arXiv:2302.01175v1 [eess.SY] 2 Feb 2023

具有分段连续非线性项的 Lur'e系统的有限时间稳定性*

S. Mariano†、R. Postoyan†、L. Zaccarian‡

2023年2月3日

摘要

我们利用适用于 Lur'e-Postnikov李雅普诺夫函数的集合值 Lie 导数概念，分析具有分段连续非线性项的 Lur'e系统的稳定性。首先，我们将文献中的一项已有结果加以推广，从而在更一般的扇形条件下确立原点的全局渐近稳定性。随后，我们给出本文的主要结果，即在满足哪些附加条件时，所研究系统类还具有输出有限时间稳定性和状态有限时间稳定性。我们通过验证两个备受关注的工程系统的稳定性，凸显这些结果的意义：受摩擦影响的机械系统和细胞神经网络。

1 引言

关于如何确定条件以确保受锥有界非线性输出反馈作用的连续时间线性系统的稳定性，即所谓的 Lur'e问题，文献中已有广泛研究，参见例如[18, 19, 22, 34]。这类系统广泛应用于各种工程领域，例如机械工程中用于描述受摩擦和/或单边约束影响的动力系统 [10], ；电气与电子工程中用于刻画带有开关的电路或电子设备的行为 [1,31], ；以及神经网络 [28]；更多示例见 [9] 。然而，据作者所知，关于 Lur'e系统有限时间稳定性的研究结果寥寥无几，参见 [29], ，该文主要研究 Lur'e系统网络的簇同步。有限时间稳定性因其在许多应用中的重要性而日益受到关注，例如高阶滑模算法 [21], 、机械系统控制器 [6],、航天器稳定 [33], 以及观测器设计问题 [2]；更多示例见 [32] 。因此，有必要建立分析工具，以确定这类系统的有限时间稳定性。在此背景下，我们研究

*本研究得到 ANR 项目 HANDY ANR-18-CE40-0010 的资助。

†S. Mariano 和 R. Postoyan 任职于洛林大学、法国国家科学研究中心、CRAN，法国南锡 F-54000（电子邮件：firstname.name@univ-lorraine.fr）。

‡L. Zaccarian 任职于法国图卢兹的 LAAS-CNRS、图卢兹大学、法国国家科学研究中心，以及意大利特伦托大学工业工程系（电子邮件：zaccar- ian@laas.fr）。

具有分段连续非线性项的 Lur'e系统的输出和状态有限时间稳定性。

历史上，人们使用两种不同类型的李雅普诺夫函数来分析连续时间Lur'e系统的（绝对）稳定性：状态的二次函数，以及所谓的Lur'e-Postnikov李雅普诺夫函数，后者由状态的二次函数与反馈非线性项积分的加权和构成 [18]。Lur'e-Postnikov李雅普诺夫函数通常用于推导保守性较低的充分稳定条件 [34]。然而，当非线性项是分段连续的（例如，在机械系统 [10], 神经网络 [14], 中，另见 [9], ）时，难点在于，由于非线性项存在不连续点，Lur'e-Postnikov李雅普诺夫函数只能几乎处处可微（且为局部Lipschitz连续）。事实上，当系统非线性项分段连续且采用Lur'e-Postnikov李雅普诺夫函数时，非光滑分析中使用的标准工具（如 Clarke 广义方向导数）可能会导致保守的代数李雅普诺夫条件，本文将对此进行说明；另见 [23]。文献 [10], 通过基于轨迹的论证克服了这一局限，并证明了输入到状态（ISS）稳定性，但没有给出有限时间稳定性结论。

在本文中，我们首先扩展了 [10] 中的一项结果，从而在更一般的扇形条件下，确立具有分段连续非线性项的Lur'e系统原点的全局渐近稳定性。为此，我们采用非光滑Lur'e-Postnikov李雅普诺夫函数，并利用集值李导数[5, 30]的概念，给出代数李雅普诺夫下降条件。正如我们通过一个专门的例子所展示的，集值李导数是克服通常使用的 Clarke 广义方向导数可能带来的保守性的关键。值得注意的是， [29] 中也使用了集值李导数分析这些互联系统；然而，其李雅普诺夫函数是二次函数（因而连续可微），如上所述，这会导致条件更为保守；更重要的是，问题设定也有所不同。我们的主要结果确立了所考虑Lur'e系统的输出有限时间稳定性和状态有限时间稳定性。为说明这些结果的实用性，我们着重讨论两种工程应用，它们分别见于 [10, 14] ，且均可建模为Lur'e系统。具体而言，我们确立了受摩擦影响的机械系统的输出有限时间稳定性和与状态无关的局部渐近稳定性；与 [10]相比，这是一个新的结果。此外，我们证明，按照 [14] 中的方式建模的细胞神经网络是状态有限时间稳定的，从而在处理更一般的Lur'e系统类别的同时，重新得到 [14, 定理 4]的结果。

本文其余部分安排如下。第二节给出符号说明和背景知识。第三节介绍本文所研究的 Lur'e系统类别。第四节利用一种新颖的代数李雅普诺夫证明，讨论渐近稳定性的刻画。第五节给出有限时间稳定性结果，第六节则讨论这些结果的应用。第七节给出结论并展望未来研究方向。

2 符号说明

令 $\mathbb{R}$ 表示实数集， $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$， $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$， $\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, \dots\}$, $\mathbb{Z}_{>0} := \{1, 2, \dots\}$且 $\mathbb{C} := \{a + \mathrm{i}b : a, b \in \mathbb{R}\}$，其中 $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$。记号 $\mathbb{R}^n$ 表示 n维欧几里得空间，其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$。记号 $\mathbb{B}_n$ 表示以原点为中心的 $\mathbb{R}^n$ 闭单位球；当其维数可由上下文确定时，我们记作 $\mathbb{B}$ 。我们用 $\emptyset$表示空集。给定向量 $x \in \mathbb{R}^n$，记其第 ℓ 个元素为 x_ℓ ，即$\ell \in \{1, \dots, n\}$，其欧几里得范数为 $|x|$。记号 $\mathbf{0}_n$表示 $\mathbb{R}^n$的向量，其 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 个元素均为 0。我们用 I_n 表示维数为 $n \times n$ 的单位矩阵，其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$；而 O_n表示维数为 $n \times n$ 的零矩阵，其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$。给定两个向量 $x_1 \in \mathbb{R}^n$和 $x_2 \in \mathbb{R}^m$，其中 n、 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，为方便起见，记$(x_1, x_2) := [x_1^\top x_2^\top]^\top$。给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ，其中 n、 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$， A_ℓ 表示其第 ℓ行，其中 $\ell \in \{1, \dots, n\}$； $|A|$表示其谱范数，而 $\ker(A)$表示其核。记号 $\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)$表示由 $\mathbb{R}^{n \times n}$构成的对角矩阵，其 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$个对角元素为 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$。对于满足 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$的对称矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，若其所有特征值均为实数且为正（负），则称其正（负）定，即$P > 0$（$P < 0$）；若其所有特征值均为实数且非负（非正），则称P正（负）半定，即 $P \geq 0$（$P \leq 0$）。给定集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ ，其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$， $\operatorname{co} \mathcal{S}$表示其闭凸包。给定函数 $f : X \to Y$， f的定义域定义为 $\operatorname{dom} f = \{x \in X : f(x) \neq \emptyset\}$。若函数 $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$满足 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$和 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ，且当 $|x| \to \infty$时， $f(x) \to \infty$ ，则称其径向无界。令 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$且 $r \in \mathbb{R}$ ，其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们用 $f^{(r)^{-1}}$ 表示集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = r\}$，该集合可能为空。设 X 和 Y 为两个非空集合， $T : X \rightrightarrows Y$表示从 X 到 Y的集值映射。我们将按照 [15, 第 3]章中的定义，使用 $\mathcal{K}$、 $\mathcal{K}_\infty$ 和$\mathcal{KL}$ 类函数。令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 且 $s_\circ \in \mathbb{R}$，则$f'(s_\circ) := \lim_{s \to s_\circ} (f(s) - f(s_\circ))/(s - s_\circ)$，当该极限存在时。若函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$满足：对于任意给定区间 $[a, b]$，其中 $a < b \in \mathbb{R}$，存在有限个点 $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k \leq b$，其中 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得对任意 $i \in \{1, \dots, k\}$， f在(x_{i-1}, x_i)上连续，且其单侧极限存在并为有限值，则称该函数为分段连续函数。若函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 f 连续，且对于任意给定区间 $[a, b]$，其中 $a < b \in \mathbb{R}$，存在有限个点 $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k \leq b$，其中 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ，使得对任意 $i \in \{1, \dots, k\}$， f 在(x_{i-1}, x_i)上连续可微，并且对任意 $i \in \{1, \dots, k\}$，单侧极限 $\lim_{s \to x_{i-1}^+} f'(s)$ 和 $\lim_{s \to x_i^-} f'(s)$ 均存在，则称该函数为分段连续可微函数。

