arXiv:2302.01157v2 [math.AP] 7 Jul 2023

大漂移下非散度形式椭圆方程的周期均匀化

Wenjia Jing 和 Yiping Zhang

Abstract. 我们研究非散度形式线性二阶椭圆方程的定量均匀化，其中扩散系数高度振荡且具有周期性，并伴有大漂移；研究对象属于所谓的“中心化”情形，在此情形下均匀化得以实现，且大漂移会对有效扩散率产生贡献。利用中心化条件以及与底层扩散过程相关的不变测度，我们将方程转化为具有修正后扩散系数但无漂移的散度形式方程。对于后者，定量均匀化结果已在标准情形下得到系统发展。应用这些结果，可为具有大漂移的非散度形式方程推导出定量估计，例如收敛速率和一致利普希茨正则性。

关键词：周期均匀化；非散度形式椭圆方程；扩散过程的生成元；大漂移；收敛速率；均匀化中的一致正则性。
数学主题分类（MSC 2010）：35B27, 35J08

1. Introduction and the main results

本文研究带有大漂移的非散度形式线性二阶椭圆方程的周期均匀化。更具体地，对于 $0<\varepsilon<1$，我们考虑以下方程

$$\begin{cases} -\widetilde{a}_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\partial_i\partial_j u_\varepsilon(x) - \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{b}_i(\frac{x}{\varepsilon})\partial_i u_\varepsilon(x) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u_\varepsilon(x) = g(x) & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

此处及下文中，除非另有说明，重复指标均在其取值范围内求和，并且 $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ 表示平坦环面。$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个开有界区域。对所有 $i,j=1,\dots,d$，作如下假设：

$$\begin{cases} \text{The domain } \Omega \text{ is of class } C^{1,1}; \\ \widetilde{a}_{ij} = \widetilde{a}_{ji},\ \widetilde{a}_{ij} \in C^1(\mathbb{T}^d),\ \widetilde{b}_i \in L^\infty(\mathbb{T}^d); \\ \widetilde{a}_{ij}(x+z) = \widetilde{a}_{ij}(x),\ \widetilde{b}_i(x+z) = \widetilde{b}_i(x),\ \forall z \in \mathbb{Z}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d; \\ \exists\, \lambda \in (0,\infty), \text{ such that } \lambda|\xi|^2 \le \widetilde{a}_{k\ell}(x)\xi_k\xi_\ell,\ \forall x,\xi \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1.2}$$

~第二行意味着 $\|\widetilde{a}_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} + \|\partial_\ell \widetilde{a}_{\ell j}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} + \|b_i\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \le \Lambda$ 其中某个 $\Lambda \in (0,\infty)$。在上述假设下，扩散矩阵 $\widetilde{a}$ 是对称且一致椭圆的，并且与漂移系数 $\widetilde{b}$ 一起具有 $\mathbb{Z}^d$-周期性和足够的正则性。为强调系数的周期性，我们将 $\widetilde{a},\widetilde{b}$ 视为定义在 $\mathbb{T}^d$ 上的函数。对于非散度形式的椭圆方程的狄利克雷问题 (1.1)，Ω 的 $C^{1,1}$ 正则性是标准设定，因为它能保证对每个固定的 ε，以及 $f \in L^2(\Omega)$ 和 $g \in H^2(\Omega)$，都存在一个强解 $u^\varepsilon \in H^2(\Omega)$。为了使本文的方法

Date: 2023年7月10日。

能够奏效， $\widetilde{a}$ 的正则性假设可以放宽为 $\widetilde{a} \in C^{0,\delta}(\mathbb{T}^d)$，其中某个 $\delta \in (0,1)$。见下文注 1.2 和 2.1。数值方法中常使用正则性较低的区域（例如有界凸区域，或分片正则的利普希茨区域，如 $\mathbb{R}^3$中的多面体）来处理 (1.1)；参见在对 $\widetilde{a}$施加某些限制的条件下，对 [24, 32, 29] 中这类区域的分析。我们的方法适用于这些情形；见下文注 3.1。不过，为了表述简洁，本文始终假设 (1.2) 成立。

本文始终使用以下记号和约定：I_d 表示 $d \times d$单位矩阵。估计中的界常数若仅依赖于量 d、λ、Λ以及 (1.2) 中的 Ω，而与 ε、 f和 g无关，则称其为普适常数。通常，不同行中的界常数可能有所变化，但均用相同记号表示。

在异质环境中对扩散现象进行建模时，自然会出现问题 (1.1)。这是此类模型中最简单的周期情形，但它揭示了更一般情形所共有的重要特征。我们定义微分算子

$$L^{\varepsilon}_{\widetilde{a},\widetilde{b}} := -\widetilde{a}_{ij}(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_i\partial_j - \tfrac{1}{\varepsilon}\widetilde{b}_j(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_j.$$

利用 $\widetilde{a}$ 的正则性，我们可以将$L^{\varepsilon}_{\widetilde{a}}$, $\widetilde{b}$ 改写为

$$\begin{aligned} L^{\varepsilon}_{\widetilde{a},\widetilde{b}} u_\varepsilon = \mathcal{L}^{\varepsilon}_{\widetilde{a},\widetilde{\beta}} u_\varepsilon &:= -\partial_i\left(\widetilde{a}_{ij}(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_j u_\varepsilon\right) - \tfrac{1}{\varepsilon}\widetilde{\beta}_j(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_j u_\varepsilon, \\ &\text{where } \widetilde{\beta}_j(y) := \widetilde{b}_j(y) - \partial_{y_i}\widetilde{a}_{ij}(y). \end{aligned} \tag{1.3}$$

微分算子$\mathcal{L}^{\varepsilon}_{\widetilde{a}}$, $\widetilde{\beta}$ 具有散度形式，且仍含有大漂移。

微分算子$L^{\varepsilon}_{\widetilde{a}}$, $\widetilde{b}$ 是由以下随机微分方程（SDE）确定的扩散过程的生成元：

$$\begin{cases} dX^{\varepsilon}_t = \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{b}(\frac{X^{\varepsilon}_t}{\varepsilon})dt + \sqrt{2}\sigma(\frac{X^{\varepsilon}_t}{\varepsilon})dW_t, \\ X^{\varepsilon}_0 = x. \end{cases} \tag{1.4}$$

这里， $\sigma(x) = \sqrt{\widetilde{a}(x)}$ 是正定矩阵 $\widetilde{a}(x)$的平方根，而 W_t 是一个标准的d维维纳过程。通过标准的变量替换可以验证， X^{ε}_t 的分布与 $\varepsilon X_{t/\varepsilon^2}$ 相同，其中 $(X_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ 由下式确定：

$$dX_s = \widetilde{b}(X_s)ds + \sqrt{2}\sigma(X_s)dW_s, \qquad X_0 = \tfrac{x}{\varepsilon}.$$

~在系数的周期性假设 $\widetilde{a}, b$下，路径 X_s 可视为在环面 $\mathbb{T}^d$上运动。鉴于 (1.1) 与随机微分方程之间的这种联系，可以采用概率方法研究均匀化问题，正如 Bensoussan、Lions 和~ Papanicolaou 的开创性著作 [8] 中所做的那样；参见该书第 3 章。在漂移 b满足适当条件（见 (1.7)）时，已知解u_ε 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛于均匀化问题的解 u；该问题具有常数扩散系数且没有漂移。换言之，在远大于其周期性尺度的空间尺度上，原有的大漂移会对有效扩散产生贡献。

本文主要关注方程 (1.1) 均匀化的定量方面。 [8] 的作者运用经典双尺度展开法，获得了 L^∞ 收敛速率。~ 然而，他们的方法要求 $\widetilde{a}$ 、 b 以及 f 具有比 (1.2) 更高的正则性，且只处理了 $g = 0$的情形。近几十年来，人们发展了定量均匀化的新思想和新技术，其适用范围不仅包括周期情形，也包括平稳遍历情形。自然要考察这些进展如何应用于方程 (1.1)。我们将 [8, 22], 视为具有代表性的经典理论研究,

