arXiv:2302.01197v1 [math.AP] 2 Feb 2023

含漂移项和奇异势的单维退化抛物方程的边界可控性

LEANDRO GALO-MENDOZA 和 MARCOS L ´OPEZ-GARC´IA

Abstract. 我们证明了一个含漂移项和奇异势的单维退化抛物方程的零可控性。我们研究奇异势出现在左端点，且加权狄利克雷边界控制施加于该点的情形。我们获得了一个适当算子的谱分解，该算子定义在加权 Sobolev 空间中，其谱分解涉及贝塞尔函数及其零点；随后，我们利用 Fattorini 和 Russell 的矩方法，得到可控性代价的上界估计。我们还通过指数型解析函数的表示定理，得到可控性代价的下界估计。

1. 引言与主要结果

令 $T>0$，并设 $Q:=(0,1)\times(0,T)$。对于 α，$\beta\in\mathbb{R}$ 满足 $0\le\alpha<2$，$\alpha+\beta<1$，考虑如下系统

$$\begin{cases} u_t-(x^\alpha u_x)_x-\beta x^{\alpha-1}u_x-\dfrac{\mu}{x^{2-\alpha}}u=0 & \text{in } Q,\\ \left(x^{-\gamma}u\right)(0,t)=f(t), u(1,t)=0 & \text{on } (0,T),\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{in } (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

前提是 $\mu\in\mathbb{R}$ 满足

$$-\infty<\mu<\mu(\alpha+\beta), \tag{2}$$

其中

$$\mu(\delta):=\frac{(1-\delta)^2}{4},\quad \delta\in\mathbb{R},\quad \text{and}\quad \gamma=\gamma(\alpha,\beta,\mu):=\sqrt{\mu(\alpha+\beta)}-\sqrt{\mu(\alpha+\beta)-\mu}. \tag{3}$$

本研究的目标有两个。首先，我们为系统 (1) 提出弱解的概念，并在适当的插值空间中建立该问题的适定性。注意，为了补偿左端点处的奇异性，我们在该端点考虑加权狄利克雷边界条件。其次，我们研究系统 (1) 的零可控性。这里我们应用 Fattorini 和 Russell 的矩方法[14] 证明零可控性，并给出可控性代价的上界估计。最后，我们利用指数型解析函数的表示定理，得到可控性代价的下界估计。

本文推广了若干关于一维退化/奇异抛物方程零可控性的结果，其中控制作用于发生退化/奇异的端点。在这一背景下，首个结果由 [10] 在弱退化 $0\le\alpha<1$、无奇异性且无漂移的情形下得到，即 $\beta=\mu=0$。在该工作中，零可控性是通过 L^2 控制实现的。

最后一项结果在 [4] 中得到了补充，文中给出了控制代价的尖锐估计。在[2] 中，作者分析了具有奇异逆平方势的热方程的可控性，即方程满足$\alpha=\beta=0$，且 $\mu<\mu(0)=1/4$；在 [3] 中，作者还研究了无漂移的弱退化情形（$\beta=0$），并满足（2）。所有这些结果均通过 H^1 控制实现了零可控性。在 [2, 3] 中，作者论证了系统（1）采用加权狄利克雷边界条件的合理性。遗憾的是，[2, 定理 2.1] 和 [3, 定理 2.2] 的证明并不完整，详情见注15。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35K65, 30E05, 93B05, 93B60.*Key words and phrases.* 退化抛物方程，漂移，奇异势，边界可控性，矩方法。

对于无奇异性的强退化情形（$1 < \alpha < 2$）（$\mu = 0$），[11] 中的作者分析了具有退化一阶输运项的退化抛物方程的零可控性。这项工作促使我们在退化/奇异抛物方程中加入一阶项和适当的漂移。在这种情况下，一阶项使我们能够在不改变（加权）狄利克雷边界条件的前提下，同时考虑弱退化和强退化两种情形。在 [7, 8, 9] 中，作者研究了含一阶项的一维退化抛物方程的零可控性，但他们采用的是内部控制。

现在假设系统(1)对希尔伯特空间 H 中的初始条件存在唯一解，相关描述将在下一节给出。若对于任意 $u_0 \in H$，都存在 $f \in L^2(0,T)$，使得相应解满足 $u(\cdot,T) \equiv 0$，则称系统(1)在时刻 $T > 0$ 于 H 中可实现零控制，且控制取自 $L^2(0,T)$。

既然我们知道系统(1)可实现零控制，接下来将研究控制代价的行为。因此，考虑容许控制集合

$$U(T,\alpha,\beta,\mu,u_0) = \{f \in L^2(0,T) : u \text{ solution of system (1) that satisfies } u(\cdot,T) \equiv 0\}.$$

于是，控制代价定义为

$$\mathcal{K}(T,\alpha,\beta,\mu) := \sup_{\|u_0\|_H \le 1} \inf \left\{ \|f\|_{L^2(0,T)} : f \in U(T,\alpha,\beta,\mu,u_0) \right\}.$$

本文的主要结果如下。

定理1. 设 $T > 0$ and $\alpha, \beta, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ 满足 $0 \le \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 1$, μ，且 γ 分别满足(2)和(3)。则以下陈述成立。

(1) 控制的存在性 对任意 $f \in L^2(0,T)$ 和 $u_0 \in L^2((0,1); x^\beta dx)$，存在一个控制 $f \in L^2(0, T)$ 使得方程 (1) 的解 u 满足 $u(\cdot,T) \equiv 0$。(2) 控制代价的上界 存在一个常数 $c > 0$，使得对于每个 $\delta \in (0,1)$，我们有

$$\mathcal{K}(T,\alpha,\beta,\mu) \le \frac{cM(T,\alpha,\nu,\delta)T^{1/2}\kappa_\alpha^{-1/2}}{\sqrt{\mu(\alpha+\beta)} + \sqrt{\mu(\alpha+\beta)-\mu)}} \exp\left(-\frac{T}{2}\kappa_\alpha^2 j_{\nu,1}^2\right),$$

其中

$$\kappa_\alpha := \frac{2-\alpha}{2}, \quad \nu = \nu(\alpha,\beta,\mu) := \sqrt{\mu(\alpha+\beta)-\mu}/\kappa_\alpha, \tag{4}$$

$j_{\nu,1}$ 是贝塞尔函数 J_ν 的第一个正零点（定义见附录），并且

$$M(T,\alpha,\nu,\delta) = \left(1 + \frac{1}{(1-\delta)\kappa_\alpha^2 T}\right)\left[\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}\kappa_\alpha}\right) + \frac{1}{\delta^3}\exp\left(\frac{3}{(1-\delta)\kappa_\alpha^2 T}\right)\right]\exp\left(-\frac{(1-\delta)^{3/2}T^{3/2}}{8(1+T)^{1/2}}\kappa_\alpha^3 j_{\nu,1}^2\right).$$

(3) 控制代价的下界 存在一个常数 $c > 0$，使得

$$\frac{c2^\nu\Gamma(\nu+1)\left|J_\nu'(j_{\nu,1})\right|\exp\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\log 2}{\pi}\right)j_{\nu,2}\right)}{(2T\kappa_\alpha)^{1/2}\left(\sqrt{\mu(\alpha+\beta)} + \sqrt{\mu(\alpha+\beta)-\mu}\right)(j_{\nu,1})^\nu}\exp\left(-\left(j_{\nu,1}^2 + \frac{j_{\nu,2}^2}{2}\right)\kappa_\alpha^2 T\right) \le \mathcal{K}(T,\alpha,\beta,\mu),$$

其中 $j_{\nu,2}$ 是贝塞尔函数 J_ν 的第二个正零点。

2. Functional setting and well-posedness

为了得到我们的结果，我们将考虑适当的加权空间。首先，我们引入加权勒贝格空间 $L^2_\beta(0,1) := L^2((0,1); x^\beta dx)$，$\beta \in \mathbb{R}$，其内积为

$$\langle f, g\rangle_\beta := \left(\int_0^1 f(x)g(x)x^\beta \mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

其相应范数记为 $\|\cdot\|_\beta$。

对于 α, $\beta \in \mathbb{R}$，我们还引入加权 Sobolev 空间

$$H^1_{\alpha,\beta}(0,1) = \left\{ u \in L^2_\beta(0,1) \cap H^1_{\mathrm{loc}}(0,1) : x^{\alpha/2} u_x \in L^2_\beta(0,1) \right\}$$

配以内积

$$\langle u, v \rangle_{\alpha,\beta} := \int_0^1 uv\, x^\beta \mathrm{d}x + \int_0^1 x^{\alpha+\beta} u_x v_x \mathrm{d}x,$$

其相应范数记为 $\|\cdot\|_{\alpha,\ \beta}$。

在参数 α, β 满足适当条件时，我们可以看到 $H^1_{\alpha,\ \beta}(0,1)$ 包含于 $(0,1)$ 上的局部绝对连续函数空间中，因此可以讨论 $H^1_{\alpha,\ \beta}(0,1)$ 中函数在 $x = 0, 1$ 处的迹。

