arXiv:2302.01195v1 [math.FA] 2 Feb 2023

基于算子分裂的线性无限维端口哈密顿系统动态迭代

B´alint Farkas[1], Birgit Jacob[1*]、Timo Reis[2] 和 Merlin Schmitz[1]

[1*]IMACM，伍珀塔尔大学，德国伍珀塔尔高斯街 20 号，D-42119。[2]伊尔梅瑙工业大学数学研究所，德国伊尔梅瑙魏玛街 25 号，98693。

*通讯作者。电子邮箱：bjacob@uni-wuppertal.de；贡献作者：farkas@uni-wuppertal.de；timo.reis@tu-ilmenau.de；meschmitz@uni-wuppertal.de；

摘要

本文提出了一种用于线性无限维端口哈密顿系统的动态迭代方案。动态迭代具有单调性，即误差不断减小；该方案不需要任何稳定性条件，尤其适用于由区域分解产生的端口哈密顿表述。

关键词：算子分裂、动态迭代、系统节点、无限维线性系统

数学学科分类：47H05，35A35，37L65

1 引言

算子分裂方法广泛用于将复杂问题的（数值）求解转化为对若干子问题的迭代求解，而这些子问题是通过对原问题进行分裂得到的。这种分裂的依据可能来自多种考量，例如支配物理定律、几何

考虑某个偏微分方程的定义域、问题的结构、数学上的原因，或上述因素的综合。有关各种情形下分裂方法的更多信息和总体概述，请参见 [28], [29], [14], [23, 第 IV 章], [17], [33], [24], [18], [13], [21], [19], [20] 。

算子分裂特别适用于由以特定方式耦合的子系统组成的问题，尽管这种耦合未必一目了然。例如，边界耦合系统或具有动态边界条件的问题（参见 [8], [9], ），以及延迟方程，都已通过分裂方法得到成功处理（例如，参见 [5], [6] ）；关于耗散情形下的算子分裂方法，可参见 [4] 。因此，研究在某些耦合方式下具有封闭性的系统类的算子分裂方法，既有趣又重要。本文关注具有特定结构的无限维端口哈密顿系统。

本文研究的分裂方法最初由 Peaceman 和 Rachford 提出（参见 [30], ），他们在当时针对线性算子引入了该方法。随后，Lions 和 Mercier 将 Peaceman–Rachford 分裂推广到巴拿赫空间上的极大单调算子 [27]。这一框架确实更适合本文的目的，因为这里涉及的算子通常只是仿射线性的。关于 Peaceman–Rachford 类型分裂及其变体的误差分析，例如可参见 [22]。

文献 [16] 研究了有限维端口哈密顿系统中基于算子分裂的动态迭代格式。在这里，我们迈出了将研究拓展至无限维端口哈密顿系统的第一步。在适当条件下，Peaceman–Rachford–Lions–Mercier 型分裂算法将产生收敛的近似；但更重要的是，近似误差将单调递减并收敛于 0，这一特性与问题的端口哈密顿结构有关。

本文结构安排如下。下一节将明确描述动态迭代方案，并陈述我们的主要定理。这些定理的证明见第 5 节。第 3 节介绍系统节点理论的一些背景知识，这些知识将在证明中用到。此外，第 4 节专门证明其中一个分裂算子的极大单调性。最后，在第 6.1 节中，我们给出两个例子：一个耦合波热系统，以及波动方程的区域分解。

2 动态迭代方案的描述

我们考虑 $n \in \mathbb{N}$ 线性（无限维）端口哈密顿系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \mathfrak{y}_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} &= S_i \begin{bmatrix} x_i(t) \\ \mathfrak{u}_i(t) \\ u_i(t) \end{bmatrix}, \qquad t \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ x_i(0) &= x_{i0}, \qquad i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$x_i(t) \in X_i$ 表示状态，$\mathfrak{u}_i(t) \in \mathfrak{U}_i$ 和 $u_i(t) \in U_i$ 表示输入，$\mathfrak{y}_i(t) \in \mathfrak{U}_i$ 和 $y_i(t) \in U_i$ 表示系统 i 在时刻 t的输出。这里，$\mathfrak{U}_i$、U_i 和 X_i 是希尔伯特空间。将空间Z_1、...、Z_n 的笛卡尔积记为 $\begin{bmatrix} Z_1 \\ \cdots \\ Z_n \end{bmatrix}$，我们定义

$$X := \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{U} := \begin{bmatrix} \mathfrak{U}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{U}_n \end{bmatrix} \text{ and } U := \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}.$$

我们假设线性算子 $S_i,\ i = 1, .., n,$ 是希尔伯特空间三元组 $\left(\begin{bmatrix} \mathfrak{U}_i \\ U_i \end{bmatrix}, X_i, \begin{bmatrix} \mathfrak{U}_i \\ U_i \end{bmatrix}\right)$ 上的系统节点。我们在第 3 节回顾系统节点的定义。特别地，此类系统涵盖适定线性系统 [32]、边界控制与观测系统 [35]，当然也涵盖具有有界控制与观测的线性无限维系统 [10]。

此外，我们假设这些系统通过以下方式耦合：

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = N_c \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

其中，N_c 是一个从 U 到 U 的有界线性算子，满足对于每个 $y \in U$，$\mathrm{Re}\langle y, N_c y\rangle \leq 0$。因此，花体字母表示这些函数可解释为外部输入和输出，并由此构成闭系统的输入和输出。

由于系统 (1) 是端口哈密顿系统，且耦合算子 N_c 满足 $\mathrm{Re}\langle y, N_c y\rangle \leq 0$ 对于每个 $y \in U$，互联系统仍是端口哈密顿系统。注意，系统 (1) 是端口哈密顿系统，当且仅当相应的系统节点 S_i 是阻抗无源的。此外，正如 [31, 定理 4.2]所述，系统节点是阻抗无源的，当且仅当它是（极大）耗散的。

本文旨在针对给定的输入 $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_n$ 以及给定的初始条件 $x_{10}, .., x_{n0}$，为闭环系统 (1)-(2开发一种动态迭代方案，以便分别求解线性端口哈密顿系统 S_i，也可以并行求解。

在 $\left(\begin{bmatrix} \mathfrak{U}_i \\ U_i \end{bmatrix}, X_i, \begin{bmatrix} \mathfrak{U}_i \\ U_i \end{bmatrix}\right)$ 上的每个系统节点 S_i 均可写为

$$S_i = \begin{bmatrix} A_i \& B_i \\ [C_i \& D_i]_1 \\ [C_i \& D_i]_2 \end{bmatrix}.$$

这里 $A_i \& B_i := P_{X_i} S_i$, $[C_i \& D_i]_1 := P_{\mathfrak{U}_i} S_i$ 以及 $[C_i \& D_i]_2 := P_{U_i} S_i$，其中 P_{X_i},$P_{\mathfrak{U}_i}$ 和 P_{U_i} 是 $X_i \times \mathfrak{U}_i \times U_i$中到 X_i, $\mathfrak{U}_i$ 和 U_i 上的典范投影。

4 耗散系统的动态迭代

设 S 为 $(\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{U}\\U\end{smallmatrix}\right], X, \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{U}\\U\end{smallmatrix}\right])$ 上的系统节点，其中 S_i “位于对角线上”，即算子 S 具有如下形式

$$S = \begin{bmatrix} A\&B \\ [C\&D]_1 \\ [C\&D]_2 \end{bmatrix},$$

关于系统的假设如下

假设 2.1 (关于节点) *Let X, U be Hilbert spaces. The linear operator* $S = \begin{bmatrix} A\&[C & B \\ \&[C & D]_1 \\ \&D]_2 \end{bmatrix}$: 定义域$(S) \subset \left[\begin{smallmatrix}X\\\mathfrak{U}\\U\end{smallmatrix}\right] \to \left[\begin{smallmatrix}X\\\mathfrak{U}\\U\end{smallmatrix}\right]$ *(with $A\&B = P_X S$, $\left[\begin{smallmatrix}[C\\\&[C\\\&D]_2\end{smallmatrix}\right] = P_{\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{U}\\U\end{smallmatrix}\right]} S$) has the following properties:*

(i) $\begin{bmatrix} A\&-[C & B \\ \&-[C & D]_1 \\ \& \\ D]_2 \end{bmatrix}$ *is dissipative*,

(ii) S *is closed. Further,* $A\&B$ *is closed with* 定义域$(A\&B)$ = 定义域(S)。

(iii) For all $\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{u}\\u\end{smallmatrix}\right] \in \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{U}\\U\end{smallmatrix}\right]$, *there exists some* $x \in X$ *with* $\left[\begin{smallmatrix}x\\\mathfrak{u}\\u\end{smallmatrix}\right] \in$ 定义域$(A\&B)$。

(iv) The main operator A: 定义域$(A) \subset X \to X$ *with*

$$\operatorname{dom}(A) := \{x \in X \mid (x, 0, 0) \in \operatorname{dom}(S)\}$$

and $Ax := P_X S \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *for all* $x \in \operatorname{dom}(A)$ *fulfills*

$$\rho(A) \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset.$$

Here $\rho(A)$ denotes the resolvent set of the linear operator A, and $\mathbb{C}_+ := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid$ 实部 $\lambda > 0\}$.

我们将解空间 $H := \mathrm{L}^2([0,T]; \left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right])$简记为。对于固定的 $T > 0$，函数 $\mathfrak{u}$: $[0,T] \to \mathfrak{U}$和 $x_0 \in X$，我们考虑算子

$$M\colon \operatorname{dom}(M) \subset H \to H \tag{3a}$$

with

$$\operatorname{dom}(M) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix}x\\u\end{smallmatrix}\right] \in H \;\middle|\; \left[\begin{smallmatrix}\dot{x}\\0\end{smallmatrix}\right] - \begin{bmatrix} A\&B \\ -[C\&D]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}x\\\mathfrak{u}\\u\end{bmatrix} \in H \text{ and } x(0) = x_0 \right\}, \tag{3b}$$

$$M \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - A\&B \left[\begin{smallmatrix}x\\\mathfrak{u}\\u\end{smallmatrix}\right] \\ [C\&D]_2 \left[\begin{smallmatrix}x\\\mathfrak{u}\\u\end{smallmatrix}\right] \end{bmatrix}. \tag{3c}$$

的确切含义将在第 $\dot{x}$ 节中阐明；届时我们将讨论系统节点和解轨迹，另请参见注 3。另请参见注4.7。注意， M 不是线性算子，除非 $x_0 = 0$ 且 $\mathfrak{u} = 0$，因为它通常并未定义在向量空间上。此外，我们定义 $N \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2([0,T]; \left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]))$如下：

$$N \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ -N_c u \end{bmatrix}. \tag{4}$$

我们假设耦合满足以下条件： N 是一个极大单调算-子。因此，对于 $\lambda > 0$ ，算子 $(\mathrm{I} - \lambda N)(\mathrm{I} + \lambda N)^{-1}$ 是压缩映射，参见第4节。

*Remark 2.2*若考虑两个系统（$n = 2$），则标准负反馈 $u_1 = y_2, u_2 = -y_1$ 得到耦合矩阵 $N_c = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -\mathrm{II} \\ & 0 \end{smallmatrix}\right]$。

通过 N_c 耦合 $S_i, i = 1, \ldots, n$ 所得到的系统（不含 $\mathfrak{y}$ 的输出方程）等价于方程

$$M \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] + N \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] = 0 \tag{5}$$

（参见注4.7），这等价于

$$\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] = (\mathrm{I} + \lambda M)^{-1}(\mathrm{I} - \lambda N)(\mathrm{I} + \lambda N)^{-1}(\mathrm{I} - \lambda M) \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right],$$