并将 [27, 25, 26, 3, 15, 14, 23, 30]视为近期发展的代表性研究，其重点在于定量方面。

在周期均 homogenization中，如今已有标准方法（例如参见 [30]），可用于获得 L^p 和 $W^{1,\ p}$ （配以适当的校正子等）的（甚至最优）收敛速率，以描述格林函数的渐近行为，并证明关于 ε 的一致正则性估计。对于（1.1），鉴于它与（1.4）的联系，当扩散系数 $\widetilde{a}$ 不是常矩阵时，考虑非散度形式的$L^{\varepsilon}_{\widetilde{a}}$, $\widetilde{b}$ 最为自然。然而，大多数关于定量均匀化的研究集中于散度形式的方程，而非（1.1）这种形式；即使对 $\widetilde{a}$ 施加（弱）可微性条件，从而可以将$L^{\varepsilon}_{\widetilde{a}}$, $\widetilde{b}$ 改写为散度形式，

如（1.3）所示，当存在大漂移 $\varepsilon^{-1}\widetilde{\beta}(x/\varepsilon)$时，可用的结果要少得多。尽管如此，关于这一（以及稍微更一般的）情形下的定性均匀化结果，可参见 Allaire 和 Orive [1], 、Henning 和 Ohlberger [21] 以及 Capdeboscq [10] 。本文的主要目标是研究存在大漂移时的定量均匀化结果。

当 $b = 0$ 且处于周期情形时，Avellaneda 和 Lin [6] 利用其颇具影响力的紧性方法，针对 u_ε （在某些情形下可推广至 $C^{1,\ 1}$ 类）得到了各种一致正则性估计。关于收敛速率，Guo、Tran 和 Yu [19] 证明， $O(\varepsilon)$ 是 L^∞ 中通常最优的收敛速率，并构造了校正子，使得在 L^∞ 中达到 $O(\varepsilon^2)$ 的收敛速率。他们还率先研究了在不使用校正子的情况下，收敛速率在什么条件下为 $O(\varepsilon^2)$；此类研究见 [17] ，而 Sprekeler 和 Tran [34] 关于 $W^{1,\ p}$ 中 $O(\varepsilon)$ 收敛速率的研究则可参见相关文献。关于具有短程依赖假设的随机情形中的一致正则性结果，请参见 [5, 4]；从随机环境中的随机游走角度开展的研究，请参见 [16, 18] 。

采用数值方法近似求解具有高度振荡系数的非散度形式方程 (1.1)，既颇具挑战，又有重要的实际意义，也因此推动了对 (1.1) 的大量研究。更多详情请参见 Capdeboscq、Sprekeler 和 S¨uli [11], Henning 和 Ohlberger [20] 及其中的参考文献。

下面我们先回顾定性理论，然后陈述关于定量均匀化的主要结果。

1.1. 定性均质化结果。在 (1.2) 的条件下，已知（见[8, 第 3] 章的定理 3.4 和下文的命题 2.1），对于扩散过程 (1.4)，存在唯一的不变测度，其具有正密度 $m(y) \in C(\mathbb{T}^d)$，并且 m 是方程的唯一弱解：

$$-\partial_{y_i}\left[\partial_{y_j}\left(\widetilde{a}_{ij}(y)m(y)\right) - \widetilde{b}_i(y)m(y)\right] = 0 \text{ in } \mathbb{T}^d, \text{ and } \int_{\mathbb{T}^d} m(y)\,dy = 1. \tag{1.5}$$

令 β 如 (1.3) 中所定义。 m 的方程也可以写成散度形式：

$$-\partial_{y_i}\left[\widetilde{a}_{ij}(y)\partial_{y_j}m(y) - \widetilde{\beta}_i(y)m(y)\right] = 0. \tag{1.6}$$

更多详情请参见下文的命题 2.1。在 [8] 中，式 (1.1) 的定性均质化是在以下附加条件下建立的：

$$\int_{\mathbb{T}^d} \widetilde{b}_j(y)m(y)\,dy = 0, \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{1.7}$$

下文将上述条件称为中心化条件。由于根据 (1.2) 中的假设， m的存在性和唯一性得以保证，因此，带有 (1.7) 的问题 (1.5) 构成一个超定系统，该系统仅对某些特殊类别的漂移存在解。

在 [8], Bensoussan、Lions 和 Papanicolaou 的工作中，他们结合概率方法和基于偏微分方程的解析方法，建立了方程 (1.1) 的均匀化理论。在这两种方法中，中心化条件 (1.7) 都是关键假设。它使得以下单胞问题（均匀化中的一个核心概念）可解。更确切地说，(1.2) 和 (1.7) 保证对于每个 $j = 1, \cdots, d$，存在唯一的 $\widetilde{\chi}^j$ ，使其满足

$$-\widetilde{a}_{ik}\partial_{y_i}\partial_{y_k}\widetilde{\chi}^j(y) - \widetilde{b}_i(y)\partial_{y_i}\widetilde{\chi}^j(y) = \widetilde{b}_j(y) \ \text{ in } \mathbb{T}^d, \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{T}^d} \widetilde{\chi}^j = 0. \tag{1.8}$$

定性均质化结果如下。

定理1。 1（ [8] 中的定理3.5.2）。假设 (1.2) 和 (1.7) 成立。定义 $\overline{a} = (\overline{a}_{ij})$ b y

$$\begin{aligned} \overline{a}_{ij} &:= \int_{\mathbb{T}^d} [(I + \nabla_y \widetilde{\chi})\widetilde{a}(I + \nabla_y \widetilde{\chi})^{\mathrm{T}}(y)]_{ij} m(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\widetilde{a}_{ij} + \widetilde{a}_{ik}\partial_{y_k}\widetilde{\chi}^j + \widetilde{a}_{kj}\partial_{y_k}\widetilde{\chi}^i + \widetilde{a}_{k\ell}\partial_{y_k}\widetilde{\chi}^i\partial_{y_\ell}\widetilde{\chi}^j\right) m(y)\, dy. \end{aligned} \tag{1.9}$$

那么 $\overline{a}$ 是一个常数对称矩阵，并且 $\overline{a} \geq \lambda_1 \mathrm{I}_d$ ，其中某个正的普适常数为 $\lambda_1 > 0$ 。此外，对于任意 $f \in L^2(\Omega)$ 和 $g \in H^2(\Omega)$（也就是说，狄利克雷数据是此类函数在 $\partial\Omega$ 上的限制），方程 (1.1) 的解 u_ε 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛于均匀化问题的解 u

$$\begin{cases} -\overline{a}_{ij}\partial_i\partial_j u = f & in\ \Omega, \\ u = g & on\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

该定理曾以定理 5.2 的形式出现在 [8] 第 3 章中，当时所用的假设比我们的更强。我们在第3.1节重新证明该定理。值得注意的是，在 Ω 满足 $C^{1,1}$ 正则性假设的情况下，(1.10) 的解实际上属于 H^2 (Ω)。

备注 1.1. 现在来讨论中心化条件。

~如果没有大漂移，即 $b = 0$，那么中心化假设总是成立。~这就是 [6, 19, 34, 4] 中的情形。如果矩阵 $\widetilde{a}$ 为常数且 $\nabla \cdot b = 0$，那么 $m(y) \equiv 1$ 是不变测度，中心化条件便简化为零均值条件；这类情形的详细研究可见 [12]。

~在所谓的层状介质中，系数 $\widetilde{a}$ 和 b 仅依赖于一个坐标，即 $y = (y_1, \ldots, y_d)$ 的第一个坐标 y_1，不变测度 $m(y)$ 具有如下形式： $m(y) = m(y_1)$，并且由下式确定

$$-\partial_{y_1}^2(\widetilde{a}_{11}(y_1)m(y_1)) + \partial_{y_1}(\widetilde{b}_1(y_1)m(y_1)) = 0, \qquad y_1 \in \mathbb{T}^1.$$