注 2. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 满足 $\alpha \geq 0, \alpha + \beta < 1$。我们有 $H^1_{\alpha,\ \beta}(0,1) \subset W^{1,\ 1}(0,1)$。这由以下不等式可得

$$\int_0^1 |u| \mathrm{d}x \leq \frac{1}{(1-\beta)^{1/2}} \left(\int_0^1 |u|^2 x^\beta \mathrm{d}x \right)^{1/2}, \quad \textit{and}$$

$$\int_0^1 |u_x| \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{(1-\alpha-\beta)^{1/2}} \left(\int_0^1 x^{\alpha+\beta} \, |u_x|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

对所有 $u \in H^1_{\alpha,\ \beta}(0,1)$ 均成立。这意味着极限 $u(0) := \lim_{x\to 0^+} u(x)$ 和 $u(1) := \lim_{x\to 1^-} u(x)$ 存在。特别地，$H^1_{\alpha,\ \beta}(0,1) \subset C([0,1])$。

定义 3. 对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，其中 $\alpha \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$，我们考虑空间

$$H^1_{\alpha,\beta,0} = H^1_{\alpha,\beta,0}(0,1) := \left\{ u \in H^1_{\alpha,\beta}(0,1) : u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

对于 $u \in H^1_{\alpha,\ \beta,\ 0}$ 注意到

$$|u(x)| \leq \int_0^x |u_x(s)| \mathrm{d}s \leq \frac{x^{(1-\alpha-\beta)/2}}{(1-\alpha-\beta)^{1/2}} \left(\int_0^x s^{\alpha+\beta} \, |u_x(s)|^2 \, \mathrm{d}s \right)^{1/2}, \tag{5}$$

因此

$$\lim_{x\to 0^+} x^\delta |u(x)| = 0 \quad \text{for all } \delta \geq (\alpha+\beta-1)/2. \tag{6}$$

在一维退化/奇异算子的情形下，一个值得考虑的实用工具是所谓的广义 Hardy 不等式,

$$\mu(\delta) \int_0^1 \frac{u^2}{x^{2-\delta}} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^\delta u_x^2 \mathrm{d}x \tag{7}$$

对所有 $u \in C_c^\infty(0,1)$（在 $(0,1)$ 上紧支撑的无穷光滑函数空间），其中 $\delta \in \mathbb{R}$.

接下来，我们在加权 Sobolev 空间 $H^1_{\alpha,\beta,0}$ 中推广 Hardy不等式。

命题4. 对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，若 $\alpha \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$，则不等式 (7) 对任意 $u \in H^1_{\alpha,\beta,0}$ 都成立，其中 $\delta = \alpha + \beta$。证明. 令 $u \in H^1_{\alpha,\beta,0}$。由注 2 可知，只要 $\varepsilon > 0$ 足够小，就有 $u^2 \in W^{1,1}(\varepsilon, 1)$。设 $\delta = \alpha + \beta$，则

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 \left(x^{\delta/2} u_x - \frac{1-\delta}{2} \frac{u}{x^{(2-\delta)/2}} \right)^2 \mathrm{d}x &= \int_\varepsilon^1 x^\delta |u_x|^2 \mathrm{d}x + \mu(\delta) \int_\varepsilon^1 \frac{u^2}{x^{2-\delta}} \mathrm{d}x - \frac{1-\delta}{2} \int_\varepsilon^1 \frac{(u^2)_x}{x^{1-\delta}} \mathrm{d}x \\
&= \int_\varepsilon^1 x^\delta |u_x|^2 \mathrm{d}x - \mu(\delta) \int_\varepsilon^1 \frac{u^2}{x^{2-\delta}} \mathrm{d}x - \frac{1-\delta}{2} \left(\lim_{x\to 1^-} \frac{|u(x)|^2}{x^{1-\delta}} - \frac{|u(\varepsilon)|^2}{\varepsilon^{1-\delta}} \right),
\end{aligned}$$

并取 $\varepsilon \to 0^+$ 的极限，再利用等式 (6)，即可得到该结果。 □

现在假设 $0 \leq \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 1$。对于任意 $u \in H^1_{\alpha,\beta,0}$，并按照 (5) 中的方法进行推导，可得加权 Poincar´e 不等式

$$\int_0^1 |u|^2 x^\beta \mathrm{d}x \leq \frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha-\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+\beta} |u_x|^2 \, \mathrm{d}x, \tag{8}$$

因此

$$\|u\|_{\alpha,\beta,0} := \left(\int_0^1 x^{\alpha+\beta} |u_x|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

是 $\|u\|_{\alpha,\beta}$ 在 $H^1_{\alpha,\beta,0}$ 中的一个等价范数。

对于 $\mu < \mu(\alpha+\beta)$，命题4表明

$$\|u\|_* = \left(\int_0^1 x^{\alpha+\beta} \left[|u_x|^2 - \frac{\mu}{x^2} u^2 \right] \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

是 $\|u\|_{\alpha,\beta,0}$ 在 $H^1_{\alpha,\beta,0}$ 中的一个等价范数。事实上，我们有

$$\begin{aligned} \|u\|_{\alpha,\beta,0} &\leq \|u\|_* \leq \left(1 - \frac{\mu}{\mu(\alpha+\beta)}\right)^{1/2} \|u\|_{\alpha,\beta,0}, \quad \mu < 0, \\ \left(1 - \frac{\mu}{\mu(\alpha+\beta)}\right)^{1/2} \|u\|_{\alpha,\beta,0} &\leq \|u\|_* \leq \|u\|_{\alpha,\beta,0}, \quad 0 \leq \mu < \mu(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

由于 $C_c^\infty(0,1) \subset H^1_{\alpha,\beta,0} \subset L^2_\beta(0,1)$，且 (8) 表明包含映射 $(H^1_{\alpha,\beta,0}, \|\cdot\|_*) \hookrightarrow L^2_\beta(0,1)$ 是连续的，因此下述定义是合理的。

定义 5. 对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 且满足 $0 \leq \alpha < 2, \alpha+\beta < 1$ 的情形，我们考虑吉尔芬德三元组 $\left((H^1_{\alpha,\ \beta,\ 0}, \|\cdot\|_*)\ L^2_\beta(0,1) H^{-1}_{\alpha}{}_{,\ \beta,\ 0} \right)$，即 $H^{-1}_{\alpha}{}_{,\ \beta,\ 0}$ 表示相对于枢轴空间 $L^2_\beta(0,1)$，$(H^1_{\alpha,\ \beta,\ 0}, \|\cdot\|_*)$ 的对偶空间：

$$(H^1_{\alpha,\beta,0}, \|\cdot\|_*) \hookrightarrow L^2_\beta(0,1) = \left(L^2_\beta(0,1)\right)' \hookrightarrow H^{-1}_{\alpha,\beta,0} := \left(H^1_{\alpha,\beta,0}, \|\cdot\|_*\right)'.$$

内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ 诱导出一个同构 $\mathcal{A} : H^1_{\alpha,\ \beta,\ 0} \to H^{-1}_{\alpha}{}_{,\ \beta,\ 0}$，其定义如下：

$$\langle u, v \rangle_* = \langle \mathcal{A}u, v \rangle_{H^{-1}_{\alpha,\beta,0}, H^1_{\alpha,\beta,0}}, \quad u, v \in H^1_{\alpha,\beta,0}.$$

设 $D(\mathcal{A}) := \mathcal{A}^{-1}(L^2_\beta(0,1)) = \{u \in H^1_{\alpha,\beta,0} \colon \mathcal{A}u \in L^2_\beta(0,1)\} = \{u \in H^1_{\alpha,\beta,0} \colon \exists f \in L^2_\beta(0,1),$ 使得 $\langle u, v \rangle_* = \langle f, v \rangle_\beta \forall v \in H^1_{\alpha,\ \beta,\ 0}\}$。

命题 6. 对于 $\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$，其中 $0 \leq \alpha < 2, \alpha + \beta < 1$ 且 $\mu < \mu(\alpha+\beta)$，有

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ u \in H^1_{\alpha,\beta,0} \cap H^2_{loc}(0,1) : (x^\alpha u_x)_x + \beta x^{\alpha-1} u_x + \frac{\mu}{x^{2-\alpha}} u \in L^2_\beta(0,1) \right\}.$$

证明. 令 H 为右端的集合，我们将证明 $D(\mathcal{A}) = H$。

取 $u \in D(\mathcal{A})$，则存在 $f \in L^2_\beta(0,1)$ 使得

$$\int_0^1 \left(x^{\alpha+\beta} u_x v_x - \frac{\mu}{x^{2-\alpha-\beta}} uv \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 f v x^\beta \mathrm{d}x \quad \text{for all } v \in H^1_{\alpha,\beta,0}.$$

特别地，

$$\int_0^1 x^{\alpha+\beta} u_x v_x \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(f + \frac{\mu}{x^{2-\alpha}} u \right) v x^\beta \mathrm{d}x \quad \text{for all } v \in C_c^\infty(0,1),$$

因此

$$-\left(x^{\alpha+\beta} u_x\right)_x = \left(f + \frac{\mu}{x^{2-\alpha}} u \right) x^\beta \text{ in } C_c^\infty(0,1)',$$

这意味着

$$(x^\alpha u_x)_x + \beta x^{\alpha-1}u_x + \frac{\mu}{x^{2-\alpha}}u = -f \text{ in } C_c^\infty(0,1)',$$

