QMUL-PH-22-33

隐藏对称代数的矩阵与张量见证

Sanjaye Ramgoolam [a, b, †] **和 Lewis Sword** [a, *]

[a] 伦敦玛丽女王大学理论物理中心、物理与天文学系，伦敦 *Mile End* 路 *327* 号，邮编 *E1 4NS*，英国

[b] 金山大学国家理论物理研究所、物理学院和理论物理中心，金山大学，邮编 *2050*，南非

电子邮箱：† s.ramgoolam@qmul.ac.uk , * l.sword@qmul.ac.uk

arXiv:2302.01206v1 [hep-th] 2 Feb 2023

*2023*年*2*月*3*日

摘要

置换群代数及其称为置换中心化子代数（PCAs）的推广形式，在具有显式连续规范对称性的大型 N规范理论和矩阵模型的组合学中，作为隐藏对称性发挥着核心作用。在显式对称性下保持不变的多项式函数是我们关注的可观测量，并在反德西特/共形场论对应中有所应用。我们计算了存在矩阵或张量见证场时的此类关联函数。根据定义，见证场可以是作为耦合出现在作用量中的矩阵场或张量场（即斯普里昂场），也可以是作为经典（未积分）场出现在可观测量中、与量子（已积分）场并存的场。对于矩阵和张量两种情形，我们发现，一般规范不变可观测量的二点关联函数都可以用见证场的不变函数表示，其系数由相应置换中心化子代数的结构常数给出。对相关置换中心化子代数进行傅里叶变换，可将组合基与表示论基联系起来。表示论基元满足二点关联函数的正交性结果，将已知的正交关系推广到包含见证场的情形。新的正交方程以两个可观测量的表示基元为输入，并以一个完全由见证场构造的表示基可观测量为输出。这些方程扩展了 Mironov 和 Morozov 发起的超可积性纲领中的已知方程，并直接从物理上实现了矩阵/张量模型隐藏置换中心化子代数的韦德伯恩–阿廷分解。

目录

1 引言 **3**

2 代数与带矩阵见证的单矩阵关联函数 9

2.1 带矩阵耦合的一般算符二点函数 . . . . . 10 2.2 带矩阵耦合的二点函数的傅里叶基. 15 2.3 量子场与经典场的规范不变函数（可观测量） . . . 17 2.4 经典场二点函数的傅里叶基.19

3 双矩阵见证下的代数与双矩阵关联函数 21

3.1 双矩阵情形下带矩阵耦合的一般算符二点函数.22 3.2 双矩阵二点函数的傅里叶/Q-基. 26 3.3 双矩阵情形下量子场与经典场的可观测函数 . . . 28 3.4 经典场双矩阵二点函数的傅里叶/Q 基 30

4 Alg代数与多矩阵关联函数及多矩阵见证 33

4.1 一般算符的二点函数及多矩阵耦合项 . . . . . 33 4.2 多矩阵关联函数的傅里叶/Q 基底. 36 4.3 多矩阵量子场与经典场的可观测函数 . . . . . 38 4.4 含量子场与经典场的多矩阵二点函数的傅里叶/Q 基底.41

5 代数与张量关联函数及张量见证 42

5.1 张量量子场与经典场的一般张量算符二点函数.43 5.2 傅里叶/Q基底.49

6 总结与展望 **52**

A 用见证矩阵场推导二点函数 54 B 关联函数图的诠释 56 C 德尔塔函数和 59 D 一般矩阵模型的韦德伯恩-阿廷基性质 60

1 引言

矩阵模型在规范-弦对偶中发挥了重要作用，其研究始于具有双标度极限的矩阵模型与低维非临界弦之间的对偶[1, 2, 3]。矩阵模型还用于描述 $\mathcal{N}=4$超杨-米尔斯理论中的 BPS 态及其关联函数。因此，它们对于$\mathcal{N}=4$ 超杨-米尔斯（SYM）理论与 $AdS_5\times S^5$ [4, 5, 6]上的弦理论之间的反德西特/共形场论对应至关重要。特别是，含有一个复变量矩阵 Z的复矩阵模型，以及 Z的 $U(N)$不变多项式函数，与具有 $U(N)$规范群的 $\mathcal{N}=4$ 超杨-米尔斯（SYM）半BPS扇区有关。反德西特/共形场论对应使不变多项式函数的分类及其关联函数的计算成为关注重点。文献 [7] 指出，对于高维算符，SYM 中多重迹与反德西特中的多粒子态之间的标准映射会失效，这与多重迹不具正交性有关；这种正交性是针对由全纯与反全纯规范不变算符的二点函数构造的内积而言的。子行列式算符也被提出作为在 S^5中延展的巨引力子的 SYM 对偶。因此，正交基被认为对于识别共形场论中与高维局域算符对应的量子态的体时空对偶至关重要。这促成了对维数为 n的 $U(N)$ $\mathcal{N}=4$SYM 理论中的半 BPS 算符进行分类，这些算符$\mathcal{O}_R(Z)$由带有 n 个方框 [8]的杨图 R 标记。研究表明，这些算符在自由场内积下正交；这一结果促成了关于 SYM 中半 BPS 规范不变算符与弦理论中的巨引力子之间一般映射的提议。该提议区分了在 S^5 中延展的巨引力子与在 AdS_5中延展的巨引力子，并根据杨图区分单巨引力子态与多巨引力子态。该提议通过了若干非平凡检验：研究者计算了 SYM 中高维算符的三点函数，并将结果与 $AdS_5\times S^5$ 中的计算进行比较（见 [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]）。自由场内积也可等价地表示为高斯矩阵模型关联函数。 $\mathcal{O}_R(Z)$ $\equiv\chi_R(Z)$的具体形式将在第2.2节的（2.42）式中回顾：它们是由对称群的特征标 S_n加权的多重迹算符线性组合。内积计算为

$$\langle\mathcal{O}_R(Z)\mathcal{O}_S(Z^\dagger)\rangle=\delta_{RS}\frac{n!\mathrm{Dim}_N(R)}{d_R} \tag{1.1}$$

其中，$\mathrm{Dim}_N R$是与杨图 R相关联的 $U(N)$不可约表示的维数。本文始终将这一对象称为二点关联函数。之所以采用这一名称，是因为矩阵 Z 和 $Z^\dagger$ 被插入时空中的某个给定点，而本文遵循的惯例是省略这种时空依赖性。在第2.2节中，我们通过引入矩阵耦合 A，对标准高斯矩阵模型积分进行修正。配分函数相应地修改为：

$$\int[dZ]e^{-\mathrm{Tr}(ZZ^\dagger)}\to\int[dZ]e^{-\mathrm{Tr}(ZAZ^\dagger)} \tag{1.2}$$

文献 [17]中已经研究过厄米矩阵模型的类似修正。我们用下标 A 表示采用这一修正作用量计算的关联函数，并证明

$$\boxed{\langle\mathcal{O}_R(Z)\mathcal{O}_S(Z^\dagger)\rangle_A=\delta_{RS}\frac{n!\mathcal{O}_R(B)}{d_R}} \tag{1.3}$$

其中 $B=A^{-1}$。(1.1) 右侧可通过令 B 等于一个单位矩阵，从 (1.3) 的右侧得到。依赖于矩阵耦合的结果是通过推广

[8]和 [18] 中的组合学与图解技术，以适用于背景矩阵耦合的情形而得到的。

对于维数为 n 、满足 $n < N$ 的算符，一种常见的算符基由迹结构构成。对于维数为 n 的算符，不同的迹结构可用整数 $p = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 来参数化，这些整数表示不同迹的幂次

$$\mathcal{O}_p(Z) = (\mathrm{tr}Z)^{p_1}(\mathrm{tr}Z^2)^{p_2}\cdots(\mathrm{tr}Z^n)^{p_n} \tag{1.4}$$

这些整数满足

$$n = p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n = \sum_{i=1}^{n} ip_i \tag{1.5}$$

也就是说，它们定义了 n 的一个分拆。 $\mathcal{O}_p$ 与 $\mathcal{O}_R$ 之间的线性基变换为

$$\mathcal{O}_R(Z) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi^R(\sigma)\ \mathcal{O}_\sigma(Z) = \frac{1}{n!}\sum_{p\vdash n}\chi_p^R\ \mathcal{O}_p(Z) \tag{1.6}$$

其中， χ_p^R 是共轭类 p 中任意置换 $\sigma^{(p)}$ 的特征标，该共轭类属于 S_n； $|T_p|$ 是共轭类 p 中群元素的数量，并且

$$\mathcal{O}_p(Z) = |T_p|\mathcal{O}_{\sigma^{(p)}}(Z)\,. \tag{1.7}$$

对于 $n > N$，算符 $\mathcal{O}_p(Z)$ 构成一个过完备基，这是由于有限 N 迹关系所致。有限 N 态空间可用杨图基元素 $\mathcal{O}_R(Z)$ 简洁地描述。我们只需舍弃所有满足 $l(R) > N$ 的杨图，其中 $l(R)$ 是杨图 R 的行数。二点函数 (1.1) 体现了这一截断，因为右端视为关于 N 的多项式时，在 $l(R) > N$ 的情况下会消失。迹基下的二点函数为

$$\langle\mathcal{O}_{p_1}(Z)(\mathcal{O}_{p_2}(Z))^\dagger\rangle = n!\sum_{p_3\vdash n} C_{p_1,p_2}^{p_3} N^{C_{p_3}} \tag{1.8}$$

其中 $C_{p_1,\ p_2}^{p_3}$ 是由$\mathcal{Z}(\mathbb{C}(S_n))$的中心构成的交换代数的结构常数。这些内容将在第 2 节中作更明确的说明。

分拆 p 确定了 S_n中的一个共轭类。共轭类中群元素的形式求和记作 T_p，它是群代数 $\mathbb{C}(S_n)$ 中的一个元素，并且与 $\mathbb{C}(S_n)$中的所有元素都可交换。当 p 遍历 n的所有分拆时，这些 T_p 构成 $\mathbb{C}(S_n)$中心的一组基。这两个中心元的乘积可按同一组基展开

$$T_{p_1}T_{p_2} = \sum_{p_3} C_{p_1,p_2}^{p_3} T_{p_3} \tag{1.9}$$

其中 $C_{p_1,\ p_2}^{p_3}$ 是代数 $\mathcal{Z}(\mathbb{C}(S_n))$中乘法的结构常数。我们将证明，加入背景矩阵耦合 A后，方程 (1.8) 可作简单修改

$$\boxed{\langle\mathcal{O}_{p_1}(Z)(\mathcal{O}_{p_2}(Z))^\dagger\rangle_A = n!\sum_{p_3\vdash n} C_{p_1,p_2}^{p_3}\mathcal{O}_{p_3}(B)} \tag{1.10}$$

这表明，在存在背景矩阵耦合的情况下，对称群的类代数可以通过矩阵模型关联函数直接实现。在 (1.9) 中，我们

仅在代数内部就能直接得到相同的结构常数，与矩阵元无关。从 (1.9) 到 (1.10)，我们只是用矩阵模型量来修饰代数元素:

$$\begin{aligned} T_{p_1} &\to \mathcal{O}_{p_1}(Z) \\ T_{p_2} &\to (\mathcal{O}_{p_2}(Z))^\dagger \\ T_{p_3} &\to \mathcal{O}_{p_3}(B) \end{aligned} \tag{1.11}$$

有限群的共轭类数与不可约表示数相等，这是一个熟知的数学事实。与之相关的一个事实是，在群代数的中心中，存在一种基变换，将以共轭类标记的基变为以不可约表示标记的基。对于 S_n，我们有一组（未归一化的）投影算符

$$P_R = \frac{1}{n!}\sum_p \chi_p^R T_p \tag{1.12}$$

乘　　法在这组基下是对角的，即只有两个投影算符相同时，乘法结果才非零:

$$P_{R_1} P_{R_2} = \delta_{R_1 R_2}\frac{P_{R_1}}{d_{R_1}} \tag{1.13}$$

为得到 (1.3)，我们应用同一个映射 (1.11)

$$\begin{aligned} P_{R_1} &\to \mathcal{O}_{P_{R_1}}(Z) \equiv \mathcal{O}_{R_1}(Z) \\ P_{R_2} &\to (\mathcal{O}_{P_{R_2}}(Z))^\dagger \equiv \mathcal{O}_{R_2}(Z^\dagger) \\ P_{R_3} &\to \mathcal{O}_{P_{R_3}}(B) \equiv \mathcal{O}_{R_3}(B) \end{aligned} \tag{1.14}$$

我们对舒尔基下精细二点关联函数的推导，实际上是先推导 (1.10)，然后再进行傅里叶变换。类比超可积性文献中的类似结果，或许可以预期得到结果 (1.3)。我们的推导表明，这一结果可通过对一个隐藏对称代数进行傅里叶变换得出；该代数蕴含在不变算符的组合学之中，并且在背景矩阵耦合存在时变得显而易见（如 (1.10) 所示）。

[17] 中的超可积性结果还包括一些例子，其中可观测量中除量子（已积分）矩阵外，还包含一个经典（未积分）矩阵。受这些结果的启发，我们也证明，通过考虑由经典场和量子场共同构造的规范不变算符，可以得到一个与 (1.3) 类似的方程。结果形式如下

$$\boxed{\left\langle \mathcal{O}_R(ZA)\left(\mathcal{O}_S(ZA)\right)^\dagger \right\rangle = \frac{\delta_{RS} n!}{d_R}\mathcal{O}_S(B)\,,} \tag{1.15}$$

此处我们现在有 $B = A^\dagger A$。这也与在代数$\mathcal{Z}(\mathbb{C}(S_n))$上进行傅里叶变换有关，因为该代数的结构常数会出现在由置换标记的算符的二点函数中。在具有 $\mathcal{N}=4$ SYM 的反德西特/共形场论对应背景下，该理论包含三个复矩阵 X，Y，Z，矩阵 A可以是 Y，X，它们与 Z在伴随表示的 $U(N)$ 作用下以相同方式变换，因此，可观测量 $\mathcal{O}_R(ZA)$ 在对 Z 和 A同时进行规范变换时保持规范不变。

在作用量中作为耦合项出现的经典矩阵称为矩阵赝场。赝场是量子场论中的耦合常数，被提升为场（例如参见

[19] 近期关于有效场论的讨论）。在此，矩阵 A 可视为零维量子场论中的矩阵赝场。无论我们考虑的是作为作用量中耦合常数的经典（未积分）矩阵，还是出现在可观测量内部的经典矩阵，所得结果在代数性质上都相同，因此，为矩阵模型中经典场的这两种用途采用一个统一名称是很自然的。我们提议使用“矩阵见证”这一统称，涵盖矩阵所承担的任一角色。这一说法也令人联想到：在经典/量子相互作用中，经典对象会充当测量仪器。我们将此处定义的见证在量子信息论中的应用留待未来探索，这是一个引人入胜的问题。

受附着在巨引力子上的开弦的共形场论描述启发，正交关系 (1.1) 已被推广到多矩阵系统 [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]。对作为量子引力组合模型 [27, 28, 29, 30, 31]以及规范-弦对偶模型 [32] 的张量模型的研究，也促成了正交关系的张量推广 [33, 34, 35, 36]。人们已经认识到，表示论基的这些正交方程与置换中心化子代数 [37]有关。一般而言，这些是非交换代数。其出发点是，可观测量可以通过一组置换构造，这组置换用于参数化矩阵场或张量场的上、下指标之间的缩并。我们将这些称为参数化置换。参数化置换存在冗余，而这些冗余本身由一个更小的置换群描述。将这个更小的置换群视为赋予离散参数化置换集合一种离散规范对称性，是很有帮助的。规范等价的参数化置换会产生相同的规范不变多项式。对于具有 U 个 (N) 次数为 n 的不变量的单矩阵问题，

$$\begin{aligned} \text{Parameterising permutations}: &\quad G = S_n \\ \text{Gauge permutations}: &\quad H = S_n \end{aligned} \tag{1.16}$$

对于具有 $U(N)$ 个不变量的双矩阵问题，其中一个矩阵的次数为 m，另一个矩阵的次数为 n

$$\begin{aligned} \text{Parameterising permutations}: &\quad G = S_{m+n} \\ \text{Gauge permutations}: &\quad H = S_m \times S_n \subset S_{m+n} \end{aligned} \tag{1.17}$$

在上述两种情况下，规范置换都通过共轭作用于 G。对于复三指标张量 Φ，它在 $U(N)$ 的基本表示 V_N 的三重张量积 $V_N \otimes V_N \otimes V_N$ 中变换，构造 Φ 中次数为 n 的不变量以及 Φ_-，可以通过以下方式完成

$$\begin{aligned} \text{Parameterising permutations}: &\quad G = S_n \times S_n \times S_n \\ \text{Gauge permutations}: &\quad H = \mathrm{Diag}(S_n) \times \mathrm{Diag}(S_n) \end{aligned} \tag{1.18}$$

$\mathrm{Diag}(S_n)$ 是 $S_n \times S_n \times S_n$ 的对角子群，由置换 $\gamma \in S_n$ 组成，它们以对角方式嵌入 $S_n \times S_n \times S_n$ 中，形式为 (γ, γ, γ)。将一般参数化的 $S_n \times S_n \times S_n$ 元素写成有序三元组 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$，其中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$，规范置换$\gamma_L, \gamma_R \in S_n$ 的作用为

$$(\gamma_L, \gamma_R) : (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \to (\gamma_L \sigma_1 \gamma_R, \gamma_L \sigma_2 \gamma_R, \gamma_L \sigma_3 \gamma_R) \tag{1.19}$$

其中，γ_L 在左侧作对角作用，而 γ_R 在右侧作对角作用。在上述所有情形中，H 的群作用将 G 中的置换集合划分为规范轨道。同一轨道内对 H作用下的 G-置换求和，与 H对易，并构成一个（G，H）置换中心化子代数（PCA）的组合基。其定义为

群代数 $\mathbb{C}(G)$中由 H的元素保持不变的子空间。关于置换中心化子代数的更详细且更一般的论述见 [37]。二矩阵模型的 PCA 与 Littlewood-Richardson 系数（ S_{m+n} 的不可约表示限制到子群 $S_m \times S_n$时的约化重数）密切相关；而张量模型的 PCA（记作 $\mathcal{K}(n)$）则与 S_n 的不可约表示张量积的克罗内克系数（克莱布什–戈丹重数）相关。这些后者的代数已被用于将克罗内克系数的平方表示为组合定义的整数矩阵零空间的维数：零向量可通过标准的组合整数矩阵算法 [38, 39]求得。利用 $\mathcal{K}(n)$上的一个对合，这些论述可推广到克罗内克系数本身。

置换中心化子代数的一个重要特征是，存在一种从组合基到韦德伯恩–阿廷基的基变换（傅里叶变换）；该基由表示论数据标记（即一组杨图及其相应的表示论重数标签）。韦德伯恩–阿廷基表明，这些结合代数同构于矩阵代数的直和。文献 [40] 以我们认为物理学家容易理解的形式，对结合代数的 Wedderburn-Artin定理作了一般性讨论。第 3、4、5 节开篇将回顾一些显式方程，这些方程描述了基如何体现其与矩阵代数直和的同构，并借鉴了物理学文献中的相关背景。本论文结果的总体概述见图 1。

本文组织如下。第 2 节针对复单矩阵模型，推导本引言前文概述的结果。第 3 节针对复双矩阵模型，推导所有类似结果。第 4 节将这一讨论推广到复多矩阵模型。第 5 节介绍 Kronecker PCA 的结构常数如何通过张量见证场产生；这些张量见证场出现在量子（已积分）和经典（未积分）张量场的规范不变复合算符中。

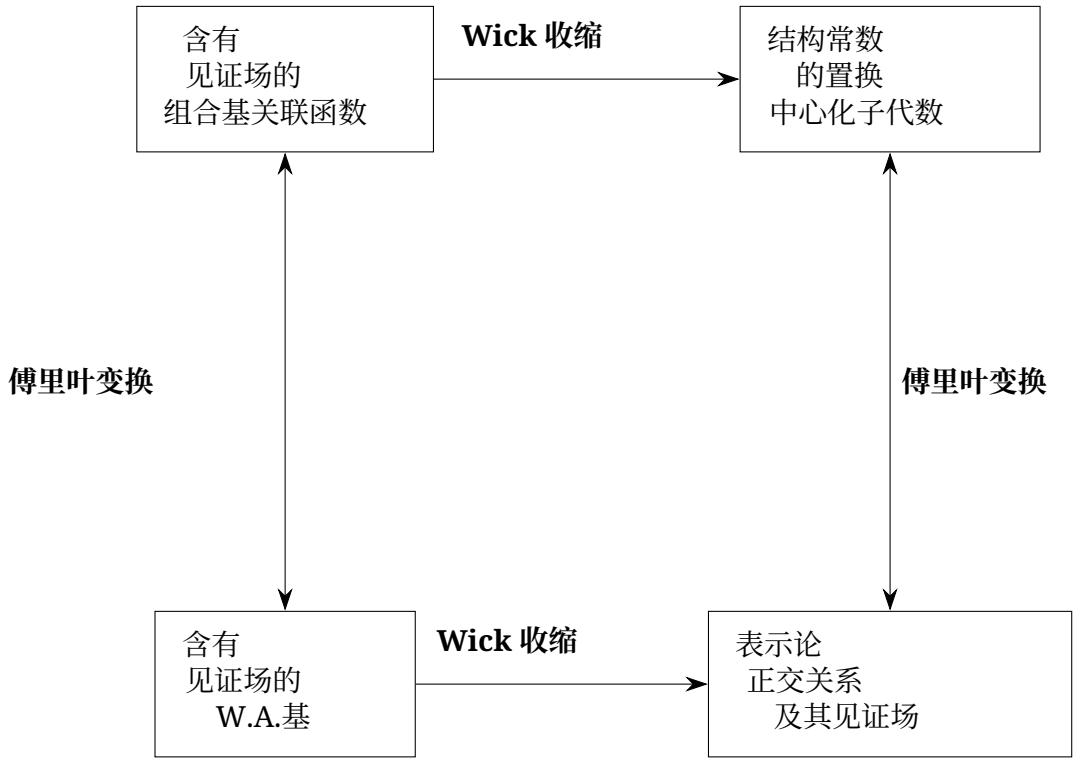

图 1： 该示意图展示了本文的核心结果。傅里叶变换的作用在组合基与韦德伯恩-阿廷基之间进行转换，而 Wick 收缩则用于推导关联函数的正交关系以及相关置换中心化子代数的结构常数。

2 代数与带有矩阵见证的单矩阵关联函数

本节考虑一个大小为 N 的单个复矩阵 Z 的复矩阵模型，该矩阵在 $U(N)$ 的伴随表示下变换；这一模型与具有 $U(N)$ 规范群的 $\mathcal{N}=4$SYM 理论的半BPS扇区相关。我们首先沿用先前工作 [8, 18] 中的记号。次数为 n 的全纯规范不变函数是维数为 n 的 BPS 算符。它们是 Z 的幂的迹的乘积。对于 $N\times N$、复矩阵 Z 和置换 $\sigma\in S_n$，我们可以将规范不变算符（GIO）定义为

$$\mathcal{O}_\sigma(Z)=Z^{i_1}_{i_{\sigma(1)}}\dots Z^{i_n}_{i_{\sigma(n)}}=\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}(Z^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma)\,. \tag{2.1}$$

指标 i_1，$\cdots$，i_n 在范围 $\{1,\cdots,N\}$ 内求和。最后一个表达式表示，$\mathcal{O}_\sigma(Z)$ 是两个线性算子乘积 $Z^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma$ 在 $U(N)$ 的 N 维基本表示 V_N 的 n 重张量积上的迹。这里，$\mathcal{L}_\sigma$ 在基向量张量积上的作用如下

$$\mathcal{L}_\sigma\left|e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\right\rangle=\left|e_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\sigma(n)}}\right\rangle\,. \tag{2.2}$$

由此可直接推出，这些 GIO 满足

$$\mathcal{O}_\sigma(Z)=\mathcal{O}_{\gamma\sigma\gamma^{-1}}(Z) \tag{2.3}$$

其中 $\gamma\in S_n$。这一不变性意味着，全纯规范不变量可以用置换的等价类 $\sigma\in S_n$ 来描述，这些等价类由置换 $\gamma\in S_n$ 的共轭作用得到：

$$\sigma\sim\gamma\sigma\gamma^{-1} \tag{2.4}$$

等价类内置换的求和 σ 属于群代数 $\mathbb{C}[S_n]$ 的中心 $\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$。这些等价类是 S_n 中的共轭类，与 n 的分拆 p 相关联；这些分拆描述置换的循环结构。我们将与分拆 p 相关联的置换共轭类记为 $\mathbf{C}_p$，并令 $\sigma^{(p)}$ 为类 $\mathbf{C}_p$ 中任意选取的置换。自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{Z}}\left(\sigma^{(p)}\right)$ 是 S_n 的子群，它在共轭作用下保持 $\sigma^{(p)}$ 不变，即由满足 $\gamma\sigma^{(p)}\gamma^{-1}=\sigma^{(p)}$ 的置换 $\gamma\in S_n$ 组成的稳定子群。该稳定子群的阶仅取决于 p，而与 $\sigma^{(p)}$ 的选择无关；我们将此阶记为 $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{Z}}(p)|$。我们定义以分拆 p 标记的中心元 T_p 如下：

$$T_p=\frac{1}{|\mathrm{Aut}_{\mathcal{Z}}(p)|}\sum_{\gamma\in S_n}\gamma\sigma^{(p)}\gamma^{-1}=\sum_{\alpha\in\mathbf{C}_p}\alpha\quad\in\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]\,. \tag{2.5}$$

由于中心元 T_p 对所有 $\gamma\in S_n$ 都满足 $T_p=\gamma T_p\gamma^{-1}$。该类的大小记为 $|\mathbf{C}_p|=|T_p|$，值得注意的是 $|T_p|=\frac{n!}{|\mathrm{Aut}_{\mathcal{Z}}(p)|}$。

代数 $\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$ 是[37]中所定义的置换中心化子代数（PCA）的一个例子。正如引言中所述，本文所用 PCA 的定义涉及一组参数化置换和一组规范置换。在本例中，参数化置换 σ 和规范置换 γ 均为 S_n 中的一般置换（如式 (1.16) 所示）。第 2.1 节将说明，在存在可逆矩阵耦合 $A=B^{-1}$的情况下，涉及一个全纯规范不变算符和一个反全纯规范不变算符的二点函数可以用代数 $\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$的结构常数表示。第 2.2 节中，我们将从以下基底进行傅里叶变换

$\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$ 该基底以分拆 p 为标签，变换到以杨图为标签的基底，从而说明以杨图为标签的算符构成二点函数的正交基。第 2.3 节中，我们考察将矩阵 Z 替换为矩阵乘积 ZY的规范不变算符，其中 Y是另一个复矩阵（例如 $\mathcal{N}=4$ SYM 中存在的复矩阵），在 $U(N)$的伴随表示下变换。我们定义二点函数，其中对 Z积分，而 Y则作为未积分的经典场保留。我们证明，结果可用 $\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$的结构常数表示。第 2.4 节中，我们通过傅里叶变换，得到杨图基底下的正交二点函数。因此，无论考虑矩阵耦合还是矩阵经典场，结果都具有相同的结构；这两者均称为见证场的例子。本节的结果为后续各节提供了模板，后续各节将以适当的 PCA 替换 $\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$，而这些 PCA 通常是非交换的。

2.1 矩阵耦合下的一般算符二点函数

耦合见证矩阵 A 对应的单矩阵模型配分函数为

$$\Sigma[0]=\int[dZ]e^{-\mathrm{Tr}(ZAZ^\dagger)}\,, \tag{2.6}$$

并且在全文中，我们取 A 为正定厄米矩阵。在附录 A 中，我们推导了基本关联函数 [1]

$$\langle Z_j^i(Z^\dagger)_l^k\rangle=\frac{1}{\Sigma[0]}\int[dZ]Z_j^i(Z^\dagger)_l^k e^{-\mathrm{Tr}(ZAZ^\dagger)}=\delta_l^i(A^{-1})_j^k=\delta_l^iB_j^k\,, \tag{2.7}$$

其中我们令 $B=A^{-1}$，并在下文将 B 称为耦合见证场。回顾式 (2.1) 中 GIO 的置换参数化

$$\mathcal{O}_\sigma(Z)=\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}(Z^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma)=Z^{i_1}_{i_{\sigma(1)}}\dots Z^{i_n}_{i_{\sigma(n)}}\,, \tag{2.8}$$

厄米共轭为

$$(\mathcal{O}_\sigma(Z))^\dagger=\left(\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}(Z^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma)\right)^\dagger=(Z^\dagger)^{i_1}_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\dots(Z^\dagger)^{i_n}_{i_{\sigma^{-1}(n)}}=\mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(Z^\dagger)\,. \tag{2.9}$$

取式 (2.8) 与式 (2.9) 乘积的期望值，可得带有耦合矩阵场的 GIO 的二点函数/关联函数

$$\begin{aligned}
&\langle\mathcal{O}_{\sigma_1}(Z)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(Z))^\dagger\rangle\\
&\quad=\frac{1}{\Sigma[0]}\int[dZ]\mathcal{O}_{\sigma_1}(Z)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(Z))^\dagger e^{-\mathrm{Tr}(ZAZ^\dagger)} &(2.10)\\
&\quad=\langle\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}(Z^{\otimes n}\mathcal{L}_{\sigma_1})\left(\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}(Z^{\otimes n}\mathcal{L}_{\sigma_2})\right)^\dagger\rangle &(2.11)\\
&\quad=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_n\\ j_1,j_2,\dots,j_n}}\left\langle Z^{i_1}_{i_{\sigma_1(1)}}\dots Z^{i_n}_{i_{\sigma_1(n)}}(Z^\dagger)^{j_1}_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}}\dots(Z^\dagger)^{j_n}_{j_{\sigma_2^{-1}(n)}}\right\rangle &(2.12)\\
&\quad=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_n\\ j_1,j_2,\dots,j_n}}\sum_{\gamma\in S_n}\delta^{i_1}_{j_{\sigma_2^{-1}(\gamma(1))}}\dots\delta^{i_n}_{j_{\sigma_2^{-1}(\gamma(n))}}B^{j_{\gamma(1)}}_{i_{\sigma_1(1)}}\dots B^{j_{\gamma(n)}}_{i_{\sigma_1(n)}} &(2.13)\\
&\quad=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_n\\ j_1,j_2,\dots,j_n}}\sum_{\gamma\in S_n}\delta^{i_1}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}\dots\delta^{i_n}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(n)}}B^{j_{\gamma(1)}}_{i_{\sigma_1(1)}}\dots B^{j_{\gamma(n)}}_{i_{\sigma_1(n)}} &(2.14)
\end{aligned}$$

[1] 另请注意，$\langle Z_j^iZ_l^k\rangle=\langle(Z^\dagger)_j^i(Z^\dagger)_l^k\rangle=0$。

$$= \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n \\ j_1,j_2,\ldots,j_n}} \sum_{\gamma\in S_n} \delta^{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(1)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}} \ldots \delta^{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(n)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(n)}} B^{j_1}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(1)}} \ldots B^{j_n}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(n)}} \tag{2.15}$$

$$= \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} \sum_{\gamma\in S_n} B^{j_1}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}} \cdots B^{j_n}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(n)}} \tag{2.16}$$

$$= \sum_{\gamma\in S_n} \mathrm{Tr}^{V_N^{\otimes n}}(B^{\otimes n}\mathcal{L}_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}}), \tag{2.17}$$

在（2.13）中，运用维克定理，将关联函数写成对置换的求和$\gamma \in S_n$，并结合（2.7）中的基本关联函数。（2.14）与（2.15）两个方程之间的推导用到了以下恒等算子

$$\delta^{i_{\tau(1)}}_{j_{\sigma(1)}} \ldots \delta^{i_{\tau(n)}}_{j_{\sigma(n)}} = \delta^{i_1}_{j_{\tau^{-1}\sigma(1)}} \ldots \delta^{i_n}_{j_{\tau^{-1}\sigma(n)}} \tag{2.18}$$

其中，置换对一个数 a的作用为 $\tau^{-1}\sigma(a) = \sigma(\tau^{-1}(a))$，即所选约定是先作用最左侧的置换（从左到右）。我们将称δ函数乘积的这一恒等式为克罗内克等变性。它可通过重新排列克罗内克δ函数得到。在方程 (2.15) 中，我们还用到了恒等式

$$B^{j_{\gamma(1)}}_{i_{\sigma_1(1)}} \ldots B^{j_{\gamma(n)}}_{i_{\sigma_1(n)}} = B^{j_1}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(1)}} \ldots B^{j_n}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(n)}} . \tag{2.19}$$