~注意，由于椭圆性， $\widetilde{a}_{11} > 0$ 。假设 $\widetilde{a}$、 b 足够光滑，则中心化条件等价于

$$\int_0^1 \frac{\widetilde{b}_1(s)}{\widetilde{a}_{11}(s)} ds = 0, \ \int_0^1 \frac{\widetilde{b}_j(s)}{\widetilde{a}_{11}(s)} \exp\left(\int_0^s \frac{\widetilde{b}_1(t)}{\widetilde{a}_{11}(t)}\, dt\right) ds = 0, \ \text{for } j = 2, \ldots, d. \tag{1.11}$$

更简单的一维情形将在第 4 节中作更详细的讨论。我们也在该节指出，当中心化条件不成立时，一般不能指望实现均匀化。

1.2. 定量估计的主要结果。本文的主要结果涉及对 (1.1) 的均匀化进行定量估计，即 L^2、 L^∞ 中以及 H^1 中的收敛速率，以及 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ 的一致利普希茨正则性。

众所周知，为了得到 H^1 中的收敛速率（一般而言，对于 $W^{1,\,p}$，也需要一些校正子（将其加到极限 u 中）。沿用 [25, 30],，我们引入所谓的狄利克雷校正子 $\Phi_{\varepsilon,\,j}, j=1,\dots,d$，定义如下:

$$-\partial_i\left(q_{ik}(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_k\Phi_{\varepsilon,j}\right)=0 \text{ in } \Omega, \qquad \Phi_{\varepsilon,j}=x_j \text{ on } \partial\Omega. \tag{1.12}$$

这里，扩散矩阵 $q=(q_{ij})$ 在后文的 (2.8) 中定义，且一致椭圆。容易验证，函数 $\Phi_{\varepsilon,\,j}-x_j$ 属于 $H_0^1(\Omega)$，并且其在 L^∞ 中的量级为 $O(\varepsilon)$。然而，其梯度在 L^2 中并不小。这个函数对 $\nabla u_\varepsilon-\nabla u$ 进行校正，使后者强收敛。

我们的首个主要结果旨在量化 u_ε 在各种函数空间中收敛到 u 的过程。

定理 1.2。假设 (1.2) 和 (1.7) 成立，则以下结论成立。

(1) 存在一个普适常数 $C\in(0,\infty)$，使得对于任意 $f\in H^1(\Omega)$ 和 $g\in H^2(\Omega)$，都有

$$\|u_\varepsilon-u\|_{L^2(\Omega)}\le C\varepsilon\left(\|f\|_{H^1(\Omega)}+\|g\|_{H^2(\Omega)}\right) \tag{1.13}$$

and

$$\|u_\varepsilon-u-\{\Phi_{\varepsilon,j}-x_j\}\partial_j u\|_{H_0^1(\Omega)}\le C\varepsilon\left(\|f\|_{H^1(\Omega)}+\|g\|_{H^2(\Omega)}\right). \tag{1.14}$$

(2) 设 $g=0$ 和 $p\in(1,d)$，并设 $r=dp/(d-p)$。则存在一个常数 $C_p\in(0,\infty)$，其仅取决于 (1.2) 中的数据和 p，使得对于任意 $f\in W^{1,\,p}(\Omega)$，都有

$$\|u_\varepsilon-u\|_{L^r(\Omega)}\le C_p\,\varepsilon\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.15}$$

(3) 设 $g=0$ 和 $p\in(d,\infty)$。则存在一个常数 $C_p\in(0,\infty)$，其仅取决于 (1.2) 中的数据和 p，使得对于任意 $f\in W^{1,\,p}(\Omega)$，都有

$$\|u_\varepsilon-u\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_p\,\varepsilon\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.16}$$

我们还有　　解 $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ 满足 (1.1 的关于 ε 一致的利普希茨正则性如下　　).

定理 1.3. 假设 (1.2) 和 (1.7) 成立。令 $p>d$ 和 $\eta\in$ 为 (0, 1) 中的固定数。则存在常数 $C_{p,\,\eta}\in$ 属于 $(0,\infty)$，其仅取决于 (1.2) 中的数据以及 p、η，使得对于任意 $f\in L^p$ 属于 (Ω) 且 $g\in C^{1,\,\eta}$ 属于 (∂Ω)，均有

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_{p,\eta}\left\{\|g\|_{C^{1,\eta}(\partial\Omega)}+\|f\|_{L^p(\Omega)}\right\}. \tag{1.17}$$

定理 1.2 的第 (3) 项恢复了 L^∞ 收敛速率，这与 [8] 第 3 章中的定理 5.1 相同。上述关于收敛速率和一致 Lipschitz 估计的其他所有结果，在本文所研究的情形下都是新的。还要注意，鉴于 $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ 的一致利普希茨正则性，我们还得到 u_ε 到 u 在 $C(\Omega)$ 中的收敛（速率与 (1.16) 相同）。$C(\Omega)$ 中的定性收敛由 [8] 第 3 章中的定理 4.5 利用概率方法建立。除此之外，[8] 中的 L^∞ 速率是在对 $\widetilde{a}$、$\widetilde{b}$ 作出更高正则性假设，并且对于 $f\in W^{3,\,p}(\Omega)$ 且 $p>d$ 的条件下建立的。因此，我们的结果有所改进。

另一方面，所有这些定量结果看起来几乎与近期针对无任何

漂移的散度形式椭圆方程的周期均 homogenization 所建立的相应结果完全相同，即在 [27, 26, 30]，中，唯一的区别是定理 1.2 中对 f 提出了更高的正则性要求。事实上，本文的主要贡献在于指出，在满足中心化条件（1.7）的情况下，可以将（1.1）变换为一个具有周期性且系数一致椭圆、无任何漂移的椭圆方程；见下文（2.10）。这使我们能够直接利用近期在更标准情形下得到的定量均匀化结果，从而获得上述结果。从证明中可以清楚看出，对 f 提出更高的正则性要求同样是由于这一变换所致。

注 1.2。我们以几点备注结束引言。

将 (1.1) 转化为无漂移的散度型方程的关键变换将在下一节中详细介绍。对于 $b = 0$, Avellaneda~和 Lin [6] 早已使用了这种变换。本文表明，对于满足中心化条件的更一般的 b，该变换仍然适用。如果这一条件不成立，则均匀化会更加复杂，不能期待 (1.10) 作为有效模型；参见第 4 节以及 [21, 2, 10] 中的相关工作。

Lipschitz 类是 (1.1) 的解获得一致正则性的最佳空间。一般而言，对于 $r > 0$，我们不能期待在 $C^{1,r}$(Ω) 中获得一致正则性；参见第 4 节中的讨论。这与 $\widetilde{b} = 0$ 的情形形成鲜明对比。对于后一种情形，Avellaneda 和 Lin 在 [6] 中建立了一致的 $C^{1,1}$ 先验估计。

可以放宽 (1.2) 中的正则性假设。就 $\widetilde{a}$ 的正则性而言，关键在于不变测度 m 的存在性和唯一性，并确保对于某个 $\alpha \in$， $m \in C^{0,\,\alpha}(\mathbb{T}^d)$ 属于 (0, 1)。因此，只需要求 $\widetilde{a} \in W^{1,\,p}(\mathbb{T}^d)$（对于 $\widetilde{b}$，只需在 $p > d$ 足够大时要求 $\widetilde{b} \in L^p(\mathbb{T}^d)$）。在这些假设下， m 的存在性和正则性已在 [34] 中得到系统研究。我们还指出，本文中关于 m 的证明（见下文命题 2.1）本质上与 [8] 中的证明相同，并且在相当弱的正则性假设 $\widetilde{a} \in C^{0,\,\delta}(\mathbb{T}^d)$、 $\beta \in$ 属于 (0,1) 且 $\widetilde{b} \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ 下也可以完成；见注 2.1。对 $\widetilde{a}$ 的这一假设大致上是最优的。

最后但同样重要的是，定理 1.2 和 1.3 中选取的定量结果只是若干代表性结果。这里也可以考虑其他各种结果（例如 $W^{1,\,p}$ 速率、Neumann 边界条件等）。