因此 $u \in H$。

现在令 $u \in H$。对于所有 $v \in H^1_{\alpha,\beta,0}$，我们断言 $x^{\alpha+\beta}u_x v \in W^{1,1}(0,1)$:

$$\int_0^1 x^{\alpha+\beta}|u_x v|\mathrm{d}x \le \left(\int_0^1 x^{\alpha+\beta}|u_x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^1 x^{\alpha+\beta}|v|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \le \|u\|_{\alpha,\beta,0}\|v\|_\beta,$$

$$\left(x^{\alpha+\beta}u_x v\right)_x = x^{\alpha+\beta}u_x v_x + x^\beta\left((x^\alpha u_x)_x + \beta x^{\alpha-1}u_x + \frac{\mu}{x^{2-\alpha}}u\right)v - \frac{\mu}{x^{2-\alpha-\beta}}uv \in L^1(0,1), \tag{9}$$

因此存在

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+\beta}u_x(x)v(x).$$

如果 $L \neq 0$，那么 (5) 表明

$$x^{\alpha+\beta}\,|u_x(x)| \ge \frac{|L|}{2|v(x)|} \ge C_{\alpha,\beta}x^{(\alpha+\beta-1)/2} \quad \text{as } x\to 0^+ \Longrightarrow x^{\alpha+\beta}\,|u_x(x)|^2 \ge C_{\alpha,\beta}x^{-1} \quad \text{as } x\to 0^+,$$

这与 $u \in H^1_{\alpha,\beta,0}$ 矛盾。

另一方面，由于 $u \in H$，因此 $u \in H^2(1/2,1)$，这意味着对于所有 $v \in H^1_{\alpha,\,\beta,\,0}$，有 $\lim_{x\to 1^-} x^{\alpha+\beta}u_x(x)v(x) = 0$。

因此，由 (9) 可得

$$\int_0^1 \left(x^{\alpha+\beta}u_x v_x - \frac{\mu}{x^{2-\alpha-\beta}}uv\right)\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^\beta\left((x^\alpha u_x)_x + \beta x^{\alpha-1}u_x + \frac{\mu}{x^{2-\alpha}}u\right)v\mathrm{d}x \tag{10}$$

对于所有 $u \in H, v \in H^1_{\alpha,\,\beta,\,0}$，因此 $u \in D(\mathcal{A})$。 □

对于满足 $0 \le \alpha < 2,\ \alpha+\beta < 1,\ \mu < \mu(\alpha+\beta)$ 的 $\alpha,\beta,\mu \in \mathbb{R}$，我们考虑无界算子 $\mathcal{A}$: $D(\mathcal{A}) \subset L^2_\beta(0,1) \to L^2_\beta(0,1)$，其定义为

$$\mathcal{A}u := -(x^\alpha u_x)_x - \beta x^{\alpha-1}u_x - \frac{\mu}{x^{2-\alpha}}u.$$

由 [6, 第 370] 页的命题9可知，$\mathcal{A}$ 是一个闭算子，且 $D(\mathcal{A})$ 在 $L^2_\beta(0,1)$ 中稠密。我们还知道 $\mathcal{A}: (D(\mathcal{A}) \|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}) \to L^2_\beta(0,1)$ 是一个同构，其中

$$\|u\|_{D(\mathcal{A})} = \|u\|_\beta + \|\mathcal{A}u\|_\beta, \quad u \in D(\mathcal{A}).$$

接下来，对于任意 $\nu > 0$，考虑算子 $\mathcal{A}_0$: $D(\mathcal{A}_0) \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1)$，其定义如下:

$$\mathcal{A}_0 u = -u_{xx} - \frac{1/4-\nu^2}{x^2}u, \quad u \in D(\mathcal{A}_0),$$

其中

$$D(\mathcal{A}_0) = \left\{u \in H^1_0(0,1)\cap H^2_{\mathrm{loc}}(0,1) : u_{xx} + \frac{1/4-\nu^2}{x^2}u \in L^2(0,1)\right\}.$$

据我们所知，以下 结果是新的。因此，我们得到 $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_0$ 具有相同的谱性质 .

命题 7. 设 $\alpha,\beta,\mu,\nu \in \mathbb{R}$ 满足 $0 \le \alpha < 2,\ \alpha+\beta < 1,\ \mu < \mu(\alpha+\beta)$，且 ν 在 (4) 中给出。那么算子$\mathcal{A}$ 与 $\kappa_\alpha^2\mathcal{A}_0$酉等价。

证明。考虑酉算子 $\mathcal{U}$: $L^2(0,1) \to L^2_\beta(0,1)$，其定义如下:

$$\mathcal{U}u(x) := \kappa_\alpha^{1/2}x^{-\alpha/4-\beta/2}u(x^{\kappa_\alpha}), \quad u \in L^2(0,1). \tag{11}$$

我们断言，$u \in D(\mathcal{A}_0)$ 当且仅当 $\mathcal{U}u \in D(\mathcal{A})$，且 $\kappa_\alpha^2\mathcal{A}_0 = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{U}$。

设 $w := \mathcal{U}u$ ，其中 u 是一个光滑函数，因此

$$u(y) = \frac{1}{\kappa_\alpha^{1/2}} x^{\alpha/4+\beta/2} w(x) \quad \text{with } y = x^{\kappa_\alpha}.$$

利用

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\kappa_\alpha} x^{1-\kappa_\alpha} = \frac{1}{\kappa_\alpha} x^{\alpha/2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\alpha}{2\kappa_\alpha^2} x^{\alpha-1},$$

经过简单但繁琐的计算可得

$$u_y(y) = \frac{1}{\kappa_\alpha^{1/2}} x^{\alpha/4+\beta/2} \left(\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \frac{w(x)}{x} + w_x(x) \right) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}, \quad \text{and} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} u_{yy}(y) &= \frac{x^{\alpha/4+\beta/2}}{\kappa_\alpha^{1/2}} \left[\left(\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \frac{w}{x} + w_x \right) \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \right)^2 \left(w_{xx} + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \frac{w_x}{x} + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} - 1 \right) \frac{w}{x^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\kappa_\alpha^{5/2}} x^{\alpha/4+\beta/2} \left[x^\alpha w_{xx} + (\alpha+\beta) x^{\alpha-1} w_x + \left(\frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right) + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} - 1 \right) \right) x^{\alpha-2} w \right] \\ &= \frac{1}{\kappa_\alpha^{5/2}} x^{\alpha/4+\beta/2} \left[x^\alpha w_{xx} + (\alpha+\beta) x^{\alpha-1} w_x + \left(\mu(\alpha+\beta) - \kappa_\alpha^2/4 \right) x^{\alpha-2} w \right], \end{aligned} \tag{13}$$

因为 $4\mu(\alpha+\beta) = ((1-\alpha/2) - (\alpha/2+\beta))^2$。

由于 $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(0,1)$ 当且仅当 $u, u_x, u_{xx} \in L^2_{\mathrm{loc}}(0,1)$，最后的计算意味着 $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(0,1)$ 当且仅当 $w = \mathcal{U}u \in H^2_{\mathrm{loc}}(0,1)$，此外 $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$ 当且仅当 $w = \mathcal{U}u \in H^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$。

假设 $u \in H^1_0(0,1)$。则（6）意味着 $x^\delta u(x) \to 0$ as $x \to 0^+$，只要 $\delta \geq -1/2$，因此

$$\mathcal{U}u(0) = \lim_{x\to 0^+} \mathcal{U}u(x) = \kappa_\alpha^{1/2} \lim_{y\to 0^+} y^{\frac{2}{\alpha-2}\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{2}\right)} u(y) = 0, \quad \text{and} \quad \mathcal{U}u(1) = \kappa_\alpha^{1/2} u(1) = 0.$$

注意到 $w = \mathcal{U}u \in H^1_{\mathrm{loc}}(0,1) \cap L^2_\beta(0,1)$。利用 (12)，并按照命题4的证明进行推导，可得

$$\begin{aligned} 0 \leq \kappa_\alpha^2 \int_0^1 |u_y(y)|^2 \mathrm{d}y &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{\alpha+\beta} \left(|w_x|^2 + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right)^2 \frac{|w|^2}{x^2} + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \frac{(w^2)_x}{x} \right) \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{\alpha+\beta} \left(|w_x|^2 + \left(\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right)^2 - (\alpha+\beta-1) \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \right) \frac{|w|^2}{x^2} \right) \mathrm{d}x \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \kappa_\alpha \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left. \frac{x^{-\alpha/2-\beta} u^2(x^{\kappa_\alpha})}{x^{1-\alpha-\beta}} \right|_\varepsilon^{1-\varepsilon} \\ &= \int_0^1 x^{\alpha+\beta} \left(|w_x|^2 + \left(\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right)^2 - (\alpha+\beta-1) \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \right) \frac{|w|^2}{x^2} \right) \mathrm{d}x < \infty. \end{aligned}$$

由命题4可得

$$\int_0^1 \frac{|w(x)|^2}{x^{2-\alpha-\beta}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{|u(y)|^2}{y^2} \mathrm{d}y \leq 4 \int_0^1 |u_y(y)|^2 \mathrm{d}y < \infty.$$

最后两个不等式表明 $x^{\alpha/2} w_x \in L^2_\beta(0,1)$。因此 $w = \mathcal{U}u \in H^1_{\alpha,\ \beta,\ 0}$。