3 问题陈述

考虑如下形式的系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -\boldsymbol{\psi}(y), \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态， u和$y \in \mathbb{R}^p$ 分别为输入和输出， A、 B 和 C 为维数适当的实矩阵。函数

$\boldsymbol{\psi}$： $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ 是去中心化的，即对于任意 $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{\psi}(y) = (\psi_1(y_1) \ldots, \psi_p(y_p))$。我们假设 ψ 满足以下扇形条件。

假设 1 对任意 $i \in \{1, \ldots, p\}$, ψ_i， ψ_i 均为分段连续函数，且存在 $\zeta_i \in (0, +\infty]$ 使得

$$\psi_i(y_i)(\psi_i(y_i) - \zeta_i y_i) \leq 0, \qquad \forall y_i \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

□

扇形条件 (2) 比 [10], 中考虑的条件更一般；当对所有 $i \in \{1, \ldots, p\}$ 均有 $\zeta_i = +\infty$ 时，可得到该条件，此时 (2) 表示为

$$-\psi_i(y_i)y_i \leq 0, \qquad \forall y_i \in \mathbb{R} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, p\}. \tag{3}$$

当非线性项满足 (2) 且 ζ_i 有限时，这一推广有助于推导出保守性更低的稳定性条件。假设 1 刻画了一类所谓的 Lur'e系统 [18, Ch. 7], [34]。

鉴于假设 1，系统(1)的右端项可能不连续。因此，当我们提到系统(1)的解时，指的是其所谓的（广义）Krasovskii解，这些解与通过对系统(1)进行 Krasovskii 正则化 [16] 所得到的解一致，即

$$\dot{x} \in F(x) := Ax - B\boldsymbol{\Psi}(Cx), \qquad y = Cx, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}(y) = (\boldsymbol{\Psi}_1(y_1) \ldots, \boldsymbol{\Psi}_p(y_p))$ 是 $\boldsymbol{\psi}$ 在 (1) 中的 Krasovskii 正则化，其各分量定义为 $\boldsymbol{\Psi}_i(y_i) := \bigcap_{s>0} \mathrm{co}\ \boldsymbol{\psi_i}(y_i + s\mathbb{B})$, $i \in \{\overline{1, \ldots, p}\}$,
对任意 $y_i \in \mathbb{R}$。注意，根据假设 1， F 在 $\mathbb{R}^n$ 上外半连续且局部有界，并且对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$， $F(x)$ 都是凸的，因此由 [4, 第 2 章中的定理3可保证 (4) 的解具有局部存在性 1]。此外，根据定义，每个 $\boldsymbol{\Psi}_i : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ 仅在一组孤立点上取值为集合，因此它局部可积；这一性质将在下文中加以利用。

接下来我们将分析系统(4)的稳定性，从而确保 (1) 的 Krasovskii解具有相同的稳定性。按照 Lur'e系统文献中的惯例，并如图 1 所示，我们进行环路变换，将系统(4)解释为两个无源系统的反馈互联。

按照 [18, 第 7.1 章2]的步骤，并采用 [18, 第 7], 章 [10] 中的相同数学符号，我们定义具有如下传递函数的动态乘子

$$\mathcal{M}(s) := I + \Gamma s \quad \forall s \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

其中 $\Gamma := \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$，且 $\gamma_1, \ldots, \gamma_p > 0$ 为适当的参数，具体内容将在下文中详述。因此，我们将系统(4)解释为线性系统 Σ_1 的反馈互联

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \overline{y} = (C + \Gamma CA)x + (\Gamma CB + Z)u, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $Z := \mathrm{diag}(\zeta_1^{-1}, \ldots, \zeta_p^{-1})$，满足假设 1 中的[1] $\zeta_i \in (0, +\infty]$，并与非线性系统 Σ_2

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{y} = g(y, \overline{y}) := -\Gamma^{-1}y + \Gamma^{-1}(\overline{y} - Zu) \\ u \in -\boldsymbol{\Psi}(y). \end{cases} \tag{7}$$

[1]当 $\zeta_i = +\infty$ 时，我们采用约定 $\zeta_i^{-1} = 0$。

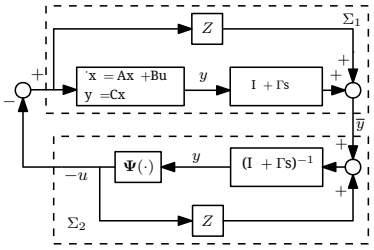

图 1：系统(4)作为系统 Σ_1 与 Σ_2的反馈互联。

我们假设系统 Σ_1 从 u 到 $\overline{y}$ 严格被动，其二次储能函数 U_1 定义为

$$U_1(x) := \frac{1}{2}x^\top Px, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

其中 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称且正定，具体表述如下。

假设 2 系统 Σ_1 在 (6) 中从 u 到 $\overline{y}$ 严格被动，其储能函数为 U_1 ，如 (8) 所示 [18, 定义 6。3], 即，存在对角矩阵 $\Gamma > 0$ 、$P = P^\top > 0$ 以及标量 $\eta > 0$ ，使得

$$M := \begin{bmatrix} PA + A^\top P + \eta I_n & PB - (C + \Gamma CA)^\top \\ B^\top P - (C + \Gamma CA) & -2Z - \Gamma CB - (\Gamma CB)^\top \end{bmatrix} \leq 0. \tag{9}$$

□

假设 2 中的线性矩阵不等式 (9) 可以通过数值方法高效检验。文献中还有多种工具可用于验证 (9)：Kalman-Yakubovich-Popov 引理 [18, 引理 6。3] 以及 [8, 第 3 章。1] 中针对最小实现给出的等价条件，或 [8, 第 3 章。3] 中针对非最小实现综述的结果，举几例而言。

另一方面，正如第 4.2 节的备注 1 中稍后将阐明的，可以证明，通过考虑定义如下的分段连续可微储能函数 U_2 ， Σ_2 在 (7) 中从输入 $\overline{y}$ 到输出 $-u$是无源的

$$U_2(y) := \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \int_0^{y_i} \psi_i(\sigma)d\sigma, \quad \forall y \in \mathbb{R}^p, \tag{10}$$

其中， $\gamma_i > 0$ 和 $i \in \{1, \ldots, p\}$ 是 Γ 的对角元素，定义见式(5)之后。

现在，我们可以对系统(4)进行稳定性分析。首先，我们在第 4 节给出确保系统(4)的原点全局渐近稳定的充分条件。随后，我们在第 5 节分析其有限时间稳定性。

4 渐近稳定性

4.1 非光滑 Lur'e-Postnikov李雅普诺夫函数

受 [10,18] 中对具有连续非线性项的 Lur'e系统的研究启发，我们刻画了具有 Lur'e-

Postnikov 李雅普诺夫函数的系统(4)原点的稳定性， V 该函数定义为

$$V(x) := U_1(x) + U_2(Cx)$$
$$= \frac{1}{2}x^\top Px + \sum_{i=1}^{p}\gamma_i \int_0^{C_i x} \psi_i(\sigma)d\sigma, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

其中， P来自假设 2。函数 V 分段连续可微，因此是局部利普希茨的，所以存在其梯度未定义的点。解决这一问题的标准工具是 Clarke 广义方向导数，它对每个方向 $f \in \mathbb{R}^n$ 和每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 定义为 [11, 第 11] 页

$$V^\circ(x; f) := \max\{\langle v, f\rangle : v \in \partial V(x)\},$$

其中， $\partial V(x)$ 表示 V 在 x 处的 Clarke 广义梯度，定义如下:

$$\partial V(x) := \{v \in \mathbb{R}^n | v \in x^\top P + (\mathbf{\Psi}(Cx))^\top \Gamma C\}. \tag{12}$$

然而，利用 V 的 Clarke 广义方向导数对系统(4)进行李雅普诺夫分析，往往过于保守，难以证明原点的渐近稳定性。粗略地说，对于某些 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ ，可能存在一个选择 $f_{\text{bad}} \in F(x)$，它对系统(4)的任何解都始终不可行，并且满足 $V^\circ(x, f_{\text{bad}}) > 0$，从而无法证明该系统的原点是全局渐近稳定的，下一例将对此加以说明。