本文其余部分安排如下。下一节中，我们利用关键变换将 (1.1) 化为一个不含任何漂移项的散度型方程。所得方程具有标准形式，因此适用近期发展的定量均匀化结果。随后，我们在第 3 节应用这些结果证明本文的主要定理。在第 4 节和第 5 节中，我们将讨论漂移项的中心化条件，并给出一些例子和进一步的讨论。

2. The key transformation

本节中，我们将 (1.1) 变换为一个不含任何漂移项的散度形式方程。~在 $b = 0$ 的情形下，Avellaneda 和 Lin [6] 已经使用过这一变换。该变换包含以下两个步骤。

2.1. 以不变测度加权。第一步，我们用不变测度 m 对方程 (1.1) 加权，并将方程转化为带有一个~零均值且无散的大漂移的散度形式。请注意，若不进行加权，(1.3) 中的漂移 β 就不具备这些性质。

首先，不变　　方程 (1.5) 中的测度 m 定义良好，并具有以下重要性质。

命题 2.1。在假设 (1.2) 下，方程 (1.5) 存在唯一弱解$m \in H^1(\mathbb{T}^d)$。此外，我们可以找到 $\alpha \in (0, 1)$ 和 $C \in (1, \infty)$，二者都是普适的，使得 $m \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^d)$，并且

$$\|m\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^d)} + \|m\|_{H^1(\mathbb{T}^d)} \leq C, \quad \inf_{y \in \mathbb{T}^d} m(y) \geq C^{-1}. \tag{2.1}$$

证明。求解 (1.5) 的 $m \in H^1(\mathbb{T}^d)$ 的存在性和唯一性，基本上可由 [8] 的第 3 章中定理 3.4 的证明得到。那里的证明基于 Fredholm择一定理论证，关键在于证明：如果 $z \in H^1(\mathbb{T}^d)$ 满足

$$-\partial_{y_i}\left(\widetilde{a}_{ij}(y)\partial_{y_j} z(y)\right) - \widetilde{\beta}_i(y)\partial_{y_i} z(y) = 0 \quad \text{in } \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d,$$

那么 z 必须是常数。在 [8] 中，这一点对于 $\widetilde{a} \in C^1 \cap W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d)$ 和 $\widetilde{b} \in C^1(\mathbb{T}^d)$ 得到了证明，同时还得到 $m \in W^{2,p}(\mathbb{T}^d)$，其中某个 $p > 2$。然而，考察该证明可知，上述结论在假设 (1.2) 下成立。事实上，根据椭圆正则性（例如 [13] 的定理 8.24）$z \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^d)$ 对某个 $\alpha \in (0, 1)$ 成立，因此我们可以假设 $z > 0$。于是，利用上述方程的强最大值原理（例如 [13] 的定理 8.19）即可得出结论。对于 $m \in H^1(\mathbb{T}^d)$ 求解 (1.6) 后，再次利用椭圆正则性，我们得到 $m \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^d)$，并具有所需的估计。正下界的存在性同样已在 [8] 中得到证明。□

注 2.1. 上述证明本质上源自 Bensoussan、Lions 和 Papanicolaou [7]。利用 Bogachev 和 Shaposhnikov [9, 关于双重散度型方程 (1.5) 的较新可解性与正则性理论1] 推论 3.7 和定理 3.¨（另见 Sj¨ogren[31] 的工作），即使将扩散矩阵的正则性降低至 $\widetilde{a} \in C^{0,\delta}(\mathbb{T}^d)$（其中 $\delta \in (0, 1)$），仍可得到一个正且 Hölder 连续的不变测度 m。这样一来，尽管在 (1.6) 中定义的修正漂移 β 不再属于 L^∞，它仍可表示为一个有界项与一个 $C^{0,\alpha}$ 项的弱散度之和，因此仍可使用所有椭圆型偏微分方程工具。关于这一点，我们不再赘述。

˜在 $b = 0$ 的情形下，Sprekeler [33] 证明了与一致椭圆扩散矩阵 $\widetilde{a} \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$（若 $d \geq 3$，还需满足 Cordes 条件）相关的非负不变测度 $m \in L^2(\mathbb{T}^d)$ 的存在性与唯一性。在其他诸多有趣的结果中，他利用 m 和 [6] 的变换方法，证明了 (1.1) 的均匀化（在 H^2 中弱收敛，在 H^1 中强收敛），其中 Ω 有界且为凸集。

我们对 (1.1) 中的系数和右端项赋予权重，并对 $y \in \mathbb{T}^d$ 和 $x \in \Omega$，定义：

$$a_{ij}(y) = \widetilde{a}_{ij}(y)m(y),\ b_j(y) = \widetilde{b}_j(y)m(y),\ f_\varepsilon(x) = f(x)m(\tfrac{x}{\varepsilon}). \tag{2.2}$$

于是，问题 (1.1) 可改写为

$$\begin{cases} -\partial_i\left(a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\partial_j u_\varepsilon\right) - \frac{1}{\varepsilon}\beta_i(\frac{x}{\varepsilon})\partial_i u_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{in } \Omega, \\ u_\varepsilon = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

这里，周期向量场 $\beta = (\beta_j)$、 $j = 1$、.....、 d 定义为

$$\beta_j(y) = b_j(y) - \partial_{y_i} a_{ij}(y) = \widetilde{b}_j(y)m(y) - \partial_{y_i}\left(\widetilde{a}_{ij}(y)m(y)\right), \qquad y \in \mathbb{T}^d. \tag{2.4}$$

鉴于 $\widetilde{a}$、$\widetilde{b}$ 和 m 的正则性，我们可以验证，对于所有 i、$j=1$、.....、d，$b_j \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ 和 $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^d)$。此外，根据（1.5），我们得到关于 β 的以下关键性质：

$$\partial_{y_i}\beta_i = 0, \qquad \int_{\mathbb{T}^d} \beta_i(y)dy = 0. \tag{2.5}$$

我们指出，在 [8]，中用于定性均质化的偏微分方程方法里，作者从 (2.3) 出发，并通过特别关注大漂移项对通常的能量方法进行了调整。具体而言，形式上的双尺度展开表明，应考虑以下单胞问题：对每个 $j=1,\ \ldots,d$,

$$-\partial_{y_k}(a_{k\ell}(y)\partial_{y_\ell}\chi^j(y)) - \beta_\ell(y)\partial_{y_\ell}\chi^j(y) = \partial_{y_k}a_{kj}(y) + \beta_j(y) \text{ in } \mathbb{T}^d, \quad \int_{\mathbb{T}^d}\chi^j = 0. \tag{2.6}$$

漂移项满足 (2.5) 这一事实至关重要，因为它保证了 (2.6) 的唯一可解性。详情请参阅 [8] 的第 3 章。

注 2.2. 我们还指出以下几点：可以继续采用 [8] 中的偏微分方程方法，通过调整近期为散度形式提出的定量结果方法（例如 [30] 中的方法），并仔细追踪大漂移的影响，直接对 (2.3) 的均匀化进行定量分析。粗略地说，只需将标准情形中的单胞问题（见 [30]）替换为 (2.6) 即可。

2.2. 漂移项的进一步变换。我们采用一种比上文备注中概述的方法简单得多的做法。这是关键变换的第二步。

~请注意，由于 b 的中心化条件，所得方程 (2.3) 中的大漂移均值为零且无散。于是有以下结论。

引理 2.2。假设 (1.2) 和 (1.7) 成立。设 β 如 (2.4) 所示，$\alpha \in (0,1)$ 如命题 2.1 所示。则存在一个反对称二阶张量 $\phi = (\phi_{ij})$ 和一个普适常数 $C \in (1,\infty)$，使得 $\phi_{ij} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^d)$，并且对所有 $k,j = 1,\ldots,d$，以下结论成立：

$$\beta_j = \partial_{y_\ell}\phi_{\ell j},\ \phi_{kj} = -\phi_{jk}, \quad \int_{\mathbb{T}^d}\phi_{kj}(y)\,dy = 0,\ and\ \|\phi_{kj}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^d)} \le C. \tag{2.7}$$