其中 $\lambda > 0$ 任意，关于此处出现的逆映射的讨论，见第 4 节。我们考虑一种受 Lions 和 Mercier 的思想启发的算法，如 [27]所示:

$$\left[\begin{smallmatrix} x_{k+1} \\ u_{k+1} \end{smallmatrix}\right] = (\mathrm{I} + \lambda M)^{-1}(\mathrm{I} - \lambda N)(\mathrm{I} + \lambda N)^{-1}(\mathrm{I} - \lambda M)\left[\begin{smallmatrix} x_k \\ u_k \end{smallmatrix}\right], \tag{6}$$

with $\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ u_0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{dom}(M)$ 任意。现在我们可以提出第二个假设 :

假设 **2 3** *For fixed $x_0 \in X$ $T > 0$ and $\mathfrak{u} \in$ $[0, T]$ $\mathfrak{U}$ there。* （解） , $\mathrm{L}^2(,)0$ *exists a solution $\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right]$ to the equation 5 on $[0, T]$.*

本文的主要结果如下:

定理 **2** *N as. defined in 3 and 4 let the sequence $\left[\begin{smallmatrix} x_k \\ u_k \end{smallmatrix}\right]_k$ be defined by 6 . Then:*
4 *Let Assumptions 2.1, 2.3 be fulfilled. For the operators $M, 0()()()$*

a) For the sequence $\left[\begin{smallmatrix} w_k \\ z_k \end{smallmatrix}\right]_k$ defined by

$$\left[\begin{smallmatrix} w_k \\ z_k \end{smallmatrix}\right] := (\mathrm{I} + \lambda M)\left[\begin{smallmatrix} x_k \\ u_k \end{smallmatrix}\right], \quad k \in \mathbb{N},$$

and the function $\left[\begin{smallmatrix} w \\ z \end{smallmatrix}\right] := (\mathrm{I} + \lambda M)\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right]$, the sequence $(\|\left[\begin{smallmatrix} w_k \\ z_k \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} w \\ z \end{smallmatrix}\right]\|_2)_k$ is monotonically decreasing and

$$\|\left[\begin{smallmatrix} x_k \\ u_k \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right]\|_2 \leq \|\left[\begin{smallmatrix} w_k \\ z_k \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} w \\ z \end{smallmatrix}\right]\|_2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

b) $(x_k)_k$ converges to x in $\mathrm{L}^2([0, T]; X)$。

c) $(x_k)_k$ converges uniformly to x on $[0, T]$.

定理 **2 5** *Let additionally to the assumptions of Theorem 2.4 the system be。, partially strictly output passive with regard to the external output i.e. there is* $\varepsilon > 0$ *such that for all* $\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \\ u \end{smallmatrix}\right]$ ∈ 定义域(*S*) *the inequality*

$$\text{(PSOP)} \qquad \operatorname{Re}\left\langle \begin{bmatrix} A\&B \\ -[C\&D]_1 \\ -[C\&D]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ u \\ u \end{bmatrix} \right\rangle_{\left[\begin{smallmatrix} X \\ U \\ U \end{smallmatrix}\right]} \leq -\varepsilon \left\| [C\&D]_1 \begin{bmatrix} x \\ u \\ u \end{bmatrix} \right\|_{\mathfrak{U}}^2$$

holds. Then, if T, x_0, $\mathfrak{u}$, x, u *are given as in Theorem 2 4, the corresponding external output also converges to* $\mathfrak{y} := [C\&D]_1 \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \\ u \end{smallmatrix}\right]$, *i.e.*

$$\left\| [C\&D]_1 \begin{bmatrix} x_k \\ u \\ u_k \end{bmatrix} - \mathfrak{y} \right\|_{2,\mathfrak{U}} \longrightarrow 0.$$

Remark 2.6 采用相同的论证，在假设关于内部输出具有部分严格输出无源性的条件下，我们可得内部输出收敛（即 $\lim_{k\to\infty} \|y - y_k\|_{2,\ U} = 0$）。然后，利用（2）以及 N_c 的有界性，我们很容易看出内部输入 u_k 收敛。

由于不失一般性，我们可以假设 N_c 可逆，因此，当系统关于内部输入具有部分严格输入无源性时，同样的结论也成立。

Remark 2.7 1。 S 的分块结构允许对子系统 S_i 进行并行计算。

2. 在针对两个算子之和（例如（6））的分裂算法（5）中，可以将变量 λ 解释为时间步长。因此，该算法表示对第一个算子执行若干步，并交替执行针对第二个算子的步骤。

3 系统节点背景

设 X、U 和 Y 为希尔伯特空间，并分别用 P_X 和 P_Y 表示 $\left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right]$ 中到 X 和 Y 的典范投影。设

$$S\colon \operatorname{dom}(S) \subset \left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right] \to \left[\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right]$$

为一个线性算子。其对应的主算子由 A 给出：$\operatorname{dom}(A) \subset X \to X$，其中 $\operatorname{dom}(A) := \{x \in X \mid [\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}] \in \operatorname{dom}(S)\}$，且对于所有 $x \in \operatorname{dom}(A)$，有 $Ax := P_X S[\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}]$。通常设

$$A\&B := P_X S \qquad \text{and} \qquad C\&D := P_Y S$$

因此， S 可写为

$$S = \begin{bmatrix} A\&B \\ C\&D \end{bmatrix}.$$

系统节点的概念对算子 S提出了自然的假设，以确保其具备良好的性质，并为微分方程所描述的动力学提供适当的解概念

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

For 关于系统节点的全面研究，请参阅专著 [32] .

定义 3.1（系统节点）在希尔伯特空间三元组（Y， X， U）上的 *system node* 是一个（可能无界的）线性算子 S：定义域(S) $\subset \left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right] \to \left[\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right]$，满足以下条件：

(i) S 是闭的。(ii) $P_X S$：定义域$(S) \subset \left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right] \to X$ 是闭的。(iii) 对所有 $u \in U$，存在某个 $x \in X$，使得 $\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \in$ 定义域(S)。(iv) 主算子 A 是强连续半群 $\mathfrak{A}(\cdot)$：$[0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ 在 X 上的生成元。

Remark 3.2（系统节点）设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A_{\&C} & B_{\&D} \end{smallmatrix}\right]$ 是定义在（Y， X， U）上的系统节点。

(i) 根据上述定义可知， $C\&D \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}(A\&B)\ Y)$，其中 $\mathrm{dom}(A\&B)$ 赋予 $A\&B$ 的图范数。特别地，带有 $Cx := C\&D\left[\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ 的算子 C 满足 $C \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}(A)\ Y)$。

(ii) 由于半群生成元的定义域是稠密的（见 [12,第 2 章，定理 1.5]），$\mathrm{dom}(S)$ 在 $\left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right]$ 中稠密，并且对于给定的 $u \in U$，仿射子空间

$$\{x \in X \mid \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{dom}(A\&B)\}$$

在 X 中稠密。

(iii) 由于 A 是一个 C_0-半群的生成元，因此存在 $\alpha \in \rho(A)$（属于 A 的预解集）。关于范数 $\|x\|_{X_{-1}} := \|(\alpha \mathrm{I} - A)^{-1} x\|$ 的 X 完备化记为 X_{-1}。注意， X_{-1} 的拓扑不依赖于 $\alpha \in \rho(A)$ 的具体选择，见 [35, 命题 2.10.2]。算子 A 连续延拓为 A_{-1}：$X \mapsto X_{-1}$； A 与 A_{-1} 相似，因此具有相同的谱，并且 A_{-1} 生成一个 C_0-半群 $\mathfrak{A}_{-1}(\cdot)$：$[0,\infty) \to \mathcal{L}(X_{-1})$ 作用于 X_{-1}，该半群延拓了 $\mathfrak{A}(\cdot)$（并且与 $\mathfrak{A}(\cdot)$ 相似），见 [12, 第 II 节.5]。

(iv) $A\&B$ 可扩展为有界线性算子 $\left[\begin{smallmatrix} A_{-1} & B \end{smallmatrix}\right]: \left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right] \to X_{-1}$，事实上它具有这样的分块结构。此外， $A\&B$ 的定义域（同样地： S的定义域）满足

$$\mathrm{dom}(A\&B) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \in \left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right] \mid A_{-1}x + Bu \in X \right\},$$

参见 [32, 第 3–4] 页。

(v) 对所有 $\alpha \in \rho(A)$，范数

$$\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right)\|_\alpha := \left(\|x - (\alpha \mathrm{I} - A_{-1})^{-1} Bu\|_X^2 + \|u\|_U^2 \right)^{1/2}$$

与 S 的图范数等价。此外，算子

将 $\mathrm{dom}(S)$ 双射到 $\left[\begin{smallmatrix} \mathrm{dom}(A) \\ U \end{smallmatrix}\right]$，$\left[\begin{smallmatrix} \mathrm{I} & -(\alpha \mathrm{I} - A_{-1})^{-1} B \\ 0 & \mathrm{I} \end{smallmatrix}\right]$ 参见 [32, 引理 4.7.3]。

注释 3.2(v) 可用于定义传递函数的概念。

定义 3.3（传递函数）设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ 为一个系统节点。 *transfer function associated to* S 为

$$\widehat{\mathfrak{D}}: \quad \rho(A) \to \mathcal{L}(U,Y), \\ s \mapsto C\&D \begin{bmatrix} (s\mathrm{I} - A_{-1})^{-1}B \\ \mathrm{I} \end{bmatrix}.$$

下面简要回顾微分方程 (7) 的适当解概念，其中 $\left[\begin{smallmatrix} \& & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ 是一个系统节点。

定义 3.4（经典/广义轨迹）设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ 是 (Y, X, U) 上的一个系统节点，并设 $T > 0$。

一个 *classical trajectory* 关于 (7) 且定义在 $[0,T]$ 上的三元组

$$(x,u,y) \in \mathrm{C}^1([0,T];X) \times \mathrm{C}([0,T];U) \times \mathrm{C}([0,T];Y)$$

它对所有 $t \in [0,T]$ 均满足 (7)。

一个 *generalized trajectory* 关于 (7) 且定义在 $[0,T]$ 上的三元组

$$(x,u,y) \in \mathrm{C}([0,T];X) \times \mathrm{L}^2([0,T];U) \times \mathrm{L}^2([0,T];Y),$$

它是 7) 在 $[0,T]$ C([0,T]; X) $\times$L^2([0,T]; U) $\times$L^2([0,T]; Y) 的拓扑下，(

如果 $S = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ 是定义在 (Y, X, U) 上的系统节点，那么 $A\&B$ 可以视为定义在 $(\{0\}, X, U)$ 上的系统节点。因此，我们还可以进一步讨论 $\dot{x} = A\&B\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right]$ 的经典（广义）轨迹 (x,u)。

以下结果保证了在适当的控制函数和初始值下经典轨迹的存在唯一性。

命题 3.5（经典轨迹的存在性 [32, Thm.4.3.9]） *Let* S *be asystem node on* (Y,X,U) *let* $T>0$, $x_0 \in X$ *and* $u \in$ W$^{2,1}([0,T];\ U)$ *with* $\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ u\ 0() \end{smallmatrix}\right] \in$ 定义域(S *. Then there exist unique classical trajectory* $x\ u\ y$ *for* 7 *with* $x\ 0\ = x_0$.) (, ,) ( ) ( ) *In the case of a well-posed system* $u \in$ ^{1,2} $[0,T]$ U *is sufficient for the existence* W (;) *of classical trajectories and one also gets* $y \in$ ^{1,2} $[0,T]$ Y *(see [31, p. 298]).* W (;)

我们进一步给出一些关于经典/广义轨迹的论述。

Remark 3.6（经典/广义轨迹）设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ 是定义在 (Y, X, U) 上的系统节点，并设 $T > 0$。

(i) 假设 (x,u) 是关于 $\dot{x} = A\&B\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right]$ 的经典轨迹。那么 $\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \in$ C([0,T]; S 的定义域)。

