2)}_{n-2}(\cos\theta)\sin^2\theta-P^{(2,1)}_{n-1}(\cos\theta)\cos\theta\right\}.$$

于是得到

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_n}(\cos\theta)'' &= C^2_{\alpha_n}\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{8\pi}\left[\frac{(n+3)}{2}P^{(3,2)}_{n-2}(\cos\theta)\sin^2\theta-P^{(2,1)}_{n-1}(\cos\theta)\cos\theta\right]\right.\\ &\quad\left.-\frac{n\alpha_n(n\alpha_n+1)}{8\pi}\left[\frac{n\alpha_n+2}{2}P^{(3,2)}_{n\alpha_n-3}(\cos\theta)\sin^2\theta-P^{(2,1)}_{n\alpha_n-2}(\cos\theta)\cos\theta\right]\right\}.\end{aligned}$$

由 (A.7) 可知

$$\begin{aligned}\Gamma''_{\alpha_n}(\cos\theta) &= \frac{C^2_{\alpha_n}}{8\pi\sqrt{\pi}}\left\{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2\sqrt{n-2}}\left[(\sin\theta/2)^{-3-1/2}(\cos\theta/2)^{-2-1/2}\cos\left((n+1)\theta-\frac{7}{4}\pi\right)+O(1)\right]\right.\\ &\quad\times\sin^2\theta-\frac{n\alpha_n(n\alpha_n+1)(n\alpha_n+2)}{2\sqrt{n\alpha_n-3}}\left[(\sin\theta/2)^{(-3-1/2)}(\cos\theta/2)^{-2-1/2}\cos\left(n\alpha_n\theta-\frac{7}{4}\pi\right)+O(1)\right]\\ &\quad\times\sin^2\theta+\frac{n\alpha_n(n\alpha_n+1)}{\sqrt{n\alpha_n-2}}\left[(\sin\theta/2)^{(-2-1/2)}(\cos\theta/2)^{-1-1/2}\cos\left(n\alpha_n\theta-\frac{5}{4}\pi\right)+O(1)\right]\cos\theta\\ &\quad-\frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{n-1}}\left[(\sin\theta/2)^{(-2-1/2)}(\cos\theta/2)^{-1-1/2}\cos\left((n+1)\theta-\frac{5}{4}\pi\right)+O(1)\right]\cos\theta\Big\}\\ &= \frac{C^2_{\alpha_n}}{8\pi\sqrt{\pi}}\Big\{(\sin\theta/2)^{-7/2}(\cos\theta/2)^{-5/2}\sin^2\theta\frac{1}{2}\\ &\quad\times\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{\sqrt{n-2}}\cos\left((n+1)\theta-\frac{7}{4}\pi\right)-\frac{n\alpha_n(n\alpha_n+1)(n\alpha_n+2)}{\sqrt{n\alpha_n-3}}\cos\left(n\alpha_n\theta-\frac{7}{4}\pi\right)\right]\\ &\quad+O(\sin^2\theta n^2\sqrt{n})+(\sin\theta/2)^{(-5/2)}(\cos\theta/2)^{-3/2}\cos\theta\\ &\quad\times\left[\frac{n\alpha_n(n\alpha_n+1)}{\sqrt{n\alpha_n-2}}\cos\left(n\alpha_n\theta-\frac{5}{4}\pi\right)-\frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{n-1}}\cos\left((n+1)\theta-\frac{5}{4}\pi\right)\right]+O(n\sqrt{n})\Big\}.\end{aligned}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}\frac{n\alpha_n(n\alpha_n+1)}{\sqrt{n\alpha_n-2}} &= \frac{n^2}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{3g(n)}{2}+\frac{2}{n}-\frac{g(n)}{n}+\frac{3}{8}g(n)^2+\frac{5}{2n^2}+O(g(n)^3)\right),\\ \frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{n-1}} &= \frac{n^2}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{7}{2n}+\frac{31}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right),\\ \frac{n\alpha_n(n\alpha_n+1)(n\alpha_n+2)}{2\sqrt{n\alpha_n-3}} &= \frac{n^3}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{5}{2}g(n)+\frac{9}{2n}-\frac{27g(n)}{4n}+\frac{15}{8}g(n)^2+\frac{79}{8n^2}+O(g(n)^3)\right),\\ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2\sqrt{n-2}} &= \frac{n^3}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{7}{n}+\frac{37}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).\end{aligned}$$