例 1 考虑系统(4)，其中 $n = 2, p = 1$ （单输入单输出情形），

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

且 $\mathbf{\Psi}$ 是 ψ的 Krasovskii 正则化：$\mathbb{R} \to [-\frac{1}{4}, 1]$，定义为：当 $s > 0$时，$\psi(s) = 1$；当 $s < 0$时，$\psi(s) = -\frac{1}{4}$；当 $s = 0$时，$\psi(s) = 0$；因此 $\mathbf{\Psi}(0) = [-1/4, 1]$。此函数 ψ 满足假设 1，其中 $\zeta_1 = +\infty$（即 (3)）。考虑如 (11) 中的 V，其中 $P = I_2$ 且 $\Gamma = \gamma_1 = 1$。所提出的矩阵选择 A, B, C, P 和 Γ 以及集值映射 $\mathbf{\Psi}$满足假设 1 和 2。此时，函数 (11) 表示为 $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \int_0^{x_1}\psi(\sigma)d\sigma$，对任意 $x \in \mathbb{R}^2$均成立。我们有 V是正定且径向无界的。此外， V 在 $\{0\} \times \mathbb{R}$处不可微。按照 [12, 第 4] 章中概述的 [23, 第 2.4 章2],，为分析所考虑系统原点的稳定性，我们研究任意 $x \in \mathbb{R}^2$ 处 $V^\circ(x; f)$ 在所有允许方向 $f \in F(x)$ 上的最大值，其中 F 如 (4) 所示。为此，考虑 $x = (0, 1\ 2)$,

$$\max_{f \in F(0, \frac{1}{2})} V^\circ((0, \tfrac{1}{2}); f) = \max\Big\{\langle v, f\rangle |$$
$$v \in [-\tfrac{1}{4}, 1] \times \big\{\tfrac{1}{2}\big\}, f \in \big[-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{4}\big] \times \big\{-\tfrac{1}{2}\big\}\Big\} = \tfrac{1}{8}. \tag{13}$$

鉴于这个正的上界，根据 [23, 定义 2.16],，我们无法确立原点的渐近稳定性 [2] [23, 定理 2.18]。不过，直接检查可知， V 在原点以外沿所有解严格递减。下面将利用 V [30]的集值李导数概念来解决这一问题。□

[2]Ryan不变性原理 [24] 也无法用于保证该例中原点的渐近稳定性。

在 [10], 中，作者在假设 1 成立且 $\zeta_i = +\infty$对任意 $i \in \{1, \ldots, p\}$的情况下，采用基于轨迹的李雅普诺夫论证，克服了例 1 中讨论的局限性。在下一个定理中，我们将证明系统(4)的原点全局渐近稳定。与 [10], 相比，该结果依赖于(2)中更一般的扇形条件；更重要的是，这也与后文相关，其证明采用了代数李雅普诺夫论证。

定理 1 考虑系统(4)，并假设假设 1 和 2 成立。那么原点是全局渐近稳定的，即存在 $\beta \in \mathcal{KL}$，使得所有解 x 都满足

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \tag{14}$$

□

定理 1 的证明见第 4.2 节，其中我们将使用集值李导数的概念，现回顾如下。

4.2 集值李导数及其性质

V关于系统(4)中 F 在 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的集值李导数定义为 [5]

$$\dot{\overline{V}}_F(x) := \{a \in \mathbb{R} | \ \exists f \in F(x) : \langle v, f \rangle = a, \ \forall v \in \partial V(x)\}, \tag{15}$$

., 其中 $\partial V(x)$由(12)给出。注意，$\overline{V}_F(x)$是 $\{\langle v, f\rangle | v \in \partial V(x) \ f \in F(x)\}$ 的子集；根据定义，在 x 处，只要 V可微，使得 $\partial V(x)$为单元素集，该集合便退化为V沿 $f \in F(x)$中任意方向的所有标准方向导数。注意，正如稍后例 2 所示，$\overline{V}_F(x)$可能为空集。在下一个引理中，我们将给出沿动力学(4)的 V（见(11)）的集值李导数的一个有用且直观的上界。

引理 1 给定 (11) 中的函数 V和 (4) 中的 F，

$$\sup \dot{\overline{V}}_F(x) \leq \sup_{u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)} \big((x^\top P - u^\top \Gamma C)(Ax + Bu)\big), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

.其中，当 $\sup \overline{V}_F(x) \neq \emptyset$ 时，我们约定左侧使用 $\sup \emptyset = -\infty$。□

证明: 对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及每个满足 $u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)$ 的元素 $f = Ax + Bu \in F(x)$, 如 (4) 中所示，记 $\rho(x, f) := Px + C^\top \Gamma u$，并注意到 $\rho(x, f) \in \partial V(x)$。注意，$\rho$ 和 f 是通过选择相同的 $u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)$ 定义的。鉴于 . 中的引理 8，利用这一选择可得 $\sup \overline{V}_F(x) \leq \sup_{u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)} (\rho(x, f)^\top f)$, 从而得证。■

利用 (15) 和引理 1，我们可以为系统(4)建立下一组代数李雅普诺夫条件。

命题 1 考虑 (4) 中的 F，并假设假设 1 和 2 成立。那么存在 α_1、α_2、$\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$，使函数 V 满足 (11)

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

$$\sup \dot{\overline{V}}_F(x) \leq -\alpha_3(V(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{18}$$

□

证明：由 (2) 和 (11) 可知， V 是正定的、在 $\mathbb{R}^n$ 上连续且径向无界。因此，由 [18, 引理4.3] 可得 (17) 成立。令 $x \in \mathbb{R}^n$，根据引理 1 可得

$$\begin{aligned}\sup \dot{\overline{V}}_F(x) \leq \sup_{u \in -\boldsymbol{\Psi}(Cx)} \Big[& (x^\top P - u^\top \Gamma C)(Ax + Bu) \\ & - u^\top(-Zu - Cx) - \frac{\eta}{2}|x|^2 \\ & + u^\top(-Zu - Cx) + \frac{\eta}{2}|x|^2 \Big], \end{aligned} \tag{19}$$

其中 Z 如式 (6) 所示。因此，

$$\sup \dot{\overline{V}}_F(x) \leq \sup_{u \in -\boldsymbol{\Psi}(Cx)} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^\top M \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + u^\top(Zu + Cx) \right) - \frac{\eta}{2}|x|^2, \tag{20}$$

其中 M 如式 (9) 所示。根据假设 1，对于所有 $u \in -\boldsymbol{\Psi}(Cx)$ 以及任意 $x \in \mathbb{R}^n$，有 $u^\top(Zu + Cx) \leq 0$，因为 $\boldsymbol{\Psi}(Cx)$ 是凸的。此外，根据假设 2，$M \leq 0$。因此，由式 (20) 可得

$$\begin{aligned}\sup \dot{\overline{V}}_F(x) &\leq \sup_{u \in -\boldsymbol{\Psi}(Cx)} (u^\top(Zu + Cx)) - \frac{\eta}{2}|x|^2 \\ &\leq -\frac{\eta}{2}|x|^2 \leq -\frac{\eta}{2}(\alpha_2^{-1}(V(x)))^2 =: -\alpha_3(V(x)), \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$，这表明式 (18) 成立，证明完毕。 ■

基于命题 1，我们给出定理 1 的代数证明。

定理 1 的证明。设 x 是式 (4) 的一个解。根据 [20, 命题 4]和 [23, 引理2。20]，V是非病态的，因此 [23, 引理2。23] 保证对于几乎所有 $t \in \operatorname{dom} x$，都有 $\frac{d}{dt}V(x(t)) \in \overline{V}_F(x(t))$。因此，根据命题 1 中的式 (18)，我们有

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha_3(V(x(t))), \quad \text{for almost all } t \in \operatorname{dom} x. \tag{22}$$

按照 [26, 引理 A.4], 的证明步骤，我们有 $\operatorname{dom} x = \mathbb{R}_{\geq 0}$，并且存在$\overline{\beta} \in \mathcal{KL}$（与 x 无关），使得

$$V(x(t)) \leq \overline{\beta}(V(x(0)), t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \tag{23}$$

由方程 (17) 和 (23) 可得 $|x(t)| \leq \alpha_1^{-1}(V(x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(\overline{\beta}(\alpha_2(|x(0)|), t)) =: \beta(|x(0)|, t)$ 对任意 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 均成立，其中 $\beta \in \mathcal{KL}$，从而完成证明。■