这类结果在均质化理论中发挥着重要作用，且早已见于诸如 [8, 28] 这样的经典著作；另请参见 [30, 第 3 节1]。为求完整起见，我们在下文给出证明的一些细节。

证明。对于每个 $j=1,\ldots,d$，求解泊松问题

$$\Delta_y f^j = \beta_j = b_j - \partial_{y_i}a_{ij} \quad \text{ in } \mathbb{T}^d, \qquad \int_{\mathbb{T}^d} f^j(y)\,dy = 0.$$

由于 $b_j \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ 且 $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^d)$，根据椭圆正则性理论，我们得到 $f^j \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^d)$。Le t

$$\phi_{ij} := \partial_{y_i}f^j - \partial_{y_j}f^i.$$

于是 $\phi_{ij} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^d)$，显然满足 $\phi_{ij} = -\phi_{ji}$。恒等式 $\partial_{y_i}\phi_{ij}(y) = \beta_j$，等价于 $\partial_{y_i}\partial_{y_j}f^i(y) = 0$，可通过验证 $\Delta_y(\mathrm{div} f) = 0$ 得到。后者可由 (f^j) 的方程以及 div $\beta = 0$ 这一事实推出。(2.7) 中的估计可由 β、ϕ 的定义以及 (1.2) 和 (2.1) 中的界得到。□

关键变换的第二步如下进行。定义

$$q_{ij}(y) = a_{ij}(y) + \phi_{ij}(y) = \widetilde{a}_{ij}(y)m(y) + \phi_{ij}(y), \qquad y \in \mathbb{T}^d,\ i,j = 1,\dots,d. \tag{2.8}$$

以下结论是前一个引理的直接推论。

推论 2.3. 扩散矩阵 $q = (q_{ij})$ 属于 $C^{0,\,\alpha}(\mathbb{T}^d)$，且一致椭圆；并且存在通用常数 $\lambda_1, \Lambda_1 \in (0,\infty)$，使得

$$\|q_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \le \Lambda_1, \quad q_{ij}(y)\xi^i\xi^j \ge \lambda_1|\xi|^2,\ \forall y \in \mathbb{T}^d,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{2.9}$$

此外，问题 (2.3) 可改写为

$$\begin{cases} -\partial_i\left(q_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\partial_j u_\varepsilon\right) = f_\varepsilon & \text{in } \Omega, \\ u_\varepsilon = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

需要指出的是，这第二步变换已在 [10] 中使用，如今已成为标准做法。

证明。鉴于 ϕ_{ij}的正则性、 m的有界性与正性，以及 (ϕ_{ij}) 的反对称性，我们可以验证

$$\lambda_1 := \lambda \inf_{\mathbb{T}^d} m, \quad \Lambda_1 := \max_{i,j} \|\phi_{ij}\|_{L^\infty} + \Lambda \max_{\mathbb{T}^d} m.$$

成立 对于 (2.9)。要验证 (2.3) 和 (2.10) 的等价性，只需验证 y

$$-\int_\Omega \left[\tfrac{1}{\varepsilon}\beta_j(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_j u_\varepsilon(x)\right]\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \phi_{ij}(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_j u_\varepsilon(x)\partial_i\varphi(x)\,dx, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.11}$$

为此，利用关系

$$\partial_\ell[\phi_{\ell j}(\tfrac{x}{\varepsilon})] = (\varepsilon^{-1}\partial_\ell\phi_{\ell j})(\tfrac{x}{\varepsilon}) = \varepsilon^{-1}\beta_j(\tfrac{x}{\varepsilon})$$

我们可以将 (2.11) 的左端计算如下:

$$-\int_\Omega [\partial_\ell(\phi_{\ell j}(\tfrac{x}{\varepsilon}))]\varphi(x)\partial_j u_\varepsilon(x)\,dx = \int_\Omega \phi_{\ell j}(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_\ell\left[\varphi\partial_j u_\varepsilon\right]\,dx$$
$$= \int_\Omega \phi_{\ell j}(\tfrac{x}{\varepsilon})(\partial_\ell\varphi)\partial_j u_\varepsilon\,dx + \int_\Omega \varphi(x)\phi_{\ell j}(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_j\partial_\ell u_\varepsilon(x)\,dx.$$

第二行中的最后一项为零，因为 ϕ 是反对称的（注意，对每个 $\varepsilon \in (0,1)$ 和 $f \in L^2(\Omega)$，$u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$）。这就验证了 (2.11)，并完成了推论的证明。□

总之，我们已将 (1.1) 转化为椭圆方程 (2.10)，该方程处于散度形式且不含任何漂移项。此外，未缩放的扩散矩阵 $q = (q_{ij})$ 是 $\mathbb{Z}^d$-周期的、一致椭圆的，并属于 $C^{0,\,\alpha}(\mathbb{T}^d)$。换言之，(2.10) 属于定量周期均匀化结果的标准情形；参见 [30]。我们强调，这种两步变换此前已由 Avellaneda 和 Lin [6] 在 $b = 0$ 中使用。上文给出了该变换用于满足中心化条件 (1.7) 的非零 b 时的详细说明。

3. Proofs of the main results

有了上一节的准备，我们可以将现已广为人知的定量均匀化结果应用于方程 (2.10)，并证明本文的主要定理。

3.1. 定性收敛结果。首先，我们利用 (1.1) 与 (2.10) 之间的等价性重新证明定理 1.1。对于后一个方程，由于 (q_{ij}) 是 $\mathbb{Z}^d$-周期的并满足 (2.9)，且

$$f_\varepsilon(x) = f(x)m\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup f(x)\int_{\mathbb{T}^d} m(y)\,dy = f(x) \qquad \text{in } L^2(\Omega),$$

根据标准的定性均质化理论，我们知道，u_ε 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛于下式的唯一解

$$\begin{cases} -\partial_i\left(\overline{q}_{ij}\partial_j u\right) = f, & \text{in } \Omega,\\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

这里，均匀化扩散矩阵 $\overline{q} = (\overline{q}_{ij})$ 定义为（参见例如 [8, 22]）：

$$\overline{q} = \int_{\mathbb{T}^d} (I + \nabla_y \chi(y)) q(y) (I + \nabla_y \chi(y))^{\mathrm{T}}\, dy$$

其中 $\chi = (\chi^1, \dots, \chi^d)$，并且对于每个 $j = 1, \dots, d$，$\chi^j \in H^1(\mathbb{T}^d)$ 是相应单胞问题的解

$$-\partial_{y_i}(q_{ik}(y)(\partial_{y_k}\chi^j + \delta_{kj})) = 0 \text{ in } \mathbb{T}^d, \quad \int_{\mathbb{T}^d} \chi^j = 0. \tag{3.2}$$

注意，矩阵 $\overline{q}$ 不一定是对称的，因为 q 不是对称的。在 Ω 具有 $C^{1,1}$ 正则性的条件下，均匀化方程 (3.1) 的唯一 H^1 解 u 实际上属于 $H^2(\Omega)$，因此均匀化方程可以写成非散度形式，并且扩散矩阵可以对称化。换言之，(3.1) 可以改写为

$$\begin{cases} -\overline{q}^{\mathrm{sym}}_{ij}\partial_i\partial_j u = f, & \text{in } \Omega,\\ u = g & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $\overline{q}^{\mathrm{sym}}$ 是 q的对称化。由于 $a = m\widetilde{a}$ 正是 q 的对称部分，我们有 e

$$\overline{q}^{\mathrm{sym}} = \int_{\mathbb{T}^d} (I + \nabla_y \chi(y)) a(y) (I + \nabla_y \chi(y))^{\mathrm{T}}\, dy. \tag{3.4}$$

只需检查 (1.9) 中定义的 $\overline{a}$ 与 $\overline{q}^{\mathrm{sym}}$一致。为此，我们证明 (3.2) 的解$\chi^j$，$j = 1$，.....，$d$，与 (1.8) 的解 $\widetilde{\chi}^j$ 一致。将 (1.8) 两边乘以 m，可见 $\widetilde{\chi}^j$ 满足

$$-a_{ik}(y)\partial_{y_i}\partial_{y_k}\widetilde{\chi}^j(y) - b_i(y)\partial_{y_i}\widetilde{\chi}^j(y) = b_j(y), \qquad \text{in } \mathbb{T}^d.$$