我们进行变量替换 $\theta=\frac{\psi}{\alpha_n m}$，由此得出

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_n}''\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right) &= \frac{C_{\alpha_n}^2}{8\pi\sqrt{\pi}}\Bigg\{\left(\sin\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-7/2}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)^{-5/2}\left(\sin\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)^2\frac{n^2\sqrt{n}}{2}\Bigg[-2\sin\frac{h\psi}{2}\\ &\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{5}{2}g(n)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{7}{4}\pi\right)\\ &+O\left(\frac{1}{n}+g(n)^2\right)\Bigg]-\sin(\frac{\psi}{2\alpha_n m})^{-5/2}\left(\cos\frac{\psi}{2\alpha_n m}\right)^{-3/2}\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\\ &\times n\sqrt{n}\Bigg[2\sin\frac{h\psi}{2}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\\ &+\frac{3}{2}g(n)\cos(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi)-\frac{3}{8}g(n)^2\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)\\ &+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{g(n)}{n}+g(n)^3\right)\Bigg]+O\left(n\sqrt{n}+\psi^2\sqrt{n}\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

□

附录 B. 技术结果：二点相关函数的渐近分析

B.1. 引理 3.1 证明的技术细节。本节推导二点相关函数 $K_n(\psi)$ 中式 (5.7) 所出现的所有项在 ψ 取较大值时的渐近表达式，该表达式关于 n 和 ψ 一致。

命题 B.1. 对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2$、$C>0$，当 $n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}a &= -\frac{1}{\pi\psi}\Bigg[1-\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)+\frac{6}{\psi}\frac{g(n)}{h}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi h}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)+\frac{1}{2\pi\psi}+\frac{\cos\left(2h\psi+4\psi-\frac{2\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)}{2\pi\psi}\\ &+O\left(\frac{1}{\psi^2}+\frac{1}{g(n)n\psi}+\frac{g(n)}{\psi}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

证明。根据第5节给出的 a 的定义，我们有

$$\begin{aligned}a &= -\frac{C_{\alpha_n}^4}{2D_{\alpha_n}}\left(\frac{1}{1-\left(C_{\alpha_n}^2\sum\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell\cos(\frac{\psi}{\alpha_n m})\right)^2}\right)\left(\sum_{\ell=\alpha_n n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell'\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\sin\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2\\ &= -\frac{1}{2D_{\alpha_n}}\left(\frac{1}{1-\left(\Gamma_{\alpha_n}(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m})\right)^2}\right)\left(\Gamma_{\alpha_n}'\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2\\ &= -\frac{1}{2D_{\alpha_n}}\left(\Gamma_{\alpha_n}'\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\right)^2\left(1+\Gamma_{\alpha_n}^2\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)+O\left(\Gamma_{\alpha_n}^4\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\right)\right).\end{aligned}$$

U利用上一节中得到的协方差函数及其导数的展开式，我们得 t

$$\begin{aligned}a &= \frac{-2n^2}{2D_{\alpha_n}\pi\psi}\Bigg\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\right)\\ &+\frac{3g(n)}{\psi h}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)\\ &+O\left(\frac{g(n)}{\psi}\right)+O\left(\frac{1}{\psi n}\right)+O\left(\frac{1}{\psi^2}\right)+O\left(\frac{\sqrt{\psi}\psi}{n^4\sqrt{n}g(n)}\right)\Bigg\}\\ &\times\Bigg\{1+\frac{2}{\pi\psi}\Bigg[\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)}{2}+\frac{g(n)}{h\psi}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\\ &\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{3}{4}\pi\right)+O\left(\frac{1}{\psi^2}\right)+O\left(\frac{1}{g(n)n\psi}+\frac{g(n)}{\psi}\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