借助定理 1，我们现在可以证明例 1 中系统的原点是全局渐近稳定的。

例 2 例 1 中的系统在给定的 Z、Γ 和 P 选择下满足假设 1 和假设 2。因此，根据定理 1，$x = \mathbf{0}_2$ 是全局渐近稳定的。值得注意的是，集值李导数这一概念有助于克服例 1 中指出的问题。具体而言，V 关于 F 在 $x = (0, 0)$ 处的集值李导数为空集。事实上，对于每个 $f \in F(0, 0)$ 以及任意两个不同的方向 $v_1, v_2 \in \partial V(0, 0)$，若 $v_1 \neq v_2$，则有 $\langle f, v_1 \rangle \neq \langle f, v_2 \rangle$，因此不存在满足式 (15) 中条件的 $a \in \mathbb{R}$。更具体地，给定 $F(0, 0) = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right] \times \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

且 $\partial V(0,1\text{-}2) = [-\frac{1}{4}, 1] \times \{\frac{1}{2}\}$，通过选择满足 $v_1 \neq v_2$ 的 v_1、$v_2 \in \partial V(0,1\ 2)$，以及 $f \in F(0,1\ 2)$，我们有 $\langle f, v_1\rangle = f_1 v_{1,1} - \frac{1}{4}$ 和 $\langle f, v_2\rangle = f_1 v_{2,1} - \frac{1}{4}$，其中 $f_1 \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right]$ 且 $v_{1,1} \neq v_{2,1} \in [-\frac{1}{4}, 1]$。因此，$\langle f, v_1\rangle = \langle f, v_2\rangle$ 当且仅当 $f_1(v_{1,1} - v_{2,1}) = 0$，而这对于指定的 f、v_1 和 v_2 选择是不可能的。因此，不存在 $a \in \mathbb{R}$ 和 $f \in F(0,1\ 2)$，使得对于所有 $x \in \partial V(0,1\ 2)$，$\langle f, v\rangle = a$ 均成立；这意味着 $\overline{V}_F(0,1\ 2) = \emptyset$。除了这一具体的说明性分析之外，利用引理 1，我们实际上可以证明，对于所有 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$，$\sup \overline{V}_F(x) < 0$。事实上，由于假设 1 蕴含 $ux_1 < 0$，我们有 $\sup \overline{V}_F(x) \leq \sup(-x_1^2 + 2ux_1 - u\in -\Psi(x_1)x_2^2 + ux_2 - u^2) = \sup_{u\in -\Psi(x_1)} \left(-x_1^2 + 2ux_1 - \left(\frac{1}{2}x_2 - u\right)^2 - \frac{3}{4}x_2^2\right) < 0$。因此，$V$ 关于 $F(x)$ 的集值李导数的上确界在原点之外严格为负；而使用保守上界 (13) 无法证明这一点。□

我们将在下面的备注中解释为什么 (7) 中的 Σ_2 是无源的。

备注 1 系统 Σ_2 从 $\overline{y}$ 到 $-u$ 是无源的，正如第三节末尾所述。令 g 如 (7) 所示，根据 [20] 中的引理 8，我们有

$$\sup \dot{\overline{U}}_{2,g}(y) \leq \sup_{u\in -\Psi(y)} (u^\top(y + Zu) - u^\top \overline{y}), \quad \forall y \in \mathbb{R}^p. \tag{24}$$

令 y 为 (6) 的一个解，其输入为 $\overline{y}$，输出为 u。根据 [23, 中的引理 2, 23]，$\frac{d}{dt}U_2(y(t)) \leq \sup \overline{U}_{2,\ g}(y)$。然后，由于根据假设 1 和 (24)，$u^\top(Zu + y) \geq 0$，

$$\frac{d}{dt}U_2(y(t)) \leq \sup_{u\in -\Psi(y(t))} -u^\top \overline{y}(t), \quad \text{for almost all } t \in \operatorname{dom} y. \tag{25}$$

因此，通过对 (25) 积分，对于所有满足 $t \in \operatorname{dom} y$ 的 $t \geq 0$，我们得到 $U_2(y(t)) \leq U_2(y(0)) + \int_0^t -u(s)^\top y(s)\, ds$。由此，根据 [25] 中的定义 2.1 和定义 2.2，Σ_2 从 $\overline{y}$ 到 $-u$ 是无源的。请注意，尽管定义 2.1 和定义 2.2 是针对单值输出表述的，但我们可以将这些定义同样适用于我们的情形，而不失一般性；在此情形下，$u \in -\Psi(y)$。□

我们在本节最后讨论如何扩展定理 1 的条件。

4.3 对象 (1) 具有特殊性质时的扩展

由于定理 1 中的条件仅为充分条件，我们可以利用矩阵 A、B 和 C 在 (4) 中的额外结构性质，通过李雅普诺夫分析证明系统(4) 的原点是全局渐近稳定的。下面给出系统(4) 的一组可供利用的替代性质。

性质1 系统(4) 满足以下条件。

(i) 满足假设 1。

(ii) 存在矩阵 $\Gamma > 0$（对角矩阵）、$P = P^\top > 0$ 以及标量 $\eta > 0$，使得

$$\overline{M} := \begin{bmatrix} PA + A^\top P + \eta I_n & PB \\ B^\top P & -2Z - \Gamma CB - (\Gamma CB)^\top \end{bmatrix} \leq 0. \tag{26}$$

(iii) 存在 $H := \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_p)$，使得 $\Gamma CA = HC$，并且对于所有 $i \in \{1, \ldots, p\}$，要么 $h_i \leq -1$ 成立，要么 $h_i \leq 0$ 且 $Z = O_p$ 成立，其中 Z 见式 (6)。□

性质1中第(ii)和第(iii)项的条件对矩阵 C 和 A （第(ii)项）施加了额外要求，并规定了与(9)不同的矩阵不等式（第(iii)项）；事实上，这是因为 $\overline{M}$ 的非对角项与(9)中的 M 不同。我们将在下一个引理中证明，性质1意味着系统(4)的原点全局渐近稳定。我们将在第6节中运用这一扩展，分析 [14]中所研究神经网络的稳定性。

引理2 假设系统(4)满足性质1的第(i)至第(iii)项。那么，系统(4)的原点全局渐近稳定。□

证明：令 $x \in \mathbb{R}^n$，并考虑(11)中的 V。由引理 1 可知，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sup \dot{\overline{V}}_F(x) \leq \sup_{u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)} \Big[(x^\top P - u^\top \Gamma C)(Ax + Bu) - u^\top Z u - \frac{\eta}{2}|x|^2 + u^\top Z u + \frac{\eta}{2}|x|^2 \Big]. \tag{27}$$

其中 Z 如(6)所示。因此,

$$\sup \dot{\overline{V}}_F(x) \leq \sup_{u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^\top \overline{M} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + u^\top (Zu - HCx) \right) - \frac{\eta}{2}|x|^2. \tag{28}$$

注意，根据假设 1，对于所有 $u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)$ 以及任意 $x \in \mathbb{R}$，均有 $u^\top (Zu - HCx) \leq 0$。事实上，由于对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$\mathbf{\Psi}(y) = \mathbf{\Psi}(Cx)$ 的每个元素都是凸的，根据(2)可得 $\alpha_i u_i y_i \leq -\frac{\alpha_i}{\zeta_i} u_i^2$，且对于任意 $\alpha_i \geq 0$、$u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)$ 和 $i \in \{1, \ldots, p\}$，有 $u_i y_i + \frac{1}{\zeta_i} u_i^2 + \alpha_i u_i y_i - \alpha_i u_i y_i \leq 0$。因此，我们有 $\frac{1}{\zeta_i} u_i^2 + (1 + \alpha_i) u_i y_i \leq \alpha_i u_i y_i \leq -\frac{\alpha_i}{\zeta_i} u_i^2 \leq 0$。当 $h_i \leq -1$时，取 $\alpha_i = -1 - h_i \geq 0$，可推得对于任意 $u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)$ 和 $i \in \{1, \ldots, p\}$，$\frac{1}{\zeta_i} u_i^2 - h_i u_i y_i \leq 0$，从而对于所有 $u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)$，有 $u^\top (Zu - HCx) \leq 0$。特别地，当 $Z = O_p$时，根据(3)，对于任意负半定对角矩阵 H、所有 $u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)$ 及 $i \in \{1, \ldots, p\}$，$-u^\top HCx \leq 0$ 成立。此外，我们在引理2的第(ii)项中假设了$\overline{M} \leq 0$。因此，类似于(21)，由(28)可得

$$\sup \dot{\overline{V}}_F(x) \leq -\frac{\eta}{2}|x|^2 \leq -\frac{\eta}{2}(\alpha_2^{-1}(V(x)))^2 =: -\overline{\alpha}_3(V(x)), \tag{29}$$