这可通过类似地重新排列 B-矩阵元得到。最终的方程 (2.17) 将关联函数写成对 V_N 的 n 重张量积取迹。

理解推导结构并预见结果的一种巧妙方法，是使用张量空间中线性算子的图示表示 [18, 26]。图2左侧展示了原始二点函数，右侧则用置换算符和耦合矩阵的张量积替代了矩阵变量。要从图中得到结果，只需沿一条分支向下追踪，并依次相乘遇到的 $B^{\otimes n}$ 和 $\mathcal{L}$ 算子框。每条分支上的水平线表示取迹，即将图的底部与顶部连接起来。因此，该图表达了关联函数方程

$$\langle \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}(Z^{\otimes n}\mathcal{L}_{\sigma_1})\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}((Z^\dagger)^{\otimes n}\mathcal{L}_{\sigma_2^{-1}})\rangle = \sum_{\gamma\in S_n} \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}(B^{\otimes n}\mathcal{L}_{\gamma^{-1}}\mathcal{L}_{\sigma_1}\mathcal{L}_{\gamma}\mathcal{L}_{\sigma_2^{-1}}) , \tag{2.20}$$

并且，我们从右侧图中 $B^{\otimes n}$ 开始，推导出右边的方程。根据定义 (2.2)，可以证明，多个置换算符作用于张量空间时遵循规则 $\mathcal{L}_\sigma\mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_{\sigma\tau}$，其中 $\sigma\tau(i) = \tau(\sigma(i))$ 表示元素的复合，并采用从左到右的约定。图3以图示方式呈现了这一作用。利用这一事实，表达式 (2.20) 可化简为式 (2.16) 中推导出的结果。关于图示解释和线性算子的更详细讨论，请参见附录B。

与先前不含见证矩阵场的研究一样，这个二点函数自然与这些置换之积的循环结构相关。

$$\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(Z)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(Z))^\dagger\rangle = \sum_{\gamma\in S_n} \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} B^{j_1}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}} \cdots B^{j_n}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(n)}} \tag{2.21}$$

$$= \sum_{\gamma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} \left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})} \tag{2.22}$$

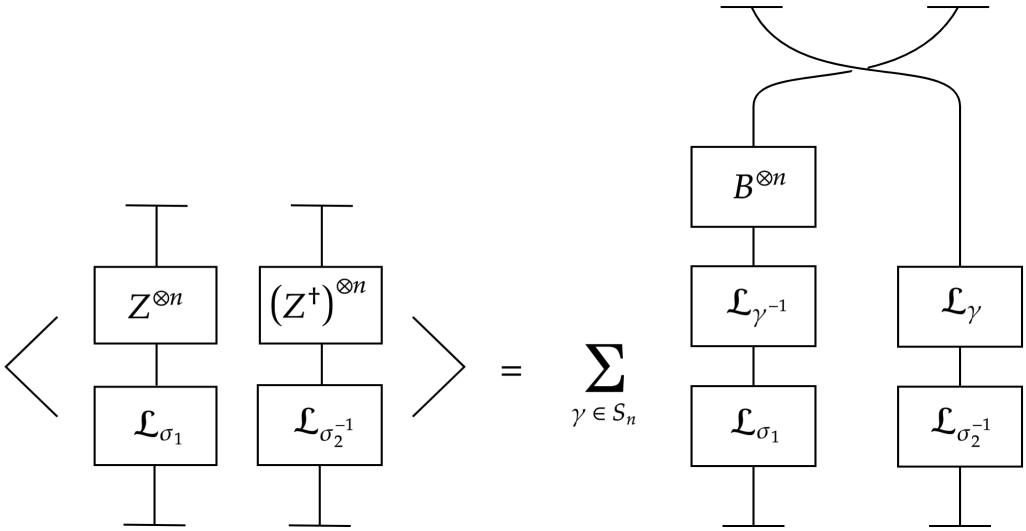

图2： 含耦合见证场的单矩阵关联函数的图示表示。这些规范不变算符的期望值可以写成对置换的求和：通过交换 $Z^{\otimes n}$ 和 $(Z^\dagger)^{\otimes n}$，将置换算符 $\mathcal{L}_{\gamma^{-1}}$ 和 $\mathcal{L}_\gamma$插入 $B^{\otimes n}$，然后交换指标。通过 Wick 收缩插入 (γ^{-1}, γ) 置换时，耦合见证矩阵 B 的这一张量积会被纳入其中，使用方程 (2.7)。

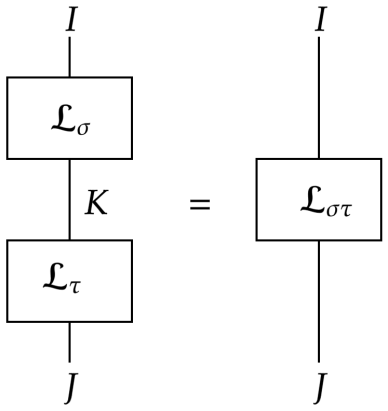

图3： 线性算子 $\mathcal{L}_\sigma$和 $\mathcal{L}_\tau$乘法的图示解释。用这些算子的张量分量表示，$(\mathcal{L}_\sigma)^{i_1 \dots i_n}_{k_1 \dots ,\dots,,k_n}(\mathcal{L}_\tau)^{k_1 \dots k_n}_{j_1 \dots ,\dots,,j_n} = (\mathcal{L}_{\sigma\tau})^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n,\dots,,}$，其中对重复的 k 指标求和是隐含的。

$$= \sum_{\sigma_3 \in S_n} \sum_{\gamma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} \left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\sigma_3)} \delta(\sigma_3^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) \,. \tag{2.23}$$

这里，“Tr”表示矩阵迹，而 $C_i(\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})$表示置换 $\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}$中长度为 i的循环数。在(2.23)中，利用$\sigma_3 \in S_n$引入了置换上的狄拉克δ函数。其定义为：对于 $\sigma = e$ （单位元），$\delta(\sigma) = 1$；对于所有其他元素，$\delta(\sigma) = 0$。由此，也可以清楚地显现出关联函数中底层PCA的出现。由于 σ_3 求和遍历整个群，因此可以按共轭类/分拆进行分解。

$$\sum_{\sigma_3 \in S_n} \sum_{\gamma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} \left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\sigma_3)} \delta(\sigma_3^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})$$

$$= \sum_{\gamma\in S_n}\sum_{p_3\vdash n}\left(\sum_{\alpha\in\mathbf{C}_{p_3}}\prod_{i=1}^{n}\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\alpha)}\delta(\alpha^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})\right) \tag{2.24}$$

$$= \sum_{\gamma\in S_n}\sum_{p_3\vdash n}\prod_{i=1}^{n}\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i\left(\sigma^{(p_3)}\right)}\delta\left(\sum_{\alpha\in\mathbf{C}_{p_3}}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}\right) \tag{2.25}$$

$$= \sum_{p_3\vdash n}\mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B)\sum_{\gamma\in S_n}\delta\left(T_{p_3}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}\right), \tag{2.26}$$

其中， p_3 标记分解中的共轭类。注意，此处将 $C_i(\alpha)$ 替换为 $C_i(\sigma^{(p_3)})$，因为 α 和 $\sigma^{(p_3)}$ 都表示来自共轭类 $\mathbf{C}_{p_3}$的置换，因此具有相同的循环结构。因此，对 α 的求和可以移入狄拉克δ函数中；由于 α 和 α^{-1} 属于同一个共轭类 $\mathbf{C}_{p_3}$，故使用 PCA 元素 $T_{p_3}=\sum_{\alpha\in\mathbf{C}_{p_3}}\alpha=\sum_{\alpha\in\mathbf{C}_{p_3}}\alpha^{-1}$。公式（2.26）于是给出

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i\left(\sigma^{(p_3)}\right)}=\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}\left(B^{\otimes n}\mathcal{L}_{\sigma^{(p_3)}}\right)=\mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B), \tag{2.27}$$

按照公式（2.1）中的一般定义，并再次注意到 $\sigma^{(p_3)}$ 是共轭类 $\mathbf{C}_{p_3}$中的任意一个代表置换。此时，引入以下引理会很有帮助。

引理 1. 对于 γ、σ_1、$\sigma_2\in S_n$、$T_{p_i}\in\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$，以下等式成立

$$\sum_{\gamma\in S_n}\delta(T_{p_3}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})=\frac{n!|T_{p_3}|}{|T_{p_1}||T_{p_2}|}C_{p_1p_2}^{p_3} \tag{2.28}$$

其中，$C_{p_1p_2}^{p_3}$ 是一个 $\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$ *PCA*结构常数， σ_1和σ_2^{-1}分别属于共轭类$\mathbf{C}_{p_1}$、$\mathbf{C}_{p_2}$ 。

证明。

$$\sum_{\gamma\in S_n}\delta(T_{p_3}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})=\sum_{\mu_1\in S_n}\delta\left(T_{p_3}(\mu_1\mu_2)^{-1}\sigma_1(\mu_1\mu_2)\sigma_2^{-1}\right) \tag{2.29}$$

$$=\sum_{\mu_1\in S_n}\delta\left((\mu_2^{-1}\mu_2)T_{p_3}\mu_2^{-1}\mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1\mu_2\sigma_2^{-1}\right) \tag{2.30}$$

$$=\sum_{\mu_1\in S_n}\delta\left(\underbrace{\mu_2T_{p_3}\mu_2^{-1}}_{=T_{p_3}}\mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1\mu_2\sigma_2^{-1}\mu_2^{-1}\right) \tag{2.31}$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{\mu_1,\mu_2\in S_n}\delta\left(T_{p_3}(\mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1)(\mu_2\sigma_2^{-1}\mu_2^{-1})\right) \tag{2.32}$$

$$=\frac{1}{n!}\delta\left(T_{p_3}\left(\sum_{\mu_1\in S_n}\mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1\right)\left(\sum_{\mu_2\in S_n}\mu_2\sigma_2^{-1}\mu_2^{-1}\right)\right) \tag{2.33}$$

$$=\frac{|\mathrm{Aut}_{\mathcal{Z}}(p_1)||\mathrm{Aut}_{\mathcal{Z}}(p_2')|}{n!}\delta\left(T_{p_3}T_{p_1}T_{p_2'}\right) \tag{2.34}$$

$$=\frac{n!}{|T_{p_1}||T_{p_2}|}\delta\left(T_{p_3}T_{p_1}T_{p_2}\right)。 \tag{2.35}$$

在 (2.29) 中，对 γ 的求和已替换为对 μ_1 的求和，并带有 $\gamma \to \mu_1\mu_2$。(2.30) 中插入单位元 $e = \mu_2^{-1}\mu_2$；而 (2.31) 将置换 μ_2^{-1} 循环移至 δ 的右侧，并利用了 $T_{p_3} = \mu_2 T_{p_3}\mu_2^{-1}$。(2.32) 中引入了对 μ_2 的额外求和，并加入相应的归一化因子 $1/n!$（类似论证见附录 C）。方程 (2.33) 将求和合并到 δ函数中，由此在 (2.34) 中引入 PCA 元素，并根据 (2.5) 中的 PCA定义纳入自同构群的大小。我们令 σ_1 和 σ_2^{-1} 分别属于共轭类$\mathbf{C}^{p_1}$ 和 $\mathbf{C}^{p_2'}$：分拆/类标签上的撇号表示它们与某个逆置换相关。最后一步用到轨道-稳定子定理，根据该定理，自同构群的大小与共轭类/等价类的大小以及规范置换群的阶之间满足关系 $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{Z}}(p)| = |S_n|/|T_p|$。与 T_{p_3} 的情况相同，由于置换及其逆置换属于同一个共轭类，在 (2.35) 中随后去掉了撇号标签。

下一步将用到 PCA乘法和狄拉克δ函数的恒等式

$$\delta(T_{p_3}T_{p_1}T_{p_2}) = \sum_{p_k} C_{p_1p_2}^{p_k}\delta(T_{p_3}T_{p_k}) = \sum_{p_k}\delta_{p_3p_k}C_{p_1p_2}^{p_k}|T_{p_k}| = |T_{p_3}|C_{p_1p_2}^{p_3}\,. \tag{2.36}$$

因此

$$\sum_{\gamma\in S_n}\delta(T_{p_3}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) = \frac{n!|T_{p_3}|}{|T_{p_1}||T_{p_2}|}C_{p_1p_2}^{p_3}\,. \tag{2.37}$$

□

将此引理与方程(2.26)结合，便可直接看出，纳入耦合矩阵场后，关联函数可写为

$$\langle\mathcal{O}_{\sigma_1}(Z)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(Z))^\dagger\rangle = \sum_{p_3\vdash n}\mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B)\frac{n!|T_{p_3}|}{|T_{p_1}||T_{p_2}|}C_{p_1p_2}^{p_3}\,. \tag{2.38}$$

由于关联函数中的规范不变算符是共轭类的函数，我们可以写成 $\mathcal{O}_{\sigma_1}\equiv\mathcal{O}_{\sigma^{(p_1)}}$ 和 $\mathcal{O}_{\sigma_2}\equiv\mathcal{O}_{\sigma^{(p_2)}}$。此外，由于 PCA 元素是给定等价类中置换的求和，规范不变算符也可以写成组合基形式，即用 PCA 元素除以类的大小

$$\mathcal{O}_{\sigma^{(p_i)}} = \frac{1}{|T_{p_i}|}\mathcal{O}_{T_{p_i}} \equiv \frac{1}{|T_{p_i}|}\mathcal{O}_{p_i}\,. \tag{2.39}$$

因此，重新排列类大小因子后，最终结果可写为

$$\boxed{\langle\mathcal{O}_{p_1}(Z)(\mathcal{O}_{p_2}(Z))^\dagger\rangle = n!\sum_{p_3\vdash n}C_{p_1p_2}^{p_3}\mathcal{O}_{p_3}(B)} \tag{2.40}$$

这表明，将规范不变函数插入涨落场/量子场 Z 的组合基 $\mathcal{O}_{p_1}(Z)$,$(\mathcal{O}_{p_2}(Z))^\dagger$，等于见证场的规范不变函数的线性组合。通过为量子场和见证场的规范不变函数选择适当的基标签（p_1, p_2, p_3），即可精确重构结构常数 $C_{p_1p_2}^{p_3}$。令

方程 (2.22) 中的耦合矩阵等于单位矩阵，即 $B=\mathbb{I}$，即可与 $N\times N$ 的先前结果建立联系。

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(Z)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(Z))^\dagger\rangle &= \sum_{\gamma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}\left[\mathrm{Tr}(\mathbb{I}^i)\right]^{C_i(\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})}\\ &= \sum_{\gamma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}N^{C_i(\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})}\\ &= \sum_{\gamma\in S_n}N^{C_1(\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})+\cdots+C_n(\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})}\\ &= \sum_{\gamma\in S_n}N^{C_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}}}\,.\end{aligned}\tag{2.41}$$

其中，$C_i(\sigma)$ 是 σ 中长度为 i 的循环数，而 σ 中的循环总数为 C_σ。

2.2 矩阵耦合下二点函数的傅里叶基

上文已经确立了代数$\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$ 的结构常数与存在矩阵耦合时矩阵可观测量的二点关联函数之间的直接联系。本节将说明，对 $\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$ 进行傅里叶变换，将组合基映射到杨图基后，在矩阵耦合存在时会得到正交二点关联函数。这推广了杨图基算符（又称舒尔多项式算符）的正交性结果；该结果通过对杨图施加简单的截断来刻画有限 N效应，并揭示了 $\mathcal{N}=4$ SYM 中半 BPS 算符与巨引力子 [8, 41]之间的映射。在构造正交基时，傅里叶变换在代数上的作用已在 [25, 21, 26, 42, 37]中得到强调。

对单矩阵算子应用傅里叶变换（如 §2.1 所示），我们定义一般的规范不变算符为

$$\mathcal{O}_R(Z)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi_R(\sigma)\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(Z^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi_R(\sigma)\mathcal{O}_\sigma(Z)\,.\tag{2.42}$$

以及共轭算符

$$(\mathcal{O}_R(Z))^\dagger=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}(\chi_R(\sigma))^*\left(\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(Z^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma)\right)^\dagger=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi_R(\sigma)\left(\mathcal{O}_\sigma(Z)\right)^\dagger\,.\tag{2.43}$$

这里，R 表示 S_n的不可约表示（irrep），Z 是一个复矩阵，而$\chi_R(\sigma)$是元素 $\sigma\in S_n$ [8] 在表示 R 中的特征标。由于 S_n 表示的特征标可以选为实数，因此用到了这一事实：$(\chi_R(\sigma))^*=\chi_R(\sigma^{-1})=\chi_R(\sigma)$；算子 $\mathcal{O}_\sigma(Z)$则如前文（2.1）所定义。这些 $\mathcal{O}_R(Z)$（其中 R 有n个方框）构成了矩阵Z的 n次 $U(N)$不变多项式函数空间的一组基，其中 $U(N)$通过共轭作用于 Z。一般 GIO 两点函数的计算从以下内容开始：

$$\langle\mathcal{O}_R(Z)\left(\mathcal{O}_S(Z)\right)^\dagger\rangle=\frac{1}{(n!)^2}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\tau\in S_n}\chi_R(\sigma)\chi_S(\tau)\langle\mathcal{O}_\sigma(Z)\left(\mathcal{O}_\tau(Z)\right)^\dagger\rangle\,.\tag{2.44}$$

右侧出现的期望值正是上一节利用可观测量的置换参数化得到的关联函数。为方便起见，这里再次写出方程 (2.23) 给出的形式：

$$\langle\mathcal{O}_\sigma(Z)\left(\mathcal{O}_\tau(Z)\right)^\dagger\rangle=\sum_{\rho\in S_n}\sum_{\gamma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\rho)}\,,\tag{2.45}$$

将其代入 (2.44)，即可得到以下结果：

$$\langle \mathcal{O}_R(Z)\left(\mathcal{O}_S(Z)\right)^\dagger\rangle = \frac{1}{(n!)^2}\sum_{\substack{\sigma,\tau,\rho,\gamma\\ \in S_n}}\prod_{i=1}^{n}\chi_R(\sigma)\chi_S(\tau)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\rho)}. \tag{2.46}$$

为进一步简化关联函数，引入以下引理。

引理 2. 对于 σ、τ、ρ、$\gamma \in S_n$，且 $\chi_R(\sigma)$ 是 σ 在表示 R中的特征标，成立以下等式

$$\frac{1}{(n!)^2}\sum_{\substack{\sigma,\tau,\rho,\gamma\\ \in S_n}}\prod_{i=1}^{n}\chi_R(\sigma)\chi_S(\tau)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})\left[Tr(B^i)\right]^{C_i(\rho)} = \frac{n!\delta_{RS}}{d_R}\mathcal{O}_S(B)\,. \tag{2.47}$$

其中，d_R 是对称群的 R 表示的维数，$\boldsymbol{Dim}(V_R^{S_n})$。

证明。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n!)^2}\sum_{\substack{\sigma,\tau,\rho,\gamma\\ \in S_n}}\prod_{i=1}^{n}\chi_R(\sigma)\chi_S(\tau)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\rho)}\\
&\qquad= \frac{1}{(n!)^2}\sum_{\tau,\rho,\gamma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}\chi_R(\gamma\rho\tau\gamma^{-1})\chi_S(\tau)\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\rho)} &(2.48)\\
&\qquad= \sum_{\rho\in S_n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n!}\sum_{\tau\in S_n}\chi_S(\tau)\chi_R(\rho\tau)\right)\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\rho)} &(2.49)\\
&\qquad= \frac{\delta_{RS}}{d_S}\sum_{\rho\in S_n}\chi_S(\rho)\prod_{i=1}^{n}\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{\mathrm{Cyc}_i(\rho)} &(2.50)\\
&\qquad= \frac{\delta_{RS}}{d_S}\sum_{\rho\in S_n}\chi_S(\rho)\mathcal{O}_\rho(B) &(2.51)\\
&\qquad= \frac{n!\delta_{RS}}{d_R}\mathcal{O}_S(B)\,. &(2.52)
\end{aligned}$$

在方程 (2.48) 中，对 σ 求和以消去狄拉克δ函数；利用特征标在元素共轭下的循环不变性，消去 (2.49) 中对 γ的依赖，因此 γ 求和产生因子 $n!$ 恒等算子

$$\frac{1}{n!}\sum_{\tau\in S_n}\chi_S(\tau)\chi_R(\rho\tau) = \frac{\delta_{RS}}{d_S}\chi_S(\rho) \tag{2.53}$$

用于推导 (2.50)，并在 (2.51) 中应用了置换参数化的 GIO 的定义。最后，使用定义 (2.42)，将最终表达式写成见证场 B的表示基中的一个算子。

□

将方程 (2.46) 与上面的引理 2 结合，舒尔基中的关联函数便简化为

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_R(Z)\left(\mathcal{O}_S(Z)\right)^\dagger\rangle = \frac{n!\delta_{RS}}{d_R}\mathcal{O}_S(B)\,.} \tag{2.54}$$

该结果表明，两个舒尔多项式/算符的关联函数彼此正交，且正比于一个完全由见证场构造的舒尔多项式/算符，

这与近期关于矩阵模型超可积性的观点 [43, 44, 17]一致。此外，在方程 (2.54) 中取 $B = \mathbb{I}$（ $N \times N$ 单位矩阵），即可得到 [8] 的原始结果

$$\langle \mathcal{O}_R(Z) \left(\mathcal{O}_S(Z)\right)^\dagger \rangle = \frac{n!\delta_{RS}}{d_R} \mathcal{O}_S(\mathbb{I}) = \frac{n!\delta_{RS}}{d_R} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi_S(\sigma) N^{C_\sigma} = \mathrm{Dim}_N(S) \frac{n!\delta_{RS}}{d_R} , \quad (2.55)$$

利用恒等式 $\mathrm{Dim}_N(S) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi_S(\sigma) N^{C_\sigma}$，其中 $\mathrm{Dim}_N(S)$ 是酉群表示 S 的维数，而 C_σ 是 σ 中循环的总数。

2.3 量子场与经典场的规范不变函数（可观测量）

前几节通过将见证矩阵设为作用量中的耦合，推导出了单矩阵关联函数的结果。另一种方法是将算符本身定义为包含某个经典场。首先，将矩阵场定义为

$$(ZA)^i_j = \sum_k Z^i_k A^k_j \, . \quad (2.56)$$

其中 A 是经典见证矩阵， Z 是（量子）矩阵积分变量。然后定义规范不变算符

$$\mathcal{O}_\sigma(ZA) = \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}} \left((ZA)^{\otimes n} \mathcal{L}_\sigma \right) = (ZA)^{i_1}_{i_{\sigma(1)}} \dots (ZA)^{i_n}_{i_{\sigma(n)}} \quad (2.57)$$

及其厄米共轭

$$\left(\mathcal{O}_\sigma(ZA)\right)^\dagger = \left(\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}} \left((ZA)^{\otimes n} \mathcal{L}_\sigma \right) \right)^\dagger = (A^\dagger Z^\dagger)^{j_1}_{j_{\sigma^{-1}(1)}} \dots (A^\dagger Z^\dagger)^{j_n}_{j_{\sigma^{-1}(n)}} = \mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(A^\dagger Z^\dagger) \, . \quad (2.58)$$

现在，作用量中不含耦合矩阵场的路径积分为

$$\Sigma[0] = \int [dZ] e^{-\mathrm{Tr}\left(ZZ^\dagger\right)} \quad (2.59)$$

它产生基本关联函数

$$\langle Z^i_j (Z^\dagger)^k_l \rangle = \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dZ] Z^i_j (Z^\dagger)^k_l e^{-\mathrm{Tr}(ZZ^\dagger)} = \delta^i_l \delta^k_j \, . \quad (2.60)$$

因此，这些 GIO 的关联函数为

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(ZA) (\mathcal{O}_{\sigma_2}(ZA))^\dagger \rangle = & \sum_{I,J,K,L} A^{k_1}_{i_{\sigma_1(1)}} \dots A^{k_n}_{i_{\sigma_1(n)}} (A^\dagger)^{j_1}_{l_1} \dots (A^\dagger)^{j_n}_{l_n} \\ & \times \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dZ] Z^{i_1}_{k_1} \dots Z^{i_n}_{k_n} (Z^\dagger)^{l_1}_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}} \dots (Z^\dagger)^{l_n}_{j_{\sigma_2^{-1}(n)}} e^{-\mathrm{Tr}(ZZ^\dagger)} , \end{aligned} \quad (2.61)$$

其中，对 I, J, K, L 的求和表示对所有矩阵指标求和。为方便记号，我们定义一个关于见证场的函数

$$f(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}; \sigma_1) = A^{k_1}_{i_{\sigma_1(1)}} \dots A^{k_n}_{i_{\sigma_1(n)}} (A^\dagger)^{j_1}_{l_1} \dots (A^\dagger)^{j_n}_{l_n} \, , \quad (2.62)$$

其中， $\vec{i}$例如是一个向量，表示见证矩阵的所有可能 i 指标。根据这个定义，关联函数可写为

$\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(ZA) (\mathcal{O}_{\sigma_2}(ZA))^\dagger \rangle$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{I,J,K,L} f(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}; \sigma_1) \\
&\qquad \times \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dZ] Z^{i_1}_{k_1} \dots Z^{i_n}_{k_n} (Z^\dagger)^{l_1}_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}} \dots (Z^\dagger)^{l_n}_{j_{\sigma_2^{-1}(n)}} e^{-\mathrm{Tr}(ZZ^\dagger)}
\end{aligned} \tag{2.63}
$$

$$
= \sum_{I,J,K,L} f(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}; \sigma_1) \langle Z^{i_1}_{k_1} \dots Z^{i_n}_{k_n} (Z^\dagger)^{l_1}_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}} \dots (Z^\dagger)^{l_n}_{j_{\sigma_2^{-1}(n)}} \rangle \tag{2.64}
$$

$$
= \sum_{\gamma \in S_n} \sum_{I,J,K,L} f(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}; \sigma_1) \delta^{i_1}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(1)}} \dots \delta^{i_n}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(n)}} \delta^{l_{\gamma(1)}}_{k_1} \dots \delta^{l_{\gamma(n)}}_{k_n} \tag{2.65}
$$

$$
= \sum_{\gamma \in S_n} \sum_{J,K} (A^\dagger)^{j_{\gamma(1)}}_{k_1} \dots (A^\dagger)^{j_{\gamma(n)}}_{k_n} A^{k_1}_{j_{\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}} \dots A^{k_n}_{i_{\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(n)}} \tag{2.66}
$$

$$
= \sum_{\gamma \in S_n} \sum_{j_1,\dots,j_n} \left(A^\dagger A\right)^{j_1}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}} \dots \left(A^\dagger A\right)^{j_n}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(n)}} \tag{2.67}
$$

$$
= \sum_{\gamma \in S_n} \sum_{j_1,\dots,j_n} B^{j_1}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}} \cdots B^{j_n}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(n)}} \tag{2.68}
$$

$$
= \sum_{\gamma \in S_n} \sum_{\sigma_3 \in S_n} \prod_{i=1}^{n} \left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\sigma_3)} \delta(\sigma_3^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) \tag{2.69}
$$

$$
= \sum_{\gamma \in S_n} \sum_{p_3 \vdash n} \left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i\left(\sigma^{(p_3)}\right)} \delta\left(\sum_{\alpha \in \mathbf{C}_{p_3}} \alpha^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}\right) \tag{2.70}
$$

$$
= \sum_{p_3 \vdash n} \mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B) \sum_{\gamma \in S_n} \delta\left(T_{p_3}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}\right) \tag{2.71}
$$

$$
= \sum_{p_3 \vdash n} \frac{n!|T_{p_3}|}{|T_{p_1}||T_{p_2}|} C^{p_3}_{p_1 p_2} \mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B)\,, \tag{2.72}
$$

方程 (2.63) 引入了 (2.62) 的 f 函数，随后在 (2.64)–(2.67) 之间进行 Wick 收缩，并利用克罗内克等变性重新分配置换。方程 (2.68) 令 $B = A^\dagger A$ 与方程 (2.16) 的记号一致。方程 (2.70) 将 σ_3 求和拆分为对共轭类/分拆（标记为 p_3）的求和，以及对每个类中元素（标记为 α）的求和；而 (2.71) 则定义了见证场 B 中的 GIO，并插入 PCA 元素 $T_{p_3} = \sum_{\alpha \in \mathbf{C}_{p_3}} \alpha^{-1} \equiv \sum_{\alpha \in \mathbf{C}_{p_3}} \alpha$。在 (2.72) 中，利用引理 1 将关联函数写成结构常数的形式。总之，关联函数为

$$
\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(ZA)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(ZA))^\dagger \rangle = \sum_{p_3 \vdash n} \frac{n!|T_{p_3}|}{|T_{p_1}||T_{p_2}|} C^{p_3}_{p_1 p_2} \mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B)\,. \tag{2.73}
$$

利用 $\mathcal{O}_{\sigma_1} \equiv \mathcal{O}_{\sigma^{(p_1)}}$、$\mathcal{O}_{\sigma_2} \equiv \mathcal{O}_{\sigma^{(p_2)}}$ 和方程 (2.39)，我们可以将这一结果改写为组合基，也就是用算符所依赖的分拆/类来表示。

$$
\boxed{\langle \mathcal{O}_{p_1}(ZA)(\mathcal{O}_{p_2}(ZA))^\dagger \rangle = n! \sum_{p_3 \vdash n} C^{p_3}_{p_1 p_2} \mathcal{O}_{p_3}(B)} \tag{2.74}
$$

这表明，无论以经典矩阵还是耦合矩阵作为见证场，得到的关联函数结果都相同。图4给出了一个盒算符图，展示了这种用经典矩阵构造二点函数的方式。

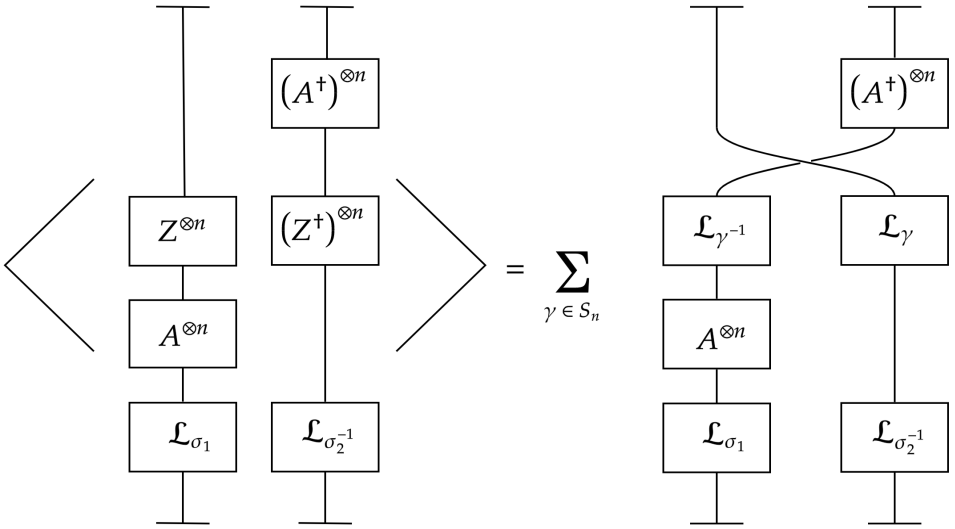

图4： 单矩阵双GIO关联函数的图示表示，其中见证场是一个经典矩阵。引入该矩阵作为 A （以及它的共轭 $A^\dagger$），随后用来定义 $B = A^\dagger A$。右侧示意图展示了在进行 Wick收缩时，如何纳入 $\mathcal{L}_\gamma$，$\mathcal{L}_{\gamma^{-1}}$ 算符并交换指标。

2.4 经典场二点函数的傅里叶基

正如 §2.2 中使用耦合见证场计算舒尔基关联函数一样，这里也推导出经典见证场对应的结果。鉴于舒尔算子可用置换参数化算子来描述，并且组合基关联函数在使用耦合见证场或经典见证场时等价（如 §2.1 和 §2.3 的结果所示），这一推广十分直接。将舒尔基中的经典场 GIO 定义为

$$\mathcal{O}_R(ZA) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi_R(\sigma)\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}\left((ZA)^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi_R(\sigma)\mathcal{O}_\sigma(ZA)\,, \tag{2.75}$$

以及共轭算符

$$(\mathcal{O}_R(ZA))^\dagger = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}(\chi_R(\sigma))^*\left(\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}\left((ZA)^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma\right)\right)^\dagger = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi_R(\sigma)\left(\mathcal{O}_\sigma(ZA)\right)^\dagger\,, \tag{2.76}$$

其中再次使用了 $(\chi_R(\sigma))^* = \chi_R(\sigma^{-1}) = \chi_R(\sigma)$，且 R 对应于不可约表示 R。因此，关联函数为

$$\langle\mathcal{O}_R(ZA)\left(\mathcal{O}_S(ZA)\right)^\dagger\rangle = \frac{1}{(n!)^2}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\tau\in S_n}\chi_R(\sigma)(\chi_S(\tau))\langle\mathcal{O}_\sigma(ZA)\left(\mathcal{O}_\tau(ZA)\right)^\dagger\rangle \tag{2.77}$$