相乘并利用以下事实：$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ 且

$$\begin{aligned}
D_{\alpha_n} &= C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{\ell(\ell+1)}{2}\frac{2\ell+1}{4\pi} = \frac{4\pi}{2n^2 g(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{g(n)}{2} - \frac{1}{ng(n)} - \frac{1}{2n^2 g(n)}\right)^k \frac{1}{8\pi}\frac{n^4 4g(n)}{2} \\
&\quad \left[1 - \frac{6}{4}g(n) + g(n)^2 - \frac{g(n)^3}{4} + \frac{1}{ng(n)} + \frac{6}{4g(n)n^2} + \frac{2}{4g(n)n^3} + \frac{g(n)}{4n^2} - \frac{2}{4n^2}\right] \\
&= \frac{n^2}{2}\left[1 - g(n) - \frac{1}{g(n)^2 n^2} + O\left(\frac{1}{n} + g(n)^2 + \frac{1}{n^2 g}\right)\right] \\
&= \frac{n^2}{2}\left[1 + O(g(n)) + O\left(\frac{1}{g(n)^2 n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right],
\end{aligned}$$

我们得到了该命题的结论。 □

命题B.2. 对于 $C < \psi < \alpha_n m\pi/2$、$C > 0$，当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned}
b &= \sqrt{\frac{2}{\pi\psi}}\Bigg[\sin\left(\frac{h\psi}{2} + \psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{5g(n)}{2\psi h}\cos\left(\psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) - \frac{7}{4}\pi\right) \\
&\quad + \frac{1}{\psi}\sin\left(\frac{h\psi}{2} + \psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\pi\psi}\sin\left(\frac{h\psi}{2} + \psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\psi^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\pi\psi}\sin\left(h\psi + 2\psi - \frac{\psi}{n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\sin\left(\frac{h\psi}{2} + \psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \\
&\quad + O\left(\frac{1}{ng(n)} + \frac{g(n)}{\psi} + \frac{\sqrt{\psi}}{ng(n)\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{ng(n)\psi}\right) + O(g(n))\Bigg].
\end{aligned}$$

Proof. 如同在前一个命题中的做法，从第5节给出的 b 定义出发，我们有

$$\begin{aligned}
b &= \frac{C_{\alpha_n}^2}{2D_{\alpha_n}}\Bigg[\sum_{\ell=n\alpha_n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell'\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right) - \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell''\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\sin\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)^2 \\
&\quad - \frac{\left(C^2 \sum \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell'\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\sin\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2}{1 - \left(C^2 \sum_{\ell=\alpha_n n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\right)^2} \sum_{\ell=n\alpha_n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\Bigg] \\
&= \frac{1}{2D_{\alpha_n}}\left[-\Gamma_{\alpha_n}''\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right) - \frac{\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)}{1 - \Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2}\Gamma_{\alpha_n}'\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2D_{\alpha_n}}\Bigg[-\Gamma_{\alpha_n}''\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right) - \Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\left(\Gamma_{\alpha_n}'\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\right)^2 \\
&\quad \times\left(1 + \Gamma_{\alpha_n}^2\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right) + O\left(\Gamma_{\alpha_n}^4\left(\cos\left(\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\right)\right)\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

由推论 A.7 和推论 A.2 可得

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{\alpha_n}\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right)\Gamma_{\alpha_n}'^2\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right) = \frac{2n^2}{\pi\psi}\Bigg\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(h\psi + 2\psi - \frac{\psi}{n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right) \\
&\quad + \frac{3}{\psi}\sin\left(\frac{h\psi}{2} + \psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) - \frac{5}{4}\pi\right) + O\left(\frac{g}{\psi} + \frac{1}{\psi^2} + \frac{1}{n\psi}\right)\Bigg\} \\
&\quad \times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\psi}}\frac{h}{g(n)}\Bigg\{\sin\left(\frac{h\psi}{2} + \psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{g(n)\cos\left(\psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) - \frac{3}{4}\pi\right)}{2\psi h} \\
&\quad + O\left(\frac{1}{ng(n)} + g(n)\right)\Bigg\} \\
&= \frac{2n^2}{\pi\psi}\sqrt{\frac{2}{\pi\psi}}\frac{h}{g(n)}\Bigg\{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{h\psi}{2} + \psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{g(n)}{4\psi h}\cos\left(\psi - \frac{\psi}{2n} + O\left(\frac{\psi}{n^2}\right) - \frac{3}{4}\pi\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\\
&-\frac{g(n)}{4\psi h}\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\
&+\frac{3g(n)}{\psi h}\sin\left(h\psi/2+\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\\
&\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{5}{4}\pi\right)+O\left(\frac{1}{n\psi}+\frac{g(n)}{\psi^2}+\frac{g(n)^2}{\psi}+\frac{1}{\psi^2 g(n)n}\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{1}{2D_{\alpha_n}}\sqrt{\frac{2}{\pi\psi}}n^2\frac{h}{g(n)}\Big[\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{5g(n)}{2\psi h}\cos\left(\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{7}{4}\pi\right)\\
&+\frac{1}{\psi}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\pi\psi}\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\psi^2}\right)\\
&+\frac{1}{\pi\psi}\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\sin\left(\frac{h\psi}{2}+\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{ng(n)\psi}+\frac{g(n)}{\psi}\right)\\
&+O\left(\frac{1}{ng(n)}\right)\Big],
\end{aligned}
$$