结合 $\overline{\alpha}_3 \in \mathcal{K}_\infty$。因此，正如预期的那样，利用 (17) 和 (29)，并遵循定理 1 证明中的类似步骤，我们得出原点对于系统(4)是全局渐近稳定的。■

5 有限时间稳定性

5.1 定义和假设

本节给出保证系统(4)的输出有限时间稳定性和状态有限时间稳定性的条件。具体而言，我们考虑以下稳定性概念，参见 [27, 35]。

定义1 考虑系统(4)。如果其所有解均为前向完备[3]，则称该系统为：

(i) 若存在 $\beta \in \mathcal{KL}$，使得对任意解 x，则称输出全局渐近稳定（oGAS）

$$|y(t)| \leq \beta(|x(0)|, t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0};$$

(ii) 若存在 $r > 0$ 和 $\beta \in \mathcal{KL}$，使得对所有解 x，则称状态无关输出局部渐近稳定（SIoLAS），

$$|x(0)| < r \Rightarrow |y(t)| \leq \beta(|y(0)|, t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0};$$

(iii) 若系统为 oGAS，且对每个解 x，存在 $0 \leq T < +\infty$，使得对所有 $t \geq T$，$y(t) = \mathbf{0}_p$，则称输出有限时间稳定（OFTS）；

(iv) 若原点全局渐近稳定，且对每个解 x，存在 $0 \leq T < +\infty$，使得对所有 $t \geq T$，$x(t) = \mathbf{0}_n$，则称状态有限时间稳定（SFTS）。□

为了能够证明定义 1 中的输出稳定性，我们作出如下假设。

假设 3 满足以下条件。

(i) 矩阵 CB 是李雅普诺夫对角稳定（LDS）[17, 定义 5.3]，即存在一个维数适当的对角矩阵 $\overline{\Gamma} > 0$，使得 $\overline{\Gamma}CB + (CB)^\top \overline{\Gamma} > 0$。

(ii) 对于系统(4)，原点是全局渐近稳定的。

(iii) 每个 ψ_i在 $i \in \{1, \ldots, p\}$处均不连续，且其左极限和右极限均非零，即对于任意 $i \in \{1, \ldots, p\}$，$\lim_{s \to 0^+} \psi_i(s) > 0$且 $\lim_{s \to 0^-} \psi_i(s) < 0$。□

假设 3 的第 (i) 项对系统(1)的矩阵 C 和 B 施加了额外条件。定理 1 和引理2给出了确保假设 3 第 (ii) 项成立的充分条件。最后，假设 3 的第 (iii) 项要求每个 ψ_i、$i \in \{1, \ldots, p\}$在原点处均非零，且在零点处的左极限和右极限也均非零。第6节给出了满足假设 3（以及假设 1 和 2）的工程系统示例。

5.2 输出和状态有限时间稳定性

现在我们可以给出本节的主要结果，其证明见第5.3节。

定理 2 考虑系统(4)，并假设假设 1 和 3 成立，则系统(4)是有限时间稳定且具有 SIoLAS。□

[3]如果一个解的定义域无界，则称其为前向完备 [3]。

定理 2 确立了系统(4)的输出有限时间稳定性。接下来的一个自然问题是，能否也保证状态有限时间稳定性。下一个定理给出了这个问题的答案：只要假设 1 和 3 成立，当且仅当 C 可逆时，系统(4)才是 SFTS。

定理3 考虑系统(4)，并假设假设 1 和 3成立。那么，当且仅当矩阵 C 可逆时，该系统是 SFTS。□

证明：我们首先证明存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意 $\xi \in \ker(C) \cap \varepsilon\mathbb{B}_n$，$u = -(CB)^{-1}CA\xi$ 属于 $\mathbf{\Psi}(\mathbf{0}_p)$ 且满足 $CA\xi + CBu = \mathbf{0}_p$。首先，注意到 CB 是可逆的，因为根据假设 3 的第 (ii) 项，它是 LDS。因此，对于任意 $\xi \in \ker(C) \cap \varepsilon\mathbb{B}_n$，$u = -(CB)^{-1}CA\xi$ 是良定义的，且 $CA\xi + CBu = \mathbf{0}_p$。其次，根据假设 3 的第 (iii) 项，存在 $\psi_\circ \in \mathbb{R}_{>0}$，使得 $[-\psi_\circ, \psi_\circ]^p \subseteq \mathbf{\Psi}(\mathbf{0}_p)$。因此，存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意$\xi \in \ker(C) \cap \varepsilon\mathbb{B}_n$ 以及任意 $i \in \{1, \ldots, p\}$，$|((CB)^{-1}CA)_i\xi| \leq \psi_\circ$，从而推出$u = -(CB)^{-1}CA\xi \in [-\psi_o, \psi_o]^p \subseteq \mathbf{\Psi}(\mathbf{0}_p)$，证毕。

现在我们可以证明定理3的充要条件。定理3中的充分条件可由定理2直接推出。我们将通过反证法证明定理3中的必要条件。因此，假设 C 不可逆，并考虑如本证明开头所述的 $\varepsilon > 0$。由于对任意 $x \in \ker(C) \cap \varepsilon\mathbb{B}_n$，我们都可以选取属于 $\mathbf{\Psi}(\mathbf{0}_p)$ 的 $u = -(CB)^{-1}CAx$，因此下面考虑满足以下条件的方程 (4) 的解

$$\dot{x} = Ax - B(CB)^{-1}CAx, \quad x \in \ker(C) \cap \varepsilon\mathbb{B}_n, \tag{30}$$

这意味着

$$\dot{y} = C\dot{x} = (CA - CB(CB)^{-1}CA)x = \mathbf{0}_p, \quad x \in \ker(C) \cap \varepsilon\mathbb{B}_n. \tag{31}$$

现在我们利用 (31) 得出矛盾。根据假设 3 的 (ii)，存在 $\delta > 0$，使得任何从 $\delta\mathbb{B}_n$ 出发的解在任意时刻都不会离开 $\varepsilon\mathbb{B}_n$。令 x_p 为一个从 $\ker(C) \cap \delta\mathbb{B}_n$ 出发的非零解，其输出为 $y_p = Cx_p$，并按照 (30) 和 (31) 演化。则 $y_p(0) = Cx_p(0) = \mathbf{0}_p$，且由方程 (31) 可得 $y_p(t) = Cx_p(t) = \mathbf{0}_p$，并且对所有 $t \geq 0$，$\dot{x}_p(t) = (A - B(CB)^{-1}CA)x_p(t) \neq 0$。因此，$x_p$ 指数收敛到原点，但不会在有限时间内收敛。这样的解构成矛盾，从而完成证明。■

现在，我们可以根据定理2和定理3分析例 1 中系统的有限时间稳定性。

例3 考虑例 1 中的系统。假设 3 对 $\overline{\Gamma} = 1$ 成立。因此，该系统具有有限时间稳定性和 SIoLAS。根据定理 2，我们还知道该系统不是 SFTS，因为 C 不可逆。另一种理解方式是考虑 $x(0) \in X := \{0\} \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$。(4) 的一个可能的解是 $x_p(t) = (0, x_2(0)e^{-t})$，它对所有 $t \geq 0$ 都属于集合 X。此外，对于所有 $t \geq 0$，我们有 $y_p(t) = 0$，且 $\dot{y}_p(t) = 0$。显然，x_p 指数收敛到原点，但不会在有限时间内收敛。□

5.3 定理2的证明

定理 2 的证明依赖于以下引理和命题。

引理 3 在假设 1 和假设 3 的第 (iii) 项下，存在$\nu > 0$ 和 $c > 0$，使得

$$|u| \geq c, \quad \forall u \in -\mathbf{\Psi}(y), \quad \forall y \in \nu\mathbb{B}_p \setminus \{\mathbf{0}_p\}. \tag{32}$$

□

证明：根据假设 3 的第 (iii) 项，存在正参数$\nu_\circ$和 c，使得对于每个 $i \in \{1, \ldots, p\}$，ψ_i在区间$[-\nu_\circ, 0)$和$(0, \nu_\circ]$内连续，且 $\min(|\lim_{s\to 0^+} \psi_i(s)|, |\lim_{s\to 0^-} \psi_i(s)|) \geq 2c_\circ$ 因此，存在 $\nu \in (0, \nu_\circ]$，使得对于任意 $i \in \{1, \ldots, p\}$ 和 $s \in [-\nu, 0) \cup (0, \nu]$，$|\psi_i(s)| \geq c_\circ$ 因此，对于任意 $y \in \nu\mathbb{B}_p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$，存在$i \in \{1, \ldots, p\}$，使得对所有 $u \in -\mathbf{\Psi}(y)$，$|u| \geq |u_i| \geq c$，由此证明得证。■