注意，根据椭圆正则性（我们只需 $\widetilde{a}$ 属于 H¨older 空间且 $\widetilde{b}$ 有界），$\widetilde{\chi}^j \in H^2(\mathbb{T}^d)$，因此我们还有

$$-q_{ik}(y)\partial_{y_i}\partial_{y_k}\widetilde{\chi}^j(y) - b_i(y)\partial_{y_i}\widetilde{\chi}^j(y) = b_j(y), \qquad \text{in } \mathbb{T}^d.$$

鉴于本节中单胞问题 (3.2) 的弱形式、(q_{ij}) 的定义、(ϕ_{ij}) 的反对称性、$\widetilde{\chi}^j$ 的 H^2正则性，以及关系式 $\partial_{y_i} q_{ij} = \partial_{y_i} a_{ij} + \beta_j = b_j$（见 (2.4)），我们验证 $\widetilde{\chi}^j$ 满足

$$-\partial_{y_i}(q_{ik}(y)\partial_{y_k}\widetilde{\chi}^j) = b_j(y).$$

再次根据 (2.4) 中的关系，我们看到上述方程只是对 (3.2) 的改写。由单胞问题解的唯一性，我们得出，对于所有 $j = 1$，$\widetilde{\chi}^j = \chi^j$..... d。现在比较 (1.9) 与 (3.4)，可得 $\overline{a} = \overline{q}^{\mathrm{sym}}$。这再次证明了定理 1.1 中的定性均质化结果。

剩下要证明 $\overline{a} \geq \lambda_1 \mathrm{I}_d$，其中 λ_1 在推论 2.3 的证明中定义。对于散度形式的 (3.5) 的均匀化，由于 (q_{ij}) 满足椭圆性条件 (2.9)，我们可以应用 [8] 第 1 章中的定理 3.2，该定理指出均匀化矩阵 $(\overline{q}_{ij})$ 满足 $\overline{q} \geq \lambda_1 \mathrm{I}_d$。也就是说，均匀化扩散矩阵具有相同的椭圆性界。由于 $\overline{a} = \overline{q}^{\mathrm{sym}}$， a 具有相同的下椭圆性界。

注 3.1。上文利用 Ω 的 $C^{1,1}$ 正则性，说明方程 (2.10) 的均匀化方程 (3.1) 可以写成非散度形式。在数值方法中，常使用多面体等分片正则区域（见 $\mathbb{R}^3$），但这些区域并非 $C^{1,1}$。对于凸 Lipschitz 区域，Smears 和 S¨uli [32] 证明了非散度形式方程在 $H^2(\Omega)$ 中的可解性（若 $d \geq 3$，则还需假设 $\widetilde{a}$ 满足 Cordes 条件）；另见 [29]。定理 1.1 和定理 1.2 的第 (1) 项在这些情形下仍然成立。定理 1.2 中的其他收敛速率和正则性结果，以及定理 1.3 中的结果，都要求 Ω 具有 $C^{1,\beta}$ 正则性，即使对于散度形式椭圆方程的均匀化也是如此。

3.2. 收敛速率。我们需要量化 (2.10) 的均匀化。由于右端项为 $f_\varepsilon = f(x)m(\frac{x}{\varepsilon})$，它依赖于 ε，因此我们引入另一个问题:

$$\begin{cases} -\partial_i \left(q_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\partial_j v_\varepsilon\right)(x) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ v_\varepsilon(x) = g(x) & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

于是，标准均匀化理论表明，当 $\varepsilon \to 0$ 时， $v_\varepsilon \to u$ 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛。此外，由于上述右端项对所有 ε 都固定不变，标准理论可以量化收敛速率，即由 [30] 的推论 7.1.3 给出。

我们还需要估计差值 $u_\varepsilon - v_\varepsilon$。它满足如下狄利克雷问题 m

$$-\partial_i \left(q_{ik}(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_k(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\right) = f(x)[m(\tfrac{x}{\varepsilon}) - 1] \ \text{ in } \Omega, \quad u_\varepsilon - v_\varepsilon = 0 \ \text{ on } \partial\Omega. \tag{3.6}$$

我们再次使用引理 2.2 证明中的技巧。由于 $m(y) - 1$ 在 $\mathbb{T}^d$ 中均值为零，因此存在唯一函数 h，使得

$$\Delta_y h(y) = m(y) - 1 \text{ in } \mathbb{T}^d, \qquad \int_{\mathbb{T}^d} h(y)\, dy = 0. \tag{3.7}$$

由于 $m \in C^{0,\,\alpha}(\mathbb{T}^d)$，根据标准椭圆正则性理论，有 $h \in C^{2,\,\alpha}(\mathbb{T}^d)$。于是我们得到以下结果。

引理 3.1. 假设 (1.2) 和 (1.7) 成立。存在一个普适常数 $C \in (1, \infty)$，使得对所有$f \in H^1(\Omega)$

$$\|f(x)[m(\tfrac{x}{\varepsilon}) - 1]\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\varepsilon \|f\|_{H^1(\Omega)}, \tag{3.8}$$

and

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\varepsilon \|f\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.9}$$

证明. 只需证明存在一个普适常数 $C < \infty$，使得

$$\left| \int_\Omega f(x)[m(\tfrac{x}{\varepsilon}) - 1]\varphi(x)\, dx \right| \leq C\varepsilon \|f\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{3.10}$$

利用前面定义的函数 h，上面的左端积分可写为

$$\varepsilon^2 \int_\Omega f(x)\varphi(x)\Delta_x \left(h(\tfrac{x}{\varepsilon})\right)\, dx = \varepsilon \int_\Omega f\varphi \partial_\ell[(\partial_\ell h)(\tfrac{x}{\varepsilon})] = -\varepsilon \int_\Omega (\partial_\ell h)(\tfrac{x}{\varepsilon})[\varphi \partial_\ell f + f\partial_\ell \varphi].$$

对于 (3.7)，我们使用 $C^{2,\alpha}$ 椭圆正则性估计和 (2.1)，得到 $\|\nabla h\|_{L^\infty}$ 的一致有界性。于是得到 (3.10)，并证明了 (3.8)。

最后，利用标准能量估计

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le C\|f[m(\tfrac{x}{\varepsilon}) - 1]\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

对 (3.6) 进行估计，得到 (3.9)。 □

定理 1.2 的证明。下面的 L^r、 $W^{1,\,p}$、 $W^{-1,\,p}$ 和 H^2 范数均针对区域 Ω。因此，我们省略显式写出 Ω。

（1）的证明：由 (2.9) 中 q 的一致椭圆性和正则性，并根据 [30], 中关于 $f \in L^2$ 和 $g \in H^2$ 的推论 7.1.3，可得

$$\|v_\varepsilon - u\|_{L^2} + \|v_\varepsilon - u - \{\Phi_{\varepsilon,j}(x) - x_j\}\partial_j u\|_{H_0^1} \le C\varepsilon\|u\|_{H^2} \le C\varepsilon\left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^2}\right)$$

其中 $C < \infty$ 是某个普适常数。在进一步假设 $f \in H^1$(Ω) 的情况下，将上述估计与 (3.9) 结合，可得定理 1.2 的 (1.14) 和 (1.13)。

（2）的证明：现在 $g = 0$ 且 $p \in (1, d)$。令 $1/r = 1/p - 1/d$，并令 v_ε 满足 (3.5)，其中 $g = 0$。将定理 7.5.1 中的结果应用于 [30] 的这个方程，首先可得 $\|v_\varepsilon - u\|_{L^r} \le C_r\varepsilon\|f\|_{L^p}$，其中 C_r 仅依赖于 (1.2) 中的数据和 r。差值 $u_\varepsilon - v_\varepsilon$ 仍由 (3.6) 刻画。应用 [30] 中与算子 $-\partial_i(q_{ij}(x/\varepsilon)\partial_j)$ 相对应的定理 5.3.1 的一致 $W^{1,\,p}$ 正则性结果（注意， q 是 H¨older 连续的，因而属于平均振荡消失类），对于某个依赖于 (1.2) 中的数据和 p 的常数 C_p，我们有