由此得到该命题的结论。 □

推论B.3. 对于 $C<\psi<\alpha_n m\pi/2$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$
\begin{aligned}
b^2 &= \frac{1}{\pi\psi}\Big\{1+\sin\left(h\psi+2\psi-\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)-\frac{5}{\psi}\cos\left(\frac{h\psi}{2}+\psi+\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\
&-\frac{5}{\psi}\sin\left(\frac{h\psi}{2}\right)-\frac{2}{\psi}\cos\left(h\psi+2\psi+\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{\pi\psi}-\frac{1}{\pi\psi}\cos\left(2h\psi+4\psi+\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)\\
&+O\left(\frac{g(n)}{\psi}\right)+O\left(\frac{1}{\psi^2}+\frac{1}{ng(n)\psi}\right)\Big\},\\
b^4 &= \frac{1}{\pi^2\psi^2}\left\{\frac{3}{2}-\frac{\cos\left(2h\psi+4\psi+\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)}{2}+2\sin\left(h\psi+2\psi+\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{\psi}\right)\right\},\\
a^2 &= \frac{1}{\pi^2\psi^2}\left\{\frac{3}{2}-\frac{\cos\left(2h\psi+4\psi+\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)}{2}-2\sin\left(h\psi+2\psi+\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{\psi}\right)\right\},\\
ab^2 &= -\frac{1}{\pi^2\psi^2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{\cos\left(2h\psi+4\psi+\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)}{2}+O\left(\frac{1}{\psi}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
a\Gamma_{\alpha_n}^2\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right) &= -\frac{1}{\pi^2\psi^2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{\cos\left(2h\psi+4\psi+\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)}{2}+O\left(\frac{1}{\psi}\right)\right\},\\
b^2\Gamma_{\alpha_n}^2\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right) &= \frac{1}{\pi^2\psi^2}\left\{\frac{3}{2}-\frac{\cos\left(2h\psi+4\psi+\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)}{2}+2\sin\left(h\psi+2\psi+\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{\psi}\right)\right\},\\
\Gamma_{\alpha_n}^4\left(\cos\frac{\psi}{\alpha_n m}\right) &= \frac{4}{\pi^2\psi^2}\left\{\frac{3}{8}-\frac{\cos\left(2h\psi+4\psi+\frac{\psi}{n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)}{8}+\frac{1}{2}\sin\left(h\psi+2\psi+\frac{\psi}{2n}+O\left(\frac{\psi}{n^2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{\psi}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

B.2. 命题 4.2 的证明。命题 4.2 是将引理 4.4 [25] （另见引理 3.4 和推论 3.5 [33]）调整后应用于我们的情形。根据前述论文，我们有

$$
K_{\alpha_n}(x,N)\ll\frac{D_{\alpha_n}}{\sqrt{1-(C_{\alpha_n}^2\sum_{\ell=\alpha_n}^{n}\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\cos\theta))^2}}.
$$

Then

$$\int_0^{C/(\alpha_n m)} \left| K_{\alpha_n}(\theta) - \frac{1}{4} \right| \sin\theta \, d\theta$$