等式右侧包含方程 (2.69) 中经典见证场的置换参数化关联函数，为方便起见在此重新写出

$$\langle\mathcal{O}_\sigma(ZA)(\mathcal{O}_\tau(ZA))^\dagger\rangle = \sum_{\rho\in S_n}\sum_{\gamma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\rho)}\,, \tag{2.78}$$

其中 $B = A^\dagger A$。将其代入 (2.77)，即可简化舒尔基二点函数

$$\langle \mathcal{O}_R(ZA)\left(\mathcal{O}_S(ZA)\right)^\dagger\rangle = \frac{1}{(n!)^2}\sum_{\substack{\sigma,\tau,\rho,\gamma\\ \in S_n}}\prod_{i=1}^{n}\chi_R(\sigma)\chi_S(\tau)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})\left[\mathrm{Tr}(B^i)\right]^{C_i(\rho)} . \quad (2.79)$$

现在我们利用引理 2 得出结论：

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_R(ZA)(\mathcal{O}_S(ZA))^\dagger\rangle = \frac{\delta_{RS}n!}{d_R}\mathcal{O}_S(A^\dagger A) = \frac{\delta_{RS}n!}{d_R}\mathcal{O}_S(B)} \quad (2.80)$$

这复现了方程 (2.54) 的结果。

3 代数与由双矩阵见证的双矩阵关联函数

复双矩阵模型的配分函数涉及对复矩阵 X, Y 的积分。与 $\mathcal{N}=4$ SYM 理论的四分之一 BPS 扇区相关，人们关注 X, Y 的全纯和反全纯多项式函数的关联函数（参见 [45] 及其中的参考文献）。可以利用置换参数化构造关于 X 的 m 次不变量和关于 Y 的 n 次不变量，该参数化是对 (2.1) 的推广。我们定义由对称群 S_{m+n} 中的一个置换 σ 参数化的规范不变观测量，其中 S_{m+n} 是 $\{1,2,\cdots,m+n\}$ 的全体置换所构成的群:

$$\mathcal{O}_\sigma(X,Y)=\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes m+n}}(X^{\otimes m}\otimes Y^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma)=X^{i_1}_{i_{\sigma(1)}}\dots X^{i_m}_{i_{\sigma(m)}}Y^{i_{m+1}}_{i_{\sigma(m+1)}}\dots Y^{i_{m+n}}_{i_{\sigma(m+n)}}\,. \tag{3.1}$$

指标 $i_1,\cdots,i_{m+n}$ 从 1 求和至 N，算子 $\mathcal{L}_\sigma$ 的作用量为

$$\mathcal{L}_\sigma\,|e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{m+n}}\rangle=|e_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\sigma(m+n)}}\rangle\,. \tag{3.2}$$

当 γ 是子群 $(S_m\times S_n)\subset S_{m+n}$ 中的任意元素时，该子群由将子集 $\{1,\cdots,m\}$ 映射到自身且将子集 $\{m+1,\cdots,m+n\}$ 映射到自身的置换组成。通过对 X 彼此重新排序，并对 Y 彼此重新排序，可以证明

$$\mathcal{O}_{\gamma\sigma\gamma^{-1}}(X,Y)=\mathcal{O}_\sigma(X,Y) \tag{3.3}$$

因此，参数化置换属于 S_{m+n} ，而规范置换属于$S_m\times S_n\subset S_{m+n}$ [22]。与这个双矩阵问题相关的置换中心化子代数（PCA） $\mathcal{A}(m,n)$ [37] 基于以下等价类:

$$\sigma\sim\gamma\sigma\gamma^{-1}\,, \tag{3.4}$$

其中 $\sigma\in S_{m+n}$, $\gamma\in S_m\times S_n$。我们将 $\mathcal{A}(m,n)$ 称为“Necklace PCA”。它定义为 $\mathbb{C}[S_{m+n}]$ 中与 $\mathbb{C}[S_m\times S_n]$对易的子代数。该子代数的一组基由 $\gamma\in S_m\times S_n$的共轭作用在 S_{m+n} 中生成的等价类（或轨道）标记。令标签 p 遍历各轨道，并将轨道记为 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{A}}(p)$。选取代表元 $\sigma^{(p)}$，自同构群 $\mathrm{Aut}_{S_m\times S_n}\left(\sigma^{(p)}\right)$ 是 $S_m\times S_n$ 的子群，在 $\gamma\in S_m\times S_n$的共轭作用下保持 $\sigma^{(p)}\in S_{m+n}$ 不变。自同构群的阶与轨道 p中代表元 $\sigma^{(p)}$ 的选取无关。我们将此阶记为 $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(p)|$。根据轨道-稳定子定理，由 p 标记的轨道（或等价类）的大小为

$$|\mathrm{Orb}_{\mathcal{A}}(p)|=\frac{m!n!}{|\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(p)|}\,. \tag{3.5}$$

采用此记法[2], , 每个轨道对应的置换中心化子代数基元形式如下

$$T_p^{\mathcal{A}}=\frac{1}{|\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(p)|}\sum_{\gamma\in S_m\times S_n}\gamma\sigma^{(p)}\gamma^{-1}=\sum_{\tau\in\mathrm{Orb}_{\mathcal{A}}(p)}\tau\quad\in\mathcal{A}(m,n)\,, \tag{3.6}$$

其中， $\mathcal{A}$ 在 $T_p^{\mathcal{A}}$上的标签、$\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(p)$ 和 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{A}}(p)$，表明这些对象与 $\mathcal{A}(m,\ n)$ PCA 相关。因此，$T_p^{\mathcal{A}}$是对同一等价类/轨道中的置换求和，由关系式 (3.4) 决定。该 PCA 的一个显著特点是，与 $\mathcal{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$不同,

[2]这些 $T_p^{\mathcal{A}}$在其原始描述中被称为“项链”。有关这一类比的进一步说明，请参见 [37] 。

在单矩阵情形下，它是非交换的。我们将这些与轨道相关的基元素，以及 S_{m+n}中群乘法的组合学，称为 $\mathcal{A}(m,\ n)$ 的组合基元素。

按照与第§2节相同的顺序，现分别在组合基和表示基中推导使用经典见证场和耦合见证场的双矩阵关联函数。

3.1 双矩阵情形下具有矩阵耦合的一般算符二点函数

具有耦合场的单矩阵二点函数的双矩阵类比形式，其初始耦合矩阵为 A_x，对应 X；以及 A_y，对应 Y

$$\Sigma[0]=\int[dX][dY]e^{-\mathrm{Tr}(XA_xX^\dagger)-\mathrm{Tr}(YA_yY^\dagger)}\,. \tag{3.7}$$

按照附录 A 中的类似步骤，可以用向量变量和源场写出配分函数，从而通过对上述源求导得到基本关联函数。随后可将这些场变量的关联函数计算为

$$\langle X^i_j(X^\dagger)^k_l\rangle=\frac{1}{\Sigma[0]}\int[dX][dY]X^i_j(X^\dagger)^k_l e^{-\mathrm{Tr}(XA_xX^\dagger)-\mathrm{Tr}(YA_yY^\dagger)}=\delta^i_l(A_x^{-1})^k_j=\delta^i_l(B_x)^k_j \tag{3.8}$$

$$\langle Y^i_j(Y^\dagger)^k_l\rangle=\frac{1}{\Sigma[0]}\int[dX][dY]Y^i_j(Y^\dagger)^k_l e^{-\mathrm{Tr}(XA_xX^\dagger)-\mathrm{Tr}(YA_yY^\dagger)}=\delta^i_l(A_y^{-1})^k_j=\delta^i_l(B_y)^k_j \tag{3.9}$$

下文仍将 B_x 和 B_y 称为耦合矩阵。使用一般的置换参数化规范不变算符 (3.1) 及其厄米共轭

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}_\sigma(X,Y))^\dagger&=\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes m+n}}((X^\dagger)^{\otimes m}\otimes(Y^\dagger)^{\otimes n}\mathcal{L}_{\sigma^{-1}})\\&=(X^\dagger)^{i_1}_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots(X^\dagger)^{i_m}_{i_{\sigma^{-1}(m)}}(Y^\dagger)^{i_{m+1}}_{i_{\sigma^{-1}(m+1)}}\cdots(Y^\dagger)^{i_{m+n}}_{i_{\sigma^{-1}(m+n)}}\\&=\mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(X^\dagger,Y^\dagger)\,,\end{aligned} \tag{3.10}$$

双矩阵模型的二点函数可构造如下

$$\langle\mathcal{O}_{\sigma_1}(X,Y)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X,Y))^\dagger\rangle$$

$$=\left\langle\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes m+n}}\left(X^{\otimes m}\otimes Y^{\otimes n}\mathcal{L}_{\sigma_1}\right)\left(\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes m+n}}\left(X^{\otimes m}\otimes Y^{\otimes n}\mathcal{L}_{\sigma_2}\right)\right)^\dagger\right\rangle \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}=\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m+n}\\j_1,\ldots,j_{m+n}}}&\langle X^{i_1}_{i_{\sigma_1(1)}}\cdots X^{i_m}_{i_{\sigma_1(m)}}Y^{i_{m+1}}_{i_{\sigma_1(m+1)}}\cdots Y^{i_{m+n}}_{i_{\sigma_1(m+n)}}\\&\times(X^\dagger)^{j_1}_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}}\cdots(X^\dagger)^{j_m}_{j_{\sigma_2^{-1}(m)}}(Y^\dagger)^{j_{m+1}}_{j_{\sigma_2^{-1}(m+1)}}\cdots(Y^\dagger)^{j_{m+n}}_{j_{\sigma_2^{-1}(m+n)}}\rangle\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}=\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{m+n}\\j_1,\ldots,j_{m+n}}}\sum_{\gamma\in S_m\times S_n}&\delta^{i_1}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}\cdots\delta^{i_m}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(m)}}\delta^{i_{m+1}}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(m+1)}}\cdots\delta^{i_{m+n}}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(m+n)}}\\&\times(B_x)^{j_1}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(1)}}\cdots(B_x)^{j_m}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m)}}(B_y)^{j_{m+1}}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m+1)}}\cdots(B_y)^{j_{m+n}}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m+n)}}\,.\end{aligned} \tag{3.13}$$

这里引入了对 $\gamma\in S_m\times S_n$ 的求和，并按照维克定理的要求对指标进行置换。γ将集合 $\{1,\ldots,m\}$ 映射到自身，也将 $\{m+1,\ldots,m+n\}$映射到自身。应用克罗内克等变性

$$\langle\mathcal{O}_{\sigma_1}(X,Y)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X,Y))^\dagger\rangle$$

$$= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m+n}\\ j_1,\dots,j_{m+n}}} \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} \delta^{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(1)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}} \cdots \delta^{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m)}} \delta^{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m+1)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m+1)}} \cdots \delta^{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m+n)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m+n)}}$$
$$\times (B_x)^{j_1}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(1)}} \cdots (B_x)^{j_m}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m)}} (B_y)^{j_{m+1}}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m+1)}} \cdots (B_y)^{j_{m+n}}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m+n)}} \tag{3.14}$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_{m+n}} \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} (B_x)^{j_1}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}} \cdots (B_x)^{j_m}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m)}} \times (B_y)^{j_{m+1}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m+1)}} \cdots (B_y)^{j_{m+n}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m+n)}} . \tag{3.15}$$

因此

$$\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(X,Y)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X,Y))^\dagger\rangle = \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes m+n}}\left(B_x^{\otimes m}\otimes B_y^{\otimes n}\mathcal{L}_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}}\right) . \tag{3.16}$$

在式 (3.15) 中， i 指标进行了缩并。按照式 (3.16) 的迹记号，回顾线性算子的复合性质，计算结果可用图 5 的图示表示表示为： $\mathcal{L}_\sigma\mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_{\sigma\tau}$。现在可以插入一个狄拉克δ函数，并且

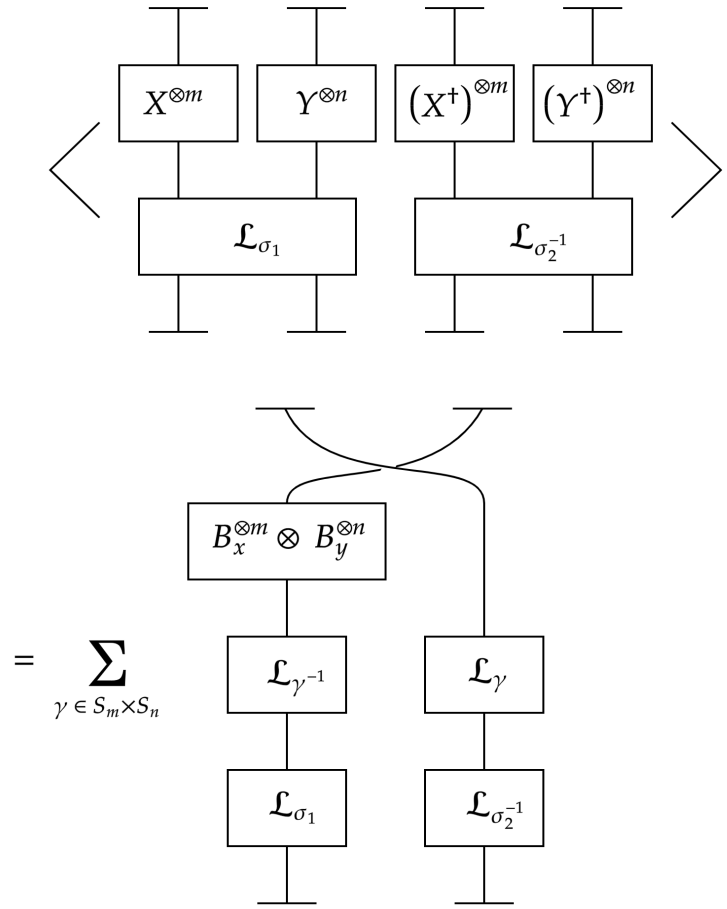

图 5： 带有耦合矩阵场的一般双矩阵关联函数的图示表示。与单矩阵情形一样，这表明关联函数可以写成对置换的求和，并交换指标。注意，此处 γ 是 $S_m \times S_n$ （由 m 个和 n 个对象的对称群构成的直积）的一个元素，这是相应等价关系所要求的。

该 $\sigma_3 \in S_{m+n}$ 求和分解为对等价类及其中元素的求和

其中

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(X,Y)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X,Y))^\dagger \rangle \\
&\quad = \sum_{\gamma\in S_m\times S_n}\sum_{\sigma_3\in S_{m+n}} \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes m+n}}\left(B_x^{\otimes m}\otimes B_y^{\otimes n}\mathcal{L}_{\sigma_3}\right)\delta(\sigma_3^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) && (3.17)\\
&\quad = \sum_{\gamma\in S_m\times S_n}\sum_{\sigma_3\in S_{m+n}} \mathcal{O}_{\sigma_3}(B_x,B_y)\delta(\sigma_3^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) && (3.18)\\
&\quad = \sum_{\gamma\in S_m\times S_n}\sum_{p_3}\left(\sum_{\alpha\in \mathrm{Orb}_{\mathcal{A}}(p_3)} \mathcal{O}_{\alpha}(B_x,B_y)\delta(\alpha^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})\right) && (3.19)\\
&\quad = \sum_{p_3} \mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B_x,B_y)\sum_{\gamma\in S_m\times S_n}\delta\left(\sum_{\alpha\in \mathrm{Orb}_{\mathcal{A}}(p_3)}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}\right) && (3.20)\\
&\quad = \sum_{p_3} \mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B_x,B_y)\sum_{\gamma\in S_m\times S_n}\delta\left(T^{\mathcal{A}}_{p_3'}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}\right), && (3.21)
\end{aligned}
$$

其中， p_3 标记 σ_3 和分解中的等价类／轨道。这里，我们按照公式（3.1）令 $\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes m+n}}\left(B_x^{\otimes m}\otimes B_y^{\otimes n}\mathcal{L}_{\sigma_3}\right)=\mathcal{O}_{\sigma_3}(B_x,B_y)$，并在（3.21）中使用了 $T^{\mathcal{A}}_{p_3'}\in\mathcal{A}(m,n)$ 的定义。注意，给定置换为 α^{-1} ，且求和遍历$\alpha\in\mathrm{Orb}_{\mathcal{A}}(p_3)$，我们在划分／轨道／类标签上加上撇号，以表示 $\mathrm{Orb}(p_3')$ 是由 $\mathrm{Orb}(p_3)$ 中各置换的逆置换构造出的轨道。[3] 在公式（3.20）中，GIO 上的α 标签已替换为 $\sigma^{(p_3)}$ ，以帮助表明它是 p_3 划分／类的函数。为确定 PCA 结构常数如何作为关联函数的一部分出现，下面给出一个引理。

引理 3。对于 $\gamma\in S_m\times S_n$、 $\sigma_i\in S_{m+n}$ 和 $T^{\mathcal{A}}_{p_i}\in\mathcal{A}$（$m$、$n$），以下等式成立

$$
\sum_{\gamma\in S_m\times S_n}\delta\left(T^{\mathcal{A}}_{p_3'}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}\right)=\frac{m!n!|T^{\mathcal{A}}_{p_3'}|}{|T^{\mathcal{A}}_{p_1}||T^{\mathcal{A}}_{p_2'}|}C^{p_3';\mathcal{A}}_{p_1p_2'} \tag{3.22}
$$

其中， $C^{p_3';\ \mathcal{A}}_{\ p_1p_2'}$ 是 $\mathcal{A}$（m、n）*PCA* 的结构常数，而 σ_1、 σ_2^{-1} 分别属于由 p_1、 p_2' 标记的等价类。

证明。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in S_m\times S_n}\delta(T^{\mathcal{A}}_{p_3'}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})\\
&\quad = \sum_{\mu_1\in S_m\times S_n}\delta\left(T^{\mathcal{A}}_{p_3'}(\mu_1\mu_2)^{-1}\sigma_1(\mu_1\mu_2)\sigma_2^{-1}\right) && (3.23)\\
&\quad = \sum_{\mu_1\in S_m\times S_n}\delta\left((\mu_2^{-1}\mu_2)T^{\mathcal{A}}_{p_3'}\mu_2^{-1}\mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1\mu_2\sigma_2^{-1}\right) && (3.24)\\
&\quad = \sum_{\mu_1\in S_m\times S_n}\delta\left(\underbrace{\mu_2T^{\mathcal{A}}_{p_3'}\mu_2^{-1}}_{=T^{\mathcal{A}}_{p_3'}}\mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1\mu_2\sigma_2^{-1}\mu_2^{-1}\right) && (3.25)
\end{aligned}
$$

[3]而在 §2.1 的单矩阵情形中，置换及其逆置换属于同一个共轭类，因此可以省略带撇号的标签；但对于双矩阵和多矩阵模型，情况通常并非如此。

$$= \frac{1}{m!n!} \sum_{\mu_1,\mu_2 \in S_m \times S_n} \delta\left(T^{\mathcal{A}}_{p'_3}(\mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1)(\mu_2\sigma_2^{-1}\mu_2^{-1})\right) \tag{3.26}$$

$$= \frac{1}{m!n!}\delta\left(T^{\mathcal{A}}_{p'_3}\left(\sum_{\mu_1 \in S_m \times S_n} \mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1\right)\left(\sum_{\mu_2 \in S_m \times S_n} \mu_2\sigma_2^{-1}\mu_2^{-1}\right)\right) \tag{3.27}$$

$$= \frac{|\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(p_1)||\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(p'_2)|}{m!n!}\delta\left(T^{\mathcal{A}}_{p'_3}T^{\mathcal{A}}_{p_1}T^{\mathcal{A}}_{p'_2}\right) \tag{3.28}$$

$$= \frac{m!n!}{|T^{\mathcal{A}}_{p_1}||T^{\mathcal{A}}_{p'_2}|}\delta\left(T^{\mathcal{A}}_{p'_3}T^{\mathcal{A}}_{p_1}T^{\mathcal{A}}_{p'_2}\right). \tag{3.29}$$

在上述推导中，方程 (3.23) 将对 γ 的求和替换为对 μ_1 的求和，其中 $\gamma \to \mu_1\mu_2$。在 (3.24) 中加入单位元，随后重新排列 μ_2^{-1}并识别出 $T^{\mathcal{A}}_{p'_3} = \mu_2 T^{\mathcal{A}}_{p'_3}\mu_2^{-1}$。在 (3.26) 中引入对 $\mu_2 \in S_m \times S_n$的求和，同时加入所需因子 $1/(m!n!)$。最后，在方程 (3.27) 和 (3.29) 之间，将求和移入狄拉克δ函数中，引入 PCA 元素和自同构群大小因子，并利用轨道-稳定子定理简化表达式。同样，带撇号的标签用于表示逆置换所属的分拆/等价类；我们选择令 σ_1 和 σ_2^{-1}分别属于由 p_1 和 p'_2标记的分拆/等价类。

剩余的狄拉克δ函数可以利用 PCA 的乘法性质化简

$$\delta(T^{\mathcal{A}}_{p'_3}T^{\mathcal{A}}_{p_1}T^{\mathcal{A}}_{p'_2}) = \sum_{p_k} C^{p_k;\mathcal{A}}_{p_1p'_2}\delta(T^{\mathcal{A}}_{p'_3}T^{\mathcal{A}}_{p_k}) = \sum_{p_k} C^{p_k;\mathcal{A}}_{p_1p'_2}\delta_{p_kp'_3}|T^{\mathcal{A}}_{p_k}| = |T^{\mathcal{A}}_{p'_3}|C^{p'_3;\mathcal{A}}_{p_1p'_2}. \tag{3.30}$$

将其代回公式（3.29），即可得到所需结果

$$\sum_{\gamma \in S_m \times S_n} \delta(T^{\mathcal{A}}_{p'_3}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) = \frac{m!n!}{|T^{\mathcal{A}}_{p_1}||T^{\mathcal{A}}_{p'_2}|}|T^{\mathcal{A}}_{p'_3}|C^{p'_3;\mathcal{A}}_{p_1p'_2}. \tag{3.31}$$

□

结合上述引理和公式（3.21），关联函数为

$$\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(X,Y)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X,Y))^\dagger\rangle = \sum_{p_3} \frac{m!n!|T^{\mathcal{A}}_{p'_3}|}{|T^{\mathcal{A}}_{p_1}||T^{\mathcal{A}}_{p'_2}|}C^{p'_3;\mathcal{A}}_{p_1p'_2}\mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B_x,B_y). \tag{3.32}$$

最后，利用以下事实：$|T^{\mathcal{A}}_{p'_i}| = |T^{\mathcal{A}}_{p_i}|$、$\mathcal{O}_{\sigma_1} \equiv \mathcal{O}_{\sigma^{(p_1)}}$ 和 $\mathcal{O}_{\sigma_2^{-1}} \equiv \mathcal{O}_{\sigma^{(p'_2)}}$，然后重新排列轨道大小因子并应用$|T^{\mathcal{A}}_{p_i}|\mathcal{O}_{\sigma^{(p_i)}} = \mathcal{O}_{T^{\mathcal{A}}_{p_i}} \equiv \mathcal{O}_{p_i}$，即可得到关联函数的组合基表示

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_{p_1}(X,Y)(\mathcal{O}_{p_2}(X,Y))^\dagger\rangle = m!n!\sum_{p_3} C^{p'_3;\mathcal{A}}_{p_1p'_2}\mathcal{O}_{p_3}(B_x,B_y)} \tag{3.33}$$

类似于式 (2.40) 中带有耦合矩阵场的单矩阵关联函数的结果，这个双矩阵结果表明，插入含有涨落/量子场 X 和 Y 的组合基 GIO，等于关联见证场 B_x 和 B_y 中算符的线性组合。因此，可以通过为量子场和见证场算符选择基标签 (p_1, p'_2, p'_3) 来计算结构常数。值得注意的是，结构常数 $C^{p'_3;\mathcal{A}}_{p_1p'_2}$ 取整数值。

3.2 双矩阵二点函数的傅里叶/Q-基

如本节开头所述，双矩阵可观测量可以通过置换的等价类 $\sigma \in S_{m+n}$ 来枚举，其中等价关系为 $\sigma \sim \gamma\sigma\gamma^{-1}$，且 $\gamma \in S_m \times S_n \subset S_{m+n}$。按照 [46, 47, 22, 26, 41, 37], ，考虑将由杨图 R（含有 $m+n$ 个方框）标记的 S_{m+n} 的不可约表示 $V^{(S_{m+n})\,R}$，分解为乘积群 $S_m \times S_n \subset S_{m+n}$的不可约表示的直和 $V_{(S_m)\,R_1} \otimes V_{(S_n)\,R_2}$，其中 R_1, R_2 分别含有 m 个和 n 个方框。这可以写成

$$V_R^{(S_{m+n})} = \bigoplus_{R_1,R_2} V_{R_1}^{(S_m)} \otimes V_{R_2}^{(S_n)} \otimes V_{R_1,R_2}^{R} \tag{3.34}$$

其中，$V_{R_1,\ R_2}^{R}$ 是“重数空间”，其维数等于 $V_{(S_m)\,R_1} \otimes V^{(S_n)\,R_2}$ 在分解中出现的次数。这个维数就是记作 $g(R_1,\ R_2,\ R)$ 的 Littlewood-Richardson 系数。这个子群基的状态由以下内容标记

$$|R_1, R_2, m_1, m_2; \nu\rangle \tag{3.35}$$

其中，m_1 和 m_2 分别标记 $V^{(S_m)\,R_1}$ 和 $V_{(S_n)\,R_2}$ 的状态，而 ν 是重数空间 $V_{R_1,\ R_2}^{R}$的一组基所对应的指标。与单矩阵情形一样，可以利用特征标构造舒尔多项式算符。具体对于双矩阵情形，这些算符称为受限舒尔多项式 [22, 48, 24, 23, 49, 50, 51] ，这是由于所选的子群基；它们由限制特征标构造而成：

$$\chi_{R_1,R_2,\mu,\nu}^{R}(\sigma) \tag{3.36}$$

其中，整数 μ, ν再次遍历分支 $R \to R_1 \otimes R_2$：$1 \le \nu_1; \nu_2 \le g(R_1, R_2, R)$ 的重数 $g(R_1, R_2, R)$，并且每个表示 R, R_1和 R_2 都对应一个杨图。限制特征标类似于式 (2.42) 中的 $\chi_R(\sigma)$，但配备了由式 (3.34) 的分解所继承的必要指标。使用投影算符型算子

$$P_{R_1,R_2,\mu,\nu}^{R} = \sum_{m_1}^{d_{R_1}} \sum_{m_2}^{d_{R_2}} |R_1, R_2, m_1, m_2; \mu\rangle \langle R_1, R_2, m_1, m_2; \nu| \tag{3.37}$$

其中，d_{R_i} 是不可约表示 R_i 的维数，限制特征标明确地定义为

$$\chi_{R_1,R_2,\mu,\nu}^{R}(\sigma) = \mathrm{Tr}_{V^{(R_1,R_2)}} \left[P_{R_1,R_2,\mu,\nu}^{R} \left(D^R(\sigma) \right) \right] . \tag{3.38}$$

这里，$D^R(\sigma)$ 是 σ 在表示 R 中的表示矩阵，迹取自对应于 R 的子约化 (R_1, R_2) 的子空间。投影型算符的分量又可用分支系数写成

$$\left(P_{R_1,R_2,\mu,\nu}^{R} \right)^{ij} = \sum_{m_1,m_2} B_{R_1,R_2,\mu;m_1,m_2}^{R;i} B_{R_1,R_2,\nu;m_1,m_2}^{R;j} \tag{3.39}$$

其中，分支系数 $B_{R_a\ ,R_b,\nu;m_a,m_b}^{R;i}$ 定义为向量 $|R_a, R_b, m_a, m_b;\ \nu\rangle$ 在 R: $B_{R_a\ ,R_b,\nu;m_a,m_b}^{R;i} = \langle R;\ i|R_a, R_b, m_a, m_b; \nu\rangle$ 的任意给定正交基中的分量。

构造舒尔多项式算符的最后一步依据的是韦德伯恩–阿廷定理，该定理指出，PCA $\mathcal{A}(m,\ n)$ 可以分解为若干矩阵代数的和

$$\mathcal{A}(m,n) = \bigoplus_{\substack{R \\ R_1,R_2}} \mathrm{Span}\{Q_{R_1,R_2,\mu,\nu}^{R}; \mu, \nu\} \tag{3.40}$$

其中，这些 Q-基元素按上述术语定义为

$$Q^{R}_{R_1,R_2,\mu,\nu} = \frac{d_R}{(m+n)!}\sum_{\sigma\in S_{m+n}} \chi^{R}_{R_1,R_2,\mu,\nu}(\sigma)\sigma^{-1}\,, \tag{3.41}$$

其中， d_R 是 S_{m+n}的表示 R 的维数，并且它们在重数指标上具有如矩阵般相乘的性质

$$Q^{R}_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}Q^{R}_{R_1,R_2,\mu_2,\nu_2} = \delta^{RS}\delta_{R_1S_1}\delta_{R_2S_2}\delta_{\nu_1\mu_2}Q^{R}_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_2}\,. \tag{3.42}$$

这是将附录 D 中的多矩阵模型结果推广到双矩阵模型而得出的。因此，相关的受限 Schur 多项式算符（下文也将等价地称为 Q基/傅里叶基底算符）可以通过对式 (3.1) 中由置换参数化的算子进行傅里叶变换得到，如下所示

$$\mathcal{O}^{R}_{R_1,R_2,\mu,\nu}(X,Y) = \sum_{\sigma\in S_{m+n}} \delta\left(Q^{R}_{R_1,R_2,\mu,\nu}\sigma^{-1}\right)\mathcal{O}_{\sigma}(X,Y)\,. \tag{3.43}$$

其厄米共轭为

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{O}^{R}_{R_1,R_2,\mu,\nu}(X,Y)\right)^{\dagger} &= \sum_{\sigma\in S_{m+n}} \delta\left(Q^{R}_{R_1,R_2,\nu,\mu}\sigma\right)\mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(X^{\dagger},Y^{\dagger}) &(3.44)\\ &= \sum_{\tilde{\sigma}\in S_{m+n}} \delta\left(Q^{R}_{R_1,R_2,\nu,\mu}\tilde{\sigma}^{-1}\right)\mathcal{O}_{\tilde{\sigma}}(X^{\dagger},Y^{\dagger}) &(3.45)\\ &= \mathcal{O}^{R}_{R_1,R_2,\nu,\mu}(X^{\dagger},Y^{\dagger})\,, &(3.46)\end{aligned}$$

这里用到了性质 $(Q^{R}_{R_1,\ R_2,\ \mu,\ \nu})^{\dagger} = Q^{R}_{R_1,\ R_2,\ \nu,\ \mu}$ （见附录 D）以及 $\sigma^{\dagger} = \sigma^{-1}$ ，并利用求和不变性应用了$\sigma \to \tilde{\sigma} = \sigma^{-1}$ 。因此，相应的二点函数为

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{O}^{R}_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}(X,Y)\left(\mathcal{O}^{S}_{S_1,S_2,\mu_2,\nu_2}(X,Y)\right)^{\dagger}\rangle\\ &= \langle \mathcal{O}^{R}_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}(X,Y)\mathcal{O}^{S}_{S_1,S_2,\nu_2,\mu_2}(X^{\dagger},Y^{\dagger})\rangle &(3.47)\\ &= \sum_{\sigma,\tau\in S_{m+n}} \delta(Q^{R}_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1})\delta(Q^{S}_{S_1,S_2,\nu_2,\mu_2}\tau)\langle \mathcal{O}_{\sigma}(X,Y)\mathcal{O}_{\tau^{-1}}(X^{\dagger},Y^{\dagger})\rangle &(3.48)\\ &= \sum_{\sigma,\tau,\rho\in S_{m+n}}\ \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} \delta(Q^{R}_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1})\delta(Q^{S}_{S_1,S_2,\nu_2,\mu_2}\tau)\mathcal{O}_{\rho}(B_x,B_y)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1}) &(3.49)\end{aligned}$$

公式 (3.49) 引入了式 (3.18) 中置换参数化关联函数的结果。这里我们引入一个引理来简化上述表达式

引理 4. 对于 σ、τ、$\rho \in S_{m+n}$、 $\gamma \in S_m \times S_n$，不可约表示 R、R_1、R_2 以及重数指标 $\mu_{1,\ 2}$、$\nu_{1,\ 2}$，下列表达式成立

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma,\tau,\rho\in S_{m+n}}\ \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} \delta(Q^{R}_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1})\delta(Q^{S}_{S_1,S_2,\nu_2,\mu_2}\tau)\mathcal{O}_{\rho}(B_x,B_y)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})\\ &= m!n!\delta^{RS}\delta_{R_1S_1}\delta_{R_2S_2}\delta_{\nu_1\nu_2}\mathcal{O}^{R}_{R_1,R_2,\mu_1,\mu_2}(B_x,B_y) &(3.50)\end{aligned}$$