(ii) (x,u) 是关于 $\dot{x} = A\&B\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right]$ 的广义轨迹，当且仅当，

$$\forall\, t \in [0,T]: \quad x(t) = \mathfrak{A}(t)x(0) + \int_0^t \mathfrak{A}_{-1}(t-\tau)Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{8}$$

其中，后者必须解释为在空间 X_{-1} 中的积分。特别地， $x \in$ C([0,T]; X_{-1})。

(iii) 若 (x,u,y) 是方程 (7) 的广义轨迹，则显然，(x,u) 是 $\dot{x}=A\&B\left[\begin{smallmatrix}x\\u\end{smallmatrix}\right]$的广义轨迹。特别地，(8) 成立。输出求值$y(t)=C\&D\left[\begin{smallmatrix}x\\u\end{smallmatrix}\right](t)(t)$乍看之下，对所有 $t\in[0,T]$ 未必都有定义。不过，[32, 引理 4.7.9] 证明，$\left[\begin{smallmatrix}x\\u\end{smallmatrix}\right]$的第二个积分作为从 $[0,T]$ 到 dom$(A\&B)=\mathrm{dom}(S)$ 的映射是连续的。因此，可以在分布意义下将输出定义为 $C\&D$ 作用于 $\left[\begin{smallmatrix}x\\u\end{smallmatrix}\right]$的第二个积分所得的二阶导数。由此可证明，$(x,u,y)$ 是方程 (7) 的广义轨迹，当且仅当 (x,u) 是 $\dot{x}=A\&B\left[\begin{smallmatrix}x\\u\end{smallmatrix}\right]$的广义轨迹，并且

$$y=\left(t\mapsto\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,C\&D\int_0^t(t-\tau)\left[\begin{smallmatrix}x(\tau)\\u(\tau)\end{smallmatrix}\right]\mathrm{d}\tau\right)\in\mathrm{L}^2([0,T];Y).$$

接下来，我们回顾适定系统这一重要概念。

定义 3.7 （适定系统）设 $S=\left[\begin{smallmatrix}A\&C & B\&D\end{smallmatrix}\right]$是 (Y,X,U) 上的一个系统节点。若对于某个（因而也对所有） $T>0$，存在某个 $c_T>0$，使得 (7) 在 $[0,T]$ 上的经典轨迹（因而广义轨迹也）满足

$$\|x(t)\|_X+\|y\|_{\mathrm{L}^2([0,T];Y)}\le c_T\big(\|x(0)\|_X+\|u\|_{\mathrm{L}^2([0,T];U)}\big).$$

Remark 3.8 （适定系统）设 $S=\left[\begin{smallmatrix}A\&C & B\&D\end{smallmatrix}\right]$是 (Y,X,U) 上的一个系统节点，且 $T>0$。(7) 的适定性等价于以下映射有界

$$\begin{aligned}&\mathfrak{B}_T\colon\ \mathrm{L}^2([0,T];U)\to X,&&\mathfrak{C}_T\colon\ X\to\mathrm{L}^2([0,T];Y),\\&\mathfrak{D}_T\colon\ \mathrm{L}^2([0,T];U)\to\mathrm{L}^2([0,T];Y),\end{aligned}$$

其中

- $\mathfrak{B}_Tu=x(T)$，其中 (x,u,y) 是 (7) 在 $[0,T]$上的广义轨迹，且 $x(0)=0$,
- $\mathfrak{C}_Tx_0=y$，其中（x，u，y）是（7）在 $[0,T]$ 上满足$u=0$ 和 $x(0)=x_0$的广义轨迹,
- $\mathfrak{D}_Tu=y$，其中（x，u，y）是（7）在 $[0,T]$ 上满足$x(0)=0$的广义轨迹。

鉴于注3.6（ii），我们有

$$\mathfrak{B}_Tu=\int_0^t\mathfrak{A}_{-1}(t-\tau)Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau\quad\forall u\in\mathrm{L}^2([0,T];U).$$

特别地，适定性意味着上述积分属于 X。由于 C_0-半群的生成元的定义域在半群算子作用下保持不变，对每个 $t>0$和 $x_0\in\mathrm{dom}(A)$，都有 $\mathfrak{A}(t)x_0\in\mathrm{dom}(A)$。因此，取 C 如注 3.2 (i) 所示，对于 $y=C\mathfrak{A}(\cdot)x_0$, $x=\mathfrak{A}(\cdot)x_0$，$(x,0,y)$ 是方程 (7) 在 $[0,T]$ 上的一条经典轨迹，且 $x(0)=x_0$。适定性意味着映射 $x_0\mapsto C\mathfrak{A}(\cdot)x_0$可扩展为有界线性算子 $\mathfrak{C}_T\colon X\to\mathrm{L}^2([0,T];Y)$，参见[32, 定理 4.7.14]。

引理 3.9 *Let* $S=\left[\begin{smallmatrix} A\&C & B\\ \&D \end{smallmatrix}\right]$ *be a system node on* (Y,X,U). *Then*

$$S_{\mathrm{ext}}=\begin{bmatrix} A\&B & \mathrm{I}\\ C\&D & 0\\ \mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}_{0} \tag{9}$$

is a system node on $\left(\left[\begin{smallmatrix} Y\\ X \end{smallmatrix}\right], X, \left[\begin{smallmatrix} U\\ X \end{smallmatrix}\right]\right)$. *Further, if* (7) *is well-posed, then*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t)\\ y_{\mathrm{ext}}(t) \end{bmatrix}=S_{\mathrm{ext}}\begin{bmatrix} x(t)\\ u_{\mathrm{ext}}(t) \end{bmatrix} \tag{10}$$

is well-posed.

容易验证， S_{ext} 是一个系统节点。（7）和（10）的适定性等价性证明，只需将注记3.8 与 [32, 定理 4.4.4&4.4。8]直接结合，因此省略。

接下来回顾 [32, 定义 6.6.6],中的部分流逆概念，事实证明，它对应于这样一个系统：输入的第二部分与输出的第二部分互换。

定义 3.10（部分流逆）如果存在一个系统节点 $S^{\curvearrowleft}=\left[\begin{smallmatrix} [A\&[C & B]^{\curvearrowleft}\\ \&[C & D]_1^{\curvearrowleft}\\ \&D]_2^{\curvearrowleft} \end{smallmatrix}\right]$，定义在 $\left(\left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{Y}\\ U \end{smallmatrix}\right], X, \left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{U}\\ Y \end{smallmatrix}\right]\right)$ 上，并满足以下条件，则称定义在 $\left(\left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{Y}\\ Y \end{smallmatrix}\right], X, \left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{U}\\ U \end{smallmatrix}\right]\right)$ 上的系统节点 $S=\left[\begin{smallmatrix} A & B\\ \&[C & D]_1\\ \&[C & \&D]_2 \end{smallmatrix}\right]$ 具有 *partially flow-invertible*，其主算子为 A、控制算子为 $B=[\mathfrak{B}\ \widehat{B}]$、观测算子为 $C=\left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{C}\\ \widehat{C} \end{smallmatrix}\right]$：算子 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ [C & \& & D]_2 \end{smallmatrix}\right]$ 连续地将定义域(S)映射到定义域$(S^{\curvearrowleft})$上，其逆为 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ [C & \& & D]_2^{\curvearrowleft} \end{smallmatrix}\right]$，并且

$$S=\begin{bmatrix} [A\&B]^{\curvearrowleft}\\ [C\&D]_1^{\curvearrowleft}\\ 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\\ 0\ 1\ 0\\ [C\&D]_2^{\curvearrowleft} \end{bmatrix}^{-1} \qquad \text{在 } S \text{ 的定义域上,}$$

$$S^{\curvearrowleft}=\begin{bmatrix} A\&B\\ [C\&D]_1\\ 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\\ 0\ 1\ 0\\ [C\&D]_2 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \text{在 } S^{\curvearrowleft} \text{ 的定义域上。}$$

在这种情况下，我们称 S 和 $S^{\curvearrowleft}$ *partial flow-inverses* 互为对方。

若 S 是部分流可逆的，则对于 $\backsim S$ 的传递函数 $\widehat{\mathfrak{D}}=\left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{D}_{11} & \mathfrak{D}_{12}\\ \widehat{\mathfrak{D}}_{21} & \widehat{\mathfrak{D}}_{22} \end{smallmatrix}\right]$，以及系统节点 $S^{\curvearrowleft}$ 的传递函数 $\mathfrak{D}^{\curvearrowleft}$

$$\widehat{\mathfrak{D}}_{22}(\alpha) \quad \text{and} \quad \widehat{\mathfrak{D}}_{22}^{\curvearrowleft}(\alpha)$$

对所有 $\alpha\in\rho(A)\cap\rho(A^{\curvearrowleft})$ 都可逆，并且有 $\widehat{\mathfrak{D}}_{22}^{\curvearrowleft}(\alpha)=[\widehat{\mathfrak{D}}_{22}(\alpha)]^{-1}$（参见 [32, 定理 6.6.9 和 6.6.10]）。

命题 3.11 (部分流的可逆性， [32, 定理 6.6。11]) *A system node* $S=\left[\begin{smallmatrix} A\&[C & B\\ \&[C & D]_1\\ \&D]_2 \end{smallmatrix}\right]$ *on* $\left(\left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{Y}\\ Y \end{smallmatrix}\right], X, \left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{U}\\ U \end{smallmatrix}\right]\right)$ *is partially flow-invertible if and only if there exists*

some $\alpha\in\mathbb{C}$ *such that the following two statements are valid:*

1. *The operator* $\left[\begin{smallmatrix}\alpha\mathrm{I} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{I} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix}A\&B\\ 0\\ [C\&D]_2\end{smallmatrix}\right]$ *maps* $\mathrm{dom}(S)$ *bijectively to* $\left[\begin{smallmatrix}X\\ \mathfrak{U}\\ Y\end{smallmatrix}\right]$.
2. *By denoting*

$$\left(\left[\begin{smallmatrix}\alpha\mathrm{I} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{I} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix}A\&B\\ 0\\ [C\&D]_2\end{smallmatrix}\right]\right)^{-1} = \left[\begin{smallmatrix}M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33}\end{smallmatrix}\right],$$

M_{11} is injective has dense range and $-M_{11}^{-1}$ generates a strongly continuous , semigroup.