反之，假设 $w = \mathcal{U}u \in H^1_{\alpha,\beta,0}$。那么 $u \in L^2(0,1) \cap H^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$。由于 $x^{\alpha/2} w_x \in L^2_\beta(0,1)$，我们可以应用命题4并利用 (12) 得到 $u_y \in L^2(0,1)$。此外，根据 (6)，$u(1) = \kappa_\alpha^{-1/2} w(1) = 0$，且 $u(0) = \lim_{y\to 0^+} u(y) = \kappa_\alpha^{-1/2} \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha/4+\beta/2} w(x) = 0$。因此 $u \in H^1_0(0,1)$。

总之， $u \in H_0^1(0,1)$ 当且仅当 $\mathcal{U}u \in H^1_{\alpha,\beta,0}$。

假设 $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(0,1)$（当且仅当 $w = \mathcal{U}u \in H^2_{\mathrm{loc}}(0,1)$）。等式 (13) 推出

$$\mathcal{A}_0 u(y) = -u_{yy}(y) - \frac{1/4-\nu^2}{y^2}u(y) = \frac{1}{\kappa_\alpha^{5/2}} x^{\alpha/4+\beta/2}\mathcal{A}w(x),$$

因此 $\mathcal{A}_0 u \in L^2(0,1)$ 当且仅当 $\mathcal{A}w \in L^2_\beta(0,1)$；进而 $u \in D(\mathcal{A}_0)$ 当且仅当 $\mathcal{U}u \in D(\mathcal{A})$，并且

$$\kappa_\alpha^2 \mathcal{U}\mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}\mathcal{U}u. \tag{14}$$

□

下面的结果表明， $\mathcal{A}$ 是一个可对角化算子，其特征函数构成的希尔伯特基可以用第一类贝塞尔函数 J_ν 及其相应的零点 $j_{\nu,\,k}$, $k \geq 1$表示，这些零点位于正半轴上。附录中给出了贝塞尔函数及其零点的一些性质。

命题8. $-\mathcal{A}$ 是一个负自伴算子。此外，族

$$\Phi_k(x) := \frac{(2\kappa_\alpha)^{1/2}}{|J'_\nu(j_{\nu,k})|} x^{(1-\alpha-\beta)/2} J_\nu\left(j_{\nu,k}x^{\kappa_\alpha}\right), \quad k \geq 1,$$

是 $L^2_\beta(0,1)$ 的一个标准正交基，使得

$$\mathcal{A}\Phi_k = \lambda_k \Phi_k, \quad \lambda_k = \kappa_\alpha^2 \left(j_{\nu,k}\right)^2, \quad k \geq 1, \tag{15}$$

其中 ν 在（4）中定义。

证明。由（10）可知， $\mathcal{A}$ 是一个对称算子。在（10）中令 $u = v \in D(\mathcal{A})$，并利用命题4，可得 $-\mathcal{A} \leq 0$。

我们断言 $\mathrm{Ran}(I+\mathcal{A}) = L^2_\beta(0,1)$：任取 $f \in L^2_\beta(0,1)$。由于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\beta + \langle\cdot,\cdot\rangle_*$ 等价于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\alpha,\,\beta,\,0}$ 在 $H^1_{\alpha,\,\beta,\,0}$ 以及 $f \in (H^1_{\alpha,\,\beta,\,0}, \|\cdot\|_{\alpha,\,\beta})'$中的内积，里斯表示定理表明，存在唯一的 $u \in H^1_{\alpha,\,\beta,\,0}$ 使得

$$\int_0^1 uvx^\beta \mathrm{d}x + \int_0^1 x^{\alpha+\beta}\left(u_x v_x - \frac{\mu}{x^2}uv\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 fvx^\beta \mathrm{d}x$$

对所有 $v \in H^1_{\alpha,\,\beta,\,0}$均成立。因此

$$x^\beta u - \left(x^{\alpha+\beta}u_x\right)_x - \frac{\mu}{x^{2-\alpha-\beta}}u = x^\beta f \quad \text{in } C_c^\infty(0,1)'.$$

因此

$$u - \left(x^\alpha u_x\right)_x - \beta x^{\alpha-1}u_x - \frac{\mu}{x^{2-\alpha}}u = f \text{ in } C_c^\infty(0,1)',$$

于是 $u \in D(\mathcal{A})$ 且 $u + \mathcal{A}u = f$。

由此可知， $-\mathcal{A}$ 在 $L^2_\beta(0,1)$ 中是 m-耗散的，并且 [5, 第 24] 页的推论 2.4.10 表明， $-\mathcal{A}$ 是自伴的。

在 [2, 第 4] 节中，已证明这一族

$$\Psi_k(x) := \frac{2^{1/2}}{|J'_\nu(j_{\nu,k})|} x^{1/2} J_\nu(j_{\nu,k}x), \quad k \geq 1,$$

是 $L^2(0,1)$ 的标准正交基，使得

$$\mathcal{A}_0\Psi_k = \tilde{\lambda}_k \Psi_k, \quad \text{where } \tilde{\lambda}_k = (j_{\nu,k})^2, \quad k \geq 1. \tag{16}$$

设 $\mathcal{U}$ (11) 中给出的算子。注意到 $\mathcal{U}\Psi_k = \Phi_k$、 $k \geq 1$，由 (14 可得结论). □

于是，$(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ 在 $L^2_\beta(0,1)$ 中生成一个可对角化半群。事实上，上一结果使我们能够为初始数据引入插值空间。对于任意 $s \geq 0$，我们定义

$$\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^s(0,1) := D(\mathcal{A}^{s/2}) = \left\{ u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_k : \|u\|^2_{\mathcal{H}^s} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \lambda_k^s < \infty \right\},$$

我们也考虑相应的对偶空间

$$\mathcal{H}^{-s} := \left[\mathcal{H}^s(0,1)\right]'.$$

众所周知,ell 是相对于枢轴空间 $L^2_\beta(0,1)$ 的 $\mathcal{H}^s$ 的对偶空间，即

$$\mathcal{H}^s \hookrightarrow \mathcal{H}^0 = L^2_\beta(0,1) = \left(L^2_\beta(0,1)\right)' \hookrightarrow \mathcal{H}^{-s}, \quad s > 0.$$

等价地， $\mathcal{H}^{-s}$ 是相对于范数的 $L^2_\beta(0,1)$ 的完备化

$$\|u\|^2_{-s} := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} |\langle u, \Phi_k \rangle|^2.$$

众所周知，由下式给出的线性映射

$$S(t)u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_k t} a_k \Phi_k \quad \text{if} \quad u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_k \in \mathcal{H}^s$$

定义一个半群 $S(t)$， $t \geq 0$，对所有 $s \in \mathbb{R}$ 均在 $\mathcal{H}^s$ 中。

对于 $\delta \in \mathbb{R}$ 和光滑函数 $z : (0,1) \to \mathbb{R}$，我们引入 z 在 $x = 0$ 处的 δ-广义导数的概念如下

$$\mathcal{O}_\delta(z) := \lim_{x \to 0^+} x^\delta z'(x).$$

为了得到系统 (1) 的弱解的便捷定义，我们将 (1) 中的方程乘以 $\varphi(\tau) = S(\tau - t)z^\tau$，进行分部积分（形式上），使用边界-初始条件，并取所得表达式。

定义 9. 设 $T > 0$ 和 $\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$ 满足 $0 \leq \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 1$, $\mu < \mu(\alpha + \beta)$。设 $f \in L^2(0,T)$，且对于某个 $s > 0$ 有 $u_0 \in \mathcal{H}^{-s}$。若函数 $u \in C^0([0,T]; \mathcal{H}^{-s})$ 满足：对于每个 $\tau \in (0,T]$ 以及每个 $z^\tau \in \mathcal{H}^s$，均有

$$\langle u(\tau), z^\tau \rangle_{\mathcal{H}^{-s}, \mathcal{H}^s} = \int_0^\tau f(t) \mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma} \left(S(\tau - t) z^\tau \right) \mathrm{d}t + \langle u_0, S(\tau) z^\tau \rangle_{\mathcal{H}^{-s}, \mathcal{H}^s}, \tag{17}$$

其中 $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, \mu)$ 由（3）给出

下一个结果表明，在参数 α、 β、 μ、 γ 和 s 满足适当条件时，系统（1）存在弱解。

命题 10. 设 $T > 0$ 和 α、 $\beta \in \mathbb{R}$ 满足 $0 \leq \alpha < 2$、 $\alpha + \beta < 1$。设 $f \in L^2(0,T)$ 且 $u_0 \in \mathcal{H}^{-s}$ 满足 $s > \nu$，其中 ν 由（4）给出。那么，公式（17）对每个 $\tau \in [0,T]$ 定义了一个唯一的元素 $u(\tau) \in \mathcal{H}^{-s}$，它可以写为

$$u(\tau) = S(\tau)u_0 + B(\tau)f, \quad \tau \in (0,T],$$

其中 $B(\tau)$ 是由下式给出的强连续有界算子族 $B(\tau) : L^2(0,T) \to \mathcal{H}^{-s}$

$$\langle B(\tau)f, z^\tau \rangle_{\mathcal{H}^{-s}, \mathcal{H}^s} = \int_0^\tau f(t) \mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma} \left(S(\tau - t) z^\tau \right) \mathrm{d}t, \quad \textit{for all } z^\tau \in \mathcal{H}^s.$$