证明。

$$\sum_{\sigma,\tau,\rho\in S_{m+n}}\ \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} \delta(Q^{R}_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1})\delta(Q^{S}_{S_1,S_2,\nu_2,\mu_2}\tau)\mathcal{O}_{\rho}(B_x,B_y)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1}) \tag{3.51}$$

$$= \sum_{\rho\in S_{m+n}} \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} \mathcal{O}_\rho(B_x,B_y)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}Q^R_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}\gamma Q^S_{S_1,S_2,\nu_2,\mu_2}) \tag{3.52}$$

$$= m!n! \sum_{\rho\in S_{m+n}} \mathcal{O}_\rho(B_x,B_y)\delta(\rho^{-1}Q^R_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}Q^S_{S_1,S_2,\nu_2,\mu_2}) \tag{3.53}$$

$$= m!n!\delta^{RS}\delta_{R_1S_1}\delta_{R_2S_2}\delta_{\nu_1\nu_2}\left[\sum_{\rho\in S_{m+n}} \delta(Q^R_{R_1,R_2,\mu_1,\mu_2}\rho^{-1})\mathcal{O}_\rho(B_x,B_y)\right] \tag{3.54}$$

$$= m!n!\delta^{RS}\delta_{R_1S_1}\delta_{R_2S_2}\delta_{\nu_1\nu_2}\mathcal{O}^R_{R_1,\ R_2,\ \mu_1,\ \mu_2}(B_x,\ \ B_y)。 \tag{3.55}$$

方程（3.52）计算了对 Q 基底δ函数的求和，并将最终δ函数中的 σ 和 τ^{-1} 替换掉。方程（3.53）利用了 $\gamma\in S_m\times S_n$ 共轭作用下 Q 基元素的不变性，而（3.54）则是利用它们的乘法性质（3.42）得到的。最后，根据定义（3.43），（3.55）给出了一个作用于见证场的 Q 基算子。

□

将引理4应用于方程(3.49)，双矩阵推广与第2.2节中的单矩阵结果相对应，因此有

$$\boxed{\begin{aligned}&\left\langle \mathcal{O}^R_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}(X,Y)\ (\mathcal{O}^S_{S_1,S_2,\mu_2,\nu_2}(X,Y))^\dagger \right\rangle = \\ &\qquad\qquad m!n!\delta^{RS}\delta_{R_1S_1}\delta_{R_2S_2}\delta_{\nu_1\nu_2}\mathcal{O}^R_{R_1,R_2,\mu_1,\mu_2}(B_x,B_y)\end{aligned}} \tag{3.56}$$

这表明，两个矩阵 X 和 Y中两个傅里叶基底算符的关联函数在其表示中彼此正交，并且正比于由见证场 B_x 和 B_y构成的傅里叶基底算符。

3.3 双矩阵情形下量子场和经典场的可观测量函数

如果将可观测量定义为包含经典见证场，并将作用量定义为不含耦合，那么也可以得到相同的结果。将规范不变算符定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\sigma(XA_x,YA_y) &= \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes m+n}}\left((XA_x)^{\otimes m}\otimes(YA_y)^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma\right) \\ &= (XA_x)^{i_1}_{i_{\sigma(1)}}\dots(XA_x)^{i_m}_{i_{\sigma(m)}}(YA_y)^{i_{m+1}}_{i_{\sigma(m+1)}}\dots(YA_y)^{i_{m+n}}_{i_{\sigma(m+n)}}\end{aligned} \tag{3.57}$$

及其厄米共轭

$$\begin{aligned}&(\mathcal{O}_\sigma(XA_x,YA_y))^\dagger \\ &\quad= \left(\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes m+n}}\left((XA_x)^{\otimes m}\otimes(YA_y)^{\otimes n}\mathcal{L}_\sigma\right)\right)^\dagger \\ &\quad= (A_x^\dagger X^\dagger)^{i_1}_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\dots(A_x^\dagger X^\dagger)^{i_m}_{i_{\sigma^{-1}(m)}}(A_y^\dagger Y^\dagger)^{i_{m+1}}_{i_{\sigma^{-1}(m+1)}}\dots(A_y^\dagger Y^\dagger)^{i_{m+n}}_{i_{\sigma^{-1}(m+n)}} \\ &\quad= \mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(A_x^\dagger X^\dagger,A_y^\dagger Y^\dagger)\,.\end{aligned} \tag{3.58}$$

其中 A_x 并且 A_y 是最初定义的经典见证场。利用分配函数 n

$$\Sigma[0] = \int [dX][dY]e^{-\mathrm{Tr}\left(XX^\dagger\right)-\mathrm{Tr}\left(YY^\dagger\right)} \tag{3.59}$$

以及基本场关联函数

$$\begin{aligned}\langle X_j^i (X^\dagger)_l^k \rangle &= \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dX][dY] X_j^i (X^\dagger)_l^k e^{-\mathrm{Tr}(XX^\dagger)-\mathrm{Tr}(YY^\dagger)} = \delta_l^i \delta_j^k \,, \\ \langle Y_j^i (Y^\dagger)_l^k \rangle &= \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dX][dY] Y_j^i (Y^\dagger)_l^k e^{-\mathrm{Tr}(XX^\dagger)-\mathrm{Tr}(YY^\dagger)} = \delta_l^i \delta_j^k \,,\end{aligned} \tag{3.60}$$

在所有其他基本场关联函数均为零的情况下，可以计算出这些规范不变算符的关联函数为

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(XA_x, YA_y)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(XA_x, YA_y))^\dagger \rangle \\ &= \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dX][dY] \mathcal{O}_{\sigma_1}(XA_x, YA_y) \left(\mathcal{O}_{\sigma_2}(XA_x, YA_y)\right)^\dagger e^{-\mathrm{Tr}\left(XX^\dagger\right)-\mathrm{Tr}\left(YY^\dagger\right)} \qquad (3.61) \\ &= \sum_{I,J,K,L} (A_x^\dagger)_{l_1}^{j_1} (A_x)_{i_{\sigma_1(1)}}^{k_1} \dots (A_x^\dagger)_{l_m}^{j_m} (A_x)_{i_{\sigma_1(m)}}^{k_m} \quad (A_y^\dagger)_{l_{m+1}}^{j_{m+1}} (A_y)_{i_{\sigma_1(m+1)}}^{k_{m+1}} \dots (A_y^\dagger)_{l_{m+n}}^{j_{m+n}} (A_y)_{i_{\sigma_1(m+n)}}^{k_{m+n}} \\ &\quad \times \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dX][dY] X_{k_1}^{i_1} \dots X_{k_m}^{i_m} Y_{k_{m+1}}^{i_{m+1}} \dots Y_{k_{m+n}}^{i_{m+n}} \\ &\quad \times (X^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}}^{l_1} \dots (X^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(m)}}^{l_m} (Y^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(m+1)}}^{l_{m+1}} \dots (Y^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(m+n)}}^{l_{m+n}} e^{-\mathrm{Tr}\left(XX^\dagger\right)-\mathrm{Tr}\left(YY^\dagger\right)} \qquad (3.62)\end{aligned}$$

其中，对 I，J，K，L 求和表示对所有相关矩阵指标求和。为方便记号，我们定义一个关于见证场的函数

$$\begin{aligned}f_{x,y}(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}; \sigma_1) = (A_x^\dagger)_{l_1}^{j_1} (A_x)_{i_{\sigma_1(1)}}^{k_1} \dots (A_x^\dagger)_{l_m}^{j_m} (A_x)_{i_{\sigma_1(m)}}^{k_m} \\ \times (A_y^\dagger)_{l_{m+1}}^{j_{m+1}} (A_y)_{i_{\sigma_1(m+1)}}^{k_{m+1}} \dots (A_y^\dagger)_{l_{m+n}}^{j_{m+n}} (A_y)_{i_{\sigma_1(m+n)}}^{k_{m+n}} \,,\end{aligned} \tag{3.63}$$

例如，所有可能的 i 矩阵指标都表示为向量的 i 分量。根据此定义，关联函数变为

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(XA_x, YA_y)(\mathcal{O}_{\sigma_2}(XA_x, YA_y))^\dagger \rangle \\ &= \sum_{I,J,K,L} f_{x,y}(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}; \sigma_1) \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dX][dY] X_{k_1}^{i_1} \dots X_{k_m}^{i_m} Y_{k_{m+1}}^{i_{m+1}} \dots Y_{k_{m+n}}^{i_{m+n}} \\ &\quad \times (X^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}}^{l_1} \dots (X^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(m)}}^{l_m} (Y^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(m+1)}}^{l_{m+1}} \dots (Y^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(m+n)}}^{l_{m+n}} e^{-\mathrm{Tr}\left(XX^\dagger\right)-\mathrm{Tr}\left(YY^\dagger\right)} \qquad (3.64) \\ &= \sum_{I,J,K,L} f_{x,y}(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}; \sigma_1) \langle X_{k_1}^{i_1} \dots X_{k_m}^{i_m} Y_{k_{m+1}}^{i_{m+1}} \dots Y_{k_{m+n}}^{i_{m+n}} \\ &\qquad \times (X^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}}^{l_1} \dots (X^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(m)}}^{l_m} (Y^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(m+1)}}^{l_{m+1}} \dots (Y^\dagger)_{j_{\sigma_2^{-1}(m+n)}}^{l_{m+n}} \rangle \qquad (3.65) \\ &= \sum_{I,J,K,L} f_{x,y}(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}; \sigma_1) \sum_{\gamma \in S_m \times S_n} \delta_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}^{i_1} \delta_{k_{\gamma^{-1}(1)}}^{l_1} \dots \delta_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(m+n)}}^{i_{m+n}} \delta_{k_{\gamma^{-1}(m+n)}}^{l_{m+n}} \qquad (3.66) \\ &= \sum_{J,K} \sum_{\gamma \in S_m \times S_n} (A_x^\dagger)_{k_{\gamma^{-1}(1)}}^{j_1} (A_x)_{j_{\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}^{k_1} \dots (A_x^\dagger)_{k_{\gamma^{-1}(m)}}^{j_m} (A_x)_{j_{\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m)}}^{k_m} \\ &\qquad \times (A_y^\dagger)_{k_{\gamma^{-1}(m+1)}}^{j_{m+1}} (A_y)_{j_{\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m+1)}}^{k_{m+1}} \dots (A_y^\dagger)_{k_{\gamma^{-1}(m+n)}}^{j_{m+n}} (A_y)_{j_{\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m+n)}}^{k_{m+n}} \qquad (3.67) \\ &= \sum_{j_1,\dots,j_n} \sum_{\gamma \in S_m \times S_n} \left(A_x^\dagger A_x\right)_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}^{j_1} \dots \left(A_x^\dagger A_x\right)_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m)}}^{j_m} \\ &\qquad \times \left(A_y^\dagger A_y\right)_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m+1)}}^{j_{m+1}} \dots \left(A_y^\dagger A_y\right)_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m+n)}}^{j_{m+n}} \qquad (3.68)\end{aligned}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n} \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} (B_x)^{j_1}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}} \cdots (B_x)^{j_m}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m)}} \times (B_y)^{j_{m+1}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m+1)}} \cdots (B_y)^{j_{m+n}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m+n)}} \tag{3.69}$$

$$= \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} \sum_{\sigma_3\in S_{m+n}} \mathcal{O}_{\sigma_3}(B_x,B_y)\delta(\sigma_3^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) \tag{3.70}$$

$$= \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} \sum_{p_3} \left(\sum_{\alpha\in \mathrm{Orb}_{\mathcal{A}}(p_3)} \mathcal{O}_{\alpha}(B_x,B_y)\delta(\alpha^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) \right) \tag{3.71}$$

$$= \sum_{p_3} \mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B_x,B_y) \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} \delta\left(\sum_{\alpha\in \mathrm{Orb}_{\mathcal{A}}(p_3)} \alpha^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1} \right) \tag{3.72}$$

$$= \sum_{p_3} \mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B_x,B_y) \sum_{\gamma\in S_m\times S_n} \delta\left(T^{\mathcal{A}}_{p_3'}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1} \right) \tag{3.73}$$

$$= \sum_{p_3} \frac{m!n!|T^{\mathcal{A}}_{p_3'}|}{|T^{\mathcal{A}}_{p_1}||T^{\mathcal{A}}_{p_2'}|} C^{p'}{}_{{}^{3}{}^{\mathcal{A}}_{p_1p_2'}\mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}}; (B_x,\ B_y)。 \tag{3.74}$$

从 (3.64) 到 (3.68) 的初始步骤使用了维克定理、克罗内克等变性和指标缩并。在 (3.69) 中，我们将经典矩阵设为 $A_x^\dagger A_x = B_x$ 和 $A_y^\dagger A_y = B_y$，以匹配方程 (3.15) 的记号；而在 (3.70) 中使用了狄拉克δ函数和 (3.1) 中的规范不变算符定义。方程 (3.71)–(3.73) 将 σ_3 求和拆分为按 p_3标记的等价类/分拆上的求和，并在狄拉克δ函数中设定一个 PCA 元素。注意，α和 $\sigma^{(p_3)}$ 属于同一个轨道/等价类 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{A}}(p_3)$，因为 $\sigma^{(p_3)}$ 是该轨道中的任意置换。使用引理 3 得到最后一行 (3.74)。利用 $|T^{\mathcal{A}}_{p_i}|\mathcal{O}_{\sigma^{(p_i)}} \ \ni |T^{\mathcal{A}}_{p_i}|\mathcal{O}_{\sigma_i} = \mathcal{O}_{p_i}$ 并重新排列轨道大小因子，我们得到了与耦合矩阵推导中方程 (3.33) 相同的组合基结果

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_{p_1}(XA_x,YA_y)(\mathcal{O}_{p_2}(XA_x,YA_y))^\dagger\rangle = m!n! \sum_{p_3} C^{p_3';\mathcal{A}}_{p_1p_2'} \mathcal{O}_{p_3}(B_x,B_y)} \tag{3.75}$$

这个使用经典见证场的双矩阵关联函数对应的图示见图6。当关联函数展开为对置换求和时，A_x 和 A_y 矩阵中的指标都会发生交换。

3.4 Fourier/Q基：使用经典场的双矩阵二点函数

为了对经典见证场结果采用傅里叶基，定义规范不变傅里叶算符

$$\mathcal{O}^R_{R_1,R_2,\mu,\nu}(XA_x,YA_y) = \sum_{\sigma\in S_{m+n}} \delta\left(Q^R_{R_1,R_2,\mu,\nu}\sigma^{-1}\right)\mathcal{O}_\sigma(XA_x,YA_y) \tag{3.76}$$

与厄米共轭

$$\left(\mathcal{O}^R_{R_1,R_2,\mu,\nu}(XA_x,YA_y)\right)^\dagger = \sum_{\sigma\in S_{m+n}} \delta\left(Q^R_{R_1,R_2,\nu,\mu}\sigma\right)\mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(A_x^\dagger X^\dagger, A_y^\dagger Y^\dagger) \tag{3.77}$$

$$= \sum_{\tilde\sigma\in S_{m+n}} \delta\left(Q^R_{R_1,R_2,\nu,\mu}\tilde\sigma^{-1}\right)\mathcal{O}_{\tilde\sigma}(A_x^\dagger X^\dagger, A_y^\dagger Y^\dagger) \tag{3.78}$$

$$= \mathcal{O}^R_{R_1,R_2,\nu,\mu}(A_x^\dagger X^\dagger, A_y^\dagger Y^\dagger)\,. \tag{3.79}$$

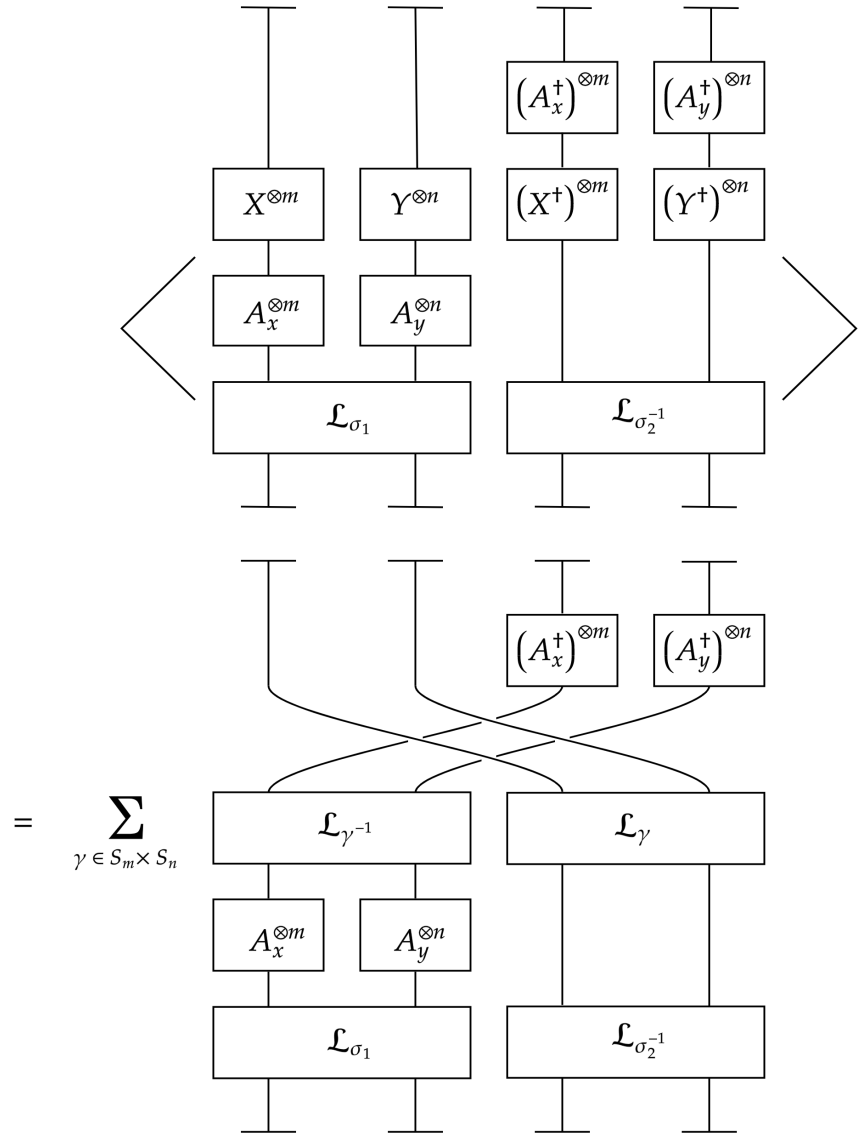

图6： 含经典矩阵场的一般双矩阵关联函数的图示表示。下方图示中的两处指标交换，是为了对应应用维克定理后出现的两个经典矩阵 A_x 和 A_y。

这里再次使用了 $(Q^R_{R_1,R_2,\mu,\nu})^\dagger = Q^R_{R_1,R_2,\nu,\mu}$, $\sigma^\dagger = \sigma^{-1}$，而 $\mathcal{O}_\sigma(XA_x, YA_y)$ 是此前在 (3.57) 中定义的、以置换参数化的算子。因此，使用这些傅里叶基底算符，关联函数为

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{O}^R_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}(XA_x, YA_y)\left(\mathcal{O}^R_{R_1,R_2,\mu_2,\nu_2}(XA_x, YA_y)\right)^\dagger\rangle \\ &= \sum_{\substack{\sigma,\tau \\ \in S_{m+n}}} \delta(Q^R_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1})\delta(Q^S_{S_1,S_2,\nu_2,\mu_2}\tau)\langle \mathcal{O}_\sigma(XA_x, YA_y)\left(\mathcal{O}_\tau(XA_x, YA_y)\right)^\dagger\rangle \end{aligned} \tag{3.80}$$

上述方程右侧的置换参数化关联函数可写成一个便于使用的形式

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{O}_\sigma(XA_x, YA_y)\left(\mathcal{O}_\tau(XA_x, YA_y)\right)^\dagger\rangle \\ &\qquad = \sum_{\gamma\in S_m\times S_n}\sum_{\rho\in S_{m+n}} \mathcal{O}_\rho(B_x, B_y)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})\,. \end{aligned} \tag{3.81}$$

这已在（3.70）以及集合 $B_x = A_x^\dagger A_x$ 和 $B_y = A_y^\dagger A_y$中实现。将其代入（3.80），再利用引理 4，即可再次得到最终的关联函数表达式

$$\boxed{\begin{aligned}\left\langle \mathcal{O}^R_{R_1,R_2,\mu_1,\nu_1}(XA_x, YA_y)\ (\mathcal{O}^S_{S_1,S_2,\mu_2,\nu_2}(XA_x, YA_y))^\dagger \right\rangle = \\ m!n!\delta^{RS}\delta_{R_1S_1}\delta_{R_2S_2}\delta_{\nu_1\nu_2}\mathcal{O}^R_{R_1,R_2,\mu_1,\mu_2}(B_x, B_y)\end{aligned}} \tag{3.82}$$

这一经典场见证情形的结果与耦合见证场情形 (3.56) 的形式完全相同。

4 代数与带有多矩阵见证的多矩阵关联函数

推广到任意多个见证矩阵场时，规范不变量的形式为

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\sigma(X_l) &= \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes \mathbf{m}}}\left(X_1^{\otimes m_1}\otimes X_2^{\otimes m_2}\cdots X_{l-1}^{\otimes m_{l-1}}\otimes X_l^{\otimes m_l}\mathcal{L}_\sigma\right)\\ &= \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes \mathbf{m}}}\left(\bigotimes_{\alpha=1}^{l} X_\alpha^{\otimes m_\alpha}\mathcal{L}_\sigma\right).\end{aligned} \tag{4.1}$$

此处 l1 abel 表示唯一/可区分的矩阵，$\mathbf{m} = m_1+m_2+\cdots+m_l$和 $\mathcal{L}_\sigma$具有作用量

$$\mathcal{L}_\sigma\,|e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\mathbf{m}}}\rangle = |e_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\sigma(\mathbf{m})}}\rangle\,. \tag{4.2}$$

这些算符的不变性由等价关系刻画

$$\sigma\sim\gamma\sigma\gamma^{-1} \tag{4.3}$$

其中 $\sigma\in S_{\sum_{i=1}^l m_i}\equiv S_{\mathbf{m}}$和 $\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}$，满足

$$\mathcal{O}_\sigma(X_l) = \mathcal{O}_{\gamma\sigma\gamma^{-1}}(X_l)\,. \tag{4.4}$$

由此类等价关系得到的相关 PCA 是对 $\mathcal{A}(m,n)$（花边 PCA）的扩展，因此记作：$\mathcal{A}(m_1,m_2,\ldots,m_l):=\mathcal{A}(\vec{m})$。此 $\mathcal{A}(\vec{m})$ 定义为与 $\mathbb{C}[S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}]$ 对易的 $\mathbb{C}[S_{\mathbf{m}}]$ 子代数。为表示其元素，我们引入以下记法。Aut$_{\vec{\mathcal{A}}}(p)\equiv$ Aut$_{S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}}\left(\sigma^{(p)}\right)$ 是$S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}$的子群，由在 $\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}$共轭作用下保持 $\sigma^{(p)}\in S_{\mathbf{m}}$不变的元素组成，其大小为 $|\mathrm{Aut}_{\vec{\mathcal{A}}}(p)|$。轨道 Orb $_{\vec{\mathcal{A}}}(p)\equiv$Orbit $\left(\sigma^{(p)},S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}\right)$是 $S_{\mathbf{m}}$ 中通过 $\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}$对 $\sigma^{(p)}\in S_{\mathbf{m}}$ 进行共轭作用而得到的元素集合，即 $\gamma\sigma^{(p)}\gamma^{-1}$；每个轨道/等价类的大小记为$|T_p^{\vec{\mathcal{A}}}| = |$Orb $_{\vec{\mathcal{A}}}(p)| = \prod_{\beta=1}^l m_\beta!/|Aut_{\vec{\mathcal{A}}}(p)|$。为明确起见，$\sigma^{(p)}\in S_{\mathbf{m}}$是轨道 Orb $_{\vec{\mathcal{A}}}(p)$中的任意置换。因此，$\mathcal{A}(\vec{m})$的一个元素定义为

$$T_p^{\vec{\mathcal{A}}} = \frac{1}{|\mathrm{Aut}_{\vec{\mathcal{A}}}(p)|}\sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}}\gamma\sigma^{(p)}\gamma^{-1} = \sum_{\alpha\in\mathrm{Orb}_{\vec{\mathcal{A}}}(p)}\alpha\quad\in\mathcal{A}(\vec{m})\,, \tag{4.5}$$

其中，$\vec{\mathcal{A}}$ on $T_p^{\vec{\mathcal{A}}}$、Aut$_{\vec{\mathcal{A}}}(p)$ 和 Orb $_{\vec{\mathcal{A}}}(p)$ 中的标签表明，这些量与 $\mathcal{A}(\vec{m})$ PCA 相关。因此，这些 PCA 元素是同一轨道/类中元素的求和，其通过式 (4.3) 的等价关系获得。

应用前文所述的类似技术，以下各节将探讨具有经典见证场和耦合见证场的多矩阵模型的组合基与舒尔/傅里叶基关联函数结果。

4.1 具有多矩阵耦合项的一般算子的二点函数

多矩阵模型中带有耦合见证矩阵的配分函数为

$$\Sigma[0] = \prod_{\eta=1}^{l}\int[dX_\eta]e^{-\mathrm{Tr}(X_\eta A_\eta X_\eta^\dagger)}\,, \tag{4.6}$$

其中，下文中，$(A_\eta)^{-1}=B_\eta$ 定义了与变量 X_η相关联的耦合矩阵，而 $\Sigma[0]$中的 $[0]$ 表示无源配分函数。按照附录 A 中相同的方式引入源后，可以推导出 X_η 场变量的二点函数

$$\langle (X_\alpha)^i_j (X^\dagger_\beta)^k_l\rangle = \prod_{\eta=1}^{l}\frac{1}{\Sigma[0]}\int [dX_\eta](X_\alpha)^i_j (X^\dagger_\beta)^k_l e^{-\mathrm{Tr}(X_\eta A_\eta X^\dagger_\eta)} = \delta_{\alpha\beta}\delta^i_l((A_\alpha)^{-1})^k_j = \delta_{\alpha\beta}\delta^i_l (B_\alpha)^k_j\,. \tag{4.7}$$

使用由置换参数化的 GIO

$$\mathcal{O}_\sigma(X_l) = \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes\mathbf{m}}}\left(X_1^{\otimes m_1}\otimes X_2^{\otimes m_2}\otimes\cdots\otimes X_{l-1}^{\otimes m_{l-1}}\otimes X_l^{\otimes m_l}\mathcal{L}_\sigma\right) \tag{4.8}$$

及其厄米共轭

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}_\sigma(X_l))^\dagger &= \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes\mathbf{m}}}\left((X_1^\dagger)^{\otimes m_1}\otimes(X_2^\dagger)^{\otimes m_2}\otimes\cdots\otimes(X_{l-1}^\dagger)^{\otimes m_{l-1}}\otimes(X_l^\dagger)^{\otimes m_l}\mathcal{L}_{\sigma^{-1}}\right)\\ &= \mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(X_l^\dagger)\,,\end{aligned} \tag{4.9}$$

关联函数构造如下

$$\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(X_l)\,(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X_l))^\dagger\rangle$$

$$= \left\langle \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes\mathbf{m}}}\left(X_1^{\otimes m_1}\otimes\cdots\otimes X_l^{\otimes m_l}\mathcal{L}_{\sigma_1}\right)\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes\mathbf{m}}}\left((X_1^\dagger)^{\otimes m_1}\otimes\cdots\otimes(X_l^\dagger)^{\otimes m_l}\mathcal{L}_{\sigma_2^{-1}}\right)\right\rangle \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}= \sum_{\substack{i_1\ \dots\ i_{\mathbf{m}},\dots,\\ j_1\ \dots\ j_{\mathbf{m}}}}\langle\ &(X_1)^{i_1}_{i_{\sigma_1(1)}}\cdots(X_1)^{i_{m_1}}_{i_{\sigma_1(m_1)}}\cdots\cdots(X_l)^{i_{\mathbf{m}-m_l}}_{i_{\sigma_1(\mathbf{m}-m_l)}}\cdots(X_l)^{i_{\mathbf{m}}}_{i_{\sigma_1(\text{矩阵})}}\\ &\times(X_1^\dagger)^{j_1}_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}}\cdots(X_1^\dagger)^{j_{m_1}}_{j_{\sigma_2^{-1}(m_1)}}\cdots\cdots(X_l^\dagger)^{j_{\mathbf{m}-m_l}}_{j_{\sigma_2^{-1}(\mathbf{m}-m_l)}}\cdots(X^\dagger_l)^{j_{\mathbf{m}}}_{j_{\sigma_2^{-1}(\mathbf{m})}}\ \rangle\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}= \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}}\sum_{\substack{i_1\ \dots\ i_{\mathbf{m}},\dots,\\ j_1\ \dots\ j_{\mathbf{m}}}}&\delta^{i_1}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}\cdots\delta^{i_{m_1}}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(m_1)}}\cdots\cdots\delta^{i_{\mathbf{m}-m_l}}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m}-m_l)}}\cdots\delta^{i_{\mathbf{m}}}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m})}}\\ &\times(B_l)^{j_1}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(1)}}\cdots(B_l)^{j_{m_1}}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m_1)}}\cdots\cdots(B_l)^{j_{\mathbf{m}-m_l}}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(\mathbf{m}-m_l)}}\cdots(B_l)^{j_{\mathbf{m}}}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(\mathbf{m})}}\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}= \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}}\sum_{\substack{i_1\ \dots\ i_{\mathbf{m}},\dots,\\ j_1\ \dots\ j_{\mathbf{m}}}}&\delta^{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(1)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}\cdots\delta^{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m_1)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m_1)}}\cdots\cdots\delta^{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(\mathbf{m}-m_l)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m}-m_l)}}\cdots\delta^{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(\text{矩阵})}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m})}}\\ &\times(B_1)^{j_1}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(1)}}\cdots(B_1)^{j_{m_1}}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(m_1)}}\cdots\cdots(B_l)^{j_{\mathbf{m}-m_l}}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(\mathbf{m}-m_l)}}\cdots(B_l)^{j_{\mathbf{m}}}_{i_{\gamma^{-1}\sigma_1(\mathbf{m})}}\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$= \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}}\sum_{j_1,\dots j_{\mathbf{m}}}(B_1)^{j_1}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}\cdots(B_1)^{j_{m_1}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m_1)}}\cdots \tag{4.14}$$

$$\cdots\times(B_l)^{j_{(\mathbf{m}-m_l)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m}-m_l)}}\cdots(B_l)^{j_{(\mathbf{m})}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m})}}\,.$$

在方程 (4.12) 和 (4.14) 之间应用了克罗内克等变性，并对 i指标进行了缩并。进一步化简后得到

$$\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(X_l)\,(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X_l))^\dagger\rangle$$

$$= \sum_{\substack{\sigma_3\in S_{\mathbf{m}}\\ \gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}}}\mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes\mathbf{m}}}(B_1^{\otimes m_1}\otimes\cdots\otimes B_l^{\otimes m_l}\mathcal{L}_{\sigma_3})\delta(\sigma_3^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) \tag{4.15}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma_3\in S_{\mathbf{m}}\\ \gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}}}\mathcal{O}_{\sigma_3}(B_l)\delta(\sigma_3^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) \tag{4.16}$$

$$= \sum_{p_3} \sum_{\gamma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}} \left(\sum_{\alpha \in \mathrm{Orb}_{\vec{\mathcal{A}}}(p_3)} \mathcal{O}_\alpha(B_l) \delta(\alpha^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) \right) \tag{4.17}$$

$$= \sum_{p_3} \mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B_l) \sum_{\gamma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}} \delta(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) \,, \tag{4.18}$$

其中 p_3 标签等价类/轨道。在 (4.15) 中采用了迹记号，并使用了狄拉克δ函数。接着根据方程 (4.1) 的定义，在方程 (4.16) 中设定见证场 GIO。在 (4.17) 中，将对 σ_3 的求和拆分为对由 p_3 标记的等价类/轨道的求和；最后，将对 α 的求和——即对等价类/轨道 $\mathrm{Orb}_{\vec{\mathcal{A}}}(p_3)$ 中元素的求和，其中 $\sigma^{(p_3)}$ 和 α 属于该类——移至狄拉克δ函数内，从而得到 (4.18) 中的 PCA 元素 $T^{\mathcal{A}}_{p_3'}$。上标撇号表示与逆置换相关的轨道。

引理5。对于 $\gamma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}$、$\sigma_i \in S_{\mathbf{m}}$ 和 $T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_i} \in \mathcal{A}(\vec{m})$，下列等式成立

$$\sum_{\gamma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}} \delta(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) = \frac{|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}| \prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha!}{|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_1'}||T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_2'}|} C^{p_3';\vec{\mathcal{A}}}_{p_1 p_2'} \tag{4.19}$$