上述定义表明，部分流可逆系统节点的部分流逆是唯一的。尽管在一般情况下，系统节点的部分流逆只是一个算子节点，但根据我们关于耗散性的假设，可以保证它是一个系统节点，参见注 4.3 和 4.5。因此，我们将这一性质纳入定义。引入流逆的主要动机是它们可以交换输入和输出。以下结果讨论的正是这一点，它是对 [32, 定理 6.6。15]的略微改写。

命题 3.12（轨迹与流逆） *Let S be a flow-invertible sys-tem node on* $\left(\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{Y}\\ Y\end{smallmatrix}\right], X, \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{U}\\ U\end{smallmatrix}\right]\right)$ *whose flow-inverse $S^{\frown}$ is also a system node. Then* $\left(x\ \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{u}\\ u\end{smallmatrix}\right]\ \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{y}\\ y\end{smallmatrix}\right]\right)$ *is a classical (generalized) trajectory on $[0,T]$ if and only if* $\left(x\ \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{u}\\ y\end{smallmatrix}\right]\ \left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{y}\\ u\end{smallmatrix}\right]\right),,,,$ *is a classical (generalized) trajectory for the system associated to the node $S^{\frown}$.*

随着系统节点被拆分，我们也引入子系统的记号。令 $\Sigma = \left[\begin{smallmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{smallmatrix}\right]$ 表示与系统节点 S 相对应、传递函数为 $\widehat{\mathfrak{D}} = \left[\begin{smallmatrix}\widehat{\mathfrak{D}}_{11} & \widehat{\mathfrak{D}}_{12}\\ \widehat{\mathfrak{D}}_{21} & \widehat{\mathfrak{D}}_{22}\end{smallmatrix}\right]$ 的系统。在讨论下一节中的特殊适定性时，这种记号会很有用。

4 算子 M 的极大单调性

本节讨论算子 M （定义于式（3））的一些重要性质。其中最重要的是所谓的极大单调性，其定义如下。

定义 4.1 设 X 是一个带内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的希尔伯特空间。若集合 $Y \subset \left[\begin{smallmatrix}X\\ X\end{smallmatrix}\right]$ 满足

$$\mathrm{Re}\langle x-u, y-v\rangle \geq 0, \qquad \left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}u\\ v\end{smallmatrix}\right] \in Y.$$

此外，若 $Y \subset \left[\begin{smallmatrix}X\\ X\end{smallmatrix}\right]$ 是单调的，且不是 $\left[\begin{smallmatrix}X\\ X\end{smallmatrix}\right]$ 的任何单调子集的真子集，则称 $Y \subset \left[\begin{smallmatrix}X\\ X\end{smallmatrix}\right]$ 为 *maximal monotone*。若（可能非线性的）算子 A: 定义域(A) $\subset$ $X \to X$ A A 满足：其图，即 $\{\left[\begin{smallmatrix}x\\ Ax\end{smallmatrix}\right] \mid x \in$ 定义域$(A)\}$，是（极大）单调的，则称 A 为 *(maximal) monotone*。一组 $Y \subset \left[\begin{smallmatrix}X\\ X\end{smallmatrix}\right]$ 称为 *dissipative*，如果

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leq 0, \qquad \left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right] \in Y.$$

此外，如果 $Y \subset \left[\begin{smallmatrix} X \\ X \end{smallmatrix}\right]$ 具有耗散性，且不是 $\left[\begin{smallmatrix} X \\ X \end{smallmatrix}\right]$ 的某个耗散子集的真子集，则称其为 *maximal dissipative*。若（可能是非线性的）算子 $A\colon \mathrm{dom}(A) \subset X \to X$ 的图（即 $\{\left[\begin{smallmatrix} x \\ Ax \end{smallmatrix}\right] \mid x \in \mathrm{dom}(A)\}$）是（极大）耗散的，则称其为 *(maximal) dissipative*。□

以下是该性质的一些简单推论和等价表述。

Remark 4.2 设 A：定义域$(A) \subset X \to X$ 为一个算子。

(i) 如果 A 是线性的，那么 A 是（极大）耗散的，当且仅当 $-A$ 是（极大）单调的。

(ii) 假设 A 是单调的。由单调性的定义可得
$\mathrm{I} + \lambda A$ 对于所有 $\lambda > 0$都是单射的。
此外，Minty–Browder 理论给出了以下
三个命题之间的等价关系，参见例如[2, 定理 2.2 & 第 34]:

(i) A是极大单调的。
(ii) 对某个 $\lambda > 0$，$\mathrm{I} + \lambda A$ 是满射。
(iii) 对所有 $\lambda > 0$，$\mathrm{I} + \lambda A$ 都是满射。

因此，如果 A 是极大单调的，那么对所有 $\lambda > 0$，$\mathrm{I} + \lambda A$ 都是双射。由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\|(\mathrm{I} + \lambda A)x - (\mathrm{I} + \lambda A)y\| \geq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathrm{dom}(A),$$

因此 $(\mathrm{I} + \lambda A)^{-1}\colon X \to X$ 是压缩的。
此外，$(\mathrm{I} - \lambda A)(\mathrm{I} + \lambda A)^{-1}$ 是压缩的。
这由 $\tilde{x} = (\mathrm{I} + \lambda A)^{-1}x$ 和 $\tilde{y} = (\mathrm{I} + \lambda A)^{-1}y$ 可得。

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 - \|(\mathrm{I} - \lambda A)(\mathrm{I} + \lambda A)^{-1}x - (\mathrm{I} - \lambda A)(\mathrm{I} + \lambda A)^{-1}y\|^2 \\ = \|\tilde{x} - \tilde{y} + \lambda A\tilde{x} - \lambda A\tilde{y}\|^2 - \|\tilde{x} - \tilde{y} - (\lambda A\tilde{x} - \lambda A\tilde{y})\|^2 \\ = \mathrm{Re}\,\lambda\langle \tilde{x} - \tilde{y}, A\tilde{x} - A\tilde{y}\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

□

(iii) 因此，如果 A 是线性且极大耗散的，那么对所有 $\lambda > 0$，$\lambda\mathrm{I} - A$ 都是满射。

Remark 4.3 设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A_{\&C} & B_{\&D} \end{smallmatrix}\right]$：定义域$(S) \subset \left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right] \to \left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right]$ 是一个具有假设 2.1. 中所述性质的算子。

(i) $\left[\begin{smallmatrix} A_{\&-C} & B_{\&D} \end{smallmatrix}\right]$ 的耗散性直接意味着 A 是耗散的。结合备注 4.2 以及 $\rho(A) \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset$，$A$ 甚至是极大耗散的。根据 Lumer–Phillips 定理[12, 第 2 章，定理 3。15], 我们得到 A 生成一个强连续半群。因此，S 是一个系统节点。

(ii) 由 [31, 引理 4.3] 可知，$\left[\begin{smallmatrix} A_{\&-C} & B_{\&D} \end{smallmatrix}\right]$ 是极大耗散的。

（iii）传递函数 $\widehat{\mathfrak{D}}$ 的 S 定义于 $\mathbb{C}_+$。此外，$\widehat{\mathfrak{D}}(s)$ 对于所有$s \in \mathbb{C}_+$ [31, 定理 4。2]均为单调的（由于其为有界算子，因而也是极大单调的）。进一步地，系统（7）适定，当且仅当 $\left\{\|\widehat{\mathfrak{D}}(\sigma + \imath\omega)\| \,\middle|\, \omega \in \mathbb{R}\right\}$ 对于某个（因而也对任意一个）$\sigma > 0$ [31, 定理 5。1]有界。

（iv）（7）的广义轨迹（因而经典轨迹也）满足*dissipation inequality*

$$\|x(t)\|_X^2 \le \|x(0)\|_X^2 + 2\int_0^t \mathrm{Re}\langle u(\tau), y(\tau)\rangle_U \,\mathrm{d}\tau \qquad \forall\, t \in [0,T], \tag{11}$$

参见 [31,定理 4.2]。

引理 **4 4** *Assume that* $S = \begin{bmatrix} A & B \\ [C & D]_1 \\ [C & D]_2 \end{bmatrix}$ $S \subset \begin{bmatrix} X \\ \mathfrak{U} \\ U \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ \mathfrak{U} \\ U \end{bmatrix}$ *has the proper-*。& *ties as specified in Assumptions 2.1 and is partially flow-invertible. Then the partial* [A &&: 定义域( ) *flow inverse* $S^{\curvearrowleft} = \begin{bmatrix} [A\&B]^{\curvearrowleft} \\ [C & D]_1^{\curvearrowleft} \,\&\, \&D]_2^{\curvearrowleft} \\ [C \end{bmatrix}$ *fulfills that* $\begin{bmatrix} & B]^{\curvearrowleft} & D]_1^{\curvearrowleft} & \\ \&-[C & \&-[C & \& \\ D]_2^{\curvearrowleft} & & \end{bmatrix}$ *is dissipative.*

Proof 根据备注 4.3 (iv)，(7) 的广义轨迹满足耗散不等式 (11)。利用命题 3.12 以及以下显然事实：对于所有 $\tau \in [0,T]$，$\mathrm{Re}\langle u(\tau)\ y(\tau)\rangle = \mathrm{Re}\langle y(\tau)\ u(\tau)\rangle$，我们看到，与节点 $S^{\curvearrowleft}$ 相关联的系统的广义轨迹再次满足耗散不等式。于是 [31, 定理 4.2]推出 $\begin{bmatrix} [A & \\ & B]^{\curvearrowleft} & D]_1^{\curvearrowleft} & \\ -[C & \&-[C & \&D]_2^{\curvearrowleft} & \end{bmatrix}$ 是耗散的。 □

Remark 4.5 引理4.4 的一个推论是，满足假设2.1 的系统节点的部分流逆仍满足假设 2.1。特别地，$\begin{bmatrix} [A & B]^{\curvearrowleft} & D]_1^{\curvearrowleft} & \\ \&-[C & \&-[C & \&D]_2^{\curvearrowleft} & \end{bmatrix}$ 是极大耗散的。

引理 **4 6** *Assume that* $S = \begin{bmatrix} A & B \\ [C & D]_1 \\ [C & D]_2 \end{bmatrix}$ $S \subset \begin{bmatrix} X \\ \mathfrak{U} \\ U \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ \mathfrak{Y} \\ Y \end{bmatrix}$ *has the prop-*.&& *erties as specified in Assumptions 2.1 and let* $\gamma \ge 0$ $\delta > 0$. *Then the system* &: 定义域( ) , *,node*

$$S_{\gamma,\delta} = \begin{bmatrix} (A-\gamma\mathrm{I})\&B \\ 0 \quad \mathrm{I} \quad 0 \\ [C\&(D+\delta\mathrm{I})]_2 \end{bmatrix}$$

is partially flow-invertible. Moreover, for the partial flow-inverse $S_{\gamma,\delta}^{\curvearrowleft}$ *of* $S_{\gamma,\delta}$, *thesubsystem* $\widetilde{\Sigma}_{22}^{\curvearrowleft}$ *(i.e., the restriction of the system node to* $(Y,\ X,\ U)$ *) is well-posed.Here, we denote the system given by the node* $S_{\gamma,\delta}$ *by* $\widetilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_{11} & \widetilde{\Sigma}_{12} \\ \widetilde{\Sigma}_{21} & \widetilde{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$ *and the onefor* $S_{\gamma,\delta}^{\curvearrowleft}$ *by* $\widetilde{\Sigma}^{\curvearrowleft}$ *respectively.*

Proof 由于 $\begin{bmatrix} A & 0\,0 & B \\ \&-[C & 0\,0 & \&D]_2 \end{bmatrix}$ 根据注 4.3 (ii) 也是极大耗散的，因此我们得到

$$\begin{bmatrix} (\delta-\gamma)\mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (A-\gamma\mathrm{I})\&B \\ 0 \\ [C\&(D+\delta\mathrm{I})]_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (A-\delta\mathrm{I})\&B \\ 0 \quad -\mathrm{I} \quad 0 \\ [C\&(D+\delta\mathrm{I})]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta}\mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \left(\delta\mathrm{I} - \begin{bmatrix} A\&B \\ 0\,0\,0 \\ -[C\&D]_2 \end{bmatrix} \right)$$

具有有界逆，我们将其分块表示为 $\left[\begin{smallmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{smallmatrix}\right]$。此外，根据

$$\operatorname{Re}\left\langle \begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix}, \left(\delta \mathrm{I} - \begin{bmatrix} A\&B \\ 0\ 0\ 0 \\ -[C\&D]_2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix} \right\rangle \geq \delta\big(\|x\|_X^2 + \|\mathfrak{u}\|_{\mathfrak{U}}^2 + \|u\|_U^2\big) \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix} \in \operatorname{dom}(S),$$

由 M_{ij}、i、$j=1$、2、3 的构造可得

$$\operatorname{Re}\left\langle \begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \delta\mathfrak{u} \\ -u \end{bmatrix} \right\rangle > 0 \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} X \\ \mathfrak{U} \\ U \end{bmatrix} \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

特别地，

$$\operatorname{Re}\langle x, M_{11} x\rangle > 0 \quad \forall x \in X \setminus \{0\},$$

因此 M_{11} 是单射且值域稠密。结合M_{11} 的有界性可知，$-M_{11}$ 的逆仍是极大耗散的，并且 Lumer–Phillips 定理 [12, 第 2 章，定理 3。15] 表明，$-M_{11}^{-1}$在 X上生成一个强连续半群。现在由命题 3.11 可得，$S_{\gamma\text{和}\delta}$ 具有一个部分流逆 $S_{\gamma,\ \delta}^{\curvearrowleft}$。