此外，方程（1）的唯一弱解 u 在 $[0,T]$ 上（按（17）的意义）属于 $C^0([0,T]; \mathcal{H}^{-s})$，并满足

$$\|u\|_{L^\infty([0,T]; \mathcal{H}^{-s})} \leq C \left(\|u_0\|_{\mathcal{H}^{-s}} + \|f\|_{L^2(0,T)} \right).$$

证明。固定 $\tau>0$。令 $u(\tau)\in H^{-s}$ 由条件（17）确定，因此

$$u(\tau)-S(\tau)u_0=\zeta(\tau)f,$$

其中

$$\langle\zeta(\tau)f,z^\tau\rangle_{\mathcal{H}^{-s},\mathcal{H}^s}=\int_0^\tau f(t)\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}\left(S(\tau-t)z^\tau\right)\mathrm{d}t,\quad \text{for all } z^\tau\in\mathcal{H}^s.$$

我们声称，$\zeta(\tau)$ 是从 $L^2(0,T)$ 到 $\mathcal{H}^{-s}$ 的有界算子：令 $z^\tau\in\mathcal{H}^s$ 为

$$z^\tau=\sum_{k=1}^\infty a_k\Phi_k,\tag{18}$$

因此

$$S(\tau-t)z^\tau=\sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{\lambda_k(t-\tau)}a_k\Phi_k,\quad \text{for all } t\in[0,\tau].$$

利用引理 A.3 和 (54)，我们得到存在常数 $C=C(\alpha,\beta,\mu)>0$，使得

$$|\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}\left(\Phi_k\right)|\le C|j_{\nu,k}|^{\nu+1/2},\quad k\ge1.$$

因此 (53) 蕴含存在 $C=C(\alpha,\beta,\mu)>0$，使得

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\tau\left|\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}\left(S(\tau-t)z^\tau\right)\right|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}&\le\sum_{k=1}^\infty|a_k||\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}(\Phi_k)|\left(\int_0^\tau\mathrm{e}^{2\lambda_k(t-\tau)}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\
&\le C\left\|z^\tau\right\|_{\mathcal{H}^s}\left(\sum_{k=1}^\infty|\lambda_k|^{\nu+1/2-s}\int_0^\tau\mathrm{e}^{2\lambda_k(t-\tau)}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\
&= C\left\|z^\tau\right\|_{\mathcal{H}^s}\left(\sum_{k=1}^\infty|\lambda_k|^{\nu-1/2-s}\left(1-\mathrm{e}^{-2\lambda_k\tau}\right)\right)^{1/2}\\
&\le C\left\|z^\tau\right\|_{\mathcal{H}^s}\left(\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^{2(s-\nu+1/2)}}\right)^{1/2}=C\left\|z^\tau\right\|_{\mathcal{H}^s}.
\end{aligned}$$

因此，对于所有 $f\in L^2(0,T)$，均有 $\|\zeta(\tau)f\|_{\mathcal{H}^{-s}}\le C\|f\|_{L^2(0,\ T)}\ \tau\in(0,T]$。

最后，我们固定 $f\in L^2(0,T)$，并证明映射 $\tau\mapsto\zeta(\tau)f$ 在 $[0,T)$ 上右连续。令 $h>0$ 足够小，并令 $z\in\mathcal{H}^s$ 如（18）式所给。于是，按照上面的不等式进行推导，可得

$$\begin{aligned}
|\left\langle\zeta(\tau+h)f-\zeta(\tau)f,z\right\rangle_{\mathcal{H}^{-s},\mathcal{H}^s}|&\le\int_0^\tau|f(t)||\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}\left(\left(S(\tau+h-t)-S(\tau-t)\right)z\right)|\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_\tau^{\tau+h}|f(t)||\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}\left(S(\tau+h-t)z\right)|\mathrm{d}t\\
&\le C\left\|z\right\|_{\mathcal{H}^s}\left\|f\right\|_{L^2(0,T)}\left[\left(\sum_{k=1}^\infty\frac{I(\tau,k,h)}{k^{2(s-\nu+1/2)}}\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^\infty\frac{1-\mathrm{e}^{-2\lambda_kh}}{k^{2(s-\nu+1/2)}}\right)^{1/2}\right],
\end{aligned}$$

其中

$$I(\tau,k,h)=\lambda_k\int_0^\tau\left(\mathrm{e}^{\lambda_k(t-\tau-h)}-\mathrm{e}^{\lambda_k(t-\tau)}\right)^2\,\mathrm{d}t\to0\quad\text{as}\quad h\to0^+,$$

由于 $\lambda_k\ge\lambda_1$，故该式关于 k 一致成立，从而结论得证。 □

注 11. 在接下来的章节中，我们将考虑 $L^2_\beta(0,1)$ 中的初始条件。注意，对于所有 $\delta>0$，$L^2_\beta(0,1)\subset H^{-\nu-\delta}$，因此我们可以在 $s=\nu+\delta,\ \delta>0$ 的条件下应用命题 10，此时相应的解将属于 $C^0([0,T],H^{-\nu-\delta})$。

3. Upper estimate of the cost of the null controllability

为了解决可控性问题，我们采用 Fattorini 和 Russell 在 [14], 中提出的方法，即所谓的矩方法。该方法涉及构造一个双正交族 $\{\psi_k\}_{k\geq 1} \subset L^2(0,T)$，使其与指数函数族 $\left\{e^{-\lambda_k(T-t)}\right\}_{k\geq 1}$ 在 $[0,T]$ 上双正交，也就是说，它满足

$$\int_0^T \psi_k(t)e^{-\lambda_l(T-t)}dt = \delta_{kl}, \quad \text{for all} \quad k,l \geq 1.$$

因此，我们将得到零可控性代价的上界。

假设每个 F_k、 $k \geq 1$ 都是指数型为 $T/2$ 的整函数，使得 $F_k(x) \in L^2(\mathbb{R})$，并且

$$F_k(i\lambda_l) = \delta_{kl}, \quad \text{for all} \quad k,l \geq 1. \tag{19}$$

Paley-Wiener 定理的 L^2 版本表明，存在一个支撑于 $[-T/2,T/2]$ 的 $\eta_k \in L^2(\mathbb{R})$，使得 $F_k(z)$ 是 η_k 的傅里叶变换的解析延拓。于是我们有

$$\psi_k(t) := e^{\lambda_k T/2}\eta_k(t-T/2), \quad t \in [0,T],\, k \geq 1, \tag{20}$$

就是我们要找的函数族:

$$\delta_{kl} = e^{(\lambda_k-\lambda_l)T/2}F_k(i\lambda_l) = e^{(\lambda_k-\lambda_l)T/2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \eta_k(t)e^{\lambda_l t}dt = \int_0^T \psi_k(t)e^{-\lambda_l(T-t)}dt \quad \text{for all} \quad k,l \geq 1.$$

现在，我们着手构造满足上述性质的族 F_k, $k \geq 1$。首先，考虑 Weierstrass 无穷乘积

$$\Lambda(z) := \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{iz}{(\kappa_\alpha j_{\nu,k})^2}\right), \tag{21}$$

由 (52) 可知，当 k 足够大时，$j_{\nu,k} = O(k)$，因此该无穷乘积定义良好，并且在 $\mathbb{C}$ 中绝对收敛。因此， $\Lambda(z)$ 是一个整函数，其在 $i(\kappa_\alpha j_{\nu,k})^2 = i\lambda_k$, $k \geq 1$ 处有单零点。

利用 [16, 第 XV 章，第 438 页，式 (3)], ，可写为

$$\Lambda(z) = \Gamma(\nu+1)\left(\frac{2\kappa_\alpha}{\sqrt{-iz}}\right)^\nu J_\nu\left(\frac{\sqrt{-iz}}{\kappa_\alpha}\right). \tag{22}$$

对于任意 $\nu > -1/2$ ，贝塞尔函数 $J_\nu(z)$ 的泊松表示（见 [16, 第 III 章，第 48 页，式 (4)]）如下

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} e^{izs}\left(1-s^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s, \quad z \in \mathbb{C},$$

因此

$$\begin{aligned} |J_\nu(z)| &\leq \frac{|z|^\nu e^{|\Im(z)|}}{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-(sgn(\Im(z))+s)\Im(z)}\left(1-s^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{|z|^\nu e^{|\Im(z)|}}{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\left(1-s^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s = \frac{|z|^\nu e^{|\Im(z)|}}{2^\nu\Gamma\left(\nu+1\right)}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

最后一个不等式和 (22) 推出

$$|\Lambda(z)| \leq \exp\left(\frac{|\Im(\sqrt{-iz})|}{\kappa_\alpha}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

特别是,

$$|\Lambda(z)| \leq \exp\left(\frac{\sqrt{|z|}}{\kappa_\alpha}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad |\Lambda(x)| \leq \exp\left(\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{2}\kappa_\alpha}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

现在，考虑整函数

$$\Psi_k(z) := \frac{\Lambda(z)}{\Lambda'(i\lambda_k)(z - i\lambda_k)}, \quad k \geq 1. \tag{24}$$