我们还将用到下面的命题，它陈述了一个分段连续可微函数的代数性质，与式 (10) 中的函数类似。

$$W(Cx) := 2\sum_{i=1}^{p} \overline{\gamma}_i \int_0^{C_i x} \psi_i(\sigma) d\sigma, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{33}$$

其中 $\overline{\gamma}_1$、.....、 $\overline{\gamma}_p > 0$ 是满足 $\overline{\Gamma}CB + (CB)^\top \overline{\Gamma} > 0$ 的正参数，$\overline{\Gamma} = \text{diag}(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_p)$；根据假设 3 的 (i) 项，这些参数存在。函数 W 具有以下性质。

命题 2 假设假设 1 以及假设 3 的 (i) 和 (iii) 项成立。给定式 (33) 中的函数 W，存在 $\mu \in (0, \nu]$，其中 ν 如引理 3 所示，并且存在 α_4、$\alpha_5 \in \mathcal{K}_\infty$，使得

$$\alpha_4(|Cx|) \leq W(Cx) \leq \alpha_5(|Cx|), \qquad \forall x \in \mu\mathbb{B}_n, \tag{34}$$

$$\sup \dot{\overline{W}}_F(Cx) \leq -c\omega, \qquad \forall x \in \mu\mathbb{B}_n \setminus \ker(C), \tag{35}$$

其中 c 如引理 3 所示，$\omega := \lambda_1(c - 2\mu\frac{\lambda_2}{\lambda_1}) > 0$，$\lambda_1$ 是 $\overline{\Gamma}CB + (CB)^\top\overline{\Gamma}$ 的最小特征值，且 $\lambda_2 := |\overline{\Gamma}CA|_\circ$ □

证明：由 (33) 和引理 3 可知，对于任意 $x \in \mu\mathbb{B}_n \setminus \ker(C)$，$W(Cx) > 0$ 当$W(Cx) = 0$对于任意 $x \in \ker(C) \cap \mu\mathbb{B}_n$。此外，我们有 W在 $\mu\mathbb{B}_n$上连续。因此，根据 [18, 引理4.3], (34) 成立。令 $x \in \mu\mathbb{B}_n \setminus \ker(C)$，由引理 1，在 (16) 中施加 $P = 0$ 和 $\Gamma = \overline{\Gamma}$，可得

$$\sup \dot{\overline{W}}_F(Cx) \leq \sup_{u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)} (-2u^\top \overline{\Gamma} C(Ax + Bu)). \tag{36}$$

利用柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \sup \dot{\overline{W}}_F(Cx) \leq \sup_{u \in -\mathbf{\Psi}(Cx)} & (-u^\top(\overline{\Gamma}CB + (CB)^\top\overline{\Gamma})u \\ & + 2|\overline{\Gamma}CA||x||u|). \end{aligned} \tag{37}$$

因此，根据假设 3 的第 (i) 项，我们有

$$\begin{aligned}\sup \dot{\overline{W}}_F(x) &\leq \sup_{u\in -\mathbf{\Psi}(Cx)} (-\lambda_1|u|^2 + 2|\overline{\Gamma}CA||x||u|),\\ &= \sup_{u\in -\mathbf{\Psi}(Cx)} (-(\lambda_1|u| - 2|\overline{\Gamma}CA||x|)|u|),\\ &\leq \sup_{u\in -\mathbf{\Psi}(Cx)} \Big(-\lambda_1\big(|u| - 2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|x|\big)|u|\Big). \end{aligned} \tag{38}$$

.因此，根据引理 3，通过选择 $\mu \in (0, \nu]$，我们有 $\sup \overline{W}_F(Cx) \leq \sup_{u\in -\mathbf{\Psi}(Cx)}(-\omega|u|) \leq -c\omega$，其中 $\omega = \lambda_1\big(c - 2\frac{\lambda_2\mu}{\lambda_1}\big) > 0$，由此完成证明。

■

现在我们可以证明定理 2。为了证明系统(4)的 OFTS 性质，我们分步进行。首先证明，对于在原点邻域内初始化的系统(4)的解，相应的输出会在有限时间内收敛到原点；然后利用原点对系统(4)的 GAS 性质，证明系统(4)具有 OFTS 性质。

定理2的证明。我们首先通过对 (35) 积分，证明在原点足够近处初始化的解会在有限时间内收敛到 ker(C)。为此，我们回顾一下，根据原点的 GAS 性质，存在 $\kappa > 0$，使得从 $\kappa\mathbb{B}$ 出发的解不会离开 $\mu\mathbb{B}$，其中 μ 如命题 2 中所述；并且注意，对于任何从 $\kappa\mathbb{B}_n \cap$ker(C) 出发的解，集合 $\mu\mathbb{B}_n \cap$ker(C) 都是正向不变的。事实上，假设存在系统(4)的一个解 x_{bad}，使得 $x_{\text{bad}}(0) \in \kappa\mathbb{B}_n \cap$ker($C$)，且对于某个满足 $t^* \in \operatorname{dom} x_{\text{bad}}$ 的 $t^* > 0$，有 $x_{\text{bad}}(t^*) \notin \mu\mathbb{B}_n \cap$ ker(C)。由于 x_{bad} 关于时间连续，我们可以选取 $t^* > 0$，使得对于所有 $t \in [0, t^*)$，都有 $x_{\text{bad}}(t) \in \kappa\mathbb{B}_n \cap$ ker(C)，并且 $x_{\text{bad}}(t^*) \in \mu\mathbb{B}_n \setminus$ker($C$)。因此，由 (33) 和 (35)，再结合 W 在 $\mu\mathbb{B}_n$ 上正定且非病态这一事实，对于所有 $t \in [0, t^*)$，有 $0 = W(Cx_{\text{bad}}(t)) < W(Cx_{\text{bad}}(t^*))$；这与 W的连续性性质相矛盾。因此，解在到达集合 $\kappa\mathbb{B}_n \cap$ker(C) 后不能离开 $\mu\mathbb{B}_n \cap$ ker(C)。所以，结合 (35)、 W 的非病态性，以及对于从 $\kappa\mathbb{B} \cap$ ker(C) 出发的解， $\mu\mathbb{B} \cap$ ker(C) 的正向不变性，对于任何满足 $\in \kappa\mathbb{B}_n \setminus$ker($C$) 的初始条件 $x(0)$ 的解 x，我们通过积分得到，对于任意满足 $x(t) \in \mu\mathbb{B}_n \setminus$ ker(C) 的 $t \in \operatorname{dom} x$

$$W(Cx(t)) \leq -c\omega t + W(Cx(0)), \tag{39}$$

因此

$$\begin{aligned} W(Cx(t)) \leq \max(-c\omega t + W(Cx(0)), 0),\\ \forall x(0) \in \kappa\mathbb{B}_n, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{aligned} \tag{40}$$

因此，根据 (40) 以及原点的 GAS性质，我们得出，对于从 $\kappa\mathbb{B}$ 出发的任意解，都存在一个依赖于 κ 的 T_y，使得对于任意 $t \geq T_y$，$x(t) \in \kappa\mathbb{B} \cap$ker($C$)。现在，我们利用原点的 GAS性质证明 (4) 是有限时间稳定的。回顾一下，对于 (4) 的任意解 x，根据原点的 GAS性质，存在一个时刻 $T_\kappa \geq 0$，使得对于所有 $t \geq T_\kappa$， $x(t) \in \kappa\mathbb{B}$。因此，我们得出，对于所有 $t \geq T := T_\kappa + T_y$， $y(t) = \mathbf{0}_p$。

我们已经证明，对于任意解 x，都存在 $T \geq 0$，使得对于所有 $t \geq T$，$y(t) = \mathbf{0}_{p\circ}$。此外，系统(4)是局部全局渐近稳定的，因为根据假设 3 的第 (i) 项，它是全局渐近稳定的，并且 $|y| \leq |C||x|_\circ$。因此，系统(4)是有限时间稳定的。

最后，我们证明系统(4)也是 SIoLAS。事实上，结合(34)和(40)，对于任意满足 $x(0) \in \kappa\mathbb{B}$ 的解 x，有

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \alpha_4^{-1}(\max(-c\omega t + \alpha_5(Cx(0)), 0)) \\ &=: \beta_\circ(|y(0)|, t), \quad \forall x(0) \in \kappa\mathbb{B}_n, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \end{aligned} \tag{41}$$