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{W^{1,p}} \le C_p\,\|f(x)[m(\tfrac{x}{\varepsilon}) - 1]\|_{W^{-1,p}} \le C\varepsilon\,\|f\|_{W^{1,p}}. \tag{3.11}$$

最后一个不等式可通过重复引理 3.1 中的论证得到。根据索伯列夫嵌入，即使将左端改为 $\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^r}$，上述结论仍然成立。结合以上所有结果，我们得到 (1.15)。

（3）的证明：证明过程几乎与上文相同。将 [30] 的定理 7.5.1 应用于带有 $g = 0$ 的问题 (3.5)，得到 $\|v_\varepsilon - u\|_{L^\infty} \le C\varepsilon\|f\|_{L^p}$。为了估计差值 $u_\varepsilon - v_\varepsilon$，注意到 (3.11) 成立；并且由于 $p > d$，将左端替换为 $\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^\infty}$ 后，该不等式仍然成立。结合以上结果，我们得到 (1.16)，从而完成定理 1.2 的证明。□

3.3. 一致利普希茨估计。我们将定理 1.3 作为 [30] 第 5 章所给出的一致利普希茨正则性理论的直接推论来证明。将其中的定理 5.6.2 应用于方程 (2.10)，可知存在一个常数 $C > 0$，它仅依赖于 (1.2) 中的数据以及 p、η，使得

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\{\|g\|_{C^{1,\eta}(\partial\Omega)} + \|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}\},$$

前提是 $f_\varepsilon \in L^p$和 $p > d$。由于 $f \in L^p$，对于某个 $p > d$， $m \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ 和 $f_\varepsilon(x) = f(x)m(\frac{x}{\varepsilon})$，因此对于某个普适常数 $C \in (0, \infty)$，有 $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}$。由此得到 (1.17)，定理 1.3 的证明也就完成了。

4. 一维例子

本节研究一维情形，并对漂移的中心化条件作几点说明。

4.1. 层状介质中的中心化条件。正如备注 **1.1** 所述，对于层状介质，不变测度的研究可归结为一维情形。因此，我们~考虑环面 $\mathbb{T}$ 上的以下方程$=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$（并假设 $\widetilde{a}, b$ 光滑）：

$$(\widetilde{a}(y)m(y))'' - (\widetilde{b}(y)m(y))' = 0, \qquad y \in \mathbb{T}. \tag{4.1}$$

这里的撇号表示 y中的导数。令 $\widetilde{m}(y) := \widetilde{a}(y)m(y)$，并将上述方程改写为

$$\widetilde{m}''(y) - \left(\frac{\widetilde{b}(y)}{\widetilde{a}(y)}\widetilde{m}(y)\right)' = 0.$$

对该方程积分一次，得到

$$\widetilde{m}'(y) - \widetilde{b}(y)m(y) = C_1. \tag{4.2}$$

再次积分，得到

$$m(y) = \frac{1}{\widetilde{a}(y)}\left\{C_0 \exp\left(\int_0^y \frac{\widetilde{b}(s)}{\widetilde{a}(s)}\,ds\right) + C_1 \int_0^y \exp\left(\int_{y'}^y \frac{\widetilde{b}(s)}{\widetilde{a}(s)}\,ds\right) dy'\right\}.$$

常数 C_0 和 C_1 由 $\widetilde{m}$ 的周期性以及 $\int_{\mathbb{T}} m = 1$这一事实确定。根据 **(4.2)**，中心化条件等价于 $C_1 = 0$，且当且仅当

$$\int_{\mathbb{T}^1} \frac{\widetilde{b}(y)}{\widetilde{a}(y)}\,dy = 0.$$

因此，不变测度为

$$m(y) = \frac{1}{\widetilde{a}(y)} \exp\left(\int_0^y \frac{\widetilde{b}(s)}{\widetilde{a}(s)}\,ds\right) \Big/ \int_0^1 \frac{1}{\widetilde{a}(y)} \exp\left(\int_0^y \frac{\widetilde{b}(s)}{\widetilde{a}(s)}\,ds\right) dy.$$

上述结果还验证了，对于高维中的层状介质，中心化条件恰好是 **(1.11)**。

4.2. 一些评论。为检验定理 **1.3** 在正则性阶数方面的尖锐性，我们考虑一维方程

$$-\widetilde{a}(\tfrac{x}{\varepsilon})\,(u_\varepsilon)'' - \tfrac{1}{\varepsilon}\widetilde{b}(\tfrac{x}{\varepsilon})\,(u_\varepsilon)' = 0 \quad \text{in } (0,1), \tag{4.3}$$

~ ~其中 b 具有如下形式：$b(y) = \widetilde{a}(y)b(y)$。根据 **(1.11)**，中心化条件为 $\int_{\mathbb{T}} b = 0$。例如，令 $b(y) =\cos(2\pi y)$；计算可得

$$m(y) = \frac{\widetilde{m}(y)}{\widetilde{a}(y)}, \qquad \widetilde{m}(y) = C_0 \exp\left(\frac{\sin(2\pi y)}{2\pi}\right)$$

某个归一化 常数 $C_0 > 0$。将 **(4.3)** 两边乘以 $m(\frac{x}{\varepsilon})$，则得到

$$-\left(\widetilde{m}(\tfrac{x}{\varepsilon})u_\varepsilon'(x)\right)' = 0.$$

具有边界数据 $u_\varepsilon(0) = 0$ 和 $u_\varepsilon(1) = 1$ 的唯一解 u_ε 满足

$$u_\varepsilon'(x) = \frac{c_\varepsilon}{\widetilde{m}(\frac{x}{\varepsilon})}, \quad \frac{1}{c_\varepsilon} = \int_0^1 \widetilde{m}^{-1}(\tfrac{x}{\varepsilon})\,dx.$$

~这个简单的一维示例表明，对于 $b \neq 0$ 满足中心化条件的情形，一般不能期待获得关于 ε 的统一正则性，且其正则性高于利普希茨连续（即更加光滑）。

~将其与 $b = 0$的情形进行比较。开头给出的简单一维方程，在边界条件为 $u_\varepsilon(0) = 0$ 和 $u_\varepsilon(1) = 1$ 时，有光滑解。

接下来，我们讨论中心化条件的必要性。早已知道， [8] 当中心化条件不成立时，不能期待得到类似定理 1.1 的均匀化结果。以一维中的一个简单例子为例，考虑如下问题

$$(u_\varepsilon)'' + \tfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon)' = f \quad \text{in } (0,1), \quad \text{and} \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \tag{4.4}$$

以及 $f(x) \equiv 1$。显然，不变测度为 $m(y) \equiv 1$ 于 $\mathbb{T}$，而周期漂移向量$b(y) \equiv 1$ 不满足中心化条件。直接计算可得

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon \left(x - \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right).$$

由此可知， $u_\varepsilon \to u$ 在 $[0,1]$ 上一致成立，其中 $u(x) \equiv 0$。显然， u 不可能是右端项为 $f \equiv 1$ 的一致椭圆方程的解。

5. Concluding remarks

本文研究了具有周期扩散矩阵和大漂移项的一致椭圆方程的定量均匀化。我们证明，当漂移满足中心化条件 (1.7) 时，该方程可以转化为不含漂移的散度形式。随后，我们可以将近期发展的几乎所有尖锐定量估计，包括各种范数下的收敛速率以及一致利普希茨正则性结果，推广到本文所研究的情形。我们还讨论了中心化条件的必要性以及这些结果的尖锐性。

我们的方法相当灵活。例如，可以考虑更一般的方程

$$-\widetilde{a}_{ij}(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_i\partial_j u_\varepsilon - \tfrac{1}{\varepsilon}\widetilde{b}_j(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_j u_\varepsilon - \widetilde{c}_j(\tfrac{x}{\varepsilon})\partial_j u_\varepsilon + \tfrac{1}{\varepsilon}q_1(\tfrac{x}{\varepsilon})u_\varepsilon + q_0(\tfrac{x}{\varepsilon})u_\varepsilon = f,$$