还需证明 $S_{\gamma,\ \delta}^{\curvearrowleft}$ 定义了一个适定子系统 $\widetilde{\Sigma}_{22}^{\curvearrowleft}$。设 $\widehat{\mathfrak{D}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathfrak{D}}_{11} & \widehat{\mathfrak{D}}_{12} \\ \widehat{\mathfrak{D}}_{21} & \widehat{\mathfrak{D}}_{22} \end{bmatrix}$是 S的传递函数。那么，$s \mapsto \delta \mathrm{I} + \widehat{\mathfrak{D}}_{22}(\gamma + s)$ 是$\widetilde{\Sigma}_{22}$的传递函数。另一方面，根据备注 4.3 (iii)，$\widehat{\mathfrak{D}}_{22}(\gamma + s)$ 对所有 $s \in \mathbb{C}_+$均为单调的，这导致

$$\|(\delta \mathrm{I} + \widehat{\mathfrak{D}}_{22}(\gamma + s))^{-1}\| \leq \tfrac{1}{\delta} \quad \forall s \in \mathbb{C}_+.$$

另一方面，由于（$\delta \mathrm{I} + \widehat{\mathfrak{D}}_{22}$（$\gamma + s$）$)^{-1}$是子系统$\widetilde{\Sigma}_{22}^{\curvearrowleft}$的传递函数，根据定义 3.10，我们可以由备注 4.3（iii）得出该子系统是适定的。□

设 $S = \left[\begin{smallmatrix} A\&[C & B\&[C & D]_1 \\ \end{smallmatrix}\right.$ $\left.\begin{smallmatrix} \\ \\ D\&]_2 \end{smallmatrix}\right]$：$S$的定义域为 $\operatorname{dom}(\subset \begin{bmatrix} X \\ \mathfrak{U} \\ U \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ \mathfrak{U} \\ U \end{bmatrix}$，其定义如假设 2.1所示；并设 $T > 0$, $\mathfrak{u}\colon [0, T] \to \mathfrak{U}$ 以及 $x_0 \in X$。我们回顾算子

$$M\colon \operatorname{dom}(M) \subset H \coloneqq \mathrm{L}^2([0, T]; \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix}) \to H \tag{12a}$$

with

$$\operatorname{dom}(M) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in H \,\middle|\, \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A\&B \\ -[C\&D]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix} \in H \text{ and } x(0) = x_0 \right\}, \tag{12b}$$

$$M \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - A\&B \begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix} \\ [C\&D]_2 \begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{12c}$$

*Remark 4.7*对于 $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} - \left[\begin{smallmatrix} A\&[C & B \\ & D]_2 \end{smallmatrix}\right] \&\begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix} \in \mathrm{L}^2([0, T]; \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix})$，我们是指存在$w \in \mathrm{L}^2([0, T];\ X)$、$z \in \mathrm{L}^2([0, T];\ U)$，使得 $\begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix}$ 满足定义 3.4 中广义轨迹意义下的 $\dot{x} = A\&B \begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix} + w$和$z = [C\&D]_2 \begin{bmatrix} x \\ \mathfrak{u} \\ u \end{bmatrix}$。这些函数确实满足

$$\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}.$$

由于 M的作用是通过广义轨迹定义的，备注 3.6 (ii) 可得 $x \in \mathrm{C}([0,T];\, X_{-1})$，因此初始条件 $x(0) = x_0$是良定义的。因此，闭系统（1）-（2）的广义轨迹等价于方程（5）的解。

本节的主要结果如下。

定理 **4 8** *Let S S and let.*: do $T > 0$, $\mu \in {}^{2}_{X}[0,T]$ $\mathfrak{U}$ *and $x_0 \in X$. Then the operator M as in* 12 $\mathrm{m}() \subset \begin{bmatrix} X \\ \mathfrak{U} \\ U \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ \mathfrak{U} \\ U \end{bmatrix}$ *be as in Assumptions 2.1,*, , L (;) ( ) *is closed and maximal monotone.*

Proof Step 1: 我们证明 M 是单调的。令 $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right] \in \in \mathrm{dom}(M)$。记 $\left[\begin{smallmatrix} w_i \\ z_i \end{smallmatrix}\right] := M\left[\begin{smallmatrix} x_i \\ u_i \end{smallmatrix}\right], \quad i = 1, 2.$ 于是 $\left[\begin{smallmatrix} w \\ z \end{smallmatrix}\right] := \begin{bmatrix} w_1 - w_2 \\ z_1 - z_2 \end{bmatrix}, \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] := \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix}$ 满足 $x(0) = 0$, 且

$$\left[\begin{smallmatrix} \dot{x} \\ z \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} A\&B \\ [C\&D]_2 \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ u \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} w \\ 0 \end{smallmatrix}\right],$$

由此得到

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A\&B & \mathrm{I} \\ [C\&D]_2 & 0 \\ \mathrm{I} \;\; 0 & 0 \;\; 0 \end{bmatrix}}_{=:S_{\mathrm{ext}}} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ u \\ w \end{bmatrix},$$

以广义解的意义而言。由于 S 满足假设2.1，显然 S_{ext}也满足。因此，耗散不等式（见备注4.3(iv)）给出

$$\begin{aligned} 0 \le \tfrac{1}{2}\|x(T)\|_X^2 &= \tfrac{1}{2}\|x(T)\|_X^2 - \tfrac{1}{2}\|x(0)\|_X^2 \\ &\le \int_0^T \mathrm{Re}\left\langle \begin{bmatrix} u(\tau) \\ w(\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z(\tau) \\ x(\tau) \end{bmatrix} \right\rangle_{\left[\begin{smallmatrix} U \\ X \end{smallmatrix}\right]} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^T \mathrm{Re}\left\langle \begin{bmatrix} u(\tau) \\ x(\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z(\tau) \\ w(\tau) \end{bmatrix} \right\rangle_{\left[\begin{smallmatrix} U \\ X \end{smallmatrix}\right]} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^T \mathrm{Re}\left\langle \begin{bmatrix} x(\tau) \\ u(\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix} \right\rangle_{\left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right]} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^T \mathrm{Re}\left\langle \begin{bmatrix} x_1(\tau) - x_2(\tau) \\ u_1(\tau) - u_2(\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1(\tau) - w_2(\tau) \\ z_1(\tau) - z_2(\tau) \end{bmatrix} \right\rangle_{\left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right]} \mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{Re}\,\langle \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right], M\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right] - M\left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right] \rangle_{\mathrm{L}^2([0,T];\left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right])}. \end{aligned}$$

Step 2: 根据备注4.2(ii)，我们只需证明 $\lambda \mathrm{I} + M$对任意给定的 $\lambda > 0$都是满射。因此，取 $\lambda > 0, \quad w \in \mathrm{L}^2([0,T];\; X), \quad z \in \mathrm{L}^2([0,T];\; U)$。引理4.6 表明系统节点

$$S_{\lambda,\lambda} = \begin{bmatrix} (A - \lambda \mathrm{I})\&B \\ 0 \;\; \mathrm{I} \;\; 0 \\ [C\&(D + \lambda \mathrm{I})]_2 \end{bmatrix}$$

是部分流可逆的。将部分流逆记为

$$S^{\curvearrowleft}_{\lambda,\lambda} = \begin{bmatrix} [\widetilde{A}\&\widetilde{B}]^{\curvearrowleft} \\ 0 \;\; \mathrm{I} \;\; 0 \\ [\widetilde{C}\&\widetilde{D}]_2^{\curvearrowleft} \end{bmatrix}.$$

引理4.6 蕴含这进一步定义了一个适定子系统

由于闭系统存在解，对于固定的 u，存在一条（广义）轨迹（x_{u}，u_{u}，y_{u}）。根据子系统的适定性，我们可以选择 $\widehat{u} = u - u_{\mathrm{u}}$ 作为子系统的新输入，并再次得到一条定义良好的轨迹。对任意输入重复此过程可知，对于固定的 u 以及所有内部输入 u，都存在轨迹。于是，引理3.9 推出

$$S^{\curvearrowleft}_{\lambda,\lambda,\mathrm{ext}} = \begin{bmatrix} [\widetilde{A}\&\widetilde{B}]^{\curvearrowleft} & \mathrm{I} \\ 0 \;\; \mathrm{I} \;\; 0 & 0 \\ [\widetilde{C}\&\widetilde{D}]_2^{\curvearrowleft} & 0 \\ \mathrm{I} \;\; 0 \;\; 0 & 0 \end{bmatrix}$$

具有相同的适定性。因此，存在 $x \in \mathsf{C}([0,T];\, X)$，满足 $x(0) = x_0$，以及 $u \in \mathrm{L}^2([0,T];\, U)$，满足

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \mathrm{u} \\ u \\ x \end{bmatrix} = S^{\curvearrowleft}_{\lambda,\lambda,\mathrm{ext}} \begin{bmatrix} x \\ \mathrm{u} \\ z \\ w \end{bmatrix}, \tag{13}$$

因此，

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \mathrm{u} \\ u \end{bmatrix} = S^{\curvearrowleft}_{\lambda,\lambda} \begin{bmatrix} x \\ \mathrm{u} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

部分流逆的定义给出

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \mathrm{u} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A-\lambda\mathrm{I})\&B \\ 0 \;\; \mathrm{I} \;\; 0 \\ x0 \;\; 0 \;\; \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} \;\; 0 \;\; 0 \\ 0 \;\; \mathrm{I} \;\; 0 \\ [C\&(D+\lambda\mathrm{I})]_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ \mathrm{u} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

结合 $z = [C\&(D+\lambda\mathrm{I})]_2 \begin{bmatrix} x \\ \mathrm{u} \\ u \end{bmatrix}$，可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \mathrm{u} \\ z \end{bmatrix} = S_{\lambda,\lambda} \begin{bmatrix} x \\ \mathrm{u} \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 $x(0) = x_0$。由于该等式的第二行是冗余的，因此这等价于

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A-\lambda\mathrm{I})\&B \\ [C\&(D+\lambda\mathrm{I})]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathrm{u} \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix}.$$

根据 M 的定义，这意味着 $(\lambda\mathrm{I} + M)\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$，并结合注 4.2，我们得到该算子的极大单调性。□

5 主要定理的证明

本节旨在证明定理 2.4 和 2.5。

Proof of Theorem 2.4 再次令 $\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \in \mathrm{dom}(M)$，并记 $\begin{bmatrix} w_k \\ z_k \end{bmatrix} := (\mathrm{I} + \lambda M)\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}$。那么，按照 [3, 定理 23] 的证明，我们有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} &= (\mathrm{I}+\lambda M)(\mathrm{I}+\lambda M)^{-1}(\mathrm{I}-\lambda N)(\mathrm{I}+\lambda N)^{-1}(\mathrm{I}-\lambda M)\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \\ &= (\mathrm{I}-\lambda N)(\mathrm{I}+\lambda N)^{-1}(\mathrm{I}-\lambda M)(\mathrm{I}+\lambda M)^{-1}\begin{bmatrix} w_k \\ z_k \end{bmatrix} \\ &= (\mathrm{I}-\lambda N)(\mathrm{I}+\lambda N)^{-1}(2\mathrm{I}-(\mathrm{I}+\lambda M))(\mathrm{I}+\lambda M)^{-1}\begin{bmatrix} w_k \\ z_k \end{bmatrix} \\ &= (\mathrm{I}-\lambda N)(\mathrm{I}+\lambda N)^{-1}\left(2\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_k \\ z_k \end{bmatrix}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

类似地

$$\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = (\mathrm{I}-\lambda N)(\mathrm{I}+\lambda N)^{-1}\left(2\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}\right).$$