其中 $C^{p_3';\ \vec{\mathcal{A}}}_{p_1 p_2'}$ 是 $\mathcal{A}(\vec{m})$ 的*PCA*结构常数，σ_1和 σ_2^{-1}分别属于由 p_1和 p_2' 标记的等价类。

证明。

$$\sum_{\gamma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}} \delta(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})$$

$$= \sum_{\mu_1 \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}} \delta\left(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}(\mu_1\mu_2)^{-1}\sigma_1(\mu_1\mu_2)\sigma_2^{-1}\right) \tag{4.20}$$

$$= \sum_{\mu_1 \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}} \delta\left((\mu_2^{-1}\mu_2)T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}\mu_2^{-1}\mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1\mu_2\sigma_2^{-1}\right) \tag{4.21}$$

$$= \sum_{\mu_1 \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}} \delta\left(\underbrace{\mu_2 T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}\mu_2^{-1}}_{T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}}\mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1\mu_2\sigma_2^{-1}\mu_2^{-1}\right) \tag{4.22}$$

$$= \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha!} \sum_{\mu_1,\mu_2 \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}} \delta\left(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}(\mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1)(\mu_2\sigma_2^{-1}\mu_2^{-1})\right) \tag{4.23}$$

$$= \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha!} \delta\left(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}\left(\sum_{\mu_1 \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}} \mu_1^{-1}\sigma_1\mu_1\right)\left(\sum_{\mu_2 \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_l}} \mu_2\sigma_2^{-1}\mu_2^{-1}\right)\right) \tag{4.24}$$

$$= \frac{|\mathrm{Aut}_{\vec{\mathcal{A}}(p_1)}||\mathrm{Aut}_{\vec{\mathcal{A}}(p_2')}|}{\prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha!} \delta\left(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_1}T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_2'}\right) \tag{4.25}$$

$$= \frac{\prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha!}{|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_1}||T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_2'}|} \delta\left(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_1}T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_2'}\right) . \tag{4.26}$$

在方程 (4.20) 中，对 γ 的求和被替换为对 μ_1 的求和，并取 $\gamma \to \mu_1\mu_2$。在 (4.21) 中插入一个恒等置换 ($e = \mu_2^{-1}\mu_2$)，随后在狄拉克δ函数中对 μ_2^{-1} 进行循环

使其紧邻 σ_2^{-1}，并在 (4.22) 中识别出 $\mu_2 T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}\mu_2^{-1} = T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}$。接下来的步骤是在 (4.23) 中引入对 μ_2 的求和（包括所需的 $1/|S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}| = 1/\prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha!$ 因子），将求和置于狄拉克δ函数中，从而确立 (4.24) 与 (4.25) 之间 PCA 元素和自同构群大小因子的关系，最后利用轨道-稳定子定理，在方程 (4.26) 中将 $|\mathrm{Aut}\,\vec{\mathcal{A}}(p_i)| = |S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}|/|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_i}|$ 改写。这里与前几节一样，类标签上的撇号记法表示逆置换所属的等价类，并且我们选择 σ_1 和 σ_2^{-1} 分别属于由 p_1 和 p_2' 标记的等价类。

利用 $\mathcal{A}(\vec{m})$ PCA 元素的乘法性质，可以化简剩余的狄拉克δ函数，从而得出结构常数

$$\delta\left(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_1}T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_2'}\right) = \sum_{p_k} C^{p_k;\vec{\mathcal{A}}}_{p_1p_2'}\delta(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_k}) = \sum_{p_k} C^{p_k;\vec{\mathcal{A}}}_{p_1p_2'}\delta_{p_3'p_k}|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_k}| = |T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}|C^{p_3';\vec{\mathcal{A}}}_{p_1p_2'}. \tag{4.27}$$

因此

$$\sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \delta(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) = \frac{\prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha!}{|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_1}||T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_2'}|}|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}|C^{p_3';\vec{\mathcal{A}}}_{p_1p_2'}. \tag{4.28}$$

□

利用这一引理，关联函数表达式为

$$\langle\mathcal{O}_{\sigma_1}(X_l)\left(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X_l)\right)^\dagger\rangle = \sum_{p_3}\frac{|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}|\prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha!}{|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_1}||T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_2'}|}C^{p_3';\vec{\mathcal{A}}}_{p_1p_2'}\mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B_l)\,. \tag{4.29}$$

最后，利用 $|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_i'}| = |T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_i}|$, $\mathcal{O}_{\sigma_1}\equiv\mathcal{O}_{\sigma^{(p_1)}}$, $\mathcal{O}_{\sigma_2^{-1}}\equiv\mathcal{O}_{\sigma^{(p_2')}}$，重新排列轨道大小并取 $|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_i}|\mathcal{O}_{\sigma^{(p_i)}} = \mathcal{O}_{T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_i}}\equiv\mathcal{O}_{p_i}$ 关联函数，组合基中的表达式变为

$$\boxed{\langle\mathcal{O}_{p_1}(X_l)\left(\mathcal{O}_{p_2}(X_l)\right)^\dagger\rangle = \prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha!\sum_{p_3} C^{p_3';\vec{\mathcal{A}}}_{p_1p_2'}\mathcal{O}_{p_3}(B_l)} \tag{4.30}$$

与前几节一样，在计算量子场 X_l GIO 两点函数后，我们得到见证场 B_l中的组合基 GIO 的线性组合。因此，提供基底标签数据（p_1，p_2'，p_3'）即可提供重构置换中心化子代数 $\mathcal{A}(\vec{m})$ 的结构常数所需的信息。此外，结构常数 $C^{p_3';\ \vec{\mathcal{A}}}_{p_1p_2'}$ 是整数，因为每个轨道／等价类都由固定数量的元素组成。

4.2 多矩阵关联函数的傅里叶/Q基

多矩阵情形的表示分解大体沿用 §3.2 中的方法，但推广到了更大的张量空间，以容纳更多的互异矩阵[4]。推广到 $\sigma\in S_{\mathbf{m}}$ 和 $\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}$ 后，我们得到如下形式的分解

$$V_R^{(S_{\mathbf{m}})} = \bigoplus_{R_1,R_2,\ldots,R_l} V_{R_1}^{(S_{m_1})}\otimes V_{R_2}^{(S_{m_2})}\otimes\cdots\otimes V_{R_l}^{(S_{m_l})}\otimes V^R_{R_1,R_2,\ldots,R_l}. \tag{4.31}$$

[4]本节的记号基本沿用 [26]，更多细节和恒等式可参见其附录 A、B 和 D。

此类空间中的一个态可以标记为

$$|R;\mathbf{r},\nu,\mathbf{t}\rangle \tag{4.32}$$

其中，R是 $S_{\mathbf{m}}$的表示，而$\mathbf{r}=(R_1,\ R_2,\ \ldots\ldots,\ R_l)$表示单个表示 R_i的集合，其中 $i=1,\ \ldots\ldots,\ l$。重数标签 ν表示或计数张量积中的$\mathbf{r}$ 个不可约表示在分解中出现的次数，而$\mathbf{t}=(t_1,\ t_2,\ \ldots\ldots,\ t_l)$是一组标签，用于表示每个单个表示空间中的状态，例如 $V^{(S_{m_1})}{}_{R_1}$的状态由 t_1 标记。沿用这一记号，现建立用于生成傅里叶基中的 GIO 的特征标。定义投影型算符

$$P^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}=\sum_{\mathbf{t}}|R;\mathbf{r},\mu,\mathbf{t}\rangle\langle R;\mathbf{r},\nu,\mathbf{t}| \tag{4.33}$$

其分量用分支系数[5]表示

$$\left(P^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}\right)^{ij}=\sum_{\mathbf{t}}B^{R;i}_{\mathbf{r},\mu;\mathbf{t}}B^{R;j}_{\mathbf{r},\nu;\mathbf{t}}\,, \tag{4.34}$$

其中，$\sum_{\mathbf{t}}$表示对$\mathbf{t}=(t_1,\ t_2,\ \ldots\ldots,\ t_l)$中的所有状态空间求和。然后由这些算符构造特征标

$$\chi^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}(\sigma)=\mathrm{Tr}_{V^{\mathbf{r}}}\left[P^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}\left(D^R(\sigma)\right)\right] \tag{4.35}$$

这自然导出了 Q-基元素的定义

$$Q^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}=\frac{d_R}{\mathbf{m}!}\sum_{\sigma\in S_{\mathbf{m}}}\chi^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}(\sigma)\sigma^{-1}\,. \tag{4.36}$$

其中，d_R 是 $S_{\mathbf{m}}$的表示 R 的维数。这些基元素的一个重要性质是，它们像矩阵一样相乘

$$Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}Q^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}=\delta^{RS}\delta_{\mathbf{rs}}\delta_{\nu_1\mu_2}Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_2}\,. \tag{4.37}$$

推导该规则请参见附录 D。因此，多矩阵模型在此傅里叶基下的 GIO 定义为

$$\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}(X_l)=\sum_{\sigma\in S_{\mathbf{m}}}\delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}\sigma^{-1}\right)\mathcal{O}_\sigma(X_l)\,, \tag{4.38}$$

其共轭为

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}(X_l))^\dagger&=\sum_{\sigma\in S_{\mathbf{m}}}\delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\nu,\mu}\sigma\right)\mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(X_l^\dagger) &(4.39)\\ &=\sum_{\tilde\sigma\in S_{\mathbf{m}}}\delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\nu,\mu}\tilde\sigma^{-1}\right)\mathcal{O}_{\tilde\sigma}(X_l^\dagger) &(4.40)\\ &=\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\nu,\mu}(X_l^\dagger)\,. &(4.41)\end{aligned}$$

其中，应用了 $(Q^R_{\mathbf{r},\mu,\nu})^\dagger=Q^R_{\mathbf{r},\nu,\mu}$，且 $\sigma^\dagger=\sigma^{-1}$。此外，$\mathcal{O}_\sigma(X_l)$ 是式 (4.8) 中定义的置换参数化算符。因此，这些规范不变算符的关联函数可写为

$$\left\langle\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(X_l)(\mathcal{O}^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}(X_l))^\dagger\right\rangle$$

[5]分支系数 $B^{R;i}{}_{\mathbf{r}\ \nu;\mathbf{t}}$ 定义为向量 $|R;\mathbf{r}\ \nu,\mathbf{t}\rangle$ 在 R 的任意给定正交基下的分量：$B^{R;i}{}_{\mathbf{r}\ \nu;\mathbf{t}}=\langle R;\ i|R;\mathbf{r}\ \nu,\mathbf{t}\rangle$。

$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_{\mathbf{m}}} \delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1}\right)\delta\left(Q^S_{\mathbf{s},\nu_2,\mu_2}\tau\right)\langle \mathcal{O}_\sigma(X_l)\mathcal{O}_{\tau^{-1}}(X_l^\dagger)\rangle \tag{4.42}$$

$$= \sum_{\sigma,\tau,\rho\in S_{\mathbf{m}}} \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1}\right)\delta\left(Q^S_{\mathbf{s},\nu_2,\mu_2}\tau\right)\mathcal{O}_\rho(B_l)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1}), \tag{4.43}$$

其中，将方程 (4.16) 中置换参数化基底的多矩阵关联函数结果代入了方程 (4.43)。

引理 *6. </style}*对于 ρ、σ、$\tau\in S_{\mathbf{m}}$ 和 $\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}$，以下等式成立

$$\sum_{\sigma,\tau,\rho\in S_{\mathbf{m}}} \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1}\right)\delta\left(Q^S_{\mathbf{s},\nu_2,\mu_2}\tau\right)\mathcal{O}_\rho(B_l)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})$$
$$= h\delta^{RS}\delta_{\mathbf{rs}}\delta_{\nu_1\nu_2}\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu_1,\mu_2}(B_l), \tag{4.44}$$

其中 $h=\prod_{\alpha=1}^l m_\alpha! = |S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}|$。

证明。

$$\sum_{\sigma,\tau,\rho\in S_{\mathbf{m}}} \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1}\right)\delta\left(Q^S_{\mathbf{s},\nu_2,\mu_2}\tau\right)\mathcal{O}_\rho(B_l)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})$$
$$= \sum_{\rho\in S_{\mathbf{m}}} \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \mathcal{O}_\rho(B_l)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}\gamma Q^S_{\mathbf{s},\nu_2,\mu_2}) \tag{4.45}$$

$$= h\sum_{\rho\in S_{\mathbf{m}}} \mathcal{O}_\rho(B_l)\delta(\rho^{-1}Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}Q^S_{\mathbf{s},\nu_2,\mu_2}) \tag{4.46}$$

$$= h\delta^{RS}\delta_{\mathbf{rs}}\delta_{\nu_1\nu_2}\left(\sum_{\rho\in S_{\mathbf{m}}}\delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\mu_2}\rho^{-1}\right)\mathcal{O}_\rho(B_l)\right) \tag{4.47}$$

$$= h\delta^{RS}\delta_{\mathbf{rs}}\delta_{\nu_1\nu_2}\mathcal{O}^R_{\mathbf{r}\ \mu_1,\ \mu_2}(B_l) \tag{4.48}$$

方程 (4.45) 对包含 Q-基元素的δ函数求和，并将它们代入最终的δ函数中，替换 σ 和 τ^{-1}。在方程 (4.46) 中，利用了 $Q^R_{\mathbf{r},\ \mu_1,\ \nu_1}$ 在 γ 共轭作用下的不变性，从而消去了对 γ 的依赖，随后计算求和，得到因子 h。按照 (4.37) 将 Q-基元素作为矩阵相乘，得到方程 (4.47)。最后一行只是根据定义 (4.38)，指出了见证场中的一个傅里叶基底算算符。

□

利用上述引理，(4.43) 的关联函数为

$$\boxed{\left\langle \mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(X_l)(\mathcal{O}^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}(X_l))^\dagger\right\rangle = h\delta^{RS}\delta_{\mathbf{rs}}\delta_{\nu_1\nu_2}\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu_1\mu_2}(B_l)} \tag{4.49}$$

这展现了单矩阵和双矩阵情形中观察到的正交关系，并表明该关联函数与由见证场构成的傅里叶算子成正比 B_l。

4.3 多矩阵量子场与经典场的可观测量函数 s

通过经典见证场获得多矩阵关联函数的结果是可行的，且遵循与 §2.3 和 §3.3 相同的步骤。定义配分函数

$$\Sigma[0] = \prod_{\eta=1}^{l}\int [dX_\eta]e^{-\mathrm{Tr}(X_\eta X_\eta^\dagger)}. \tag{4.50}$$

其基本关联函数为

$$\langle (X_\alpha)^i_j (X^\dagger_\beta)^k_l \rangle = \prod_{\eta=1}^{l} \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dX_\eta] (X_\alpha)^i_j (X^\dagger_\beta)^k_l e^{-\mathrm{Tr}(X_\eta X^\dagger_\eta)} = \delta_{\alpha,\beta} \delta^i_l \delta^k_j \,. \tag{4.51}$$

然后，使用由置换参数化的 GIO

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\sigma(Z_l A_l) &= \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes \mathbf{m}}} \left((Z_1 A_1)^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes (Z_l A_l)^{\otimes m_l} \mathcal{L}_\sigma \right) \\ &= (Z_1 A_1)^{i_1}_{i_{\sigma(1)}} \ldots (Z_1 A_1)^{i_{m_1}}_{i_{\sigma(m_1)}} \ldots (Z_l A_l)^{i_{\mathbf{m}-m_l}}_{i_{\sigma(\mathbf{m}-m_l)}} \ldots (Z_l A_l)^{i_{\mathbf{m}}}_{i_{\sigma(\mathbf{m})}} \end{aligned} \tag{4.52}$$

及其厄米共轭

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_\sigma(Z_l A_l))^\dagger &= \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes \mathbf{m}}} \left((A_1^\dagger Z_1^\dagger)^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes (A_l^\dagger Z_l^\dagger)^{\otimes m_l} \mathcal{L}_{\sigma^{-1}} \right) \\ &= (A_1^\dagger Z_1^\dagger)^{i_1}_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \ldots (A_1^\dagger Z_1^\dagger)^{i_{m_1}}_{i_{\sigma^{-1}(m_1)}} \ldots (A_l^\dagger Z_l^\dagger)^{i_{\mathbf{m}-m_l}}_{i_{\sigma^{-1}(\mathbf{m}-m_l)}} \ldots (A_l^\dagger Z_l^\dagger)^{i_{\mathbf{m}}}_{i_{\sigma^{-1}(\mathbf{m})}} \\ &= \mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(A_l^\dagger Z_l^\dagger) \,, \end{aligned} \tag{4.53}$$

经典见证场的 GIO 两点函数为

$$\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(X_l A_l) \left(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X_l A_l)\right)^\dagger \rangle$$

$$= \prod_{\eta=1}^{l} \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dX_\eta] \mathcal{O}_{\sigma_1}(X_l A_l) \left(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X_l A_l)\right)^\dagger e^{-\mathrm{Tr}(X_\eta X^\dagger_\eta)} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{I,J,K,Q} (A_1)^{k_1}_{i_{\sigma_1(1)}} \ldots (A_1)^{k_{m_1}}_{i_{\sigma_1(m_1)}} \ldots (A_l)^{k_{\mathbf{m}-m_l}}_{i_{\sigma_1(\mathbf{m}-m_l)}} \ldots (A_l)^{k_{\mathbf{m}}}_{i_{\sigma_1(\mathbf{m})}} (A_1^\dagger)^{j_1}_{q_1} \ldots (A_1^\dagger)^{j_{m_1}}_{q_{m_1}} \\ &\quad \times (A_l^\dagger)^{j_{\mathbf{m}-m_l}}_{q_{\mathbf{m}-m_l}} \ldots (A_l^\dagger)^{j_{\mathbf{m}}}_{q_{\mathbf{m}}} \prod_{\eta=1}^{l} \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dX_\eta] (Z_1)^{i_1}_{k_1} \ldots (Z_1)^{i_{m_1}}_{k_{m_1}} \ldots (Z_l)^{i_{\mathbf{m}-m_l}}_{k_{\mathbf{m}-m_l}} \ldots (Z_l)^{i_{\mathbf{m}}}_{k_{\mathbf{m}}} \\ &\quad \times (Z_1^\dagger)^{q_1}_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}} \ldots (Z_1^\dagger)^{q_{m_1}}_{j_{\sigma_2^{-1}(m_1)}} \ldots (Z_l^\dagger)^{q_{\mathbf{m}-m_l}}_{j_{\sigma_2^{-1}(\mathbf{m}-m_l)}} \ldots (Z_l^\dagger)^{q_{\mathbf{m}}}_{j_{\sigma_2^{-1}(\mathbf{m})}} e^{-\mathrm{Tr}(X_\eta X^\dagger_\eta)} \,, \end{aligned} \tag{4.55}$$

其中，对 I，J，K，Q 的求和涵盖所有矩阵指标。为简化记号，定义一个关于见证场的函数

$$\begin{aligned} f_l(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{q}; \sigma_1) = (A_1)^{k_1}_{i_{\sigma_1(1)}} \ldots &(A_1)^{k_{m_1}}_{i_{\sigma_1(m_1)}} \ldots (A_l)^{k_{\mathbf{m}-m_l}}_{i_{\sigma_1(\mathbf{m}-m_l)}} \ldots (A_l)^{k_{\mathbf{m}}}_{i_{\sigma_1(\mathbf{m})}} \\ &\times (A_1^\dagger)^{j_1}_{q_1} \ldots (A_1^\dagger)^{j_{m_1}}_{q_{m_1}} \ldots (A_l^\dagger)^{j_{\mathbf{m}-m_l}}_{q_{\mathbf{m}-m_l}} \ldots (A_l^\dagger)^{j_{\mathbf{m}}}_{q_{\mathbf{m}}} \,. \end{aligned} \tag{4.56}$$

采用这一记号，关联函数为

$$\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(X_l A_l) \left(\mathcal{O}_{\sigma_2}(X_l A_l)\right)^\dagger \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{I,J,K,Q} f_l(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{q}; \sigma_1) \prod_{\eta=1}^{l} \frac{1}{\Sigma[0]} \int [dX_\eta] (Z_1)^{i_1}_{k_1} \ldots (Z_1)^{i_{m_1}}_{k_{m_1}} \ldots (Z_l)^{i_{\mathbf{m}-m_l}}_{k_{\mathbf{m}-m_l}} \\ &\quad \times (Z_l)^{i_{\mathbf{m}}}_{k_{\mathbf{m}}} \ldots (Z_1^\dagger)^{q_1}_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}} \ldots (Z_1^\dagger)^{q_{m_1}}_{j_{\sigma_2^{-1}(m_1)}} \ldots (Z_l^\dagger)^{q_{\mathbf{m}-m_l}}_{j_{\sigma_2^{-1}(\mathbf{m}-m_l)}} \ldots (Z_l^\dagger)^{q_{\mathbf{m}}}_{j_{\sigma_2^{-1}(\mathbf{m})}} e^{-\mathrm{Tr}(X_\eta X^\dagger_\eta)} \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{I,J,K,Q} f_l(A, A^\dagger; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{q}; \sigma_1) \langle (Z_1)^{i_1}_{k_1} \ldots (Z_1)^{i_{m_1}}_{k_{m_1}} \ldots (Z_l)^{i_{\mathbf{m}-m_l}}_{k_{\mathbf{m}-m_l}} \ldots (Z_l)^{i_{\mathbf{m}}}_{k_{\mathbf{m}}} \\ &\qquad \times (Z_1^\dagger)^{q_1}_{j_{\sigma_2^{-1}(1)}} \ldots (Z_1^\dagger)^{q_{m_1}}_{j_{\sigma_2^{-1}(m_1)}} \ldots (Z_l^\dagger)^{q_{\mathbf{m}-m_l}}_{j_{\sigma_2^{-1}(\mathbf{m}-m_l)}} \ldots (Z_l^\dagger)^{q_{\mathbf{m}}}_{j_{\sigma_2^{-1}(\mathbf{m})}} \rangle \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$= \sum_{I,J,K,Q} \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} f_l(A,\ A^\dagger;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k},\ \vec{q};\ \sigma_1)\delta^{i_1}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}\delta^{q_1}_{k_{\gamma^{-1}(1)}}\cdots\cdots\delta^{i_{\mathbf{m}}}_{j_{\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m})}}\delta^{q_{\mathbf{m}}}_{k_{\gamma^{-1}(\mathbf{m})}} \tag{4.59}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_{\mathbf{m}}} \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \left(A_1^\dagger A_1\right)^{j_1}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}\cdots\left(A_1^\dagger A_1\right)^{j_{m_1}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m_1)}}\cdots \cdots\times\left(A_l^\dagger A_l\right)^{j_{\mathbf{m}-m_l}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m}-m_l)}}\cdots\left(A_l^\dagger A_l\right)^{j_{\mathbf{m}}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m})}} \tag{4.60}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_{\mathbf{m}}} \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} (B_1)^{j_1}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}\cdots(B_1)^{j_{m_1}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(m_1)}}\cdots \cdots\times(B_l)^{j_{(\mathbf{m}-m_l)}}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m}-m_l)}}\cdots(B_l)^{j_{(\mathbf{m})}\,j}_{\qquad\qquad\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(\mathbf{m})} \tag{4.61}$$

$$= \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes\mathbf{m}}}\left((B_1)^{\otimes m_1}\otimes\cdots\otimes(B_l)^{\otimes m_l}\mathcal{L}_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}}\right) \tag{4.62}$$

$$= \sum_{\sigma_3\in S_{\mathbf{m}}} \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \mathcal{O}_{\sigma_3}(B_l)\delta(\sigma_3^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})) \tag{4.63}$$

$$= \sum_{p_3} \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \left(\sum_{\alpha\in \mathrm{Orb}_{\vec{\mathcal{A}}}(p_3)} \mathcal{O}_\alpha(B_l)\delta(\alpha^{-1}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1})\right) \tag{4.64}$$

$$= \sum_{p_3} \mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B_l) \sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \delta(T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}) \tag{4.65}$$

$$= \sum_{p_3} \frac{|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}|\prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha!}{|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_1}||T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_2'}|} C^{p_3';\vec{\mathcal{A}}}_{p_1p_2'}\mathcal{O}_{\sigma^{(p_3)}}(B_l) \tag{4.66}$$

在上述推导中，通过运用克罗内克等变性、维克定理和指标缩并，从 (4.58) 得到了 (4.60)。$A_\eta^\dagger A_\eta = B_\eta$ 在 (4.61) 中设定，经典见证场的 GIO 以及狄拉克δ函数则用于 (4.63)。(4.64) 和 (4.65) 将求和拆分为等价类/轨道（标记为 p_3），以及对轨道 $\mathrm{Orb}_{\vec{\mathcal{A}}}(p_3)$ 中元素的求和（标记为 α）。通过在狄拉克δ函数内进行 α 求和，对 α^{-1} 求和，即可确定 PCA 元素 $T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_3'}$。最后，在 (4.66) 中运用了引理5，使关联函数呈现出显式依赖于 PCA 结构常数的形式。p_i' 上的撇号表示它是逆置换的分拆/等价类。利用 $|T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_i}|\mathcal{O}_{\sigma^{(p_i)}} \equiv |T^{\vec{\mathcal{A}}}_{p_i}|\mathcal{O}_{\sigma_i} = \mathcal{O}_{p_i}$ 和 $|T_{p_i'}| = |T_{p_i}|$，在重新排列轨道大小因子后，我们得到了与耦合矩阵推导中的方程 (4.30) 相同的组合基结果

$$\boxed{\langle\mathcal{O}_{p_1}(X_lA_l)\left(\mathcal{O}_{p_2}(X_lA_l)\right)^\dagger\rangle = \prod_{\alpha=1}^{l} m_\alpha! \sum_{p_3} C^{p_3';\vec{\mathcal{A}}}_{p_1p_2'}\mathcal{O}_{p_3}(B_l)} \tag{4.67}$$

对于多矩阵情形，可以通过插入所需数量的盒算符，使其与目标见证矩阵的数量相匹配，从而将图推广为图 5 和图 6 的直接推广。

4.4 傅里叶/Q 基下的多矩阵量子场与经典场二点函数

将傅里叶基下经典见证场的 GIO 定义为

$$\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}(X_l A_l) = \sum_{\sigma\in S_{\mathbf{m}}} \delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}\sigma^{-1}\right)\mathcal{O}_\sigma(X_l A_l)\,, \tag{4.68}$$

与共轭

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}(X_l A_l))^\dagger &= \sum_{\sigma\in S_{\mathbf{m}}} \delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\nu,\mu}\sigma\right)\mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(A_l^\dagger X_l^\dagger) &(4.69)\\ &= \sum_{\tilde\sigma\in S_{\mathbf{m}}} \delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\nu,\mu}\tilde\sigma^{-1}\right)\mathcal{O}_{\tilde\sigma}(A_l^\dagger X_l^\dagger) &(4.70)\\ &= \mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\nu,\mu}(A_l^\dagger X_l^\dagger)\,. &(4.71)\end{aligned}$$

其中应用了 $(Q^R_{\mathbf{r},\ \mu,\ \nu})^\dagger = Q^R_{\mathbf{r},\ \nu,\ \mu}$，以及 $\sigma^\dagger = \sigma^{-1}$ 。为方便起见，下面重复给出式 (4.63) 中的置换参数化关联函数结果,

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{O}_\sigma(X_l A_l)\left(\mathcal{O}_\tau(X_l A_l)\right)^\dagger\rangle &= \langle\mathcal{O}_\sigma(X_l A_l)\mathcal{O}_{\tau^{-1}}(A_l^\dagger X_l^\dagger)\rangle &(4.72)\\ &= \sum_{\rho\in S_{\mathbf{m}}}\sum_{\gamma\in S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_l}} \mathcal{O}_\rho(B_l)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1})\,, &(4.73)\end{aligned}$$

其中设定了 $B_l = A_l^\dagger A_l$ ，经典见证场在傅里叶基下的见证场关联函数为

$$\begin{aligned}&\langle\,\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(X_l A_l)\left(\mathcal{O}^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}(X_l A_l)\right)^\dagger\,\rangle\\ &= \sum_{\sigma,\tau\in S_{\mathbf{m}}} \delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1}\right)\delta\left(Q^S_{\mathbf{s},\nu_2,\mu_2}\tau\right)\langle\mathcal{O}_\sigma(X_l A_l)\left(\mathcal{O}_\tau(X_l A_l)\right)^\dagger\rangle &(4.74)\\ &= \sum_{\sigma,\ \tau,\ \rho\in S_{\mathbf{m}}}\sum_{\gamma\in S_{m_1}\times..\times S_{m_l}} \delta\left(Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}\sigma^{-1}\right)\delta\left(Q^S_{\mathbf{s},\nu_2,\mu_2}\tau\right)\mathcal{O}_\rho(B_l)\delta(\rho^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma\tau^{-1}) &(4.75)\\ &= h\delta^{RS}\delta_{\mathbf{rs}}\delta_{\nu_1\nu_2}\mathcal{O}^R_{\mathbf{r}_{\mu_1,\ \mu_2}}{}^{(B_l)}\,, &(4.76)\end{aligned}$$

其中最后一行是利用引理 6 得出的，再次得到 $h = \prod_{\alpha=1}^l m_\alpha!$ 这个关联函数结果

$$\boxed{\left\langle\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(X_l A_l)\left(\mathcal{O}^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}(X_l A_l)\right)^\dagger\right\rangle = h\delta^{RS}\delta_{\mathbf{rs}}\delta_{\nu_1\nu_2}\mathcal{O}^R_{\mathbf{r},\mu_1,\mu_2}(B_l)} \tag{4.77}$$

将 §3.4 的前述发现推广到任意数量的见证矩阵，同时再次借助表示论的 δ 函数确认两个规范不变算子关联函数的正交关系。

5 代数与带有张量见证场的张量关联函数

对见证场的讨论还可进一步扩展，引入张量不变量 [33,36]。秩为 d的张量算符在 $U(N)^{\times d}$ 下保持不变，并由置换 $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d)$ 标记。因此，它们通过将给定张量 $Z^{i_1\ldots i_d}$ 与其复共轭[6] $\bar{Z}_{i_1,\ \ldots i_d}$进行缩并而构造。一般的由置换参数化的 GIO 可写为

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_d}(\bar{Z}, Z)\\ &\qquad = \mathrm{Tr}_{V_1^{\otimes m}\otimes\cdots\otimes V_d^{\otimes m}}\left(Z^{\otimes m}\bar{Z}^{\otimes m}(\mathcal{L}_{\sigma_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}_{\sigma_d})\right)\\ &\qquad = \sum_I \bar{Z}_{(i_1)_{\sigma_1(1)}\cdots(i_d)_{\sigma_d(1)}}\cdots\bar{Z}_{(i_1)_{\sigma_1(m)}\cdots(i_d)_{\sigma_d(m)}}Z^{(i_1)_1\ldots(i_d)_1}\ldots Z^{(i_1)_m\ldots(i_d)_m}\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中，对 I 的求和遍历指标 $I = \{(i_1)_1, \ldots, (i_d)_1, \ldots, (i_1)_m, \ldots, (i_d)_m\}$ 的全集。张量不变量所依据的等价关系为

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d) \sim (\mu_1\sigma_1\mu_2, \mu_1\sigma_2\mu_2, \ldots, \mu_1\sigma_d\mu_2)\,, \tag{5.2}$$

其中 $\sigma_i\,, \mu_1\,, \mu_2 \in S_m$。这称为 S_m 在 $S_m^{\times d}$ 上的左右对角作用下的等价性，意味着等价的置换元组会产生相同的算子

$$\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_d}(\bar{Z}, Z) = \mathcal{O}_{\mu_1\sigma_1\mu_2,\mu_1\sigma_2\mu_2,\ldots,\mu_1\sigma_d\mu_2}(\bar{Z}, Z)\,. \tag{5.3}$$

与前文关于矩阵的讨论一致，这种关系可与置换中心化子代数（PCA）联系起来，后者可用于刻画张量关联函数。为了明确而简洁地展示此类关联函数的计算，从此处起我们专门讨论 $d = 3$。所研究的张量模型所对应的 PCA 记作 $\mathcal{K}(m)$，也称为 “Kronecker PCA”。这一代数最初在 [36] 中得到了详细讨论，其中研究了规范化版本 $\mathcal{K}(m)$ 和非规范化版本 $\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$ 与张量不变量计数之间的联系[7]。在该文中， $\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$ 被定义为 $\mathbb{C}(S_m)^{\otimes 3}$ 的向量空间和子代数，且在对角对称群代数[8] $\mathrm{Diag}[\mathbb{C}(S_m)]$, 的左右作用下保持不变，即

$$\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\sum_{\gamma_1,\gamma_2\in S_m}\gamma_1\sigma_1\gamma_2\otimes\gamma_1\sigma_2\gamma_2\otimes\gamma_1\sigma_3\gamma_2\,,\quad \sigma_1\,, \sigma_2\,, \sigma_3 \in S_m\right\}. \tag{5.4}$$