由于 $\Lambda(z)$ 在 $i\lambda_k$、 $k \geq 1$ 处具有单零点，因此我们有族 $\{\Psi_k\}$ 满足（19）。遗憾的是，（23）中的第二个估计在无穷远处是最优的，因此 $\Psi_k(x)$ 不属于 $L^2(\mathbb{R})$。为修正这一性质，下一步是构造一个适当的"复乘子"。这里，我们采用 [15] 中介绍的方法。

对于 $\theta > 0$ 和 $a > 0$，我们定义

$$\sigma_\theta(t) := \exp\left(-\frac{\theta}{1-t^2}\right), \quad t \in (-1,1),$$

并将其在 $(-1,1)$ 外延拓为 0。显然， σ_θ 在 $(-1,1)$ 上是解析的。令 $C_\theta^{-1} := \int_{-1}^{1} \sigma_\theta(t)dt$ ，并定义

$$H_{a,\theta}(z) = C_\theta \int_{-1}^{1} \sigma_\theta(t) \exp\left(-iatz\right) \mathrm{d}t. \tag{25}$$

显然，$H_{a,\theta}(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的连续函数；此外，Morera 定理和富比尼定理表明，$H_{a,\theta}(z)$ 是一个整函数。以下结果给出了关于 $H_{a,\theta}(z)$ 的更多信息。

引理 12. 函数 $H_{a,\ \theta}$ 满足以下不等式

$$\begin{aligned}
H_{a,\theta}(ix) &\geq \frac{\exp\left(a|x|/\left(2\sqrt{\theta+1}\right)\right)}{\left(11\sqrt{\theta+1}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}, && (26)\\
|H_{a,\ \theta}(z)| &\leq \exp\left(a|\Im(z)|\right), \quad z \in \mathbb{C}, && (27)\\
|H_{a,\theta}(x)| &\leq \chi_{|x|\leq 1}(x) + c\sqrt{\theta+1}\sqrt{a\theta\,|x|}\exp\left(3\theta/4 - \sqrt{a\theta\,|x|}\right)\chi_{|x|>1}(x), \quad x \in \mathbb{R}, && (28)
\end{aligned}$$

其中， $c > 0$ 不依赖于 a 和 θ。

详细信息请参见 [15, 第 85–86]页。

最后，对于 $k \geq 1$ ，考虑如下给出的整函数 F_k ：

$$F_k(z) := \Psi_k(z)\frac{H_{a,\theta}(z)}{H_{a,\theta}(i\lambda_k)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{29}$$

对于 $\delta \in (0,1)$，我们定义

$$a := \frac{T(1-\delta)}{2} > 0, \quad \text{and} \quad \theta := \frac{(1+\delta)^2}{\kappa_\alpha^2 T\,(1-\delta)} > 0. \tag{30}$$

下一条结果中的计算证明了选择这些参数的合理性。

引理 13. 对于每个 $k \geq 1$ ，函数 $F_k(z)$ 满足以下性质：i) F_k 是指数型 $T/2$，ii) $F_k \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$，iii) F_k 满足 (19)。iv) 此外，存在一个与 T、α 和 δ 无关的常数 $c > 0$，使得

$$\|F_k\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{C(T,\alpha,\delta)}{\lambda_k\left|\Lambda'\left(i\lambda_k\right)\right|}\exp\left(-\frac{a\lambda_k}{2\sqrt{\theta+1}}\right), \tag{31}$$

其中

$$C(T,\alpha,\delta) = c\sqrt{\theta+1}\left[\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}\kappa_\alpha}\right) + \sqrt{\theta+1}\frac{\kappa_\alpha^2}{\delta^3}\exp\left(\frac{3\theta}{4}\right)\right]. \tag{32}$$

证明。利用 (23)、(27)、(29) 和 (30)，我们得到 F_k 是指数型 $T/2$。此外，由 (24)、(26) 和 (29) 可知， F_k 满足 (19)。

现在利用 (23)、(26)、(28)、(29) 和 (30) 得到

$$\begin{aligned}|F_k(x)| &\leq c\exp\left(-\frac{a\lambda_k}{2\sqrt{\theta+1}}\right)\frac{\sqrt{\theta+1}}{|\Lambda'(i\lambda_k)\,||x^2+\lambda_k^2|^{1/2}}|H_{a,\theta}(x)|\exp\left(\frac{|x|^{1/2}}{\sqrt{2}\kappa_\alpha}\right)\\ &\leq c\exp\left(-\frac{a\lambda_k}{2\sqrt{\theta+1}}\right)\frac{\sqrt{\theta+1}}{\lambda_k|\Lambda'(i\lambda_k)\,|}\left[e^{\frac{1}{\sqrt{2}\kappa_\alpha}}\chi_{|x|\leq 1}(x)+\sqrt{\theta+1}\sqrt{a\theta\,|x|}\exp\left(\frac{3\theta}{4}-\frac{\delta|x|^{1/2}}{\sqrt{2}\kappa_\alpha}\right)\chi_{|x|>1}(x)\right].\end{aligned}$$

由于右端的函数关于 $\mathbb{R}$ 快速衰减，因此我们有 $F_k\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$。最后，变量替换 $y=(\kappa_\alpha)^{-1}\delta|x|^{1/2}/\sqrt{2}$ 推出 (31)。□

由于 $\eta_k, F_k\in L^1(\mathbb{R})$，由傅里叶逆定理可得

$$\eta_k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{it\tau}F_k(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in\mathbb{R},k\geq 1,$$

因此 (20) 意味着 $\psi_k\in C([0,T])$，并且由 (31) 可得

$$\|\psi_k\|_\infty\leq\frac{C(T,\alpha,\delta)}{\lambda_k\,|\Lambda'(i\lambda_k)|}\exp\left(\frac{T\lambda_k}{2}-\frac{a\lambda_k}{2\sqrt{\theta+1}}\right),\quad k\geq 1. \tag{33}$$

现在，我们准备证明系统 (1) 的零可控性。令 $u_0\in L^2_\beta(0,1)$。接着考虑其关于标准正交基 $\{\Phi_k\}_{k\geq1}$ 的傅里叶级数，

$$u_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Phi_k(x). \tag{34}$$

我们设

$$f(t):=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\mathrm{e}^{-\lambda_k T}}{\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}(\Phi_k)}\psi_k(t) \tag{35}$$

假设 $\alpha+\beta<1$ 和 γ 由(3)给出。由于 $\{\psi_k\}$ 与 $\{\mathrm{e}^{-\lambda_k(T-t)}\}$ 双正交，因此有

$$\int_0^T f(t)\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}(\Phi_k)\,\mathrm{e}^{-\lambda_k(T-t)}\mathrm{d}t=-a_k\mathrm{e}^{-\lambda_k T}=-\left\langle u_0,\mathrm{e}^{-\lambda_k T}\Phi_k\right\rangle_\beta=-\left\langle u_0,\mathrm{e}^{-\lambda_k T}\Phi_k\right\rangle_{\mathcal{H}^{-s},\mathcal{H}^s}.$$

设 $u\in C([0,T];H^{-s})$ 满足对于所有 $\tau\in(0,T]$, $z^\tau\in H^s$ 都成立的(17)。特别地，对于 $\tau=T$，我们取 $z^T=\Phi_k, k\geq1$，则最后一个等式推出

$$\langle u(\cdot,T),\Phi_k\rangle_{\mathcal{H}^{-s},\mathcal{H}^s}=0\quad\text{for all}\quad k\geq1,$$

因此 $u(\cdot,T)=0$。

只需估计控制 f 的范数。由(33)和(35)可得

$$\|f\|_\infty\leq C(T,\alpha,\delta)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{|\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}(\Phi_k)|}\frac{1}{\lambda_k\,|\Lambda'(i\lambda_k)|}\exp\left(-\frac{T\lambda_k}{2}-\frac{a\lambda_k}{2\sqrt{\theta+1}}\right). \tag{36}$$

由(22)可得

$$|\Lambda'(i\lambda_k)|=\Gamma(\nu+1)\frac{2^\nu}{|j_{\nu,k}|^\nu}\frac{1}{2\kappa_\alpha^2 j_{\nu,k}}|J'_\nu(j_{\nu,k})\,|,\quad k\geq1.$$

利用 (15) 和 (54)，我们得到

$$|\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}(\Phi_k)\,\lambda_k\Lambda'(i\lambda_k)|=2^{-1/2}\sqrt{\kappa_\alpha}(\sqrt{\mu(\alpha+\beta)}+\kappa_\alpha\nu)j_{\nu,k}.$$

由 (36)、最后一个等式以及 $\lambda_k \geq \lambda_1$，可得

$$\|f\|_\infty \leq \frac{C(T,\alpha,\delta)\kappa_\alpha^{-1/2}}{\sqrt{\mu(\alpha+\beta)}+\kappa_\alpha\nu}\exp\left(-\frac{T\lambda_1}{2}-\frac{a\lambda_1}{2\sqrt{\theta+1}}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{j_{\nu,k}}.$$