令 $\omega > 0$ 和 $\mathrm{L}^2_\omega([0,T];\, X) := \{f\colon [0,T] \to X \mid \mathrm{e}^{-\omega} f(\cdot) \in \mathrm{L}^2([0,T];\, X)\}$ 配备范数 $\|\cdot\|_{2,\omega,X}$，ω，X 定义为

$$\|f\|^2_{2,\omega,X} = \int_0^T \mathrm{e}^{-2t\omega}\|f(t)\|^2_X \,\mathrm{d}t\,.$$

类似地，定义带有范数 $\|\cdot\|_{2,\ \omega,\ \left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}$ 的 $\mathrm{L}^2_\omega([0,T];\ \left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right])$。显然，由于 $T\in(0,\infty)$，我们有 $\mathrm{L}^2_\omega([0,T];\ X)\ =\mathrm{L}^2([0,T];\ X)$，且范数等价。

设 $\left[\begin{smallmatrix}x_1\\u_1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}x_2\\u_2\end{smallmatrix}\right]\in$ 属于M的定义域。耗散性不等式

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tfrac{1}{2}\|x_1(t)-x_2(t)\|_X^2\le \mathrm{Re}\left\langle\begin{bmatrix}x_1(t)\\u_1(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_2(t)\\u_2(t)\end{bmatrix},M\begin{bmatrix}x_1\\u_1\end{bmatrix}(t)-M\begin{bmatrix}x_2\\u_2\end{bmatrix}(t)\right\rangle_{\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}$$

意味着

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left\langle\begin{bmatrix}x_1\\u_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_2\\u_2\end{bmatrix},M\begin{bmatrix}x_1\\u_1\end{bmatrix}-M\begin{bmatrix}x_2\\u_2\end{bmatrix}\right\rangle_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}\\&\qquad\ge \mathrm{e}^{-2\omega T}\tfrac{1}{2}\|x_1(T)-x_2(T)\|_X^2+\omega\|x_1-x_2\|_{2,\omega,X}^2.\end{aligned}$$

记

$$\Delta\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix}\coloneqq\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix},\qquad \Delta\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix}\coloneqq\begin{bmatrix}w\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix},$$

那么，利用 M 和 N 的单调性，对于 $\omega>0$，我们得到

$$\begin{aligned}&\|\Delta\begin{bmatrix}w_{k+1}\\z_{k+1}\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2-\|\Delta\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2\\&\quad=\|(\mathrm{I}-\lambda N)(\mathrm{I}+\lambda N)^{-1}\left[(2\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}w\\z\end{bmatrix})-(2\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix})\right]\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2\\&\qquad-\|\Delta\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2\\&\quad\le\|2\Delta\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix}-\Delta\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2-\|\Delta\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2\\&\quad=4\|\Delta\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2-4\,\mathrm{Re}\left\langle\Delta\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix},\Delta\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix}\right\rangle_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}\\&\quad=4\|\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2-4\,\mathrm{Re}\langle\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix},(\mathrm{I}+\lambda M)\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}-(\mathrm{I}+\lambda M)\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix}\rangle_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}\\&\quad=-4\lambda\,\mathrm{Re}\langle\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix},M\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}-M\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix}\rangle_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}\\&\quad\le-2\lambda\mathrm{e}^{-2\omega T}\|x(T)-x_k(T)\|_X^2-4\lambda\omega\|x-x_k\|_{2,\omega,X}^2\le 0.\end{aligned}\tag{15}$$

因此，$\|\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}w\\z\end{bmatrix}\|_{2,\ \omega,\ \left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}$ 单调递减（因而收敛），而注释4.2给出了 $\mathrm{L}^2_\omega([0,T];\ X)$ 所需的不等式。由于 M的单调性在 $\mathrm{L}^2([0,T];\ X)$中同样成立，$\omega=0$也有相同结论。

现在将最后一个不等式改写为

$$\|x-x_k\|_{2,\omega,X}^2\le\tfrac{1}{4\lambda\omega}\left(\|\Delta\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2-\|\Delta\begin{bmatrix}w_{k+1}\\z_{k+1}\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2\right),$$

由此可得 *b)* 因为 $\mathrm{L}^2_\omega([0,T];\ X)$ 和 $\mathrm{L}^2([0,T];\ X)$ 的范数等价。最后，我们重复计算（15），但在最后一步中用 $t\in(0,T]$ 代替 T，得到

$$\|x(t)-x_k(t)\|_X^2\le\frac{\mathrm{e}^{2\omega T}}{2\lambda}\left(\|\Delta\begin{bmatrix}w_k\\z_k\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2-\|\Delta\begin{bmatrix}w_{k+1}\\z_{k+1}\end{bmatrix}\|_{2,\omega,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}^2\right),$$

这就完成了证明 . □

Proof of Theorem 2.5 令 $\left[\begin{smallmatrix}x_k\\u_k\end{smallmatrix}\right]\in\mathrm{dom}(M)$，$(x,\mathfrak{u},\mathfrak{y})$ 为一条广义轨迹，且$\mathfrak{y}_k\coloneqq[C\&D]_1\left[\begin{smallmatrix}x_k\\\mathfrak{u}\\u_k\end{smallmatrix}\right]$。利用 (PSOP) 性质，耗散不等式可进一步细化为 $\mathrm{Re}\langle\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix},M\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}-M\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix}\rangle_{2,\ \ x\atop\left[\begin{smallmatrix}\ \\U\end{smallmatrix}\right]}$

$$\begin{aligned}&\ge\tfrac{1}{2}\|x(T)-x_k(T)\|_X^2-\mathrm{Re}\left\langle\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_k\\u_k\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A\&B\\-[C\&D]_2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}x\\\mathfrak{u}\\u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_k\\\mathfrak{u}\\u_k\end{bmatrix}\right)\right\rangle_{2,\left[\begin{smallmatrix}X\\U\end{smallmatrix}\right]}\\&=\tfrac{1}{2}\|x(T)-x_k(T)\|_X^2-\mathrm{Re}\left\langle\begin{bmatrix}x\\\mathfrak{u}\\u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_k\\\mathfrak{u}\\u_k\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A\&B\\-[C\&D]_1\\-[C\&D]_2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}x\\\mathfrak{u}\\u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_k\\\mathfrak{u}\\u_k\end{bmatrix}\right)\right\rangle_{2,\left[\begin{smallmatrix}X\\\mathfrak{U}\\U\end{smallmatrix}\right]}\end{aligned}$$

$$\geq \tfrac{1}{2}\|x(T)-x_k(T)\|_X^2+\varepsilon\|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_k\|_{2,\mathfrak{U}}^2.$$

因此，(15) 可改写为

$$\|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_k\|_{2,\mathfrak{U}}^2 \leq \tfrac{1}{4\varepsilon}\left(\|\Delta\left[\begin{smallmatrix} w_k \\ z_k \end{smallmatrix}\right]\|_{2,\left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right]}^2-\|\Delta\left[\begin{smallmatrix} w_{k+1} \\ z_{k+1} \end{smallmatrix}\right]\|_{2,\left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right]}^2\right).$$

同样，由于 $\|\Delta\left[\begin{smallmatrix} w_k \\ z_k \end{smallmatrix}\right]\|_{2,\left[\begin{smallmatrix} X \\ U \end{smallmatrix}\right]}^2$ (根据定理 2.4) 的收敛性，我们得到了外部输出所需的收敛性。□

6 示例

6.1 耦合波热系统

我们考虑以下具有 Coleman–Gurtin 热定律 [11] 的一维耦合波热系统

$$\begin{aligned}
v_{tt}(\zeta,t) &= v_{\zeta\zeta}(\zeta,t), && \zeta\in(-1,0), t>0,\\
w_t(\zeta,t) &= w_{\zeta\zeta}(\zeta,t)+\int_0^\infty g(s)w_{\zeta\zeta}(\zeta,t-s)\,\mathrm{d}s, && \zeta\in(0,1), t>0,\\
v_t(0,t) &= w(0,t), && t>0,\\
v_\zeta(0,t) &= w_\zeta(0,t)+\int_0^\infty g(s)w_\zeta(0,t-s)\,\mathrm{d}s, && t>0,\\
v(-1,t) &= 0, && t>0,\\
w(1,t) &= 0, && t>0,
\end{aligned}$$

配备初始条件

$$\begin{aligned}
v(\zeta,0)&=v_0(\zeta), \qquad v_t(\zeta,0)=\psi(\zeta), && \zeta\in(-1,0),\\
w(\zeta,0)&=w_0(\zeta), \qquad w(\zeta,-s)=\varphi_0(\zeta,s), && \zeta\in(0,1), s>0,
\end{aligned}$$

对于适当的函数 v_0、w_0、ψ_0 和 φ_0。这里，卷积核 $g\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$ 是凸且可积的，其总质量为 1，形式如下

$$g(s)=\int_s^\infty \mu\,\mathrm{d}r, \qquad s\geq 0,$$

并且 $\mu\colon (0,\infty)\to[0,\infty)$ 是非递增、绝对连续且可积的。此外，模型及相应分析的详细内容可参见 [11]。

耦合波热系统可以分解为两个以功率守恒方式耦合的阻抗无源系统节点。更准确地说，系统的波动部分表示为

$$\begin{aligned}
&v_{tt}(\zeta,t)=v_{\zeta\zeta}(\zeta,t), && \zeta\in(-1,0), t>0,\\
&v(-1,t)=0, \quad v_t(0,t)=u_1(t), \quad y_1(t)=v_\zeta(0,t), && t>0,
\end{aligned}$$

$$v(\zeta,0)=v_0(\zeta),\quad v_t(\zeta,0)=\psi(\zeta),\qquad \zeta\in(-1,0).$$

在 [11] 中已证明，波动部分是一个阻抗无源系统节点 $S_1=\left[\begin{smallmatrix} A_1 & B_1 \\ C & D_1 \end{smallmatrix}\right]$，定义在 $\left[\begin{smallmatrix} \mathrm{H}^1_\ell(0,1) \\ \mathbb{C} \end{smallmatrix}\right]\times \mathrm{L}(\cdot,\cdot)$上，其中

$$\mathrm{H}^1_\ell(0,1):=\{v\in \mathrm{H}^1(0,1)\mid v(-1)=0\}.$$

系统的状态为 $\left[\begin{smallmatrix} v(\cdot,\,t) \\ v_t(\cdot,\,t) \end{smallmatrix}\right]$。由于 S_1 是阻抗无源的，算子 $\left[\begin{smallmatrix} A_1 & B_1 \\ -C_1 & D_1 \end{smallmatrix}\right]$ 是耗散的，参见 [31, 定理 4.2]。

采用 Coleman–Gurtin 热定律的热部分由下式描述

$$\begin{aligned}
w_t(\zeta,t)&=w_{\zeta\zeta}(\zeta,t)+\int_0^\infty g(s)w_{\zeta\zeta}(\zeta,t-s)\,\mathrm{d}s, && \zeta\in(0,1),t>0,\\
w(1,t)&=0, && t>0,\\
u_2(t)&=-w_\zeta(0,t)-\int_0^\infty g(s)w_\zeta(0,t-s)\,\mathrm{d}s, && t>0,\\
y_2(t)&=w(0,t), && t>0,\\
w(\zeta,0)&=w_0(\zeta),\quad w(\zeta,-s)=\varphi_0(\zeta,s), && \zeta\in(0,1),s>0.
\end{aligned}$$

热部分是一个阻抗无源系统，其系统节点为 $S_2=\left[\begin{smallmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{smallmatrix}\right]$，定义在 $(\mathbb{C},\mathrm{L}^2(0,1)\times\mathcal{M},\mathbb{C})$ 上，参见 [11]。这里 $\mathcal{M}:=\mathrm{L}^2_\mu((0,\infty);\mathrm{H}^1_r(0,1))$，其中 L^2_μ 是关于测度 $\mu(s)\mathrm{d}s$的所有平方可积函数构成的空间，而 $\mathrm{H}^1_r(0,1):=\{w\in\mathrm{H}^1(0,1)\mid w(1)=0\}$。系统的状态为 $\left[\begin{smallmatrix} w(\cdot,\,t) \\ s\mapsto\int_0^s w(\cdot,\,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma \end{smallmatrix}\right]$。

