arXiv:2302.01208v1 [math.NT] 2 Feb 2023

多项式的动力学消去

XIAO ZHONG

Abstract. 在 Bell、Matsuzawa 和 Satriano 的工作基础上，我们研究数域 K 上的有限个多项式 S，并给出一个必要且充分条件，以判定是否存在一个 $N \in \mathbb{N}_{>0}$ 和一个有限集 $Z \subset \mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$，使得对于任意 $(a, b) \in (\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K)\backslash Z$，都满足如下消去结果：若 $k > N$ 和 ϕ_1，.....，ϕ_k 是 S 中的映射，且 $\phi_k \circ \cdots \circ \phi_1(a) = \phi_k \circ \cdots \circ \phi_1(b)$，那么实际上 $\phi_N \circ \cdots \circ \phi_1(a) = \phi_N \circ \cdots \circ \phi_1(b)$。此外，我们给出的使这一消去结果成立的条件，可以通过对给定的多项式集合进行有限次计算来检验。

1. Introduction

设 X 是一个射影簇，且 $f\colon X \to X$ 是一个满射自映射，其中 X 和 f 均定义在数域 K 上。理解 $(X$ 的动力学的一个重要部分，是找出在 f 下保持不变的闭子簇 $Y \subseteq X$；也就是说，满足 $f(Y) \subseteq Y$ 的簇 Y。这自然引导我们考察 f 下 Y 的迭代原像。关于迭代原像的几何复杂性不断增加，以及原则上几何结构应当对底层算术结构产生重大影响的一系列观察，使人们预期 K-点的塔最终会稳定下来

$$Y(K) \subseteq (f^{-1}(Y))(K) \subseteq (f^{-2}(Y))(K) \subseteq \cdots$$

这一预期已被精确表述为 [6, 中的原像问题：问题 8.4 (1)]，并且当 X 是一个 Kodaira 维数非负的光滑簇，且 f 是 ´étale [2, 时，已得到肯定的解答（定理 1.2]）。

原像问题的一个特殊情形是，当 f 是 $X \times X$ 上的逐坐标映射 (g, g)，其中 $g\colon X \to X$ 是满射自态射时。在这种情况下，原像问题可转化为消去问题；也就是说，存在一个自然数 s，使得对于所有 $x, y \in X(K)$，若存在某个 $n > s$ 使得 $g^n(x) = g^n(y)$，则有 $g^s(x) = g^s(y)$。精确表述见 [2, 猜想 1.5]；在同一篇论文的 [2, 定理 1.3] 中，作者通过应用 Rivera-Letelier [9] 的 p-进一致化技术，证明了 X 为曲线时的情形。由于关于 $\mathbb{P}^1$ 上多项式自映射的已知结果远多于一般射影簇上满射自态射的相关结果，作者还证明了一个更一般的消去结果，允许在 $\mathbb{P}^1$ 上存在多个多项式自映射，具体如下。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37P55, 14G05.*Key words and phrases.* 动力学消去、不变曲线、算术动力学、映射半群、曲线上的有理点。作者的研究部分得到了加拿大自然科学与工程研究委员会项目 RGPIN-2022-02951 的资助。

以下分别用 $P_r(x)$ 和 $T_r(x)$ 表示次数为 r 的循环多项式 x^r，以及次数为 r 的切比雪夫多项式。

定理 1.1. [2, 定理 1.7] 设 K 是一个数域，且 $\phi_1, \dots, \phi_r$ 是 $\mathbb{P}^1_K$ 上次数至少为二的多项式映射。假设 $(\phi_i)_{\overline{K}}$ 的所有不可分解因子都不与奇数 d 的某个 T_d 线性相关，也不与某个 m 的 P_m 线性相关。那么存在一个有限集 $Z \subset (\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K)(K)$，具有如下性质：对于任意点 $a, b \in \mathbb{P}^1_K$，若 $(a, b) \notin Z$，则

$$\phi_{i_n} \circ \cdots \circ \phi_{i_1}(a) = \phi_{i_n} \circ \cdots \circ \phi_{i_1}(b)$$

对于某个 $n \geqslant 0$ 和 $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, r\}$，则

$$\phi_{i_2} \circ \phi_{i_1}(a) = \phi_{i_2} \circ \phi_{i_1}(b).$$

然而，这个定理并非最优。例如，当 $S = \{T_5, P_5\}$ 时，该定理没有给出任何结论，尽管在这种情况下可以证明消去结果成立。本文通过根据 S 中的多项式给出一个充要条件，完整刻画了何时存在涉及多个多项式的动力学消去结果。