其中 $\beta_\circ \in \mathcal{KL}$，由此证明完毕。 ■

6 应用

本节将介绍第 4 节和第 5 节结果的两个应用。

6.1 受摩擦影响的机械系统 [10]

考虑 [10, Sec. 5], 中给出的带摩擦的转子动力系统，即

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\omega}_u \\ \dot{\omega}_\ell \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \omega_u - \omega_\ell \\ -\frac{k_\theta}{J_u}\alpha - \frac{b}{J_u}(\omega_u - \omega_\ell) - \frac{1}{J_u}T_{fu}(\omega_u) + \frac{k_u}{J_u}v \\ \frac{k_\theta}{J_\ell}\alpha + \frac{b}{J_\ell}(\omega_u - \omega_\ell) - \frac{1}{J_\ell}T_{f\ell}(\omega_\ell) \end{bmatrix}, \tag{42}$$

其中 $x = (\alpha, \omega_u, \omega_\ell) \in \mathbb{R}^3$，$\alpha$ 表示由角弹簧和角阻尼器连接的两个旋转圆盘之间的角度失配，ω_u 和 ω_ℓ 分别表示这两个圆盘的角速度。标量 J_u、J_ℓ、k_u、k_θ 和 b 为正系统参数，其取值列于表 6.1。控制输入 $v \in \mathbb{R}$ 用于状态反馈稳定化，而式 (42) 中的集值映射 T_{fu} 和 $T_{f\ell}$ 定义如下

$$\begin{aligned} T_{fu}(s) &:= \begin{cases} f_u(s)\mathrm{sign}(s), & \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ [-f_{u,\circ} + \Delta f_u, f_{u,\circ} + \Delta f_u], & \text{otherwise}, \end{cases} \\ f_u(s) &:= f_{u,\circ} + \Delta f_u \mathrm{sign}(s) + q_1|s| + q_2 s, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \\ T_{f\ell}(s) &:= \begin{cases} f_\ell(s)\mathrm{sign}(s), & \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ [-f_{\ell,\circ}, f_{\ell,\circ}], & \text{otherwise}, \end{cases} \\ f_\ell(s) &:= f_{\ell,\circ} + (\Delta f_\ell - f_{\ell,\circ})e^{-q_3|s|} + q_4|s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

对于适当的正标量 $f_{u,\circ}$、$f_{\ell,\circ}$、Δf_u、Δf_ℓ、q_1、q_2、q_3 和 q_4，其取值列于表 6.1；函数符号 sign：$\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 定义为：若 $s > 0$，则 $\mathrm{sign}(s) = 1$；若 $s < 0$，则 $\mathrm{sign}(s) = -1$；若 $s = 0$，则 $\mathrm{sign}(s) = 0$。此时，式 (2) 满足 $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty_\circ$

与 [13, 第 6], 章类似，通过考虑式 (42) 中的选择 $v = v_p + v_{\mathrm{lin}}$，其中 $v_{p_1} := Kx$, $K = [k_1, k_2, k_3] \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ 以及 $v_{\mathrm{lin}} := \frac{1}{k_u}T_{fu}(\omega_u)$，我们得到

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \omega_u \\ \omega_\ell \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \omega_u - \omega_\ell \\ -\frac{k_\theta}{J_u}\alpha - \frac{b}{J_u}(\omega_u - \omega_\ell) + \frac{k_u}{J_u}(k_1\alpha + k_2\omega_u + k_3\omega_\ell) \\ \frac{k_\theta}{J_\ell}\alpha + \frac{b}{J_\ell}(\omega_u - \omega_\ell) - \frac{1}{J_\ell}T_{f\ell}(\omega_l) \end{bmatrix}, \tag{43}$$

b	$[Nm^2/$弧度 $s]$	0
$f_{u,\circ}$	[牛·米]	0.38
Δf_u	[牛·米]	-0.006
$f_{\ell,\circ}$	[牛·米]	0.0009
Δf_ℓ	[牛·米]	0.68
J_u	[千克·米²]	0.4765
J_ℓ	[千克·米²]	0.035
k_u	[牛·米/伏特]	4.3228
k_θ	[牛·米/弧度]	0.075
q_1	[千克·米²/弧度·秒]	2.4245
q_2	[千克·米²/弧度·秒]	-0.0084
q_3	[s/弧度]	0.05
q_4	[千克 米²/弧度 秒]	0.26

表 1： [10, Sec. 5] 中所给系统的参数。

可将其写成 Lur'e 形式 (4)，其中 $n = 3$ 和 $p = 1$，且 $A = A_{\text{free}} + H_1 K + H_2$,

$$A_{\text{free}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{k_\theta}{J_u} & -\frac{b}{J_u} & \frac{b}{J_u} \\ \frac{k_\theta}{J_\ell} & \frac{b}{J_\ell} & -\frac{b}{J_\ell} \end{bmatrix}, \; H_1 K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_u k_1}{J_u} & \frac{k_u k_2}{J_u} & \frac{k_u k_3}{J_u} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$H_2 = \text{diag}(0, 0, \frac{m}{J_u})$ 和 $m \in \mathbb{R}$, $B = (0, 0, \frac{1}{J_\ell})$, $C = [0, 0, 1]$ 以及 $\mathbf{\Psi}(Cx) = \mathbf{\Psi}(\omega_\ell) = T_{f\ell}(\omega_\ell) + m\omega_{\ell\circ}$

采用选择 $m = 0.052$, $\Gamma = \gamma_1 = 10$, $\eta = 8.492$, $K = [-12.8282, 3.7216, -8.4816]$，假设 2 得以满足

$$P = \begin{bmatrix} 0.5636 & 0.0340 & 0.3793 \\ 0.0340 & 0.0062 & 0.0186 \\ 0.3793 & 0.0186 & 0.2642 \end{bmatrix}.$$

由于假设 1 也得以满足，定理 1 表明，(4) 的原点是全局渐近稳定的，从而重新得到了最初在 [10] 中提出的结果。此外，由于所考虑的系统满足假设 3，我们根据定理 2 证明了系统(4)具有有限时间稳定性和 SIoLAS，这与 [10] 相比是一项新颖成果。

6.2 来自 [14]的细胞神经网络

在 [14], 中，细胞神经网络由系统(1)建模（见 [14, 式 (N1)- (N2)]），其中系统数据满足根据 [14, 性质 3 和 4]得出的以下性质。

性质 2 系统(1)满足以下条件。

(i) A 是一个对角负定矩阵。(ii) B 是 LDS（根据假设 3）。

(iii) $C = I_{n\circ}$

(iv) 对任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，函数 ψ_i 单调不减，即对于任意 $a > b \in \text{dom } \psi_i$，均有 $\psi_i(a) \geq \psi_i(b)$；该函数分段连续，并满足假设 1（其中 $\zeta_i = +\infty$）以及假设 3 的第 (iii) 项。□

性质 2 显然蕴含假设 1 以及假设 3 的条件 (i) 和 (iii)。下面我们证明，它也蕴含假设 3 的条件 (ii)，这样便可运用定理1和定理2证明系统(4)的原点全局渐近稳定，且系统(4)是 SFTS，从而为 [14, Thm. 3 和 4] 中给出的稳定性结果提供另一种证明。事实上，我们回顾一下，通过证明系统(4)的稳定性，我们可以确保系统(1)的 Krasovskii解具有相同的稳定性。

引理4 假设系统(1)满足性质 2。那么，系统(4)的原点全局渐近稳定，且系统(4)是 SFTS。□

证明：下面我们证明，存在矩阵 $\Gamma > 0$ 对角矩阵、 $P = P^\top > 0$以及标量 $\eta > 0$ 满足 (26)。由于 B 是 LDS，因此存在一个 $\Gamma > 0$ 对角矩阵，使得 $\Gamma B + (\Gamma B)^\top =: \Sigma > 0$，并且满足 $\Gamma A \leq -I_n$。采用这一选择后，我们可以将 (26) 中的矩阵 $\overline{M}$ 改写为:

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} PA + A^\top P & PB \\ B^\top P & -\Sigma \end{bmatrix} + \text{diag}(\eta I_n, \mathbf{0}_n), \tag{44}$$

注意到，由于性质 2 的第 (iv) 项， Z 是零矩阵。定义

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &:= \begin{bmatrix} PA + A^\top P & PB \\ B^\top P & -\Sigma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} SA^\top + AS & B \\ B^\top & -\Sigma \end{bmatrix}}_{=:N} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $S = P^{-1}$。由于根据性质 2 的第 (i) 项， A 是 Hurwitz 矩阵，因此存在 $S_\circ = S_\circ^\top > 0$ 使得 $S_\circ A^\top + A S_\circ = \Pi < 0$。因此，通过选择 $S = \alpha S_\circ$，并令 $\alpha > 0$为待选参数，我们有

$$N = \begin{bmatrix} \alpha\Pi & B \\ B^\top & -\Sigma \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \alpha > \alpha^\star, \tag{45}$$