这也是先前矩阵模型中采用的定义，其中代数元素由群平均构成。这种 PCA 与图之间的重要关系是 [33, 36, 38, 39], 的核心内容，其中为代数实现了图基。这个基只是对迄今使用的组合／置换基的一种重新描述，即用唯一的图来标记代数。对这些图的计数直接关联到对 $\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$中元素的计数，因为二者共享式（5.2）中的同一等价关系（关于这些图的构造，更多详情请参见 [38]第 2 节）。

该关系和事实 (5.3) 特别适用于 $\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$。用图论术语来说， $\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$对应于二部图，其中有 m 个三价顶点，各有三条指向内的带色边；还有 m 个三价顶点，各有三条指向外的带色边。因此，唯一的图是三元组 $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in S_m \times S_m \times S_m$ 的等价类。表达式 $\mathrm{Col}(m)$

[6]在张量情形中，按照惯例，复共轭量的指标将置于下方。[7]$\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$与 $\mathcal{K}(m)$同构，可以互换使用，二者均称为 Kronecker PCA。[8]$\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$在 [36]中也称为“双陪集代数”。

用于表示这类等价类的集合，其中 m 表示顶点数，而 $r \in \{1, \ldots, |\mathrm{Col}(m)|\}$ 表示所选 m 中每个单独图的标签。联系前文提到的计数，可知 $|\mathrm{Col}(m)| = |\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)|$，即图的数量等于代数的维数。为定义后续讨论中使用的 PCA 元素，我们还将 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{K}}(r)$ 指定为 $\mathrm{Diag}[S_m] \times \mathrm{Diag}[S_m]$ 的子群，它使三元组 $(\sigma_1^{(r)},\ \sigma_2^{(r)},\ \sigma_3^{(r)}) \in S_m \times S_m \times S_m$ 保持不变；并将 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(r)$ 指定为通过 S_m 的左右对角作用得到的唯一置换三元组的集合。轨道—稳定子定理由此可以将这些轨道的大小 $|\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(r)|$ 与 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{K}}(r)$ 群的大小 $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{K}}(r)|$ 联系起来。更准确地说，该定理指出存在一个同构，使得

$$\frac{1}{|\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(r)|} = \frac{|\mathrm{Aut}_{\mathcal{K}}(r)|}{|\mathrm{Diag}[S_m] \times \mathrm{Diag}[S_m]|} = \frac{|\mathrm{Aut}_{\mathcal{K}}(r)|}{(m!)^2} \tag{5.5}$$

简要介绍背景和符号后，考虑$\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$的一个图基元素：

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{(m!)^2} \sum_{\mu_1, \mu_2 \in S_m} \mu_1 \sigma_1^{(r)} \mu_2 \otimes \mu_1 \sigma_2^{(r)} \mu_2 \otimes \mu_1 \sigma_3^{(r)} \mu_2 && (5.6) \\ &= \frac{|\mathrm{Aut}_{\mathcal{K}}(r)|}{(m!)^2} \sum_{a \in \mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(r)} \sigma_1^{(r)}(a) \otimes \sigma_2^{(r)}(a) \otimes \sigma_3^{(r)}(a) && (5.7) \\ &= \frac{1}{|\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(r)|} \sum_{a \in \mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(r)} \sigma_1^{(r)}(a) \otimes \sigma_2^{(r)}(a) \otimes \sigma_3^{(r)}(a) \quad \in \mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)\,. && (5.8) \end{aligned}$$

这里，a 标记属于同一轨道的不同置换三元组，因此，$(\sigma_1^{(r)}(a) \otimes \sigma_2^{(r)}(a) \otimes \sigma_3^{(r)}(a))$是轨道$\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(r)$的一个代表三元组。顺便一提，先前矩阵模型中使用的 T基（例如 Necklace PCA 的方程 (3.6)）与 Kronecker PCA 的图 E 基之间可以通过归一化直接建立联系

$$E_r = \frac{T_r^{\mathcal{K}}}{|T_r^{\mathcal{K}}|}\,, \qquad T_r^{\mathcal{K}} = \sum_{a \in \mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(r)} \sigma_1^{(r)}(a) \otimes \sigma_2^{(r)}(a) \otimes \sigma_3^{(r)}(a)\,. \tag{5.9}$$

即，$T_r^{\mathcal{K}}$是 $\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$的未归一化基元素，而 $|T_r^{\mathcal{K}}| = |\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(r)|$。

在讨论完张量模型代数后，§5.1 将计算张量GIO与经典见证场的关联函数。请注意，由于缺乏定义良好的张量逆，使用耦合见证场会遇到困难，因此这里只实现经典见证场。此外，由于 $\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$是半单且具有结合性的，Wedderburn-Artin定理 [52] 使我们能够将其描述为矩阵代数的直和。利用这一点，可以通过对GIO进行傅里叶变换，随后使用傅里叶基矩阵元的乘法，将关联函数的计算整理为表示论量。这将 [36]的研究结果推广至包含一个处于额外基底中的经典张量场，相关内容见§5.2。

5.1 张量量子场和经典场中的一般张量算符二点函数

为了利用经典张量见证计算张量关联函数，我们将规范不变算符定义为同时包含经典场 Λ 和场变量 Z 的三阶张量。根据（5.1）中的定义，置换 $\sigma_i \in S_m$ 随后作用于张量的第 i 个指标。

具体而言，我们将使用以下规范不变算符：

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z) &= \mathrm{Tr}_{V_1^{\otimes m}\otimes V_2^{\otimes m}\otimes V_3^{\otimes m}}\left[Z^{\otimes m}\bar{\Lambda}^{\otimes m}\left(\mathcal{L}_{\sigma_1}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_2}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_3}\right)\right] \\ &= \sum_{I,J,K}\bar{\Lambda}_{i_{\sigma_1(1)}j_{\sigma_2(1)}k_{\sigma_3(1)}}\cdots\bar{\Lambda}_{i_{\sigma_1(m)}j_{\sigma_2(m)}k_{\sigma_3(m)}}Z^{i_1j_1k_1}\ldots Z^{i_mj_mk_m}\,,\end{aligned} \tag{5.10}$$

置换算符的作用为

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{L}_{\sigma_1}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_2}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_3}\right)|(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_m})\otimes(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_m})\otimes(e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_m})\rangle \\ &=|(e_{i_{\sigma_1(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\sigma_1(m)}})\otimes(e_{j_{\sigma_2(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{j_{\sigma_2(m)}})\otimes(e_{k_{\sigma_3(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{k_{\sigma_3(m)}})\rangle\end{aligned} \tag{5.11}$$

将其写成简写记号也很方便：

$$\left(\mathcal{L}_{\sigma_1}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_2}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_3}\right)|e_{i_1j_1k_1}\otimes e_{i_2j_2k_2}\otimes\cdots e_{i_mj_mk_m}\rangle=|e_{i_{\sigma_1(1)}j_{\sigma_2(1)}k_{\sigma_3(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\sigma_1(m)}j_{\sigma_2(m)}k_{\sigma_3(m)}}\rangle \tag{5.12}$$

同样，用简写记号表示为

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}\,|e_{ijk}\rangle &= \bar{\Lambda}_{ijk} \\ \langle e^{ijk}|\,Z &= Z^{ijk}\end{aligned} \tag{5.13}$$

利用这些关系，我们可以将张量空间中的迹转换为用指标表示的公式：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{V_1^{\otimes m}\otimes V_2^{\otimes m}\otimes V_3^{\otimes m}}\left[Z^{\otimes m}\bar{\Lambda}^{\otimes m}\left(\mathcal{L}_{\sigma_1}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_2}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_3}\right)\right] \\ &=\sum_{I,J,K}\langle e^{i_1j_1k_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_mj_mk_m}|\,Z^{\otimes m}\bar{\Lambda}^{\otimes m}(\mathcal{L}_{\sigma_1}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_2}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_3})\,|e_{i_1j_1k_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_mj_mk_m}\rangle\end{aligned} \tag{5.14}$$

这可以直接转换为图示形式，如图7上方示意图左侧所示（关于如何解读该图示张量GIO的更多细节，请参见附录B）。$\bar{}$ $\bar{}$要得到共轭算符，我们取 $\Lambda\to\Lambda$、 $Z\to Z$ 以及置换的逆：

$$\begin{aligned}&\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)} \\ &=\mathcal{O}_{\tau_1^{-1},\tau_2^{-1},\tau_3^{-1}}(\Lambda,\bar{Z}) \\ &=\mathrm{Tr}_{V_1^{\otimes m}\otimes V_2^{\otimes m}\otimes V_3^{\otimes m}}\left[\Lambda^{\otimes m}\bar{Z}^{\otimes m}\left(\mathcal{L}_{\tau_1^{-1}}\otimes\mathcal{L}_{\tau_2^{-1}}\otimes\mathcal{L}_{\tau_3^{-1}}\right)\right] \\ &=\sum_{I,J,K}\bar{Z}_{i_{\tau_1^{-1}(1)}j_{\tau_2^{-1}(1)}k_{\tau_3^{-1}(1)}}\cdots\bar{Z}_{i_{\tau_1^{-1}(m)}j_{\tau_2^{-1}(m)}k_{\tau_3^{-1}(m)}}\Lambda^{i_1j_1k_1}\ldots\Lambda^{i_mj_mk_m}\,,\end{aligned} \tag{5.15}$$

其中，对 I、J、K 的求和表示对全部 i、j 和 k 指标的求和（例如 $I=\{i_1,\ldots i_m\}$），场上的横线表示协变场。共轭算子的图示形式见图7右上方。张量场配分函数为

$$\Sigma=\int[dZ][d\bar{Z}]e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\bar{Z}_{ijk}Z^{ijk}}\,, \tag{5.16}$$

and

$$\langle\bar{Z}_{j_1j_2j_3}Z^{i_1i_2i_3}\rangle=\delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2}\delta^{i_3}_{j_3} \tag{5.17}$$

$\bar{}$是场变量 Z,Z的二点函数。因此，含经典张量场的 GIO 关联函数为

$$\langle\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle$$

$$= \frac{1}{\Sigma}\int [dZ][d\bar{Z}]\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\bar{Z}_{ijk}Z^{ijk}} \tag{5.18}$$

$$= \sum_{\substack{I,J,K\\ I',J',K'}} \langle \bar{\Lambda}_{i'_{\sigma_1(1)}j'_{\sigma_2(1)}k'_{\sigma_3(1)}}\cdots\bar{\Lambda}_{i'_{\sigma_1(m)}j'_{\sigma_2(m)}k'_{\sigma_3(m)}} Z^{i'_1j'_1k'_1}\ldots Z^{i'_mj'_mk'_m} \tag{5.19}$$

$$\times \bar{Z}_{i_{\tau_1^{-1}(1)}j_{\tau_2^{-1}(1)}k_{\tau_3^{-1}(1)}}\cdots\bar{Z}_{i_{\tau_1^{-1}(m)}j_{\tau_2^{-1}(m)}k_{\tau_3^{-1}(m)}}\Lambda^{i_1j_1k_1}\ldots\Lambda^{i_mj_mk_m}\rangle$$

$$= \sum_{\substack{I,J,K\\ I',J',K'}}\sum_{\gamma\in S_m} \bar{\Lambda}_{i'_{\sigma_1(1)}j'_{\sigma_2(1)}k'_{\sigma_3(1)}}\cdots\bar{\Lambda}_{i'_{\sigma_1(m)}j'_{\sigma_2(m)}k'_{\sigma_3(m)}}\Lambda^{i_1j_1k_1}\ldots\Lambda^{i_mj_mk_m} \tag{5.20}$$

$$\times \delta^{i'_1}_{i_{\gamma\tau_1^{-1}(1)}}\delta^{j'_1}_{j_{\gamma\tau_2^{-1}(1)}}\delta^{k'_1}_{k_{\gamma\tau_3^{-1}(1)}}\ldots\delta^{i'_m}_{i_{\gamma\tau_1^{-1}(m)}}\delta^{j'_m}_{j_{\gamma\tau_2^{-1}(m)}}\delta^{k'_m}_{k_{\gamma\tau_3^{-1}(m)}}$$

$$= \sum_{\substack{I,J,K\\ \gamma\in S_m}} \bar{\Lambda}_{i_{\sigma_1\gamma\tau_1^{-1}(1)}j_{\sigma_2\gamma\tau_2^{-1}(1)}k_{\sigma_3\gamma\tau_3^{-1}(1)}}\cdots\bar{\Lambda}_{i_{\sigma_1\gamma\tau_1^{-1}(m)}j_{\sigma_2\gamma\tau_2^{-1}(m)}k_{\sigma_3\gamma\tau_3^{-1}(m)}} \tag{5.21}$$

$$\times \Lambda^{i_1j_1k_1}\ldots\Lambda^{i_mj_mk_m}.$$

其中，场变量 Z 和 $\bar{Z}$ 上的期望值已根据 Wick 定理展开为对置换 γ 求和，并利用克罗内克等变性得到式 (5.21)。因此，用迹记号表示为

$$\langle\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle = \sum_{\gamma\in S_m}\mathrm{Tr}_{V_1^{\otimes m}\otimes V_2^{\otimes m}\otimes V_3^{\otimes m}}\left(\Lambda^{\otimes m}\bar{\Lambda}^{\otimes m}(\mathcal{L}_{\sigma_1}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_2}\otimes\mathcal{L}_{\sigma_3})(\mathcal{L}_\gamma)^{\otimes 3}(\mathcal{L}_{\tau_1^{-1}}\otimes\mathcal{L}_{\tau_2^{-1}}\otimes\mathcal{L}_{\tau_3^{-1}})\right). \tag{5.22}$$

图7给出了该张量二点 GIO 关联函数的示意图，以及根据维克定理用 γ 置换表示的等价描述。接下来，我们通过引入δ函数和元素 α_l 来简化（5.21），其中 $l=1,2,3$,

$$\langle\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle = \sum_{\substack{I,J,K\\ \alpha_l,\gamma\in S_m}}\bar{\Lambda}_{i_{\alpha_1(1)}j_{\alpha_2(1)}k_{\alpha_3(1)}}\cdots\bar{\Lambda}_{i_{\alpha_1(m)}j_{\alpha_2(m)}k_{\alpha_3(m)}} \tag{5.23}$$

$$\times\Lambda^{i_1j_1k_1}\ldots\Lambda^{i_mj_mk_m}\prod_{l=1}^{3}\delta(\alpha_l^{-1}\sigma_l\gamma\tau_l^{-1}),$$

其中 $\sum_{\alpha_l}$ 表示对 α_1,α_2 和 α_3求和。经典张量场 Λ 和 $\bar{\Lambda}$对其指标集 I,J,K 求和后，现在可写成方程（5.10）中定义的算子形式，即

$$\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda) = \sum_{I,J,K}\bar{\Lambda}_{i_{\alpha_1(1)}j_{\alpha_2(1)}k_{\alpha_3(1)}}\cdots\bar{\Lambda}_{i_{\alpha_1(m)}j_{\alpha_2(m)}k_{\alpha_3(m)}}\Lambda^{i_1j_1k_1}\ldots\Lambda^{i_mj_mk_m} \tag{5.24}$$

$$= \mathrm{Tr}_{V_1^{\otimes m}\otimes V_2^{\otimes m}\otimes V_3^{\otimes m}}\left(\Lambda^{\otimes m}\bar{\Lambda}^{\otimes m}(\mathcal{L}_{\alpha_1}\otimes\mathcal{L}_{\alpha_2}\otimes\mathcal{L}_{\alpha_3})\right) \tag{5.25}$$

使得

$$\langle\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle = \sum_{\alpha_l,\gamma\in S_m}\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)\prod_{l=1}^{3}\delta(\alpha_l^{-1}\sigma_l\gamma\tau_l^{-1}). \tag{5.26}$$

通过引入 $\gamma=\gamma_1\gamma_2$，并利用 GIO 在经典张量场中的不变性，$\mathcal{O}_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3}=\mathcal{O}_{\mu_2\alpha_1\mu_1,\ \mu_2\alpha_2\mu_1,\ \mu_2\alpha_3\mu_1}$，置换 μ_2 和 μ_1，可进一步简化该表达式

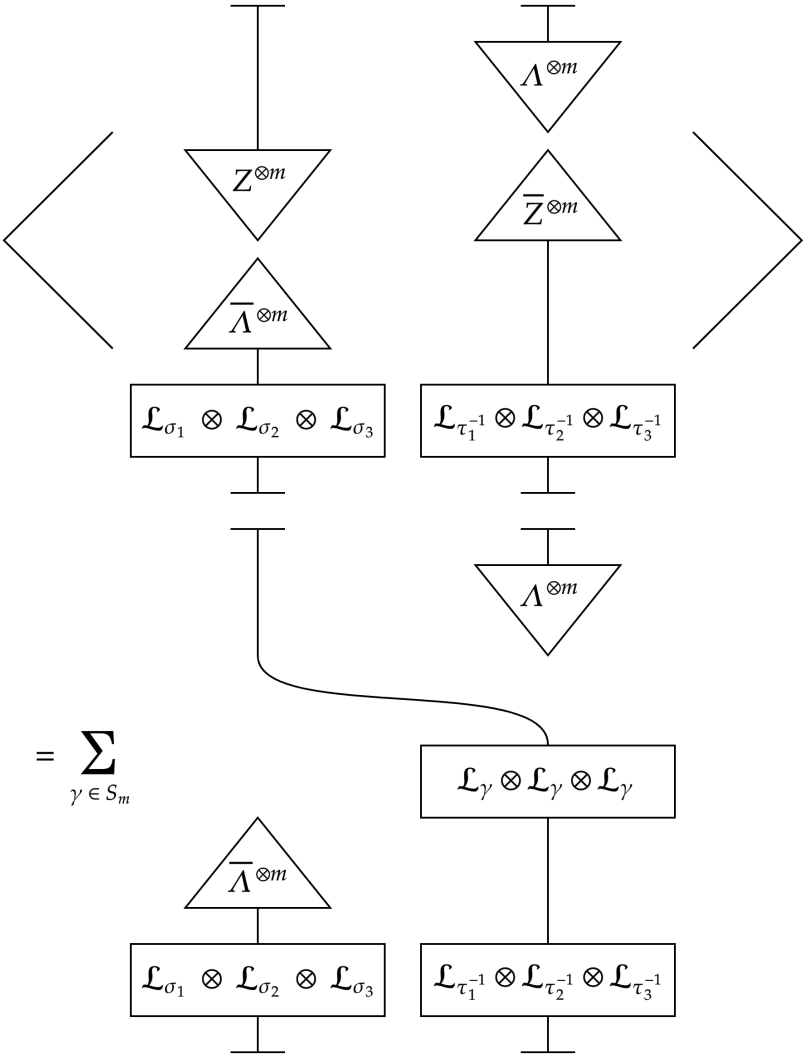

图7： 含经典张量见证的规范不变算符在张量模型中的二点函数的图示表示。本例将 Λ 和 Z 作为逆变张量，将它们的共轭张量作为协变张量；所有场均为三阶，并以三角形表示。该图表明（通过它们关联的线性算子），张量积中每一项的三个指标分别由 σ_1、σ_2和 σ_3（或 τ_1^{-1}、τ_2^{-1}和 τ_3^{-1}）置换。再次应用维克定理时，会引入一个需要求和的置换 γ，并伴随指标的扭转。

可以包含在关联函数中（更多详情请参见附录 C）

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda}, Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda}, Z)}\rangle \\
&\qquad = \frac{1}{m!} \sum_{\alpha_l,\gamma_1,\gamma_2 \in S_m} \mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda}, \Lambda) \prod_{l=1}^{3} \delta(\alpha_l^{-1}\sigma_l\gamma_1\gamma_2\tau_l^{-1}) \\
&\qquad = \frac{1}{(m!)^3} \sum_{\alpha_l,\gamma_1,\gamma_2,\mu_1,\mu_2 \in S_m} \mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda}, \Lambda) \prod_{l=1}^{3} \delta(\mu_2\alpha_l^{-1}\mu_1\sigma_l\gamma_1\gamma_2\tau_l^{-1}) \,.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

利用δ函数中置换的循环性，关联函数的显式张量积形式为

$$\langle \mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle = \frac{1}{(m!)^3}\sum_{\alpha_l,\gamma_1,\gamma_2,\mu_1,\mu_2\in S_m}\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)$$
$$\times\,\boldsymbol{\delta}_3\left((\alpha_1^{-1}\otimes\alpha_2^{-1}\otimes\alpha_3^{-1})(\mu_1^{\otimes 3})(\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3)(\gamma_1^{\otimes 3})(\gamma_2^{\otimes 3})(\tau_1^{-1}\otimes\tau_2^{-1}\otimes\tau_3^{-1})(\mu_2^{\otimes 3})\right)\,, \quad (5.28)$$

其中

$$\boldsymbol{\delta}_3(\beta_1\otimes\beta_2\otimes\beta_3)\equiv\prod_l^3\delta(\beta_l)\quad\text{for}\quad\beta_l\in S_m\,. \quad (5.29)$$

二点函数现在具有如下形式：一个仅由经典张量场构成的算子，乘以关于 S_m 的张量化置换的狄拉克δ函数。利用 Kronecker PCA 的元素 $\mathcal{K}_{\text{un}}(m)$，还可以进一步计算。式（5.28）的狄拉克δ函数中有两个置换三元组，且其上作用着左右 $S_m\times S_m$ 对角置换。将关于 μ_i, γ_i 的求和移入其中后，关联函数等价地可改写为

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle &= \frac{1}{(m!)^3}\sum_{\alpha_l\in S_m}\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)\\ &\times\boldsymbol{\delta}_3\Bigg((\alpha_1^{-1}\otimes\alpha_2^{-1}\otimes\alpha_3^{-1})\left[\sum_{\mu_1,\gamma_1}\mu_1\sigma_1\gamma_1\otimes\mu_1\sigma_2\gamma_1\otimes\mu_1\sigma_3\gamma_1\right]\\ &\times\left[\sum_{\mu_2,\gamma_2}\gamma_2\tau_1^{-1}\mu_2\otimes\gamma_2\tau_2^{-1}\mu_2\otimes\gamma_2\tau_3^{-1}\mu_2\right]\Bigg)\,. \quad (5.30)\end{aligned}$$

这些方括号项正是式（5.6）的图基元素，只是归一化因子和图标签的选择有所不同。由于 GIO 是等价类的函数，我们也可以将由置换 $(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$ 定义的算子写成由 $(\sigma_1^{(r)},\ \sigma_2^{(r)},\ \sigma_3^{(r)})$ 定义的算子。记号 (r) 表示轨道 $\text{Orb}_{\mathcal{K}}(r)$ 中的任意置换三元组，也就是等价类 r 中的任意置换三元组。因此，分别将 σ_i 和 τ_i 三元组与图标签 r 和 s 对应起来，关联函数现在相对于这一基底定义为

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}_{E_r}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{E_s}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle &= \langle \mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle &(5.31)\\ &\equiv \langle \mathcal{O}_{\sigma_1^{(r)},\sigma_2^{(r)},\sigma_3^{(r)}}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1^{(s)},\tau_2^{(s)},\tau_3^{(s)}}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle &(5.32)\\ &= m!\sum_{\alpha_l\in S_m}\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)\boldsymbol{\delta}_3\left((\alpha_1^{-1}\otimes\alpha_2^{-1}\otimes\alpha_3^{-1})E_rE_{s'}\right)\,. &(5.33)\end{aligned}$$

$E_{s'}$上的撇号记法用于表示该基代数元素由一个逆置换三元组构成，即 $(\tau_1^{-1},\ \tau_2^{-1},\ \tau_3^{-1})$。将 $\alpha_l\in S_m$求和分解为对等价类（用 p 标记）的求和，以及对每个等价类中元素（用 d 标记）的求和[9], ，意味着 α^{-1} 三元组也可以替换为一个 Kronecker PCA 基元素

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{O}_{E_r}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{E_s}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle\\ &= m!\sum_p\Bigg[\sum_{d\in\text{Orb}_{\mathcal{K}}(p)}\mathcal{O}_{\alpha_1^{(p)},\alpha_2^{(p)},\alpha_3^{(p)}}(\bar{\Lambda},\Lambda)\\ &\qquad\times\boldsymbol{\delta}_3\left(\left((\alpha_1^{-1})^{(p')}(d)\otimes(\alpha_2^{-1})^{(p')}(d)\otimes(\alpha_3^{-1})^{(p')}(d)\right)E_rE_{s'}\right)\Bigg]\end{aligned} \quad (5.34)$$

[9]用图论术语来说，这就是将求和拆分为对所有不同图的求和，以及对每个图中同一轨道内各元素的求和。

$$= m! \sum_p \Bigg(\mathcal{O}_{\alpha_1^{(p)},\alpha_2^{(p)},\alpha_3^{(p)}}(\bar{\Lambda},\Lambda) \times \boldsymbol{\delta}_3 \Bigg[\sum_{d\in \mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p)} \left((\alpha_1^{-1})^{(p')}(d) \otimes (\alpha_2^{-1})^{(p')}(d) \otimes (\alpha_3^{-1})^{(p')}(d) \right) E_r E_{s'} \Bigg] \Bigg), \tag{5.35}$$

其中，该和分解中的轨道/等价类用 p 标记；同样，逆三元组 $(\alpha_1^{-1},\ \alpha_2^{-1},\ \alpha_3^{-1})$[10]采用了撇号记法。因此，

$$\langle \mathcal{O}_{E_r}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{E_s}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle = \sum_p m!|\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p')|\mathcal{O}_{\alpha_1^{(p)},\alpha_2^{(p)},\alpha_3^{(p)}}(\bar{\Lambda},\Lambda)\boldsymbol{\delta}_3\left(E_{p'}E_rE_{s'}\right), \tag{5.36}$$

注意，由于 GIO 在等价关系 (5.3) 下是不变的，因此算子$\mathcal{O}_{\alpha_1^{(p)},\alpha_2^{(p)},\alpha_3^{(p)}}$ 对所有 $d \in \mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p)$ 都相同，所以省略算子上的 d 标签。出于同样的原因，可以将它移到对 d 求和之外，如 (5.35) 所示。根据 [38]，第 2.3 节，图基元素的这个狄拉克δ函数也可以简化。以下乘法规则成立

$$E_rE_{s'} = \sum_{t=1}^{|\mathrm{Col}(m)|} C_{rs'}^{t;\mathcal{K}} E_t \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\delta}_3(E_{p'}E_rE_{s'}) = \sum_{t=1}^{|\mathrm{Col}(m)|} C_{rs'}^{t;\mathcal{K}} \boldsymbol{\delta}_3(E_{p'}E_t)\,. \tag{5.37}$$

其中 $C_{rs'}^{t;\mathcal{K}}$ 是图基中的 $\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$ 结构常数。为方便起见，令 $\sigma^{(p)}(a) = \sigma_1^{(p)}(a) \otimes \sigma_2^{(p)}(a) \otimes \sigma_3^{(p)}(a)$，内积 g 在 $\mathbb{C}(S_m)^{\otimes 3}$ 上可定义为

$$g(\alpha^{(p)}(a),\beta^{(t)}(b)) = \boldsymbol{\delta}_3\left(\left(\alpha^{-1}\right)^{(p)}(a)\beta^{(t)}(b)\right), \tag{5.38}$$

并且可以看出

$$\boldsymbol{\delta}_3(E_{p'}E_t) = \frac{1}{|\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p')||\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(t)|} \sum_{a\in\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p')} \sum_{b\in\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(t)} \boldsymbol{\delta}_3\left((\alpha^{-1})^{(p')}(a)\beta^{(t)}(b)\right) \tag{5.39}$$

$$= \frac{1}{|\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p')||\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(t)|} \sum_{a\in\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p')} \sum_{b\in\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(t)} g\left(\alpha^{(p')}(a),\beta^{(t)}(b)\right) \tag{5.40}$$

$$= \frac{1}{|\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p')||\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(t)|} \sum_{a\in\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p')} \sum_{b\in\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(t)} \delta_{p't}\delta_{ab} \tag{5.41}$$

$$= \frac{1}{|\text{轨道}_{\mathcal{K}}(p')|}\delta_{p't}\,. \tag{5.42}$$

结合方程 (5.42) 和 (5.37)，再将其代入方程 (5.36)，即可得到图基中关联函数的最终表达式

$$\langle \mathcal{O}_{E_r}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{E_s}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle = \sum_p \sum_{t=1}^{|\mathrm{Col}(m)|} m!|\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p')|\mathcal{O}_{\alpha_1^{(p)},\alpha_2^{(p)},\alpha_3^{(p)}}(\bar{\Lambda},\Lambda)C_{rs'}^{t;\mathcal{K}}\frac{1}{|\mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p')|}\delta_{p't} \tag{5.43}$$

$$= \sum_p m! C_{rs'}^{p';\mathcal{K}} \mathcal{O}_{\alpha_1^{(p)},\alpha_2^{(p)},\alpha_3^{(p)}}(\bar{\Lambda},\Lambda) \tag{5.44}$$

[10]我们可以将对 $d \in \mathrm{Orb}_{\mathcal{K}}(p)$ 的求和理解为遍历给定轨道 p 中的所有置换三元组。这样一来，对于三元组 $(\alpha_1^{-1}(d)\ \alpha_2^{-1}(d)\ \alpha_3^{-1}(d))$，实际效果就是遍历 p' 轨道中的所有三元组，该轨道由逆置换生成：α_i^{-1}。

$$= m! \sum_p C^{p';\mathcal{K}}_{rs'} \mathcal{O}_{E_p}(\bar{\Lambda}, \Lambda)\,, \tag{5.45}$$

其中，最后一行将 $\alpha_i^{(p)}$ 三元组与代数元素 E_p 对应起来（类似的应用见方程 (5.31)）。这一图基结果

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_{E_r}(\bar{\Lambda}, Z)\overline{\mathcal{O}_{E_s}(\bar{\Lambda}, Z)}\rangle = m! \sum_p C^{p';\mathcal{K}}_{rs'} \mathcal{O}_{E_p}(\bar{\Lambda}, \Lambda)} \tag{5.46}$$

这仍与前面的情况一致：它是由经典（张量）场构成的算符的线性组合，其乘法结构常数因子来自相应的 PCA。因此，给定一组基标签（E_r，E_s，E_p），即可计算这些结构常数。请注意，对于所用的 $\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$ 图基，最终表达式中出现的结构常数 $C^{p'}{}_{rs'}{}^{\mathcal{K}}$ 是整数，如 [38] 所示。

5.2 傅里叶/Q基

本节利用傅里叶基，将关联函数表示为表示论量。我们使用的傅里叶基称为“ $\mathcal{K}_{\mathrm{un}}(m)$ 的 Q_{un}-基”，见 [36]，其中“un”仍表示“未规范化”。这些由式 (5.4) 中的组合基变换而来的 Q_{un} 矩阵基元素为[11]

$$Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda,\rho} = \kappa_{R,S,T} \sum_{\sigma_l \in S_m} \sum_{i_l, j_l} C^{R,S;T,\lambda}_{i_1,i_2,i_3} C^{R,S;T,\rho}_{j_1,j_2,j_3} D^R_{i_1 j_1}(\sigma_1) D^S_{i_2 j_2}(\sigma_2) D^T_{i_3 j_3}(\sigma_3) \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \tag{5.47}$$

其中，对 σ_l、i_l、j_l 的求和表示对所有 l 值求和：$l = 1$、2、3。这里，$\kappa_{R、S、T} = {}^{d}(R)d(S)d(T)$（$m!$）^{3}，其中 $d(A)$ 是 S_m 的表示 A 的维数。换言之，置换元素 $\sigma \in S_m$ 的表示 A 的矩阵 $D^A(\sigma)$，其大小为 $d(A) \times d(A)$。C^R、$_{i_1}{}^{S;T}{}_{i_2}{}^{\lambda}{}_{i_3}$、、、项是克莱布施–戈登系数，它们来自将张量积表示分解为不可约表示空间与不可约表示的重数空间的张量积。指标 i_1、j_1 的取值范围为 1 到 $d(R)$，i_2、j_2 的取值范围为 1 到 $d(S)$，i_3、j_3 的取值范围为 1 到 $d(T)$；而 λ、$\rho \in [1, \mathrm{C}(R、S、T)]$，其中 $\mathrm{C}(R、S、T)$ 是克罗内克系数：不可约表示 T 在不可约表示 R 与 S 的张量积中的重数。这种分解可写为

$$V_R \otimes V_S = \bigoplus_{T \vdash m} V_T \otimes V_\lambda \tag{5.48}$$

其中 V_R、V_S 和 V_T 是 S_m的向量空间表示，V_λ 是重数空间。两个 Q_{un}-基元素的乘法为

$$Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda_1,\rho_1} Q^{R',S',T'}_{\mathrm{un};\lambda_2,\rho_2} = \delta_{RR'}\delta_{SS'}\delta_{TT'}\delta_{\rho_1\lambda_2} Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda_1,\rho_2}\,, \tag{5.49}$$