利用柯西- 施瓦茨不等式，以及 $j_{\nu,k} \geq (k-1/4)\pi$ (由 (53) 得到) 和 (34)，我们可得 tha t

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &\leq \frac{C(T,\alpha,\delta)\kappa_\alpha^{-1/2}}{\sqrt{\mu(\alpha+\beta)}+\kappa_\alpha\nu}\exp\left(-\frac{T\lambda_1}{2}-\frac{a\lambda_1}{2\sqrt{\theta+1}}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{C(T,\alpha,\delta)\kappa_\alpha^{-1/2}}{\sqrt{\mu(\alpha+\beta)}+\sqrt{\mu(\alpha+\beta)-\mu)}}\exp\left(-\frac{T\lambda_1}{2}-\frac{a\lambda_1}{2\sqrt{\theta+1}}\right)\|u_0\|_\beta.\end{aligned}$$

利用 (30) 中给出的 a,θ 的表达式，以及 $\theta>0$, $\delta\in(0,1)$ 和 $0<\kappa_\alpha\leq 1$，我们可得

$$\theta \leq \frac{4}{(1-\delta)\kappa_\alpha^2 T},\quad \sqrt{\theta+1}\leq\frac{2(1+T)^{1/2}}{(1-\delta)^{1/2}\kappa_\alpha T^{1/2}},\quad \sqrt{\theta+1}\leq\theta+1,$$

因此

$$\frac{a}{\sqrt{\theta+1}}\geq\frac{\kappa_\alpha(1-\delta)^{3/2}T^{3/2}}{4(1+T)^{1/2}},\quad C(T,\alpha,\delta)\leq c\left(1+\frac{1}{(1-\delta)\kappa_\alpha^2 T}\right)\left[\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}\kappa_\alpha}\right)+\frac{1}{\delta^3}\exp\left(\frac{3}{(1-\delta)\kappa_\alpha^2 T}\right)\right],$$

并利用 λ_1 的定义，即可得到结论。

4. Lower estimate of the cost of the null controllability

本节中，我们得到代价 $\mathcal{K}=\mathcal{K}(T,\alpha,\beta,\mu)$ 的下界估计。令

$$u_0(x):=\frac{|J_\nu'(j_{\nu,1})|}{(2\kappa_\alpha)^{1/2}}\Phi_1(x),\ x\in(0,1),\quad \text{hence}\quad \|u_0\|_\beta^2=\frac{|J_\nu'(j_{\nu,1})|^2}{2\kappa_\alpha}. \tag{37}$$

当 $\varepsilon>0$ 足够小时，存在 $f\in U(\alpha,\beta,\mu,T,u_0)$ 使得

$$u(\cdot,T)\equiv 0,\quad \text{and}\quad \|f\|_{L^2(0,T)}\leq(\mathcal{K}+\varepsilon)\|u_0\|_\beta. \tag{38}$$

然后，在 (17) 中令 $\tau=T$，并取 $z^\tau=\Phi_k$、$k\geq 1$，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\lambda_k T}\langle u_0,\Phi_k\rangle_\beta=\langle u_0,S(T)\Phi_k\rangle_{\mathcal{H}^{-s},\mathcal{H}^s} &= -\int_0^T f(t)\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}\left(S(T-t)\Phi_k\right)\mathrm{d}t\\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda_k T}\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}\left(\Phi_k\right)\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\lambda_k t}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由 (37) 和 (54) 可得

$$\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\lambda_k t}\mathrm{d}t=-\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)\left|J_\nu'(j_{\nu,1})\right|^2}{2\kappa_\alpha\left(\sqrt{\mu(\alpha+\beta)}+\kappa_\alpha\nu\right)(j_{\nu,1})^\nu}\delta_{1,k},\quad k\geq 1. \tag{39}$$

现在考虑函数 $v:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$，定义为

$$v(s):=\int_{-T/2}^{T/2} f\left(t+\frac{T}{2}\right)\mathrm{e}^{-ist}\,\mathrm{d}t,\quad s\in\mathbb{C}.$$

富比尼 以及莫雷拉定理表明，$v(s)$ 是一个整函数。此外，由（39）可知， t

$$v(i\lambda_k)=0\quad\text{for all } k\geq 2,\quad\text{and}\quad v(i\lambda_1)=-\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)\left|J_\nu'(j_{\nu,1})\right|^2}{2\kappa_\alpha\left(\sqrt{\mu(\alpha+\beta)}+\kappa_\alpha\nu\right)(j_{\nu,1})^\nu}\mathrm{e}^{-\lambda_1 T/2}.$$

我们还有

$$|v(s)|\leq\mathrm{e}^{T|\Im(s)|/2}\int_0^T|f(t)|\mathrm{d}t\leq(\mathcal{K}+\varepsilon)T^{1/2}\mathrm{e}^{T|\Im(s)|/2}\|u_0\|_\beta. \tag{40}$$

考虑由下式给出的整函数 $F(z)$

$$F(s) := v\left(s - i\delta\right), \quad s \in \mathbb{C}, \tag{41}$$

对于稍后选定的某个 $\delta > 0$。显然,

$$F\left(a_k\right) = 0, \quad k \geq 2, \quad \text{where} \quad a_k := i\left(\lambda_k + \delta\right), \quad k \geq 1, \quad \text{and}$$

$$F\left(a_1\right) = -\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)\left|J_{\nu}'\left(j_{\nu,1}\right)\right|^2}{2\kappa_{\alpha}\left(\sqrt{\mu(\alpha+\beta)} + \kappa_{\alpha}\nu\right)\left(j_{\nu,1}\right)^{\nu}}\mathrm{e}^{-\lambda_1 T/2}. \tag{42}$$

由（37）、（40）和（41）可得

$$\log|F(s)| \leq \frac{T}{2}|\Im(s) - \delta| + \log\left((\mathcal{K}+\varepsilon)T^{1/2}\frac{\left|J_{\nu}'\left(j_{\nu,1}\right)\right|}{\left(2\kappa_{\alpha}\right)^{1/2}}\right), \quad s \in \mathbb{C}. \tag{43}$$

我们回顾以下表示定理，参见 [12, 第 56] 页。

定理14。设 $g(z)$ 是一个指数型整函数，并且假设

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^{+}|g(x)|}{1+x^2}\mathrm{d}x < \infty.$$

设 $\{b_\ell\}_{\ell\geq 1}$ 为 $g(z)$ 在上半平面 $\Im(z) > 0$ 中的零点集合（每个零点按其重数重复出现）。则,

$$\log|g(z)| = A\Im(z) + \sum_{\ell=1}^{\infty}\log\left|\frac{z-b_\ell}{z-\bar{b}_\ell}\right| + \frac{\Im(z)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|g(s)|}{|s-z|^2}\mathrm{d}s, \quad \Im(z) > 0,$$

其中

$$A = \limsup_{y\to\infty}\frac{\log|g(iy)|}{y}.$$

将最后一个结果应用于式 (41) 中给出的函数 $F(z)$。在此情形下，(40) 推出 $A \leq T/2$。还要注意， $\Im(a_k) > 0$, $k \geq 1$，从而得到

$$\log\left|F\left(a_1\right)\right| \leq \left(\lambda_1+\delta\right)\frac{T}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\log\left|\frac{a_1-a_k}{a_1-\bar{a}_k}\right| + \frac{\Im\left(a_1\right)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|F(s)|}{\left|s-a_1\right|^2}\,\mathrm{d}s. \tag{44}$$

根据常数 a_k 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty}\log\left|\frac{a_1-a_k}{a_1-\bar{a}_k}\right| &= \sum_{k=2}^{\infty}\log\left(\frac{\left(j_{\nu,k}\right)^2-\left(j_{\nu,1}\right)^2}{2\delta/\kappa_{\alpha}^2+\left(j_{\nu,1}\right)^2+\left(j_{\nu,k}\right)^2}\right) \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{j_{\nu,k+1}-j_{\nu,k}}\int_{j_{\nu,k}}^{j_{\nu,k+1}}\log\left(\frac{x^2}{2\delta/\kappa_{\alpha}^2+x^2}\right)\mathrm{d}x \qquad (45)\\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_{j_{\nu,2}}^{\infty}\log\left(\frac{x^2}{2\delta/\kappa_{\alpha}^2+x^2}\right)\mathrm{d}x, \\
&= -\frac{j_{\nu,2}}{\pi}\log\left(\frac{1}{1+2\delta/\left(\kappa_{\alpha}j_{\nu,2}\right)^2}\right) - \frac{2\sqrt{2\delta}}{\pi\kappa_{\alpha}}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\kappa_{\alpha}j_{\nu,2}/\sqrt{2\delta}\right)\right),
\end{aligned}$$

其中用到了引理 A.2，并进行了如下变量替换

$$\tau = \frac{\kappa_{\alpha}}{\sqrt{2\delta}}x.$$

由（43）可得估计

$$\frac{\Im\left(a_1\right)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|F(s)|}{\left|s-a_1\right|^2}\,\mathrm{d}s \leq \frac{T\delta}{2} + \log\left((\mathcal{K}+\varepsilon)T^{1/2}\frac{\left|J_{\nu}'\left(j_{\nu,1}\right)\right|}{\left(2\kappa_{\alpha}\right)^{1/2}}\right). \tag{46}$$

由（42）、（44）、（45）和（46）可得

$$\frac{2\sqrt{2\delta}}{\pi\kappa_\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\delta}}{\kappa_\alpha j_{\nu,2}}\right)-\frac{j_{\nu,2}}{\pi}\log\left(1+\frac{2\delta}{\left(\kappa_\alpha j_{\nu,2}\right)^2}\right)-(\lambda_1+\delta)\,T\le\log(\mathcal{K}+\varepsilon)+\log h(\alpha,\beta,\mu,T),$$