因此假设 2.1 成立，并且由于两个系统通过$u_1(t)=y_2(t)$ 和 $u_2(t)=-y_1(t)$ 相耦合，相应的耦合算子 N 是斜伴随的，因此是耗散的。所以，我们的动态迭代方案适用，可以采用适当的方法独立并行地求解热部分和波动部分。

Remark 6.1 也可以通过将 v 或 w 的值设为给定的 $\mathfrak{u}$ 而不是 0，来为系统加入外部输入。

6.2 L 形/可分解区域上的波动方程

我们考虑 [26] 中的波动方程，并使用我们的方法将区域分解，且在连接边界上进行耦合。系统形式如下：

$$\begin{aligned}
\rho(\xi)z_{tt}(\xi,t)&=\operatorname{div}(T(\xi)\operatorname{grad}z(\xi,t))-(dz_t)(\xi,t),\quad \xi\in\Omega,t\geq 0,\\
0&=z_t(\xi,t)\quad \text{on } \Gamma_0\times[0,\infty),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{u}(\xi,t) &= \nu\cdot(T(\xi)\operatorname{grad} z(\xi,t)) \quad \text{on } \Gamma_1\times[0,\infty),\\
\mathfrak{y}(\xi,t) &= z_t(\xi,t) \quad \text{on } \Gamma_1\times[0,\infty),\\
z(\xi,0) &= z_0(\xi),\quad z_t(\xi,0)=\omega(\xi) \quad \text{on } \Omega,
\end{aligned}
$$

其中，$\nu\colon\ \partial\Omega\to\mathbb{R}^2$ 是 L 形区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$的单位外法向量。更准确地说，我们考虑 Ω $\Gamma_0,\Gamma_1\subseteq\mathbb{R}^2$，其中

$$
\begin{aligned}
&\Omega=\operatorname{int}(\overline{\Omega_1}\cup\overline{\Omega_2}),\\
&\Omega_1=(0,1)\times(0,2), && \Omega_2=(1,2)\times(0,1),\\
&\Gamma_1=(0,1)\times\{2\}\subset\partial\Omega, && \Gamma_0=\partial\Omega\setminus\overline{\Gamma}_1.
\end{aligned}
$$

与往常一样，$z(\xi,t)$ 表示波在点 $\xi\in\Omega$ 和时间 $t\geq 0$ 的位移，$\mathfrak{u}$ 是作用于边界部分 Γ_1 上的力所提供的输入，$\mathfrak{y}$ 是在 Γ_1 处测得的速度输出。物理参数通过杨氏模量 $T(\cdot)$ 和质量密度 $\rho(\cdot)$（不要与预解集混淆）引入。假设这两个参数均可测、为正，且其逆有界。d 可解释为内部阻尼，假设它是 Ω 上有界、非负且可测的函数（通常由乘法算子给出）。

我们将问题拆分为两个波动方程，分别定义在矩形 Ω_1 和 Ω_2，上，并在边界界面处相互作用

$$
\Gamma_{\text{int}}\coloneqq\{1\}\times(0,1).
$$

首先注意，对于这些集合

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{10}&=\big(\{0\}\times[0,2)\big)\cup\big([0,1)\times\{0\}\big)\cup\big(\{1\}\times(1,2)\big),\\
\Gamma_{20}&=\big((1,2]\times\{0\}\big)\cup\big(\{2\}\times[0,1]\big)\cup\big([1,2]\times\{1\}\big).
\end{aligned}
$$

我们有 $\partial\Omega = \partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2\setminus\Gamma_{\text{int}}$ 以及 $\partial\Omega_2 = \overline{\Gamma}_{20}\cup\overline{\Gamma}_{\text{int}}$ 和$\partial\Omega_1=\overline{\Gamma}_{10}\cup\overline{\Gamma}_{\text{int}}\cup\overline{\Gamma}_1$（见图1）。此外，集合 $\overline{\Gamma}_{10}\cap\overline{\Gamma}_{20}=\overline{\Gamma}_{10}\cap\overline{\Gamma}_{\text{int}}=\overline{\Gamma}_{20}\cap\overline{\Gamma}_{\text{int}}=\{1\}\times\{0,1\}$ 的线测度为零。

现在，分别用ν_1 和 ν_2表示 Ω_1 和 Ω_2 的单位外法向量，我们考虑以下两个系统

$$
\begin{aligned}
\rho(\xi)z_{tt}(\xi,t) &= \operatorname{div}(T(\xi)\operatorname{grad} z(\xi,t))-(dz_t)(\xi,t),\quad \xi\in\Omega_1,t\geq 0,\\
0 &= z_t(\xi,t) \quad \text{on } \Gamma_{10}\times[0,\infty),\\
\mathfrak{u}(\xi,t) &= \nu_1\cdot(T(\xi)\operatorname{grad} z(\xi,t)) \quad \text{on } \Gamma_1\times[0,\infty),\\
u_1(\xi,t) &= \nu_1\cdot(T(\xi)\operatorname{grad} z(\xi,t)) \quad \text{on } \Gamma_{\text{int}}\times[0,\infty),\\
\mathfrak{y}(\xi,t) &= z_t(\xi,t) \quad \text{on } \Gamma_1\times[0,\infty),\\
y_1(\xi,t) &= z_t(\xi,t) \quad \text{on } \Gamma_{\text{int}}\times[0,\infty),\\
z(\xi,0) &= z_0(\xi),\quad z_t(\xi,0)=\omega(\xi) \quad \text{on } \Omega_1,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

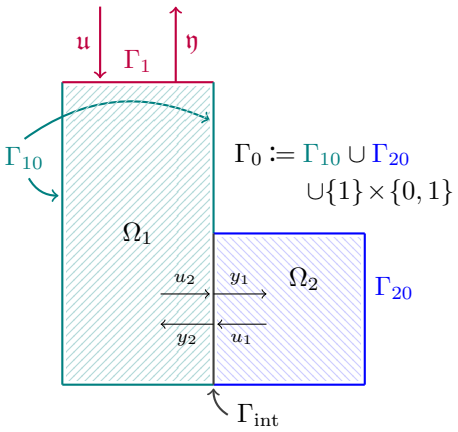

图1 Ω及其边界的划分示意图

and

$$\begin{aligned}
\rho(\xi)z_{tt}(\xi,t) &= \operatorname{div}(T(\xi)\operatorname{grad} z(\xi,t)) - (dz_t)(\xi,t), \quad \xi\in\Omega_2, t\geq 0,\\
0 &= z_t(\xi,t) \quad \text{on } \Gamma_{20}\times[0,\infty),\\
u_2(\xi,t) &= z_t(\xi,t) \quad \text{on } \Gamma_{\text{int}}\times[0,\infty),\\
y_2(\xi,t) &= \nu_2\cdot(T(\xi)\operatorname{grad} z(\xi,t)) \quad \text{on } \Gamma_{\text{int}}\times[0,\infty),\\
z(\xi,0) &= z_0(\xi), \quad z_t(\xi,0)=\omega(\xi) \quad \text{on } \Omega_2,
\end{aligned} \tag{17}$$

以及界面条件

$$u_1(\xi,t) = -y_2(\xi,t), \quad u_2(\xi,t) = y_1(\xi,t), \quad \text{on } \Gamma_{\text{int}}\times[0,\infty). \tag{18}$$

迹空间。在本段中，Ω 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的一般有界利普希茨区域。这里的结果稍后将应用于前文所述的区域。为恰当地引入上述系统的正确表述和空间，考虑迹算子 $\gamma\colon \mathrm{H}^1(\Omega)\to \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$，它将$x\in\mathrm{H}^1(\Omega)$ 映射到其边界迹 $x|_{\partial\Omega}$，其中 $\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ 表示分数阶为 $1/2$ [1] 的索伯列夫空间。根据迹定理 [15, Thm. 1.5.1.3]，γ 是有界且满射的。此外，$\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$ 是所有平方可积函数构成的空间，这些函数的弱散度存在且平方可积。也就是说，对于 $\mathrm{H}^1_0(\Omega) := \ker\gamma$，

$$z=\operatorname{div} x \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\varphi\in\mathrm{H}^1_0(\Omega):\ -\langle\operatorname{grad}\varphi, x\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C}^2)} = \langle\varphi, z\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

相对于支点空间 $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ 定义 $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega) := \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)^*$，$\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$ 的法向迹可通过 $w=\gamma_N x\in\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ 良好定义，其中

$$\forall z\in\mathrm{H}^1(\Omega):\quad \langle w,\ \gamma z\rangle_{\mathrm{H}^{-1/2}(\Omega),\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} = \langle\text{散度 } x,\ z\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \langle x,\ \text{梯度} z\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C}^2)}.$$

格林公式 [34, 第 16]表明，确实 $w(\xi) = \nu(\xi)^\top x(\xi)$，对所有$\xi \in \partial\Omega$，若 Ω 和 x 均为光滑的。此外，$\gamma_N : \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega) \to \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ 是有界且满射的 [34,引理 202]。

对于相对开集 $\Gamma \subset \partial\Omega$，我们考虑

$$\mathrm{H}^1_\Gamma(\Omega) := \left\{ f \in \mathrm{H}^1(\Omega) \,\middle|\, (\gamma f)|_\Gamma = 0 \text{ in } \mathrm{L}^2(\Gamma) \right\}.$$

此外，对于带边界的一维利普希茨流形 $\Gamma \subset \partial\Omega (\subseteq \mathbb{R}^2)$，$\mathrm{H}_0^{1/2}(\Gamma)$ 是 $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ 中可在 $\mathrm{H}^{1/2}$ 中延拓为 Γ 外部零值的元素所构成的空间。由迹定理可知，迹算子可自然限制为一个有界满射算子$\gamma_\Gamma \colon \mathrm{H}^1_{\partial\Omega\setminus\Gamma}(\Omega) \to \mathrm{H}_0^{1/2}(\Gamma)$，即 $x \in \mathrm{H}^1_{\partial\Omega\setminus\Gamma}(\Omega)$ 映射到其迹 $x|_\Gamma$。定义 $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) := \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)^*$，则 $x \in \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$ 在相对开集 $\Gamma \subset \partial\Omega$ 上的法向迹由 $w = \gamma_{N,\,\Gamma} x \in \mathrm{H}_\partial^{-1/2}{}_{\Omega\setminus\Gamma}(\Gamma)$ 良好定义，其中

$$\forall z \in \mathrm{H}^1_{\partial\Omega\setminus\Gamma}(\Omega) : \ \langle w, \gamma z \rangle_{\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma),\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)} = \langle \operatorname{div} x, z \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \langle x, \operatorname{grad} z \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C}^2)}.$$

我们进一步设

$$\mathrm{H}_\Gamma(\mathrm{div}, \Omega) = \left\{ z \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega) \,\middle|\, \gamma_{N,\Gamma} z = 0 \right\}.$$

系统节点。接下来，我们引入系统节点 S_1, S_2，它们分别对应于将 Ω 分割为 Ω_1 和 Ω_2 后产生的各个子系统。在下文中，我们在空间 $X_i = \mathrm{L}^2(\Omega_i) \times \mathrm{L}^2(\Omega_i;\mathbb{C}^2)$ 上赋予能量范数

$$\left\| \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix} \right\|_2^2 := \int_{\Omega_i} \rho^{-1}(\xi) p_i(\xi)^2 + T(\xi) q_i(\xi)^\top q_i(\xi) \,\mathrm{d}\xi, \quad i = 1, 2.$$

注意，根据 ρ, T 为正值且满足 $T\rho, \rho^{-1}, T, T^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ 的假设，能量范数与 $\mathrm{L}^2(\Omega_i) \times \mathrm{L}^2(\Omega_i;\mathbb{C}^2)$ 上的标准范数等价。