其中 $\alpha^\star > 0$ 满足 $-\alpha^\star \lambda_\Pi > |B\Sigma B^\top|$， $\lambda_\Pi > 0$ 表示 Π的最小特征值。因此，在给定 α 和 P的选择下，矩阵 N 以及 $\sim$ $\sim M$ 均为负定矩阵。因此，通过选择 $0 < \eta < -|M|$，我们有$\overline{M} \leq 0$，从而证明了式 (26) 和性质1的第 (ii) 项。现在考虑性质1的第 (iii) 项，并注意到矩阵 $H = \Gamma A < 0$ 是对角负定矩阵，且满足 $\Gamma C A = \Gamma A = H = HC$。由于根据性质 2 的第 (iv) 项， $Z = O_p$，因此性质1的第 (iii) 项成立，我们可以调用引理2来证明系统(4)的原点是全局渐近稳定，并由此得到性质 2。此外，由于假设 1 和 3 成立，根据定理3，系统(4)也是 SFTS，因为 C 可逆。■

我们设想将这些结果应用于具有分段连续激活函数的更广泛一类神经网络。由于技术札记篇幅有限，我们在此不探讨此类推广，并将其留待未来工作。

7 结论

我们分析了具有分段连续非线性项的Lur'e系统原点的稳定性。首先，我们在比 [10] 更宽松的扇形条件下，建立了原点的全局渐近稳定性；为此，我们采用了基于集值李导数概念的另一种代数李雅普诺夫证明。随后，我们给出了相关条件，说明对于所考虑的这类系统，何时能够或不能建立有限时间稳定性。这些结果已应用于两个值得关注的工程系统：具有摩擦的机械系统和细胞神经网络。

未来的研究方向可能包括：受外部扰动影响的系统；针对所考虑系统类别的弱稳定性分析，即仅有部分解表现出期望的稳定性；以及沿着 [7, 29] 所开辟的路径，对具有分段连续非线性的互联系统 Lur'e 系统进行同步研究。

参考文献

[1] V. Acary 和 B. Brogliato。《非光滑动力系统的数值方法：力学与电子学中的应用》。Springer Science & Business Media，2008年。[2] V. Andrieu 和 S. Tarbouriech。用于收缩与同步的线性矩阵不等式充分条件。载于 IFAC非线性控制研讨会，页码 616–621，2019。[3] D. Angeli 和 E.D. Sontag。前向完备性、无界性可观测性及其 Lyapunov刻画。《系统与控制快报》，38(4-5):209–217，1999。[4] J.P. Aubin 和 A. Cellina。《微分包含：集值映射与可行性理论》，第264卷。Springer Science & Business Media，2012年。[5] A. Bacciotti 和 F. Ceragioli。不连续系统的稳定性与稳定化，以及非光滑李雅普诺夫函数。ESAIM: COCV，4:361–376，1999。[6] G. Bartolini、A. Pisano、E. Punta 和 E. Usai。二阶滑模控制在机械系统中的应用综述。《国际控制杂志》，76(9-10):875–892，2003。[7] B. Brogliato 和 W.P.M.H. Heemels。多值映射 Lur'e系统的观测器设计：一种无源性方法。IEEE Transactions on Automatic Control，54(8):1996–2001，2009。[8] B. Brogliato、R. Lozano、B. Maschke 和 O. Egeland。《耗散系统分析与控制》。Springer，2007。[9] B. Brogliato 和 A. Tanwani。与单调集值算子耦合的动力系统：形式体系、应用、适定性与稳定性。《SIAM评论》，62(1):3–129，2020。

[10] J.C.A. De Bruin、Doris A.、N. van de Wouw、W.P.M.H. Heemels 和 H. Nijmeijer。驱动与摩擦非共置的机械运动系统控制：采用波波夫判据处理输入到状态稳定性与集值非线性。《Automatica》，45(2):405–415，2009。[11] F.H. Clarke。《优化与非光滑分析》。应用数学经典丛书第5卷，SIAM，美国费城，1990年。[12] F.H. Clarke、Y.S. Ledyaev、R.J. Stern 和 P.R. Wolenski。《非光滑分析与控制理论》，第178卷。Springer Science & Business Media，1998。[13] A. Doris。非光滑机械系统的输出反馈设计：控制综合与实验。博士论文，埃因霍温理工大学，荷兰，2007。[14] M. Forti 和 P. Nistri。具有不连续神经元激活函数的神经网络的全局收敛性。IEEE电路与系统汇刊I：基础理论与应用，50(11):1421–1435，2003。[15] R. Goebel、R.G. Sanfelice 和 A.R. Teel。《混杂动力系统：建模、稳定性与鲁棒性》。普林斯顿大学出版社，2012年。[16] O. H´ajek。不连续微分方程，I。《微分方程杂志》，32(2):149–170，1979。[17] D. Hershkowitz。矩阵稳定性研究的新方向。《线性代数及其应用》，171:161–186，1992。[18] H.K. Khalil。《非线性系统》，第3版。普伦蒂斯·霍尔，2002年。[19] I. Lur'e 和 V.N. Postnikov。论稳定性与控制系统理论。《应用数学与力学》，8(3)，1944年。[20] S. Mariano、R. Bertollo、R. Postoyan 和 L. Zaccarian。无领导异质振荡器的混杂耦合规则：一致全局渐近同步与有限时间同步。已投稿发表，2021年。[21] A. Polyakov、D. Efimov 和 W. Perruquetti。有限时间与固定时间稳定化：隐式李雅普诺夫函数方法。《Automatica》，51:332–340，2015年。[22] V.M. Popov。论非线性自动控制系统的绝对稳定性。《自动化与远动学》，22(8):961–979，1961年。[23] M. Della Rossa。《用于混杂系统稳定性分析的非光滑李雅普诺夫函数》。博士论文，图卢兹大学，法国，2020年。[24] E.P. Ryan。微分包含的积分不变性原理及其在自适应控制中的应用。《SIAM控制与优化杂志》，36(3):960–980，1998年。[25] R. Sepulchre、M. Jankovi´c 和 P.V. Kokotovi´c。《构造性非线性控制》。Springer Science & Business Media，2012年。

[26] E.D. Sontag 和 Y. Wang. 关于输入到状态稳定性性质的刻画。Systems and Control Letters，24(1):351–359，1995。[27] E.D. Sontag 和 Y. Wang. 输入到输出稳定性的 Lyapunov 刻画。SIAM Journal on Control and Optimization，39(1):226–249，2000。[28] J.A.K. Soykens、J. Vandewalle 和 B. De Moor. 具有多层感知器和循环神经网络的 Lur'e系统：绝对稳定性与耗散性。IEEE Transactions on Automatic Control，44(4):770–774，1999。[29] Z. Tang、J. H. Park 和 H. Shen. Lur'e网络的有限时间簇同步：一种非光滑方法。IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems，48(8):1213–1224，2017。[30] M. Valadier. 单侧训练、下降线、非病态 Lipschitz 函数。CRAS Paris，308:241–244，1989。[31] F. Vasca、L. Iannelli、M. K. C¸amlibel 和 R. Frasca. 电力电子变换器建模的新视角：互补框架。IEEE Transactions on Power Electronics，24(2):456–468，2009。[32] V.I. Vorotnikov. 部分稳定性与控制。Springer，1998年。[33] V.I. Vorotnikov. 部分稳定性、稳定化与控制：近期的一些成果。载于第15届 IFAC三年一度世界大会，2002年。[34] V.A. Yakubovich、G.A. Leonov 和 A.K. Gelig. 不连续非线性控制系统中平稳集的稳定性，第14卷。World Scientific Singapore，2004。[35]K. Zimenko、D. Efimov、A. Polyakov 和 A. Kremlev. 关于输出有限时间稳定性的充要条件。Automatica，125:109427，2021年。

此图“a1.png”可从以下位置获取“png”格式文件：

http://arxiv.org/ps/2302.01175v1

此图“fig1.png”提供以下 PNG 格式版本：

http://arxiv.org/ps/2302.01175v1

此图“a2.png”提供以下 PNG 格式版本：

http://arxiv.org/ps/2302.01175v1

这张图“a3.png”可从以下位置获取 PNG 格式版本：

http://arxiv.org/ps/2302.01175v1