其中

$$h(\alpha,\beta,\mu,T)=\frac{(2T\kappa_\alpha)^{1/2}\left(\sqrt{\mu(\alpha+\beta)}+\kappa_\alpha\nu\right)\left(j_{\nu,1}\right)^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)\left|J_\nu'\left(j_{\nu,1}\right)\right|}=\frac{(2T\kappa_\alpha)^{1/2}\left(\sqrt{\mu(\alpha+\beta)}+\sqrt{\mu(\alpha+\beta)-\mu}\right)\left(j_{\nu,1}\right)^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)\left|J_\nu'\left(j_{\nu,1}\right)\right|}.$$

结果可通过取

$$\delta=\frac{\kappa_\alpha^2\left(j_{\nu,2}\right)^2}{2},\quad\text{and then letting}\quad\varepsilon\to0^+.$$

注15. a) 本条中我们采用 [2]中的定义。在 [2], 第207页中间，作者隐含地使用了

$$\left(x^\alpha\frac{p(x)}{p(0)}\right)'\Phi_k(x)\Big|_0^1=0,\tag{47}$$

其中 $\alpha=(1-\sqrt{1-4\mu})/2$, $p(x)=1-x^{1-2\alpha}$, $\Phi_k(x)=\sqrt{2}|J_\nu'(j_{\nu,k})|^{-1}x^{1/2}J_\nu(j_{\nu,k}x)$, $\nu=1/2-\alpha$。(47)中的表达式在 $x=1$ 处确实为零，但根据(50)，在 $x=0$处不为零。因此， [2] 中的定理2.1的证明并不完整。

b) 此处我们采用 [3]中的定义。在 [3], 第525页中间，作者隐含地使用了

$$\left(x^\gamma\frac{p(x)}{p(0)}\right)'x^\alpha\Phi_k(x)\Big|_0^1=0,\tag{48}$$

其中 $\gamma=\sqrt{\mu(\alpha)-}\sqrt{\mu(\alpha)-\mu,}\,p(x)=1-x^q$, $q=2\sqrt{\mu(\alpha)-\mu,}\,\Phi_k(x)=\sqrt{2-\alpha}|J_\nu'(j_{\nu,\ k})|^{-1}x^{\frac{1-\alpha}{2}}J_\nu(j_{\nu,\ k}x^{\frac{2-\alpha}{2}})$, $\nu=2\sqrt{\mu(\alpha)-\mu}/(2-\alpha)$, $0\le\alpha<1$。根据 (50)，表达式 (48) 在 $x=1$ 处确实为零，但在 $x=0$处不为零。因此， [3] 中的定理2.2的证明并不完整。

Appendix A. Bessel functions

我们将第一类贝塞尔函数 J_ν 定义如下

$$J_\nu(x)=\sum_{m\ge0}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu},\quad x\ge0,\tag{49}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数。特别地，对于 $\nu>-1$ 和 $0<x\le\sqrt{\nu+1}$，由 (49) 可得（见 [1, 9.1.7，第 360] 页）

$$J_\nu(x)\sim\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\quad\text{as}\quad x\to0^+.\tag{50}$$

第一类贝塞尔函数满足递推公式（[1], 9.1.27）：

$$xJ_\nu'(x)-\nu J_\nu(x)=-xJ_{\nu+1}(x).\tag{51}$$

回顾贝塞尔函数 J_ν 在 x较大时的渐近行为，参见 [13, 引理7.2，第 129]页。

引理A.1。对于任意 $\nu\in\mathbb{R}$

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\quad as\quad x\to\infty.$$

对于 $\nu>-1$ 贝塞尔函数 J_ν 有无穷多个实零点 $0<j_{\nu,\ 1}<j_{\nu,\ 2}<\cdots$，这些零点都是单零点， $x=0$除外的情况除外。在 [13, 命题 7.8] 中，我们可以找到关于贝塞尔函数 J_ν零点位置的以下信息：

引理 A.2. 设 $\nu \geq 0$。
1. 差分序列 $(j_{\nu,k+1} - j_{\nu,k})_k$ 收敛于 π，当 $k \to \infty$ 时。2. 序列 $(j_{\nu,k+1} - j_{\nu,k})_k$ 在 $|\nu| > \frac{1}{2}$ 时严格递减，在 $|\nu| < \frac{1}{2}$ 时严格递增，并在 $|\nu| = \frac{1}{2}$ 时为常数。

对于固定的 $\nu \geq 0$，我们考虑贝塞尔函数 J_ν 的下一个零点渐近展开，参见[16, 第 15 节。53],

$$j_{\nu,k} = \left(k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi - \frac{4\nu^2 - 1}{8\left(k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi} + O\left(\frac{1}{k^3}\right), \quad \text{as } k \to \infty. \tag{52}$$

特别地，我们有

$$\begin{aligned} j_{\nu,k} &\geq \left(k - \frac{1}{4}\right)\pi \quad \text{for } \nu \in [0, 1/2], \\ j_{\nu,k} &\geq \left(k - \frac{1}{8}\right)\pi \quad \text{for } \nu \in [1/2, \infty]. \end{aligned} \tag{53}$$

引理 A.3. 对任意 $\nu \geq 0$ 和任意 $k \geq 1$，我们有

$$\sqrt{j_{\nu,k}}\,|J'_\nu(j_{\nu,k})| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{j_{\nu,k}}\right) \quad as \quad k \to \infty.$$

引理 A.4. 设 $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, \mu)$ 和 $\nu = \nu(\alpha, \beta, \mu)$ 分别由 (3) 和 (4) 给出，则 Φ_k 在 $x = 0$ 处的 $\alpha+\beta+\gamma$-广义导数对所有 $k \geq 1$ 均为有限值，并且

$$\mathcal{O}_{\alpha+\beta+\gamma}(\Phi_k) = \frac{(2\kappa_\alpha)^{1/2}\left(\sqrt{\mu(\alpha+\beta)} + \kappa_\alpha \nu\right)(j_{\nu,k})^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)\,|J'_\nu(j_{\nu,k})|}, \quad k \geq 1. \tag{54}$$

该结果的证明可利用 (50) 和递推公式 (51) 得出。

References

[1] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun, 《数学函数手册：公式、图表与数学表格》，美国国家标准局应用数学丛书，第55卷。1964年。[2] , U. Biccari；具有奇异逆平方势的一维热方程的边界可控性。《数学控制与相关领域》9（2019），第1期，191–219。[3] U. Biccari；V. Hern´andez-Santamar´ıa；J. Vancostenoble。退化/奇异抛物方程边界控制的存在性与代价。《数学控制与相关领域》12（2022），第2期，495–530。[4] P. Cannarsa、P. Martinez 和 J. Vancostenoble；通过边界控制弱退化抛物方程的控制代价，《数学控制与相关领域》7（2017），171–211。[5] T. Cazenave；A. Haraux, 《半线性演化方程导论》。牛津数学讲座丛书及其应用，第13卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1998年。xiv+186 页。ISBN：0-19-850277-X [6] R. Dautray；J. L. Lions, 《科学与技术中的数学分析和数值方法》第2卷：泛函方法与变分方法。施普林格出版社，柏林，1988年。xvi+561 页。ISBN：3-540-19045-7。[7] Du, Runmei，含梯度项的一类退化抛物方程的零可控性。《演化方程杂志》19（2019），第2期，585–613。[8] C. Flores 和 L. Teresa；含一阶项的退化抛物方程的Carleman估计及其应用，《巴黎科学院数学报告》348（2010），391–396。[9] C. Flores 和 L. Teresa，一阶项一维退化抛物方程的零可控性。《离散与连续动力系统-B辑》，2020，25（10）：3963–3981。[10] G. Mamadou；一维退化抛物方程与双曲方程的精确边界可控性。《SIAM控制与优化杂志》52（2014），第4期，2037–2054。[11] G. Mamadou；P. Lissy；一维退化抛物-双曲方程的奇异最优控制。《ESAIM控制、优化与变分法》22（2016），第4期，118–1203。[12] P. Koosis, 《对数积分》I与II，剑桥高等数学研究丛书12（1988）与剑桥高等数学研究丛书21（1992），剑桥大学出版社，剑桥。[13] V. Komornik 和 P. Loreti, 《控制理论中的傅里叶级数》。施普林格出版社（2005）。[14] H. O. Fattorini 和 D. L. Russell，一维空间中线性抛物方程的精确可控性定理。《纯粹与应用数学档案》43（1971）272–292。[15] G. Tenenbaum 和 M. Tucsnak，Schrödinger方程与热方程快速控制的新爆破解析率。《微分方程杂志》243（2007）70–100。

[16] G. N. Watson, 《贝塞尔函数理论论著》。剑桥大学出版社，英格兰剑桥（1958）。

Instituto de Matemáticas-Unidad Cuernavaca Universidad Nacional Autónoma de México Av. Universidad S/N Cuer- , , ,
navaca Morelos C.P. 62210 México.
,, ,*Email address*: jesus.galo@im.unam.mx, marcos.lopez@im.unam.mx