有界于

$$\int_0^{C/(\alpha_n m)} \frac{D_{\alpha_n}}{\sqrt{1 - (C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta))^2}} \sin(\theta) \, d\theta.$$

根据泰勒近似 $P_\ell(\cos\theta) = 1 - \theta^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2} + \theta^4 O(\ell^4)$，我们得出

$$\begin{aligned}
&1 - P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) \\
&= 1 - \left(1 - \theta^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2} + O(\ell^4\theta^4) - \theta^2 \frac{\ell'(\ell'+1)}{2} + O(\ell'^4\theta^4) + \theta^4 \frac{\ell'(\ell'+1)}{2} \frac{\ell(\ell+1)}{2} \right) \\
&= \theta^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2} + \theta^2 \frac{\ell'(\ell'+1)}{2} + \theta^4 \frac{\ell'(\ell'+1)}{2} \frac{\ell(\ell+1)}{2} + O(\ell^4\theta^4) + O(\ell'^4\theta^4),
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
1 - \left(C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta) \right)^2 &= C_{\alpha_n}^4 \sum_{\ell=\alpha_n}^{n} \sum_{\ell'=\alpha_n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{2\ell'+1}{4\pi} (1 - P_\ell(\cos\theta) P'_\ell(\cos\theta)) \\
&= \theta^2 \Bigg[2C_{\alpha_n}^2 \sum_{\ell=\alpha_n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{\ell(\ell+1)}{2} \sum_{\ell'=\alpha_n}^{n} C_{\alpha_n}^2 \frac{2\ell'+1}{4\pi} \\
&\quad + \theta^2 C_{\alpha_n}^4 \sum_{\ell,\ell'=\alpha_n}^{n} \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{\ell(\ell+1)}{4} \frac{\ell'(\ell'+1)}{4} \\
&\quad + O\left(\theta^2 \ell^4 C_{\alpha_n}^4 \sum \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{2\ell'+1}{4\pi} \right) \Bigg] \\
&= 2\theta^2 D_{\alpha_n} \left[1 + O(\theta^2 D_{\alpha_n}) \right].
\end{aligned}$$

这意味着

$$\int_0^{C/(\alpha_n m)} \frac{D_{\alpha_n}}{\sqrt{1-u^2}} \sin\theta \, d\theta = O\left(\frac{D_{\alpha_n}}{\sqrt{D_{\alpha_n}}} \int_0^{C/(\alpha_n m)} \frac{1}{\sqrt{1 + O(D_{\alpha_n}\theta^2)}} \frac{\sin\theta}{\theta} \right) = O(1).$$

参考文献

[1] Atkinson, K; Han, W. (2012)《球谐函数与单位球面上的逼近：导论》，数学讲义，第2044卷，施普林格。[2] Beliaev, D.; Wigman, I. (2018). 带限随机函数的节点域体积分布。（英文摘要）《概率论及相关领域》172，第1-2期，453-492页。[3] B´erard, P. (1985) 拉普拉斯算子特征函数的节点集体积。BonySjostrand-Meyer研讨会，1984-1985，报告第14号，10页，巴黎综合理工学院，帕莱索。[4] Berry, M. (1977) 规则与不规则半经典波函数。《物理学杂志A：数学与一般物理》10，2083页。[5] Berry, M. (2002) 混沌量子台球中节点线与节点的统计：周长修正、涨落、曲率。《物理学杂志A：数学与一般物理》35，3025-3038页。[6] Cheng, S. Y. (1976) 特征函数与节点集。《瑞士数学评论》51，43-55页。[7] Dierickx, G.; Nourdin, I.; Peccati, G.; Rossi, M. 单色波节点长度的小尺度中心极限定理。《数学物理通讯》（即将出版）。[8] Donnelly, H.; Fefferman, C. (1988) 黎曼流形上特征函数的节点集。《数学发明》93, 161-183页。[9] Feng, R.; Xu, X; Adler, R. J. (2018) 随机球谐函数的临界半径与上确界（II）。《概率电子通讯》23，第50号，11页, 33C55。[10] Kabluchko, Z; Sartori, A.; Wigman, I. (2021) 非高斯带限随机函数的期望节点体积。预印本 arXiv:2102.11689。[11] Krishnapur, M.; Wigman, I. (2013) 算术随机波的节点长度涨落，《数学年刊》，第177卷第2期，699-737页。[12] Logunov, A (2018) 拉普拉斯特征函数的节点集：纳迪拉什维利猜想的证明及丘成桐猜想下界的证明。《数学年刊》（第2辑）187，第1期，241-262页。[13] Logunov, A; Malinnikova, E. (2018) 拉普拉斯特征函数的节点集：二维和三维中的豪斯多夫测度估计，《哈代空间五十年》，333-344页。