以及 Q_{un}-基元素在对角群代数 Diag$[\mathbb{C}(S_n)]$ 元素的左、右作用下的稳定性意味着[12]

$$(\gamma_1^{\otimes 3}) Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda,\rho} (\gamma_2^{\otimes 3}) = Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda,\rho}\,. \tag{5.50}$$

[11]组合/置换基与表示/傅里叶基之间的显式变换（规范化形式）由 [36]的方程 (39) 给出。也可以从代数 $\mathbb{C}(S_m)$ 的基出发推导该变换，然后构造张量积，参见 [36]的附录 B1。最后，图与 Q-基之间的直接变换见 [38]的附录B。[12]证明见 [36] 的附录B。

至于算符，它们采用傅里叶形式

$$\mathcal{O}^{R,S,T}_{\lambda,\rho}(\bar{\Lambda},Z)=\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}\boldsymbol{\delta}_3\left(Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda,\rho}(\sigma_1^{-1}\otimes\sigma_2^{-1}\otimes\sigma_3^{-1})\right)\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z) \tag{5.51}$$

其中，$\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\Lambda,Z)$ 在 (5.10) 中定义，而共轭傅里叶算符为

$$\overline{\mathcal{O}^{R',S',T'}_{\lambda,\rho}(\bar{\Lambda},Z)}=\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}\boldsymbol{\delta}_3\left(Q^{R',S',T'}_{\mathrm{un};\lambda,\rho}(\sigma_1^{-1}\otimes\sigma_2^{-1}\otimes\sigma_3^{-1})\right)\overline{\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)} \tag{5.52}$$

$$=\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}\boldsymbol{\delta}_3\left(Q^{R',S',T'}_{\mathrm{un};\rho,\lambda}(\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3)\right)\overline{\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)} \tag{5.53}$$

其中，$\overline{\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)}$ 在 (5.15) 中定义。利用方程 (5.47) 中的事实 $D^R_{ij}(\sigma)=D^R_{ji}(\sigma^{-1})$，(5.53) 中的重数指标 λ,ρ 交换了位置，同时 δ函数的置换变为逆置换。因此，这个基底下的二点函数为

$$\begin{aligned}&\left\langle\mathcal{O}^{R,S,T}_{\lambda_1,\rho_1}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}^{R',S',T'}_{\lambda_2,\rho_2}(\bar{\Lambda},Z)}\right\rangle\\&=\left\langle\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}\boldsymbol{\delta}_3\left(Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda_1,\rho_1}(\sigma_1^{-1}\otimes\sigma_2^{-1}\otimes\sigma_3^{-1})\right)\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\right.\\&\qquad\left.\times\sum_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}\boldsymbol{\delta}_3\left(Q^{R',S','T}_{\mathrm{un};\rho_2,\lambda_2}(\tau_1\otimes\tau_2\otimes\tau_3)\right)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}\right\rangle\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\\ \tau_1,\tau_2,\tau_3}}\boldsymbol{\delta}_3\left(Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda_1,\rho_1}(\sigma_1^{-1}\otimes\sigma_2^{-1}\otimes\sigma_3^{-1})\right)\\&\qquad\times\boldsymbol{\delta}_3\left(Q^{R',S','T}_{\mathrm{un};\rho_2,\lambda_2}(\tau_1\otimes\tau_2\otimes\tau_3)\right)\left\langle\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}\right\rangle\end{aligned} \tag{5.55}$$

由此，为方便起见，下面重述 (5.28) 的结果：

$$\begin{aligned}&\langle\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda},Z)}\rangle=\frac{1}{(m!)^3}\sum_{\alpha_l,\gamma_1,\gamma_2,\mu_1,\mu_2\in S_m}\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)\\&\times\boldsymbol{\delta}_3\left((\alpha_1^{-1}\otimes\alpha_2^{-1}\otimes\alpha_3^{-1})(\mu_1^{\otimes3})(\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3)(\gamma_1^{\otimes3})(\gamma_2^{\otimes3})(\tau_1^{-1}\otimes\tau_2^{-1}\otimes\tau_3^{-1})(\mu_2^{\otimes3})\right),\end{aligned} \tag{5.56}$$

将此关联函数代入表达式 (5.55)，即可使用此处的结果。随后对 σ_i 和 τ_i求和，(5.56) 中的张量积三元组便通过 δ函数替换为 Q-基元素。因此，我们有

$$\begin{aligned}&\left\langle\mathcal{O}^{R,S,T}_{\lambda_1,\rho_1}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}^{R',S',T'}_{\lambda_2,\rho_2}(\bar{\Lambda},Z)}\right\rangle=\frac{1}{(m!)^3}\sum_{\alpha_l,\gamma_1,\gamma_2,\mu_1,\mu_2\in S_m}\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)\\&\qquad\times\boldsymbol{\delta}_3\left((\alpha_1^{-1}\otimes\alpha_2^{-1}\otimes\alpha_3^{-1})(\mu_1^{\otimes3})Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda_1,\rho_1}(\gamma_1^{\otimes3})(\gamma_2^{\otimes3})Q^{R',S',T'}_{\mathrm{un};\rho_2,\lambda_2}(\mu_2^{\otimes3})\right).\end{aligned} \tag{5.57}$$

利用 Q_{un}-基底的性质 (5.50) 和 (5.49)，

$$\begin{aligned}&\left\langle\mathcal{O}^{R,S,T}_{\lambda_1,\rho_1}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}^{R',S',T'}_{\lambda_2,\rho_2}(\bar{\Lambda},Z)}\right\rangle\\&=m!\sum_{\alpha_l\in S_m}\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)\boldsymbol{\delta}_3\left((\alpha_1^{-1}\otimes\alpha_2^{-1}\otimes\alpha_3^{-1})Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda_1,\rho_1}Q^{R',S',T'}_{\mathrm{un};\rho_2,\lambda_2}\right)\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$=m!\delta_{RR'}\delta_{SS'}\delta_{TT'}\delta_{\rho_1\rho_2}\sum_{\alpha_l\in S_m}\boldsymbol{\delta}_3\left((\alpha_1^{-1}\otimes\alpha_2^{-1}\otimes\alpha_3^{-1})Q^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda_1,\lambda_2}\right)\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda) \tag{5.59}$$

$$= m!\delta_{RR'}\delta_{SS'}\delta_{TT'}\delta_{\rho_1\rho_2}\mathcal{O}^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda_1,\lambda_2}(\bar{\Lambda},\Lambda)\,, \tag{5.60}$$

其中，最后一个方程来自 (5.51) 中的算符定义。关联函数

$$\boxed{\left\langle \mathcal{O}^{R,S,T}_{\lambda_1,\rho_1}(\bar{\Lambda},Z)\overline{\mathcal{O}^{R',S',T'}_{\lambda_2,\rho_2}(\bar{\Lambda},Z)}\right\rangle = m!\delta_{RR'}\delta_{SS'}\delta_{TT'}\delta_{\rho_1\rho_2}\mathcal{O}^{R,S,T}_{\mathrm{un};\lambda_1,\lambda_2}(\bar{\Lambda},\Lambda)} \tag{5.61}$$

因此，这类似于矩阵情形：最终结果同样正比于表示论/傅里叶基中的经典见证场算子。

6 总结与展望

复单矩阵、多矩阵和张量模型的表示论正交基在 AdS/CFT 对应以及更一般的规范-弦对偶模型中具有应用。人们已经认识到，这些正交基与置换中心化子代数相关，并组织了矩阵和张量模型关联函数的诸多组合学方面。在 CFT_4, 的背景下，已有研究表明，这些代数与自由场极限下的增强对称性相关 [24, 37]。然而，就这些代数的结构常数而言，迄今仍缺乏一种以矩阵或张量模型可观测量为基础的直接物理解释。在本文中，我们表明，引言中定义的矩阵和张量见证场概念能够提供这种直接解释。从置换中心化子代数的组合基到表示论韦德伯恩–阿廷基的傅里叶变换，导致了正交关系的推广，并与 Morozov 和 Mironov 的超可积性纲领建立了联系 [43]。我们概述了本文结果所启发的若干未来研究方向。

在具有 $U(N)$ 规范群的 $\mathcal{N}=4$ SYM 半 BPS 扇区中，确定与算子 $\mathcal{O}_R(Z)$ 相关联的量子态这一问题，与黑洞信息悖论 [53]相关的有趣问题密切相关，也涉及对称群代数中心 [54]的有趣结构性质。$U(N)$ 的卡西米尔算符可以识别杨图，并且可以与由对应于杨图 R 的 LLM几何 [55] 所产生的引力场的渐近多极矩联系起来。利用本文的结果，我们可以通过考察二点关联函数随矩阵耦合变化的结果，测量为矩阵模型可观测量标记的杨图。考虑引入四维背景矩阵场，对 $\mathcal{N}=4$ SYM 进行形变，将会很有意思。这或许会降低或破坏超对称性，但能提供一个有趣的高维量子场论研究平台，以探索见证场的影响及其对引力对偶的潜在意义。在 $\mathcal{N}=4$ SYM [56] 的矩阵关联函数问题中，相干态方法也曾使用过在可观测量中同时包含经典矩阵场和量子矩阵场的做法。在远角极限下，第 3 节所讨论的双矩阵扇区杨图基底与相干态计算建立了联系，并由此得到了对称群特征标 [57]的新积分公式。更深入地理解相干态方法与本文结果之间的联系，可能有助于将本文结果应用于巨引力子物理。例如，在第 2.3 节中，将矩阵 A 取作另一个复场，例如 SYM 中 $SU(3)$ 三重态 $\{Z,Y,X\}$ 的复场之一 Y，那么式 (2.80) 的右端就包含 $YY^\dagger$的舒尔多项式函数。如何在体时空中解释这类舒尔多项式，是一个有趣的问题。一个重要目标是通过体与边界中的独立计算结果相符来论证这种解释，例如按照 [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] 的思路验证三点函数的一致性。

本文通过在二次项中加入矩阵耦合，考察了对高斯单矩阵与多矩阵作用量的修改。我们证明，以矩阵耦合为变量计算得到的二点函数定义了结合代数的结构常数。一个有趣的问题是，当高斯作用量受到相互作用项的微扰时，依赖于二次项中矩阵耦合的类似关联函数是否会导出结合代数的结构常数。对易子相互作用项在反德西特/共形场论对应（见 [58, 59, 60]）以及 IKKT IIB矩阵模型中的涌现几何背景下（见 [61, 62]）都值得关注。在相互作用矩阵模型中确立结合性，或刻画其偏离结合性的程度，都是有趣的研究课题。

单复矩阵在组合基下的二点函数公式（1.8），可以解释为规范-弦对偶性的一个组合模型 [63, 64, 65]，与二维杨-米尔斯理论的配分函数和赫尔维茨模空间欧拉示性数的组合模型之间的对偶性 [66, 67]十分相似。组合弦论一侧是对贝利映射的求和；贝利映射是具有三个分支点的球面的分支覆盖。不同的世界面亏格以一个依赖于 N的权重求和。对算符进行适当归一化， $1/N$ 可以解释为弦耦合。在存在矩阵耦合 A时，弦耦合的幂实际上被不变函数 $\mathcal{O}_{p_3}(B)$取代。由（1.10）提取 $\mathcal{O}_{p_3}(B)$的系数，我们便可恢复$C^{p_3}_{p_1,\ p_2}$ 。因此，我们得到了一个直接的矩阵模型解释：通过分拆（p_1， p_2， p_3）指定三个分支点处分支结构的贝利映射计数。这是对文献 [63, 64, 65]中已知的贝利映射—矩阵模型联系的细化。

值得将本文中由矩阵和张量见证场——即作用量中的经典耦合项，或复合经典／量子可观测量的经典组成部分——所产生的对称代数结构常数，与量子场论中获得代数结构常数的其他方式进行比较。常见的一种机制是考察拓扑场论或共形场论中的三点函数（例如，参见 [68, 69]中的讨论）。

近期，本文所用的类似代数技术已应用于矩阵模型或矩阵量子系统：矩阵变量的 $U(N)$ 不变性被矩阵变量的 S_N （对称群）不变性所取代。隐藏对称代数与分拆代数有关。更确切地说，对于 k 次不变量的情形，我们有分拆代数 $P_k(N)$ 的一个 S_k 不变子空间，记为$SP_k(N)$。相关工作详见 [70, 71] 。一个自然的后续方向是像本文这样利用见证场，求出这些代数的显式结构常数。

致谢

我们谨此感谢 Joseph Ben Geloun 在项目早期阶段的合作。我们还感谢 George Barnes、Robert de Mello Koch、Yang Lei、Adrian Padellaro、Gabriele Travaglini、David Vegh 和 Congkao Wen 在项目进行期间所作的富有见地的讨论。SR 由英国科学技术设施委员会综合资助项目 ST/P000754/1“弦理论、规范理论与对偶性”提供支持。LS 获得英国科学技术设施委员会定额奖学金资助。

A 利用见证矩阵场推导二点函数

这里推导了矩阵变量 Z 和 $Z^\dagger$ 的基本二点函数。包含耦合见证矩阵场 A （假定其可逆）的路径积分为

$$\Sigma[0] = \int [dZ] e^{-\mathrm{Tr}\left(ZAZ^\dagger\right)} \tag{A.1}$$

其中， $[0]$ 中的 $\Sigma[0]$ 表示无源作用量/积分。作用量为

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(ZAZ^\dagger\right) &= \sum_{i,j,k} Z_j^i A_k^j (Z^\dagger)_i^k \\ &= \sum_{i,j,k,l,m,n} Z_j^i \left(\delta_k^j A_l^k \delta_m^l \delta_i^n\right) (Z^\dagger)_n^m \\ &= \sum_{i,j,m,n} Z_j^i \left(\delta_i^n A_m^j\right) (Z^\dagger)_n^m . \end{aligned} \tag{A.2}$$

将表达式按指标分开后，要开始求解积分，首先定义一个 N^2维向量，其分量等于矩阵 Z的元素，如下所示

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{N^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1^1 \\ \vdots \\ Z_N^1 \\ Z_1^2 \\ \vdots \\ Z_N^2 \\ \vdots \\ Z_1^N \\ \vdots \\ Z_N^N \end{bmatrix} . \tag{A.3}$$

因此，其厄米共轭为

$$\begin{aligned} \vec{x}^\dagger &= \begin{bmatrix} (x^1)^* & \cdots & \cdots & \cdots & (x^{N^2})^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (Z_1^1)^* & \cdots & (Z_N^1)^* & \cdots & \cdots & \cdots & (Z_1^N)^* & \cdots & (Z_N^N)^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (Z^\dagger)_1^1 & \cdots & (Z^\dagger)_1^N & \cdots & \cdots & \cdots & (Z^\dagger)_N^1 & \cdots & (Z^\dagger)_N^N \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{A.4}$$

用分量形式表示时，每个矩阵元定义为

$$x^{N(i-1)+j} := Z_j^i \quad \text{and} \quad (x^\dagger)_{N(n-1)+m} := (Z^*)_m^n = (Z^\dagger)_n^m . \tag{A.5}$$

类似地，对于 (A.2) 最后一行中的 $\delta_i^n A_m^j$，引入维数为 $N^2 \times N^2$ 的矩阵 R，它由 $\mathbb{I}$ （单位矩阵）与 A^T 的克罗内克积构成。

$$\delta_i^n A_m^j = \delta_i^n (A^T)_j^m = \left(\mathbb{I} \otimes A^T\right)_{i,j}^{n,m} =: R_{N(i-1)+j}^{N(n-1)+m} . \tag{A.6}$$

注意，引入 A^T 是为了使 R 与 (A.5) 中的向量变量能够正确缩并/相乘。因此，可以利用上述对象将作用量重新定义为

$$\begin{aligned}\vec{x}^\dagger R\vec{x} &= \sum_{i,j,n,m} (x^\dagger)_{N(n-1)+m} \left(R^{N(n-1)+m}_{N(i-1)+j}\right) x^{N(i-1)+j} \\ &= \sum_{i,j,n,m} (Z^\dagger)^m_n \left(\delta^n_i \left(A^T\right)^m_j\right) Z^i_j \\ &= \sum_{i,j,m} Z^i_j A^j_m (Z^\dagger)^m_i \\ &= \mathrm{Tr}\left(ZAZ^\dagger\right) .\end{aligned} \tag{A.7}$$

将其代入积分，并将测度的变量改为 $\vec{x}$，即可发现其具有标准形式，因而可以直接计算

$$\Sigma[0] = \int [d\vec{x}] e^{-\vec{x}^\dagger R\vec{x}} = \pi^{N^2} \det(R^{-1}) . \tag{A.8}$$

当 R 为厄米且正定时，方程 (A.8) 成立（参见 [72] 的第3.2章）。本文在讨论矩阵耦合场时始终遵循这些条件。为推导关联函数，我们在作用量中引入复向量源（$\vec{S}, \vec{S}^\dagger$），并以无源配分函数进行归一化

$$\Sigma[\vec{S}, \vec{S}^\dagger] = \frac{1}{\Sigma[0]} \int [d\vec{x}] e^{-\vec{x}^\dagger R\vec{x} + \vec{x}^\dagger \vec{S} + \vec{S}^\dagger \vec{x}} . \tag{A.9}$$

其中 $\vec{x}^\dagger \vec{S} = (\vec{x}^\dagger)_{N(i-1)+j} (\vec{S})^{N(i-1)+j}$ 和 $\vec{S}^\dagger \vec{x} = (\vec{S}^\dagger)_{N(i-1)+j} (\vec{x})^{N(i-1)+j}$，$\vec{S}$是一个 N^2维向量。可以写作

$$\begin{aligned}(\vec{x} - R^{-1}\vec{S})^\dagger R(\vec{x} - R^{-1}\vec{S}) &= \vec{x}^\dagger R\vec{x} - \vec{x}^\dagger RR^{-1}\vec{S} - \vec{S}^\dagger (R^{-1})^\dagger R\vec{x} + \vec{S}^\dagger (R^{-1})^\dagger RR^{-1}\vec{S} \\ &= \vec{x}^\dagger R\vec{x} - \vec{x}^\dagger \vec{S} - \vec{S}^\dagger \vec{x} + \vec{S}^\dagger R^{-1}\vec{S} ,\end{aligned} \tag{A.10}$$

其中第二行使用了 $(R^{-1})^\dagger = R^{-1}$ 进行了简化。因此

$$\Sigma[\vec{S}, \vec{S}^\dagger] = \frac{1}{\Sigma[0]} \int [d\vec{x}] e^{-(\vec{x} - R^{-1}\vec{S})^\dagger R(\vec{x} - R^{-1}\vec{S}) + \vec{S}^\dagger R^{-1}\vec{S}} . \tag{A.11}$$

进行变量替换 $\vec{y} = \vec{x} - R^{-1}\vec{S}$ 会产生一个平凡的雅可比行列式，因此

$$\Sigma[\vec{S}, \vec{S}^\dagger] = e^{\vec{S}^\dagger R^{-1}\vec{S}} \underbrace{\frac{1}{\Sigma[0]} \int [d\vec{y}] e^{-\vec{y}^\dagger R\vec{y}}}_{=1} = e^{\vec{S}^\dagger R^{-1}\vec{S}} . \tag{A.12}$$

最后，为了推导关联函数，我们设

$$\langle Z^i_j (Z^\dagger)^k_l \rangle = \langle x^{N(i-1)+j} (x^\dagger)_{N(l-1)+k} \rangle = \langle x^\mu (x^\dagger)_\nu \rangle \tag{A.13}$$

为方便起见，我们将其标记为 $\mu = N(i-1)+j, \nu = N(l-1)+k$。对配分函数 (A.12) 关于源求导，并在计算最后，

将源设为零，我们得到

$$\begin{aligned}\langle x^{\mu}(x^{\dagger})_{\nu}\rangle &= \frac{\partial}{\partial S^{\nu}}\frac{\partial}{\partial (S^{\dagger})_{\mu}}\left(\Sigma[\vec{S},\vec{S}^{\dagger}]\right)\Big|_{\vec{S}=\vec{S}^{\dagger}=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial S^{\nu}}\frac{\partial}{\partial (S^{\dagger})_{\mu}} e^{\sum_{\sigma,\lambda}(S^{\dagger})_{\sigma}(R^{-1})^{\sigma}_{\lambda}S^{\lambda}}\Big|_{\vec{S}=\vec{S}^{\dagger}=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial S^{\nu}}\left[\sum_{\sigma,\lambda}\delta^{\mu}_{\sigma}(R^{-1})^{\sigma}_{\lambda}S^{\lambda}\cdot\Sigma[\vec{S},\vec{S}^{\dagger}]\right]\Bigg|_{\vec{S}=\vec{S}^{\dagger}=0} \\ &= \left[\sum_{\sigma,\lambda}\delta^{\mu}_{\sigma}(R^{-1})^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\lambda}_{\nu}\cdot\Sigma[\vec{S},\vec{S}^{\dagger}] + (\vec{S}\text{ and }\vec{S}^{\dagger}\text{ dependent terms})\right]\Bigg|_{\vec{S}=\vec{S}^{\dagger}=0} \\ &= (R^{-1})^{\mu}_{\nu}\,.\end{aligned} \tag{A.14}$$

因此，含见证矩阵场的基本二点函数为

$$\langle Z^{i}_{j}(Z^{\dagger})^{k}_{l}\rangle = \langle x^{\mu}(x^{\dagger})_{\nu}\rangle = (R^{-1})^{\mu}_{\nu} = (R^{-1})^{N(i-1)+j}_{N(l-1)+k} \tag{A.15}$$

$$= \left(\left(\mathbb{I}\otimes A^{T}\right)^{-1}\right)^{N(i-1)+j}_{N(l-1)+k} \tag{A.16}$$

$$= \left((\mathbb{I})^{-1}\otimes (A^{T})^{-1}\right)^{N(i-1)+j}_{N(l-1)+k} \tag{A.17}$$

$$= \delta^{i}_{l}\left(\left(A^{T}\right)^{-1}\right)^{j}_{k} \tag{A.18}$$

$$= \delta^{i}_{l}\left(A^{-1}\right)^{k}_{j}\,. \tag{A.19}$$

其中，方程 (A.18) 按照 (A.6) 将 R^{-1} 矩阵的各分量写成克罗内克积的各分量。注意， R 为厄米矩阵这一条件意味着，除了可逆之外， A 也必须是厄米的。观察由狄拉克δ函数与 A^{T}的克罗内克积构成的分块对角矩阵 R，即可看出这一点

$$R = (\mathbb{I}\otimes A^{T}) = \begin{pmatrix} \boxed{A^{T}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A^{T}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{A^{T}} \end{pmatrix} \tag{A.20}$$

由于 $R = R^{\dagger}$，又因为 R 是分块对角矩阵，且每个分块都由相同的矩阵 A^{T}构成，因此我们有 $A^{T} = (A^{T})^{\dagger}$，进而得到 $A = A^{\dagger}$。

此外，由于厄米矩阵可对角化，只需满足 R 为正定，即其特征值全为正。又由于 R 由 N 个 A^{T} 的特征值副本组成（注意， A 与 A^{T}具有相同的特征值），因此 A 也必须为正定。最后，形式如 (A.8) 的积分可以推广到含复对称矩阵 R'的情形，前提是对 R' 的实部/厄米部分施加进一步的正定性条件（参见 [73]第 1.7 章）。

B 解读关联函数图

本附录介绍如何解读关联函数图，首先以 §2.1 中“带有耦合见证场的单矩阵关联函数”结果为主要示例，然后介绍用于生成 §5.1 中关联函数图的张量 GIO 图。

图8展示了单矩阵关联函数图，其中每个方框对应一个“算子”，各算子通过“分支”彼此连接。请注意，图的底部和顶部还有水平线，这表示这些分支的端点应当相互识别。算子可以是矩阵变量，例如 Z；也可以是见证场B，或置换线性算子，例如 $\mathcal{L}_\sigma$ 作用于 $\sigma \in S_n$。如前所述，置换算符对基向量的作用方式如下

$$\mathcal{L}_\sigma \left|e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}\right\rangle = \left|e_{i_{\sigma(1)}} \ldots e_{i_{\sigma(n)}}\right\rangle . \tag{B.1}$$

其中， $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$是 $V^{\otimes n}$的一组基向量。它们满足张量复合性质 y

$$\mathcal{L}_\sigma \mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_{\sigma\tau} , \tag{B.2}$$

这一点可通过插入恒等算子，计算这些算子的张量复合元素来证明

$$\begin{aligned}
&\langle e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_n} | \mathcal{L}_\sigma \mathcal{L}_\tau | e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \rangle \\
&= \langle e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_n} | \mathcal{L}_\sigma | e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_n} \rangle \langle e^{k_1} \otimes \cdots \otimes e^{k_n} | \mathcal{L}_\tau | e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \rangle \\
&= \langle e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_n} | e_{k_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{k_{\sigma(n)}} \rangle \langle e^{k_1} \otimes \cdots \otimes e^{k_n} | e_{i_{\tau(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\tau(n)}} \rangle \\
&= \delta^{j_1}_{k_{\sigma(1)}} \ldots \delta^{j_n}_{k_{\sigma(n)}} \delta^{k_1}_{i_{\tau(1)}} \ldots \delta^{k_n}_{i_{\tau(n)}} \\
&= \delta^{j_{\sigma^{-1}(1)}}_{k_1} \ldots \delta^{j_{\sigma^{-1}(n)}}_{k_n} \delta^{k_1}_{i_{\tau(1)}} \ldots \delta^{k_n}_{i_{\tau(n)}} \\
&= \delta^{j_1}_{i_{\sigma\tau(1)}} \ldots \delta^{j_n}_{i_{\sigma\tau(n)}} ,
\end{aligned} \tag{B.3}$$

其中，最后两步用到了克罗内克等变性，并对重复指标进行求和。根据算子作用（B.1），也可以写成

$$\begin{aligned}
\langle e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_n} | \mathcal{L}_{\sigma\tau} | e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \rangle &= \langle e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_n} | e_{i_{\sigma\tau(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma\tau(n)}} \rangle \\
&= \delta^{j_1}_{i_{\sigma\tau(1)}} \ldots \delta^{j_n}_{i_{\sigma\tau(n)}}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

由于结果（B.3）和（B.4）相等，我们得出 $\mathcal{L}_\sigma \mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_{\sigma\tau}$。因此，这些线性算子的复合可以理解为：先根据 $\mathcal{L}_\tau$的作用，将 e_{i_a} 替换为$e_{i_{\tau(a)}}$ （τ因而作用于标记为 $a \in \{1, 2, , \cdots, n\}$ 的基向量所在位置），然后再根据 $\mathcal{L}_\sigma$的作用，将$e_{i_{\tau(a)}}$ 替换为$e_{i_{\tau(\sigma(a))}} = e_{i_{\sigma\tau(a)}}$。讨论完算子的性质后，要通过读取图8来得出关联函数的结果，请从右侧图示最上方的 J 指标开始。沿着这条分支向下，依次遇到 $B^{\otimes n}$、 $\mathcal{L}_{\gamma^{-1}}$ 和 $\mathcal{L}_{\sigma_1}$ 算子。这三个算子的连接对应于指标的乘法/缩并，如下所示

$$\sum_{K,L} B^{j_1}_{k_1} \ldots B^{j_n}_{k_n} (\mathcal{L}_{\gamma^{-1}})^{k_1,\ldots,k_n}_{l_1,\ldots,l_n} (\mathcal{L}_{\sigma_1})^{l_1,\ldots,l_n}_{i_1,\ldots,i_n} = \sum_{K} B^{j_1}_{k_1} \ldots B^{j_n}_{k_n} (\mathcal{L}_{\gamma^{-1}\sigma_1})^{k_1,\ldots,k_n}_{i_1,\ldots,i_n} . \tag{B.5}$$

其中，$\sum_{K,\ L}$ 表示对所有 k，l 指标求和。注意，见证矩阵 B上的上指标标记为 j，算子 $\mathcal{L}_{\sigma_1}$ 上的下指标标记为i，这与图8中的标签一致。接下来，沿着 $\mathcal{L}_{\sigma_1}$ 下方的底部 I 指标向上追踪至图的顶部，因为我们将水平线视为相同，然后沿此分支向下，依次遇到 $\mathcal{L}_\gamma$、 $\mathcal{L}_{\sigma_2^{-1}}$，最后连接回顶部的 J 指标。这样便形成了一个闭合回路，所有指标都已收缩，因此我们可以将结果表示为这些算子的迹。总之，包括对 γ求和在内，单矩阵耦合见证场模型的关联函数为

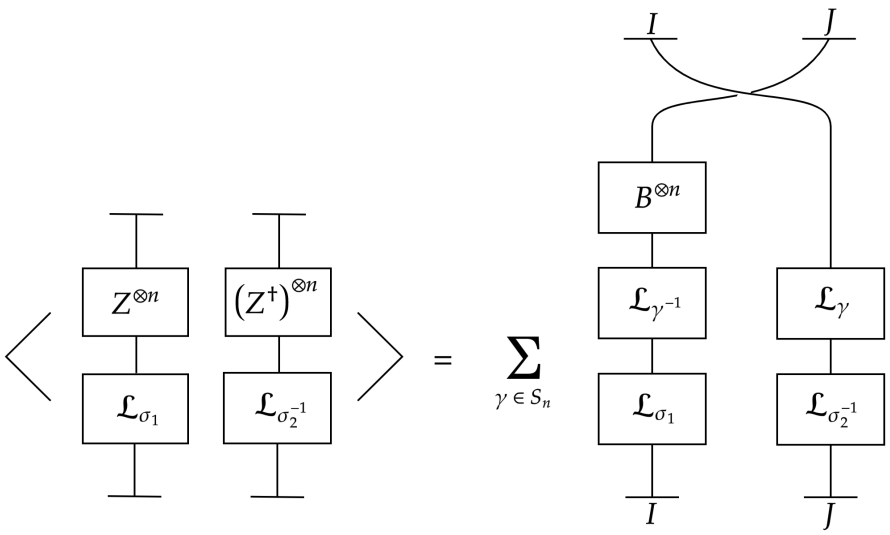

图8： 关联函数图中，每个方框都是由分支连接的算子。右侧的图明确标出了指标，说明水平线应视为连接底部和顶部的迹。阅读该图时，沿分支向下追踪，并将遇到的算子相乘。

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathcal{O}_{\sigma_1}(Z)\,(\mathcal{O}_{\sigma_2}(Z))^\dagger \rangle \\
&= \sum_{\gamma\in S_n} \sum_{I,J,K,L,P} B^{j_1}_{k_1}\dots B^{j_n}_{k_n} (\mathcal{L}_{\gamma^{-1}})^{k_1,\dots,k_n}_{l_1,\dots,l_n} (\mathcal{L}_{\sigma_1})^{l_1,\dots,l_n}_{i_1,\dots,i_n} (\mathcal{L}_{\gamma})^{i_1,\dots,i_n}_{p_1,\dots,p_n} (\mathcal{L}_{\sigma_2^{-1}})^{p_1,\dots,p_n}_{j_1,\dots,j_n} && \text{(B.6)} \\
&= \sum_{\gamma\in S_n} \text{迹}_{V_N^{\otimes n}}\left(B^{\otimes n}\mathcal{L}_{\gamma^{-1}}\mathcal{L}_{\sigma_1}\mathcal{L}_{\gamma}\mathcal{L}_{\sigma_2^{-1}}\right) && \text{(B.7)} \\
&= \sum_{\gamma\in S_n} \mathrm{Tr}_{V_N^{\otimes n}}\left(B^{\otimes n}\mathcal{L}_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}}\right) && \text{(B.8)} \\
&= \sum_{j_1,\dots j_n} \sum_{\gamma\in S_n} \langle e^{j_1}\dots e^{j_n}|\, B^{\otimes n}\mathcal{L}_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}}\,|e_{j_1}\dots e_{j_n}\rangle && \text{(B.9)} \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_n} \sum_{\gamma\in S_n} \langle e^{j_1}\dots e^{j_n}|\, B^{\otimes n}\,|e_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}\dots e_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(n)}}\rangle && \text{(B.10)} \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_n} \sum_{\gamma\in S_n} B^{j_1}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(1)}}\dots B^{j_n}_{j_{\gamma^{-1}\sigma_1\gamma\sigma_2^{-1}(n)}}\,. && \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

其中，方程（B.8）中用到了（B.2），而（B.10）中用到了（B.1）。这就是方程（2.21）中此前得到的结果。注意，右侧的图示引入了指标交换。该交换源于推导基本二点函数的过程，如附录 A 所示，其中 $\langle Z^i_j (Z^\dagger)^k_l\rangle = \delta^i_l (A^{-1})^k_j$上的指标 j，l在结果中交换了位置。