例如，对于 $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$。不含大势项的上述方程的定性理论已在 [8] 中研究过。Zhang [35] 考虑了不含漂移项的散度形式大势项情形；将该文中的技术与我们的方法结合起来，可以用于处理上述问题。只要考虑 $O(\varepsilon^{-2})$ 势项，参见例如 Allaire 和 Orive [1], , 大势项就会影响最高阶的均匀化，因此需要更复杂的变换或分析。我们将此留待未来研究。还需注意，由于本文中的关键变换不涉及边界条件，我们预计该方法也适用于方程 (1.1) 的诺伊曼边界问题（对于非零数据，这相当于振荡的诺伊曼数据）。因此，我们的方法显然改进了经典方法；正如 [8], 中所述，经典方法仅适用于齐次狄利克雷边界条件。

Acknowledgments

作者感谢 Hung V. Tran 就不变测度的性质进行的有益讨论。他们也感谢匿名审稿人提出的宝贵建议，这些建议帮助作者提升了论文的质量。

References

[1] Gr´egoire Allaire 和 Rafael Orive。大漂移和势下周期非自伴问题的均匀化。 *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*，13(4):735–749，2007年。[2] Gr´egoire Allaire 和 Anne-Lise Raphael。多孔介质中含反应项的对流-扩散模型的均匀化。 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*，344(8):523–528，2007年。[3] Scott Armstrong、Tuomo Kuusi 和 Jean-Christophe Mourrat。椭圆型均匀化的加性结构。*Invent. Math.*，208(3):999–1154，2017年。[4] Scott Armstrong 和 Jessica Lin。非散度形式椭圆方程随机均匀化的最优定量估计。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，225(2):937–991，2017年。[5] Scott N. Armstrong 和 Charles K. Smart。非散度形式椭圆方程的定量随机均匀化。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，214(3):867–911，2014年。[6] Marco Avellaneda 和 Fang-Hua Lin。均匀化理论中的紧性方法。II. 非散度形式方程。 *Comm. Pure Appl. Math.*，42(2):139–172，1989年。[7] Alain Bensoussan、Jacques-L. Lions 和 George C. Papanicolaou。输运过程的边界层与均匀化。 *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*，15(1):53–157，1979年。[8] Alain Bensoussan、Jacques-Louis Lions 和 George Papanicolaou。 *Asymptotic analysis for periodic structures*， *Studies in Mathematics and its Applications*第5卷。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1978年。[9] Vladimir I. Bogachev 和 Stanislav V. Shaposhnikov。双重散度形式方程解的可积性与连续性。 *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*，196(5):1609–1635，2017年。[10] Yves Capdeboscq。带漂移扩散方程的均匀化。 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*，327(9):807–812，1998年。[11] Yves Capdeboscq、Timo Sprekeler 和 Endre S¨uli。非散度形式椭圆均匀化问题的有限元逼近。 *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*，54(4):1221–1257，2020年。[12] Albert Fannjiang 和 George Papanicolaou。周期流的对流增强扩散。 *SIAM J. Appl.Math.*，54(2):333–408，1994年。[13] David Gilbarg 和 Neil S. Trudinger。 *Elliptic partial differential equations of second order*。《数学经典》。Springer-Verlag，柏林，2001年。1998年版重印。[14] Antoine Gloria、Stefan Neukamm 和 Felix Otto。随机椭圆算子的正则性理论。 *Milan J.Math.*，88(1):99–170，2020年。[15] Antoine Gloria、Stefan Neukamm 和 Felix Otto。相关系数场随机均匀化的定量估计。 *Anal. PDE*，14(8):2497–2537，2021年。[16] Xiaoqin Guo、Jonathon Peterson 和 Hung V. Tran。平衡随机环境中的定量均匀化。 *Electron. J. Probab.*，27：论文编号132，31页，2022年。[17] Xiaoqin Guo、Timo Sprekeler 和 Hung V. Tran。非散度形式椭圆方程均匀化中扩散矩阵的刻画，2022年。[18] Xiaoqin Guo 和 Hung V. Tran。平衡随机环境中随机均匀化的最优收敛速率，2023年。[19] Xiaoqin Guo、HungV. Tran 和 Yifeng Yu。关于非散度形式线性椭圆方程周期均匀化最优收敛速率的评注。 *Partial Differ. Equ. Appl.*，1(4)：论文编号15，16页，2020年。[20] Patrick Henning 和 Mario Ohlberger。用于快速振荡系数和大期望漂移平流-扩散问题的异质多尺度有限元方法。 *Netw. Heterog. Media*，5(4):711–744，2010年。[21] Patrick Henning 和 Mario Ohlberger。关于大期望漂移平流-扩散问题均匀化的简注。 *Z. Anal. Anwend.*，30(3):319–339，2011年。[22] V. V. Jikov、S. M. Kozlov 和 O. A. Ole˘ınik。 *Homogenization of differential operators and integral functionals*。Springer-Verlag，柏林，1994年。[23] Wenjia Jing。带反射边界的稀疏穿孔域中扩散过程均匀化的收敛速率。 *Minimax Theory Appl.*，8(1):85–108，2023年。[24] Ellya L. Kawecki。曲边域上具有 Cordes系数的非散度形式椭圆方程的间断伽辽金有限元法。 *Numer. Methods Partial Differential Equations*，35(5):1717–1744，2019年。[25] Carlos Kenig、Fanghua Lin 和 Zhongwei Shen。周期均匀化中特征值与特征函数的估计。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，15(5):1901–1925，2013年。

[26] Carlos E. Kenig、Fanghua Lin 和 Zhongwei Shen。带 Neumann 边界条件的椭圆系统均匀化。 *J. Amer. Math. Soc.*，26(4):901–937，2013年。[27] Carlos E. Kenig、Fanghua Lin 和 Zhongwei Shen。Green 函数与 Neumann 函数的周期均匀化。*Comm. Pure Appl. Math.*，67(8):1219–1262，2014年。[28] O. A. Oleˇınik、A. S. Shamaev 和 G. A. Yosifian。 *Mathematical problems in elasticity and homogenization*， *Studies in Mathematics and its Applications*第 26 卷。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1992年。[29] Weifeng Qiu 和 Lan Tang。非散度形式椭圆方程的全局 $W^{2,\,p}$ 估计。 *Proc. Amer.Math. Soc.*，151(2):763–770，2023年。[30] Zhongwei Shen。 *Periodic homogenization of elliptic systems*， *Operator Theory: Advances and Applications*第 269 卷。Birkh¨auser/Springer，查姆，2018年。《偏微分方程进展》（巴塞尔）。[31] Peter Sj¨ ogren。椭圆线性微分算子的伴随算子及其位势论。 *Ark. Mat.*，11:153–165，1973年。[32] Iain Smears 和 Endre S¨uli。具有 Cord`es 系数的非散度形式椭圆方程的间断伽辽金有限元逼近。 *SIAM J. Numer. Anal.*，51(4):2088–2106，2013年。[33] Timo Sprekeler。间断系数非散度形式椭圆方程的均匀化及均匀化问题的有限元逼近，2023年。[34]Timo Sprekeler 和 Hung V. Tran。非散度形式椭圆均匀化问题的最优收敛速率：分析与数值示例。 *Multiscale Model. Simul.*，19(3):1453–1473，2021年。[35] Yiping Zhang。含快速振荡势的椭圆均匀化中特征值与特征函数的估计。 *J. Differential Equations*，292:388–415，2021年。

Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing 100084, and Yanqi Lake Beijing Institute of Mathematical Sciences and Applications, Beijing 101407, P.R. China

Email address: wjjing@tsinghua.edu.cn

Yanqi Lake Beijing Institute of Mathematical Sciences and Applications, Beijing 101407, and YauMathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing 100084, P.R. China*Email address*: zhangyiping161@mails.ucas.ac.cn