[14] Logunov, A. (2018) 拉普拉斯特征函数的节点集：豪斯多夫测度的多项式上界估计，《数学年刊》（第2辑）187，第1期，221-239页。[15] Marinucci, D.; Peccati, G. (2011)《球面上的随机场：表示、极限定理与宇宙学应用》。伦敦数学学会数学讲义丛书，第389卷。剑桥大学出版社，剑桥。[16] Marinucci D.; Rossi M.; Wigman I. (2020) 随机球谐函数的样本三谱与节点长度的渐近等价。《亨利·庞加莱研究所年刊：概率与统计》56(1)：374-390页。[17] Marinucci, D.; Wigman, I. (2014) 随机球面特征函数的非线性泛函，《数学物理通讯》327，第3期，849-872页。[18] Nazarov, F.; Sodin, M. (2016). 高斯随机函数零点集的空间分布及其连通分支数目的渐近定律。（英文摘要）《数学物理、分析与几何学杂志》12，第3期，205-278页。[19] Nazarov, F.; Sodin, M.(2009). 随机球谐函数的节点域数目。《美国数学杂志》131(5)：1337-1357页。[20] Notarnicola, M.; Peccati, G.; Vidotto, A. (2022) Berry节点长度的泛函收敛：近似紧性与完全无序，预印本 arXiv:2208.07580。[21] Nourdin, I.; Peccati, G.; Rossi, M. (2019) 平面随机波的节点统计。《数学物理通讯》369，1，99-151页。[22] Rossi, M. (2019) 随机节点长度与维纳混沌。《几何、拓扑与谱理论中的概率方法》，当代数学丛书，第739卷，155-169页。[23] 2016 1603 07575 Rossi, M. ( )《球面随机场的几何》。博士论文。arXiv: 。[24] 2019 Sarnak, P.; Wigman, I. ( ) 随机带限函数节点集的拓扑。《纯粹与应用数学通讯》72，第2期，275-342页。[25] Shevchenko, R.; Todino, A. P. (2023) 小波随机场水平集的渐近行为。《随机过程及其应用》第155卷，268-318页。[26] Szego, G. (1975)《正交多项式》，第四版。美国数学学会丛书，第XXIII卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛。[27] Todino, A. P. (2020) 球面 S^2 上的随机特征函数在收缩区域中的节点长度，《伯努利》26 (4)，3081-3110页。[28] Todino, A. P. (2022) 带限球面随机场游程面积的极限行为。《概率电子通讯》27，1-12页。[29] Toth, J. A.; Wigman, I. (2009) 平面域中随机波开放节点线的计数，《国际数学研究通知》，第2009卷，第18期，2009年，3337–3365页，https://doi.org/10.1093/imrn/rnp052。[30] Vidotto, A. (2021) 关于平面随机波节点长度约化原理的注记，《统计与概率通讯》第174卷。[31] Zelditch, S. (2009) 黎曼随机波的实零点与复零点。会议论文集：《几何与数论中的谱分析——纪念 Toshikazu Sunada 六十华诞》，当代数学丛书。[32] Wigman, I. (2010) 随机球谐函数的节点长度涨落，《数学物理通讯》398，第3期，787-831页。[33] Wigman, I. (2009) 随机球谐函数节点集的分布，《数学物理杂志》50，013521。[34] 2022 2206 10020 Wigman, I. ( ) 随机场的节点结构——十年研究成果。arXiv: 。[35] 1982 Yau, S. T. ( ) 微分几何偏微分方程综述。《微分几何研讨会》，371页，普林斯顿大学出版社《数学年刊研究丛书》。