¯§5.1中的图7所示张量关联函数图引入了张量变量（Z、 $\bar{Z}$）和由三角形表示的见证（Λ、 $\bar{\Lambda}$）。为帮助理解，我们在图9中解释单个张量GIO $\mathcal{O}_{\sigma_1、\,\sigma_2、\,\sigma_3}$（$\Lambda$、 Z）的示意表示。数学上，我们按如下方式计算 1◯ 和 2◯

$$
\begin{aligned}
① &= \langle (e^{i_1}\otimes e^{j_1}\otimes e^{k_1})\otimes\dots\otimes(e^{i_m}\otimes e^{j_m}\otimes e^{k_m})|\, Z^{\otimes m} && \text{(B.12)} \\
&= Z^{i_1 j_1 k_1}\dots Z^{i_m j_m k_m} && \text{(B.13)}
\end{aligned}
$$

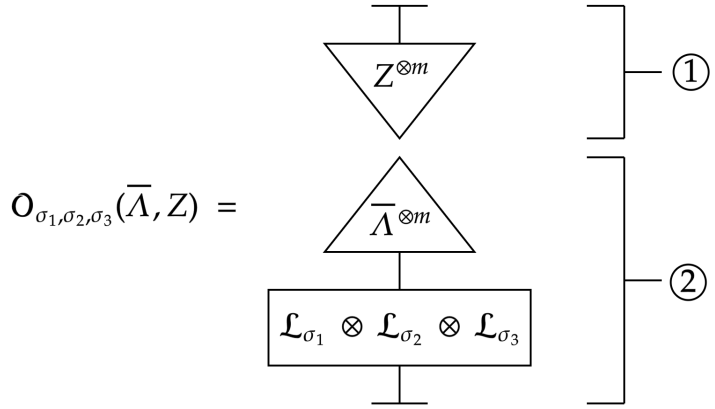

图9： 一个表示单个规范不变张量算符 $\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\Lambda, Z)$ 的示意图，其中包含量子场 Z 和经典见证 $\bar{\Lambda}$。它可以分解为两部分：1○，其中 $Z^{\otimes m}$作用于左矢态；以及 2○，其中线性置换算符先作用于右矢态，随后再由 $\bar{\Lambda}^{\otimes m}$作用。

$$
\begin{aligned}
② &= \bar{\Lambda}^{\otimes m}(\mathcal{L}_{\sigma_1} \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2} \otimes \mathcal{L}_{\sigma_3})\,|(e_{i_1} \otimes e_{j_1} \otimes e_{k_1}) \otimes \cdots \otimes (e_{i_m} \otimes e_{j_m} \otimes e_{k_m})\rangle && \text{(B.14)}\\
&= \bar{\Lambda}^{\otimes m}\,|(e_{i_{\sigma_1(1)}} \otimes e_{j_{\sigma_2(1)}} \otimes e_{k_{\sigma_3(1)}}) \otimes \cdots \otimes (e_{i_{\sigma_1(m)}} \otimes e_{j_{\sigma_2(m)}} \otimes e_{k_{\sigma_3(m)}})\rangle && \text{(B.15)}\\
&= \bar{\Lambda}_{i_{\sigma_1(1)} j_{\sigma_2(1)} k_{\sigma_3(1)}} \cdots \bar{\Lambda}_{i_{\sigma_1(m)} j_{\sigma_2(m)} k_{\sigma_3(m)}} && \text{(B.16)}
\end{aligned}
$$

将这两部分结合起来，最终的规范不变算符求值为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda}, Z) &= ① \times ② && \text{(B.17)}\\
&= \bar{\Lambda}_{i_{\sigma_1(1)} j_{\sigma_2(1)} k_{\sigma_3(1)}} \cdots \bar{\Lambda}_{i_{\sigma_1(m)} j_{\sigma_2(m)} k_{\sigma_3(m)}} Z^{i_1 j_1 k_1} \ldots Z^{i_m j_m k_m}\,, && \text{(B.18)}
\end{aligned}
$$

这与方程 (5.10) 中的定义相符。使用三角形是为了强调张量场算符是从张量空间映射到复数的映射$Z^{\otimes m}$： $V^{\otimes m} \to \mathbb{C}$。

C 德尔塔函数和

首先交换 $\gamma \in S_m$，即可由方程 (5.26) 得到方程 (5.27)。从以下内容开始：

$$
\sum_{\gamma_1,\gamma_2,\alpha \in S_m} \delta(\gamma_1 \gamma_2 \alpha)\,. \tag{C.1}
$$

令 $\gamma = \gamma_1\gamma_2$，并注意到对 γ_1 的求和遍历了 S_m 中的所有置换，对 $\gamma_1 = \gamma\gamma_2^{-1}$ 的求和也同样如此，因此我们可以用 $\sum_\gamma$ 替换 $\sum_{\gamma_1}$

$$
\sum_{\gamma_1,\gamma_2,\alpha} \delta(\gamma_1\gamma_2\alpha) = \sum_{\gamma,\gamma_2,\alpha} \delta(\gamma\alpha) = m! \sum_{\gamma,\alpha} \delta(\gamma\alpha) \implies \sum_{\gamma,\alpha} \delta(\gamma\alpha) = \frac{1}{m!} \sum_{\gamma_1,\gamma_2,\alpha} \delta(\gamma_1\gamma_2\alpha)\,. \tag{C.2}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}(\bar{\Lambda}, Z) \overline{\mathcal{O}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(\bar{\Lambda}, Z)} \rangle &= \sum_{\alpha_l,\gamma \in S_m} \mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda}, \Lambda) \prod_{l=1}^{3} \delta(\alpha_l^{-1} \sigma_l \gamma \tau_l^{-1})\\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\alpha_l,\gamma_1,\gamma_2 \in S_m} \mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda}, \Lambda) \prod_{l=1}^{3} \delta(\alpha_l^{-1} \sigma_l \gamma_1 \gamma_2 \tau_l^{-1})\,.
\end{aligned} \tag{C.3}
$$

接着，我们利用算子 $\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\Lambda,\Lambda)$ 的不变性，插入置换 μ_1 和 μ_2，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m!}\sum_{\alpha_l,\gamma_1,\gamma_2\in S_m}\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)\prod_{l=1}^{3}\delta(\alpha_l^{-1}\sigma_l\gamma_1\gamma_2\tau_l^{-1})\\
&\quad=\frac{1}{m!}\sum_{\alpha_l,\gamma_1,\gamma_2\in S_m}\mathcal{O}_{\mu_1\alpha_1\mu_2,\mu_1\alpha_2\mu_2,\mu_1\alpha_3\mu_2}(\bar{\Lambda},\Lambda)\prod_{l=1}^{3}\delta(\alpha_l^{-1}\sigma_l\gamma_1\gamma_2\tau_l^{-1}) \qquad \text{(C.4)}\\
&\quad=\frac{1}{m!}\sum_{\gamma_1,\gamma_2\in S_m}\sum_{\mu_1^{-1}\tilde{\alpha}_l\mu_2^{-1}\in S_m}\mathcal{O}_{\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)\prod_{l=1}^{3}\delta(\mu_2\tilde{\alpha}_l^{-1}\mu_1\sigma_l\gamma_1\gamma_2\tau_l^{-1}) \qquad \text{(C.5)}\\
&\quad=\frac{1}{m!}\sum_{\gamma_1,\gamma_2\in S_m}\sum_{\tilde{\alpha}_l\in S_m}\mathcal{O}_{\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)\prod_{l=1}^{3}\delta(\mu_2\tilde{\alpha}_l^{-1}\mu_1\sigma_l\gamma_1\gamma_2\tau_l^{-1}) \qquad \text{(C.6)}\\
&\quad=\frac{1}{(m!)^3}\sum_{\alpha_l,\gamma_1,\gamma_2\mu_1,\mu_2,\in S_m}\mathcal{O}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(\bar{\Lambda},\Lambda)\prod_{l=1}^{3}\delta(\mu_2\alpha_l^{-1}\mu_1\sigma_l\gamma_1\gamma_2\tau_l^{-1})\,. \qquad \text{(C.7)}
\end{aligned}$$

在 (C.4) 中使用了等价性质 $\mathcal{O}_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3}(\Lambda,\ \Lambda)=\ \mathcal{O}_{\mu_1\alpha_1\mu_2,\ \mu_1\alpha_2\mu_2,\ \mu_1\alpha_3\mu_2}(\Lambda,\ \Lambda)$。方程 (C.5) 重新标记了 $\mu_1\alpha_l\mu_2\ \to\ \tilde{\alpha}$，而 (C.6) 重新标记了求和，因为两者都覆盖了 S_m 中的所有元素。最后，(C.7) 引入了关于 μ_1 和 μ_2 的求和，并包含了相应的归一化因子。

D 一般矩阵模型的韦德伯恩–阿廷基性质

取多矩阵模型的张量空间分解

$$V_R^{(S_\mathbf{m})}=\bigoplus_{\mathbf{r}}V_{R_1}^{(S_{m_1})}\otimes V_{R_2}^{(S_{m_2})}\otimes\cdots\otimes V_{R_l}^{(S_{m_l})}\otimes V_\mathbf{r}^R. \qquad \text{(D.1)}$$

这里，R 是 $S_\mathbf{m}$ 的表示，其中 $\mathbf{m}=m_1+m_2+\cdots+m_l$ 和 $\mathbf{r}=(R_1,\ R_2,\ \ldots,R_l)$ 表示单个表示 R_i 的集合，其中 $i=1,\ \ldots,l$。限制特征标为

$$\chi^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}(\sigma)=\sum_{\mathbf{t}}\sum_{i,j}D^R_{ij}(\sigma)B^{R;j}_{\mathbf{r},\mu;\mathbf{t}}B^{R;i}_{\mathbf{r},\nu;\mathbf{t}} \qquad \text{(D.2)}$$

其中，$\mathbf{t}=(t_1,\ t_2,\ \ldots\ldots,\ t_l)$ 是一组标签，用于表示每个独立表示空间的状态，例如 $V_{(S_{m_1})R_1}$ 的状态由 t_1 标记。μ，ν 是重数指标。韦德伯恩–阿廷基（也称为 Q-基／傅里叶基）的元素

$$Q^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}=\frac{d_R}{\mathbf{m}!}\sum_{\sigma\in S_\mathbf{m}}\chi^R_{\mathbf{r},\mu,\nu}(\sigma)\sigma^{-1}\,, \qquad \text{(D.3)}$$

在重数指标上像矩阵一样相乘，下面将对此进行证明。

引理7。

$$Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}Q^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}=\delta^{RS}\delta_{\mathbf{rs}}\delta_{\nu_1\mu_2}Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_2} \qquad \text{(D.4)}$$

证明。

$$Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}Q^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}=\frac{d_Rd_S}{(\mathbf{m}!)^2}\sum_{\sigma,\tau\in S_\mathbf{m}}\chi^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(\sigma)\chi^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}(\tau)\sigma^{-1}\tau^{-1} \qquad \text{(D.5)}$$

$$= \frac{d_R d_S}{(\mathbf{m}!)^2} \sum_{\alpha \in S_\mathbf{m}} \left[\sum_{\tau \in S_\mathbf{m}} \chi^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(\tau^{-1}\alpha) \chi^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}(\tau) \right] \alpha^{-1} , \tag{D.6}$$

其中，上述的 $\sigma \to \tau^{-1}\alpha$ 和求和符号相应地互换。方括号项可根据 (D.2) 的定义进行计算

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tau \in S_\mathbf{m}} \chi^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(\tau^{-1}\alpha) \chi^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}(\tau) \\
&= \sum_{\tau \in S_\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{t},\mathbf{q}} \sum_{i,j,k,l} D^R_{ij}(\tau^{-1}\alpha) B^{R;j}_{\mathbf{r},\mu_1;\mathbf{t}} B^{R;i}_{\mathbf{r},\nu_1;\mathbf{t}} D^S_{kl}(\tau) B^{S;l}_{\mathbf{s},\mu_2;\mathbf{q}} B^{S;k}_{\mathbf{s},\nu_2;\mathbf{q}} &\text{(D.7)} \\
&= \sum_{\mathbf{t},\mathbf{q}} \sum_{i,j,k,l} B^{R;j}_{\mathbf{r},\mu_1;\mathbf{t}} B^{R;i}_{\mathbf{r},\nu_1;\mathbf{t}} B^{S;l}_{\mathbf{s},\mu_2;\mathbf{q}} B^{S;k}_{\mathbf{s},\nu_2;\mathbf{q}} \left[\sum_{\tau \in S_\mathbf{m}} D^R_{ij}(\tau^{-1}\alpha) D^S_{kl}(\tau) \right] &\text{(D.8)}
\end{aligned}$$

利用以下正交关系

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau \in S_\mathbf{m}} D^R_{ij}(\tau^{-1}\alpha) D^S_{kl}(\tau) &= \sum_a D^R_{aj}(\alpha) \sum_{\tau \in S_\mathbf{m}} D^S_{kl}(\tau) D^R_{ia}(\tau^{-1}) &\text{(D.9)} \\
&= \sum_a D^R_{aj}(\alpha) \frac{\mathbf{m}!}{d_R} \delta^{RS} \delta_{ka} \delta_{li} &\text{(D.10)} \\
&= \frac{\mathbf{m}!}{d_R} \delta^{RS} D^R_{kj}(\alpha) \delta_{li} , &\text{(D.11)}
\end{aligned}$$

在方程（D.8）中，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tau \in S_\mathbf{m}} \chi^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(\tau^{-1}\alpha) \chi^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}(\tau) \\
&= \frac{\mathbf{m}!}{d_R} \delta^{RS} \sum_{\mathbf{t},\mathbf{q}} \sum_{j,k} \left[\sum_{i,l} \delta_{li} B^{R;i}_{\mathbf{r},\nu_1;\mathbf{t}} B^{S;l}_{\mathbf{s},\mu_2;\mathbf{q}} \right] D^R_{kj}(\alpha) B^{R;j}_{\mathbf{r},\mu_1;\mathbf{t}} B^{S;k}_{\mathbf{s},\nu_2;\mathbf{q}} &\text{(D.12)} \\
&= \frac{\mathbf{m}!}{d_R} \delta^{RS} \sum_{j,k} \sum_{\mathbf{t},\mathbf{q}} \left[\delta_{\mathbf{rs}} \delta_{\mathbf{tq}} \delta_{\nu_1\mu_2} \right] D^R_{kj}(\alpha) B^{R;j}_{\mathbf{r},\mu_1;\mathbf{t}} B^{S;k}_{\mathbf{s},\nu_2;\mathbf{q}} &\text{(D.13)} \\
&= \frac{\mathbf{m}!}{d_R} \delta^{RS} \delta_{\mathbf{rs}} \delta_{\nu_1\mu_2} \sum_{j,k} \sum_{\mathbf{t}} D^R_{kj}(\alpha) B^{R;j}_{\mathbf{r},\mu_1;\mathbf{t}} B^{S;k}_{\mathbf{s},\nu_2;\mathbf{t}} &\text{(D.14)} \\
&= \frac{\mathbf{m}!}{d_R} \delta^{RS} \delta_{\mathbf{rs}} \delta_{\nu_1\mu_2} \chi^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_2}(\alpha) . &\text{(D.15)}
\end{aligned}$$

因此，将该结果代回方程（D.6）：

$$\begin{aligned}
Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1} Q^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2} &= \frac{d_R d_S}{(\mathbf{m}!)^2} \sum_{\alpha \in S_\mathbf{m}} \left[\sum_{\tau \in S_\mathbf{m}} \chi^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(\tau^{-1}\alpha) \chi^S_{\mathbf{s},\mu_2,\nu_2}(\tau) \right] \alpha^{-1} &\text{(D.16)} \\
&= \delta^{RS} \delta_{\mathbf{rs}} \delta_{\nu_1\mu_2} \left(\frac{d_R}{\mathbf{m}!} \sum_{\alpha \in S_\mathbf{m}} \chi^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_2}(\alpha) \alpha^{-1} \right) &\text{(D.17)} \\
&= \delta^{RS} \delta_{\mathbf{rs}} \delta_{\nu_1,\mu_2} Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_2} &\text{(D.18)}
\end{aligned}$$

□

注意，将 (D.1) 中的 $l = 2$ 特化，会得到 §3.2 中双矩阵计算所需的规则。具体而言，分解变为 $V^R_{S_{m+n}} = V^{R_1}_{S_m} \otimes V^{R_2}_{S_n} \otimes V^R_{R_1,\ R_2}$，其中

我们将 $m_1 = m,\ m_2 = n$ 标记为，使得 $\mathbf{m} = m + n$。这一特化还意味着，在记号上，$\delta_{\mathbf{rs}} \equiv \delta_{R_1 S_1}\delta_{R_2 S_2}$。[26] 的附录 B.2 提供了关于受限箭图特征标的更多细节与证明。此外，Q-基底元素的厄米共轭会交换其重数指标，使得 $\left(Q^R_{\mathbf{r},\ \mu_1,\ \nu_1}\right)^\dagger = Q^R_{\mathbf{r},\ \nu_1,\ \mu_1}$。

证明。

$$\left(Q^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}\right)^\dagger = \frac{d_R}{\mathbf{m}!}\sum_{\sigma\in S_{\mathbf{m}}}\left(\chi^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(\sigma)\right)^\dagger\left(\sigma^{-1}\right)^\dagger \tag{D.19}$$

$$= \frac{d_R}{\mathbf{m}!}\sum_{\sigma\in S_{\mathbf{m}}}\chi^R_{\mathbf{r},\mu_1,\nu_1}(\sigma)\sigma \tag{D.20}$$

$$= \frac{d_R}{\mathbf{m}!}\sum_{\sigma\in S_{\mathbf{m}}}\sum_{\mathbf{t}}\sum_{i,j} D^R_{ij}(\sigma)B^{R;j}_{\mathbf{r},\mu_1;\mathbf{t}}B^{R;i}_{\mathbf{r},\nu_1;\mathbf{t}}\sigma \tag{D.21}$$

$$= \frac{d_R}{\mathbf{m}!}\sum_{\sigma\in S_{\mathbf{m}}}\sum_{\mathbf{t}}\sum_{i,j} D^R_{ji}(\sigma^{-1})B^{R;i}_{\mathbf{r},\nu_1;\mathbf{t}}B^{R;j}_{\mathbf{r},\mu_1;\mathbf{t}}\sigma \tag{D.22}$$

$$= \frac{d_R}{\mathbf{m}!}\sum_{\sigma\in S_{\mathbf{m}}}\chi^R_{\mathbf{r},\nu_1,\mu_1}(\sigma^{-1})\sigma \tag{D.23}$$

$$= \frac{d_R}{\mathbf{m}!}\sum_{\tilde{\sigma}\in S_{\mathbf{m}}}\chi^R_{\mathbf{r},\nu_1,\mu_1}(\tilde{\sigma})\tilde{\sigma}^{-1} \tag{D.24}$$

$$= Q^R_{\mathbf{r},\nu_1,\mu_1}\,. \tag{D.25}$$

□

参考文献

[1] E. Brezin 和 V. A. Kazakov。“闭弦的精确可解场论”。载于：《物理快报 *B*》236（1990年），第 144–150 页。[2] Michael R. Douglas 和 Stephen H. Shenker。“低于一维的弦”。载于：*Nucl. Phys. B* 335（1990年）。E. Brezin 和 S. R. Wadia 编，第 635 页。[3] David J. Gross 和 Alexander A. Migdal。“非微扰二维量子引力”。载于：《物理评论快报》64（1990年）。E. Brezin 和 S. R. Wadia 编，第 127 页。[4] Juan Martin Maldacena。“超共形场论和超引力的大 N 极限”。载于：《理论与数学物理进展》2（1998年），第 231–252 页。arXiv：hep-th/9711200。[5] Edward Witten。“反德西特空间与全息”。载于：《理论与数学物理进展》2（1998年），第 253–291 页。arXiv：hep-th/9802150。[6] S. S. Gubser、Igor R. Klebanov 和 Alexander M. Polyakov。“来自非临界弦理论的规范理论关联函数”。载于：《物理快报 *B*》428（1998年），第 105–114 页。arXiv：hep-th/9802109。[7] Vijay Balasubramanian 等。“共形场论中的巨引力子”。载于：*JHEP*04（2002年），第 034 页。arXiv：hep-th/0107119。[8] Steve Corley、Antal Jevicki 和 Sanjaye Ramgoolam。“对偶 N=4 SYM 理论中巨引力子的精确关联函数”。载于：《理论与数学物理进展》5（2002年），第 809–839 页。arXiv：hep-th/0111222。

[9] A. Bissi 等。“巨引力子的全息三点函数”。载于：JHEP 06（2011年），第 085 页。arXiv：1103.4079 [hep-th]。[10] Pawel Caputa、Robert de Mello Koch 和 Konstantinos Zoubos。“带有巨引力子的极值与非极值关联函数”。载于：JHEP 08（2012年），第 143 页。arXiv：1204.4172 [hep-th]。[11] Hai Lin。“巨引力子与关联函数”。载于：JHEP 12（2012年），第 011 页。arXiv：1209.6624 [hep-th]。[12] Charlotte Kristjansen、Stefano Mori 和 Donovan Young。“涉及巨引力子的极值三点函数的正则化”。载于：Phys. Lett. B 750（2015年），第 379–383 页。arXiv：1507.03965 [hep-th]。[13] Yunfeng Jiang、Shota Komatsu 和 Edoardo Vescovi。“有限耦合下 $\mathcal{N}=4$ SYM 中的结构常数与世界面g函数”。载于：JHEP 07.07（2020年），第 037 页。arXiv：1906.07733 [hep-th]。[14] Peihe Yang 等。“D膜与轨道平均”。载于：SciPost物理 12.2（2022年），第 055 页。arXiv：2103.16580 [hep-th]。[15] Gaoli Chen 等。“闭弦被巨引力子吸收”。载于：JHEP 10（2019年），第 133 页。arXiv：1908.03553 [hep-th]。[16] Adolfo Holguin 和 Wayne W. Weng。“相干态的轨道平均：反德西特巨引力子的全息三点函数”。载于：（2022年11月）。arXiv：2211.03805[hep-th]。[17] A. Mironov 和 A. Morozov。“超可积性总结”。载于：（2022年1月）。arXiv：2201.12917 [hep-th]。[18] Steven Corley 和 Sanjaye Ramgoolam。“N=4 SYM 理论中 BPS关联函数的有限因子化方程与求和规则”。载于：Nucl. Phys. B 641（2002年），第 131–187 页。arXiv：hep-th/0205221。[19] Riccardo Penco。“有效场论引言”。载于：（2020年6月）。arXiv：2006.16285 [hep-th]。[20] Yusuke Kimura 和 Sanjaye Ramgoolam。“规范-引力对偶中的膜、反膜与布劳尔代数”。载于：JHEP 11（2007年），第 078 页。arXiv：0709.2158 [hep-th]。[21] Thomas William Brown、P. J. Heslop 和 S. Ramgoolam。“N=4 SYM 中的对角多矩阵关联函数与 BPS 算符”。载于：JHEP 02（2008年），第 030 页。arXiv：0711.0176 [hep-th]。[22] Rajsekhar Bhattacharyya、Storm Collins 和 Robert de Mello Koch。“精确多矩阵关联函数”。载于：JHEP 03（2008年），第 044 页。arXiv：0801.2061 [hep-th]。[23] Rajsekhar Bhattacharyya、Robert de Mello Koch 和 Michael Stephanou。“ 精确多限制舒尔多项式关联函数 ”。载于：JHEP 06 （ 2008 年），第 101 页。arXiv：0805.3025 [hep-th]。[24] Yusuke Kimura 和 Sanjaye Ramgoolam。“规范理论的增强对称性与局域算符谱的解析”。载于：Phys. Rev. D 78（2008年），第 126003 页。arXiv：0807.3696 [hep-th]。[25] Thomas William Brown、P. J. Heslop 和 S. Ramgoolam。“对角自由场矩阵关联函数、整体对称性与巨引力子”。载于：JHEP 04（2009年），第 089 页。arXiv：0806.1911 [hep-th]。[26] Jurgis Pasukonis 和 Sanjaye Ramgoolam。“作为计算器的箭图：计数、关联函数与黎曼曲面”。载于：JHEP 04（2013年），第 094 页。arXiv：1301.1980 [hep-th]。

[27] Jan Ambjorn、Bergfinnur Durhuus和Thordur Jonsson。《三维单纯形量子引力与广义矩阵模型》。载于：现代物理快报A 6 (1991年)，第1133–1146页。[28] Naoki Sasakura。《引力张量模型与流形的可定向性》。载于：现代物理快报A 6 (1991年)，第2613–2624页。[29] Mark Gross。《 > 2维中的张量模型与单纯形量子引力》。载于：Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 25 (1992年)，第144–149页。[30] Daniele Oriti。《量子引力的群场论方法》。载于：(2006年7月)，第310–331页。arXiv：gr-qc/0607032。[31] Razvan Gurau。《着色张量模型的1/N展开》。载于：亨利·庞加莱年刊 12 (2011年)，第829–847页。arXiv：1011.2726 [gr-qc]。[32] Edward Witten。《一种无无序的SYK类模型》。载于：J. Phys. A 52.47 (2019年)，第474002页。arXiv：1610.09758 [hep-th]。[33] Joseph Ben Geloun和Sanjaye Ramgoolam。《张量模型可观测量计数与2维球面的分支覆盖》。载于：Ann. Inst. H. Poincare Comb. Phys. Interact. 1.1 (2014年)，第77–138页。arXiv：1307.6490 [hep-th]。[34] Pablo Diaz和Soo-Jong Rey。《张量模型不变量的正交基》。载于：JHEP 02 (2018年)，第089页。arXiv：1706.02667 [hep-th]。[35] Robert de Mello Koch、David Gossman和Laila Tribelhorn。《玻色与费米张量模型中的规范不变量、关联函数与全息》。载于：JHEP 09 (2017年)，第011页。arXiv：1707.01455 [hep-th]。[36] Joseph Ben Geloun和Sanjaye Ramgoolam。《张量模型、克罗内克系数与置换中心化子代数》。载于：JHEP 11 (2017年)，第092页。arXiv：1708.03524[hep-th]。[37] Paolo Mattioli和Sanjaye Ramgoolam。《置换中心化子代数与多矩阵不变量》。载于：Phys. Rev. D 93.6 (2016年)，第065040页。arXiv：1601 . 06086[hep-th]。[38] Joseph Ben Geloun和Sanjaye Ramgoolam。《二部带状图的量子力学：整性、格与克罗内克系数》。载于：(2020年10月)。arXiv：2010.04054 [hep-th]。[39] Joseph Ben Geloun和Sanjaye Ramgoolam。《由二部带状图代数得到克罗内克系数》。载于：2022年11月。arXiv：2211.02544 [hep-th]。[40] A. Ram。《学位论文第一章，表示论》。载于：()。[41] Sanjaye Ramgoolam。《置换与一般N下规范不变量的组合学》。载于：PoS CORFU2015 (2016年)，第107页。arXiv：1605.00843 [hep-th]。[42] Robert de Mello Koch和Sanjaye Ramgoolam。《反德西特/共形场论对应中可积性的双陪集拟设》。载于：JHEP 06 (2012年)，第083页。arXiv：1204.2153 [hep-th]。[43] A. Mironov和A. Morozov。《单矩阵模型完整微扰解》。载于：《物理快报 B》771 (2017年)，第503–507页。arXiv：1705.00976 [hep-th]。[44] A. Mironov、A. Morozov和Z. Zakirova。《离散Painlev´e方程、Miwa变量与五维矩阵模型中的弦方程》。载于：JHEP 10 (2019年)，第227页。arXiv：1908.01278 [hep-th]。[45] Christopher Lewis-Brown和Sanjaye Ramgoolam。《四分之一BPS态、多重对称

ric

函数与集合分拆”。载于：*JHEP* 03 (2021), p. 153. arXiv: 2007.01734 [hep-th]。

[46] Vijay Balasubramanian 等：《来自 N=4 超杨-米尔斯的开弦》。载于：JHEP 08 (2002), p. 037. arXiv: hep-th/0204196.[47] Vijay Balasubramanian 等：《杨-米尔斯理论中的 D膜与涌现规范对称性》。载于：JHEP 03 (2005), p. 006. arXiv: hep-th/0411205.[48] Robert de Mello Koch、Jelena Smolic 和 Milena Smolic：《巨引力子——附着弦（I）》。载于：JHEP 06 (2007), p. 074. arXiv: hep-th/0701066.[49] Michael Stephanou：《舒尔多项式、受限舒尔多项式与 AdS/CFT 对应》。博士论文。2010年12月。[50] David Bekker、Robert de Mello Koch 和 Michael Stephanou：《巨引力子——附着弦（III）》。载于：JHEP 02 (2008), p. 029. arXiv: 0710.5372 [hep-th].[51] Storm Collins：《受限舒尔多项式与有限 N 计数》。载于：Phys. Rev. D 79 (2009), p. 026002. arXiv: 0810.4217 [hep-th].[52] A. Ram：《中心化子代数的表示论与特征标理论》。加州大学圣迭戈分校数学系，1991年。[53] Vijay Balasubramanian 等：《可积性与信息丢失：一个简单示例》。载于：JHEP 11 (2006), p. 001. eprint: hep-th/0602263.[54] Garreth Kemp 和 Sanjaye Ramgoolam：《BPS 态、守恒荷与对称群代数的中心》。载于：JHEP 01 (2020), p. 146. arXiv: 1911.11649 [hep-th].[55] Hai Lin、Oleg Lunin 和 Juan Martin Maldacena：《泡沫 AdS 空间与 1/2 BPS 几何》。载于：JHEP 10 (2004), p. 025. arXiv: hep-th/0409174.[56] David Berenstein 和 Shannon Wang：《BPS 相干态与局域化》。载于：JHEP 08 (2022), p. 164. arXiv: 2203.15820 [hep-th].[57] Warren Carlson、Robert de Mello Koch 和 Minkyoo Kim：《巨引力子束缚态的生成函数》。载于：JHEP 01 (2023), p. 104. arXiv: 2212 . 06731[hep-th].[58] Martin N. H. Cook 和 Joao P. Rodrigues：《通过杨-米尔斯相互作用耦合的两个矩阵的强耦合大 N 谱》。载于：Phys. Rev. D 78 (2008), p. 065024. arXiv: 0710.0073 [hep-th].[59] Veselin G. Filev 和 Denjoe O'Connor：《一般耦合下的多矩阵模型》。载于：J. Phys. A 46 (2013), p. 475403. arXiv: 1304.7723 [hep-th].[60] David E. Berenstein、Masanori Hanada 和 Sean A. Hartnoll：《多矩阵模型与涌现几何》。载于：JHEP 02 (2009), p. 010. arXiv: 0805.4658 [hep-th].[61] Emmanuele Battista 和 Harold C. Steinacker：《矩阵模型弯曲背景上的费米子》。载于：（2022年12月）。arXiv: 2212.08611 [hep-th].[62] N. Ishibashi 等：《作为超弦的大 N 约化模型》。载于：Nucl. Phys. B 498 (1997), pp. 467–491. arXiv: hep-th/9612115.[63] M Bauer 和 C Itzykson：《三角剖分》。载于：Les rencontres physiciens-math ´ematiciens de Strasbourg -RCP25 44 (1993), Talk no. 3.[64] Robert de Mello Koch 和 Sanjaye Ramgoolam：《从矩阵模型与量子场到赫尔维茨空间和绝对伽罗瓦群》。载于：（2010年2月）。arXiv: 1002.1634 [hep-th].[65] T. W. Brown：《复矩阵模型对偶》。载于：Phys. Rev. D 83 (2011), p. 085002. arXiv: 1009.0674 [hep-th]。

[66] David J. Gross 和 Washington Taylor. “二维量子色动力学弦理论中的扭转与威尔逊环”。载于：*Nucl. Phys. B* 403 (1993年), 第395–452页。arXiv: hep- th/9303046.[67] Stefan Cordes、Gregory W. Moore 和 Sanjaye Ramgoolam. “二维杨-米尔斯理论、等变上同调与拓扑场论讲义”。载于：核物理*B*辑增刊 41 (1995), 第184–244页。arXiv: hep-th/9411210.[68] Robert de Mello Koch 和 Sanjaye Ramgoolam. “共形场论$_4$ 作为 SO(4,2)-不变拓扑场论$_2$”。载于：*Nucl. Phys. B* 890 (2014年), 第302–349页。arXiv: 1403.6646 [hep-th].[69] Ibrahima Bah 等. “物理数学概览，约2022年”。载于：(2022年11月)。arXiv: 2211.04467 [hep-th].[70] George Barnes、Adrian Padellaro 和 Sanjaye Ramgoolam. “置换不变矩阵可观测量的隐藏对称性与大N因子化”。载于：*JHEP* 08 (2022年), 第090页。arXiv: 2112.00498 [hep-th].[71] George Barnes、Adrian Padellaro 和 Sanjaye Ramgoolam. “大N矩阵量子力学中的置换对称性与分拆代数”。载于：*Phys. Rev. D* 106.10 (2022年), 第106020页。arXiv: 2207.02166 [hep-th].[72] A. Altland 和 B. Simons. 凝聚态场论. 2006年.[73] J. Zinn-Justin. 量子力学中的路径积分. 牛津研究生教材。牛津大学出版社，2004年。