那么，(16) 和 (17) 的弱形式对于

$$x_i(t) := \left[\begin{smallmatrix} \rho z_t \\ T^{-1} \operatorname{grad} z \end{smallmatrix} \right]\Big|_{\Omega_i} \in X_i := \left[\begin{smallmatrix} \mathrm{L}^2(\Omega_i) \\ \mathrm{L}^2(\Omega_i;\mathbb{C}^2) \end{smallmatrix} \right], \quad i = 1, 2,$$

可表示为

$$\left[\begin{smallmatrix} \dot{x}_1 \\ \mathfrak{y} \\ y_1 \end{smallmatrix} \right] = S_1 \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ \mathfrak{u} \\ u_1 \end{smallmatrix} \right], \quad \left[\begin{smallmatrix} \dot{x}_2 \\ y_2 \end{smallmatrix} \right] = S_2 \left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ u_2 \end{smallmatrix} \right].$$

由此，对于 $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 = \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_0)$、$U_1 = \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_{\mathrm{int}})$，第一个系统节点为

$$S_1 : \ \operatorname{dom} S_1 \to \left[\begin{smallmatrix} X_1 \\ \left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{U} \\ U_1 \end{smallmatrix} \right] \end{smallmatrix} \right]$$

with

$$\operatorname{dom} S_1 = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} p_1 \\ q_1 \end{smallmatrix} \right] \\ \left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{u} \\ u_1 \end{smallmatrix} \right] \end{smallmatrix} \right] \in \left[\begin{smallmatrix} X_1 \\ \left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{U} \\ U_1 \end{smallmatrix} \right] \end{smallmatrix} \right] \,\middle|\, \begin{array}{l} \rho^{-1} p_1 \in \mathrm{H}^1_{\Gamma_{10}}(\Omega_1) \ \wedge \ T q_1 \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega_1) \\ \wedge\, \mathfrak{u} = \gamma_{N,\Gamma_1} \rho^{-1} q_1 \ \wedge \ u_1 = \gamma_{N,\Gamma_{\mathrm{int}}} \rho^{-1} q_1 \end{array} \right\}$$

and

$$S_1 \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ \mathfrak{u} \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{div}(Tq_1) - d\rho^{-1}p_1 \\ \operatorname{grad}(\rho^{-1}p_1) \\ \gamma_{\Gamma_1}(\rho^{-1}p_1) \\ \gamma_{\Gamma_{\mathrm{int}}}(\rho^{-1}p_1) \end{bmatrix}.$$

同理， $U_2 = \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_{\mathrm{int}})$，第二个系统节点为

$$S_2 \colon \operatorname{dom} S_2 \to \begin{bmatrix} X_2 \\ \mathfrak{U} \\ U_2 \end{bmatrix}$$

with

$$\operatorname{dom} S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \\ \mathfrak{u} \\ u_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} X_2 \\ \mathfrak{U} \\ U_2 \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} \rho^{-1}p_2 \in \mathrm{H}^1_{\Gamma_{20}}(\Omega_2) \wedge Tq_2 \in \mathrm{H}(\operatorname{div}, \Omega_1) \\ \wedge\, u_2 = \gamma_{\Gamma_{\mathrm{int}}}\rho^{-1}p_2 \end{array} \right\}$$

and

$$S_2 \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \\ \mathfrak{u} \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{div}(Tq_2) - d\rho^{-1}p_2 \\ \operatorname{grad}(\rho^{-1}p_2) \\ 0 \\ \gamma_{N,\Gamma_{\mathrm{int}}}(Tq_2) \end{bmatrix}.$$

Remark 6.2 准确地说，输出空间并不等于相应的输入空间，而是与其对偶（正如迹空间的定义所示）。因此，我们可以通过同构对偶映射将它们彼此等同，并继续使用我们的结果。

耗散性由迹算子的定义可知，而闭性则源自主算子散度算子和梯度算子的闭性，以及相关迹算子的有界性。此外，还可以证明， S_1 和 S_2的主算子 A_1、 A_2 分别满足 $\operatorname{dom} A_1 = \operatorname{dom} A_1^*$、$\operatorname{dom} A_2 = \operatorname{dom} A_2^*$ 以及

$$A_i^* \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{div}(Tq_i) - d\rho^{-1}p_i \\ -\operatorname{grad}(\rho^{-1}p_i) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

这表明它们都是极大耗散的，因此会在 X_i上生成一个强连续半群。因此，在给定初始数据且存在解的情况下，我们可以应用所介绍的分裂算法，并利用已证明的收敛性质。在这一特殊情形下，该方法的另一优势是，矩形分解使得我们可以分别使用诸如谱方法来求解矩形区域上的两个波动方程，参见例如[7], [25]。

Remark 6.3 当然，也可以考虑两个以上的矩形，并按照上述方式耦合相应的波动方程。此外，所展示的耦合方式只是可能的选择之一。如果不再将u_i 和 y_i 解释为输入和输出，而是把该系统视为行为系统，那么选择 $u_1 = u_2$ 和 $y_1 = y_2$ 便顺理成章。

参考文献

[1] Adams, R.A., Fournier, J.J.: 《索伯列夫空间》。纯数学与应用数学，第 140 卷。学术出版社，阿姆斯特丹、圣迭戈、牛津、伦敦（2003）。第 2 版[2] Barbu, V.: 《巴拿赫空间中单调型非线性微分方程》。施普林格数学专著。施普林格，纽约（2010）。https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5542-5[3] Bartel, A., G¨unther, M., Jacob, B., Reis, T.: 《线性端口哈密顿系统的基于算子分裂的动态迭代》（2022）。https:// arxiv.org/abs/2208.03574v1[4] B´atkai, A., Csom´os, P., Farkas, B.: 《耗散延迟方程的算子分裂》。半群论坛 95(2), 345–365（2016）。https://doi.org/10. 1007/s00233-016-9812-y[5]Bellen, A., Zennaro, M.: 《时滞微分方程数值方法》。数值数学与科学计算。牛津大学出版社，牛津（2013）[6]Bellen, A., Maset, S., Zennaro, M., Guglielmi, N.: 《滞后泛函微分方程数值解的最新趋势》。Acta Numer. 18, 1–110（2009）。https://doi.org/10.1017/S0962492906390010[7] Cohen, G.C.: 《瞬态波动方程的高阶数值方法》。科学计算，第 348 页。施普林格，???（2002）。https:// doi.org/10.1007/978-3-662-04823-8。R. Glowinski 撰写前言。https://doi.org/10.1007/978-3-662-04823-8[8] Csom´os, P., Ehrhardt, M., Farkas, B.: 《带动态边界条件的抽象柯西问题的算子分裂》。算子与矩阵 15(3), 903–935（2021）[9] Csom´os, P., Farkas, B., Kov´acs, B.: 《抽象半线性边界耦合系统分裂积分器的误差估计》。IMA 数值分析杂志（2023）。https://doi.org/10.1093/imanum/drac079

[10] Curtain, R., Zwart, H.:《无限维系统理论导论：状态空间方法》。应用数学教材，第 71 卷。施普林格，纽约（2020）。https://doi.org/10.1007/978-1-0716-0590-5

[11] Dell'Oro, F., Paunonen, L., Seifert, D.: 具有 Coleman–Gurtin 热定律的波热系统的最优衰减。《数学分析与应用杂志》 **518**(2), 126706 (2023)。https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126706

[12] Engel, K.-J., Nagel, R.：《线性演化方程的一参数半群》第194卷。施普林格，纽约（2000）[13] Faou, E., Ostermann, A., Schratz, K.：非齐次抛物方程的指数分裂方法分析。《IMA 数值分析杂志》35，161–178（2015）[14] Geiser, J.：《微分方程的迭代分裂方法》。Chapman & Hall/CRC 数值分析与科学计算。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州（2011）。https://doi.org/10.1201/b10947[15] Grisvard, P.：《非光滑区域中的椭圆问题》。数学专著与研究，第24卷。Pitman 高级出版计划，波士顿、伦敦、墨尔本（1985）[16] G¨unther, M., Bartel, A., Jacob, B., Reis, T.：耦合微分代数方程电路仿真中的动态迭代格式与端口哈密顿表述。《国际电路理论与应用杂志》49，430–452（2021）。https://doi.org/10.1002/cta.2870[17] Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G.：《几何数值积分：常微分方程的保结构算法》。施普林格计算数学丛书，第31卷。施普林格，海德堡（2010）[18] Hansen, E., Ostermann, A.：无界算子的指数分裂。《数学计算》78(267)，1485–1496（2009）[19]Hansen, E., Henningsson, E.：加性区域分解算子分裂——耗散框架下的收敛性分析。《IMA 数值分析杂志》37(3)，1496–1519（2017）。https://doi.org/10.1093/imanum/drw043[20]Hansen, E., Ostermann, A., Schratz, K.：刚性线性问题的道格拉斯–拉奇福德分裂方法的误差结构。《计算与应用数学杂志》303，140–145（2016）。https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.02.037[21] Hochbruck, M., Ostermann, A.：指数积分器。《数值学报》19，209–286（2010）。https://doi.org/10.1017/S0962492910000048[22]Hundsdorfer, W.H., Verwer, J.G.：初边值问题的皮斯曼–拉奇福德交替方向隐式方法的稳定性与收敛性。《数学计算》53(187)，81–101（1989）。https://doi.org/10.2307/2008350[23]Hundsdorfer, W., Verwer, J.：《时变对流–扩散–反应方程的数值解》。施普林格计算数学丛书

《数学》，第 33 卷。施普林格，柏林（2003）。 https://doi.org/10.1007/ 978-3-662-09017-6[24] Jahnke, T., Lubich, C.：指数算子分裂的误差界。BIT 40(4)，735–744（2000）。 https://doi.org/10.1023/A:1022396519656[25]Kopriva, D.A.：《偏微分方程谱方法的实现》。科学计算，第 394 页。施普林格，???（2009）。 https://doi.org/10.1007/978-90-481-2261-5。面向科学家和工程师的算法。 https://doi.org/10.1007/978-90-481-2261-5[26] Kurula, M., Zwart, H.：n 维空间区域上的线性波系统。《国际控制杂志》88(5)，1063–1077（2015）。 https://doi.org/10. 1080/00207179.2014.993337[27] Lions, P.L., Mercier, B.：两个非线性算子之和的分裂算法。《SIAM 数值分析杂志》16(6)，964–979（1979）。访问日期：2022-05-12[28] Marchuk, G.I.：分裂与交替方向法。载于：《数值分析手册》，第 I 卷。《数值分析手册》，I，第 197–462 页。爱思唯尔，荷兰（1990）[29] McLachlan, R.I., Quispel, G.R.W.：分裂方法。Acta Numer. 11，341–434（2002）。 https://doi.org/10.1017/S0962492902000053[30] Peaceman, D.W., Rachford, H.H. Jr.：抛物型和椭圆型微分方程的数值解。《工业与应用数学学会杂志》3，28–41（1955）[31] Staffans, O..：无源与守恒连续时间阻抗和散射系统。I. 适定系统。《数学控制与信号系统》15(4)，291–315（2002）[32] Staffans, O.：《适定线性系统》。《数学及其应用百科全书》，第 103 卷。剑桥大学出版社，剑桥（2005）[33] Strang, G.：差分格式的构造与比较。《SIAM 数值分析杂志》5(3)，506–517（1968）。 https://doi.org/10.1137/ 0705041[34] Tartar, L.：《索伯列夫空间与插值空间导论》。意大利数学联合会讲义。施普林格，柏林、海德堡（2007）

[35] Tucsnak, M., Weiss, G.: 《算子半群的观测与控制》。Birkh¨auser 高级教材《巴塞尔 Lehrb¨ücher》。Birkh¨auser，巴塞尔（2009）