定理 1.2. 设 S 是定义在数域 K 上的次数至少为 2 的多项式有限集，且 $\langle S \rangle$ 是由 S 在复合运算下生成的幺半群。那么存在一个 $N \in \mathbb{N}^+$ 和一个点的有限集 $Z \subset \mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$，使得若

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_1(a) = \phi_k \circ \cdots \circ \phi_1(b) \tag{1.1}$$

满足 $\phi_j \in S$、$k > N$ 以及 $(a, b) \in (\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K) \backslash Z$，则有

$$\phi_N \circ \cdots \circ \phi_1(a) = \phi_N \circ \cdots \circ \phi_1(b) \tag{1.2}$$

除非存在 h_1、$h_2 \in \langle S \rangle$，其中 h_1、h_2 可写成不超过 N 个 S 中元素的复合，以及一个复线性多项式 $l(x) = ux + v$、$u \in \mathbb{C}^*$ 和 $v \in \mathbb{C}$，使得以下情形之一成立：

(1) $h_2 \circ l = P \circ P_d$ 和 $l^{-1} \circ h_1 \circ l(x) = xQ(x^d)$，其中 $d \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$、$u =$1、$v \in K$，且 K 含有一个本原 d 次单位根；(2) $h_2 \circ l = P \circ P_d$ 和 $l \circ h_1^{-1} \circ l = P_r$，其中 $d|(r-1)$、$d \geqslant 2$ 和 $v \in K$，且 K 含有一个本原 d 次单位根；(3) $h_2 \circ l = P \circ T_d$ 和 $l^{-1} \circ h_1 \circ l = \pm T_r$，其中 $d|(r+1)$ 或 $d|(r-1)$，并且以下情形之一成立：(a) $d = 2$ 和 $v \in K$；(b) $d > 2$，且存在一个本原 d 次单位根 ϵ，使得圆锥曲线

$$V(Y^2 + (\epsilon + 1/\epsilon - 2)v \cdot (X + Y) - (\epsilon + 1/\epsilon)XY + X^2 + (2 - \epsilon - 1/\epsilon)v^2 + (\epsilon - 1/\epsilon)^2 u^2)$$

has a K-point; Moreover, we can further refine the condition if r is even. In this case the conic having a K-point is equivalent to $u, v, \epsilon + 1/\epsilon \in K$.

此外，如果存在如上所述的 h_1、h_2 和 l，使得 $(1) - (3)$ 中有一个成立，那么对于任意 $j \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}$，都存在一个无限的 K-点集 $(a$、$b)$，它们位于 $\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$ 中，使得

$$h_2 \circ h_1^j(a) = h_2 \circ h_1^j(b) \tag{1.3}$$

$$h_1^{\circ j}(a) \neq h_1^{\circ j}(b). \tag{1.4}$$

注 1.3. 给定数域 K 和圆锥曲线

$$C = V(Y^2+(\epsilon+1/\epsilon-2)v\cdot(X+Y)+(\epsilon+1/\epsilon)XY+X^2+(2-\epsilon-1/\epsilon)v^2+(\epsilon-1/\epsilon)^2u^2),$$

Sage 中已有标准算法可用于检查 C 是否有 K 个点。因此，只需进行有限次计算即可检验定理 1.2 中情形 (3) 的条件。

我们还将证明，数目 N 可以根据多项式集合 S 有效计算。因此，只需进行有限次计算即可检验定理 1.2 中的三种情形。

2. Preliminary Lemmas

本节将给出一些预备引理，以证明定理 1.2。

引理 2.1. 设 $\pi(x) = x + 1/x$。若 ϵ 和 ϵ' 是满足 $V(Y - \epsilon X)$、$V(Y - \epsilon' X) \subseteq (\pi, \pi)^{-1}(C)$ 的单位根，其中某个不可约曲线 $C \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$，则要么 $\epsilon = \epsilon'$，要么 $\epsilon = \epsilon'^{-1}$。此外，$V(Y - \epsilon X) \subseteq (\pi, \pi)^{-1}(C)$ 当且仅当 $V(Y - \epsilon^{-1}X) \subseteq (\pi, \pi)^{-1}(C)$。

证明。注意到

$$(\pi, \pi)(V(Y - \epsilon X) \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)) = \{(x + 1/x, \epsilon^{-1}/x + x/\epsilon^{-1}) : x \in \mathbb{C}^*\}$$

根据 Chevalley 定理，[4, 1.8.4] 是扎里斯基可构造的

$$V(Y - \epsilon X) \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$$

$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 和 $(\pi$ 中的 $\pi)$：$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 是簇之间的正则态射，因此它是扎里斯基可构造的。其像也同样如此

$$V(Y - \epsilon' X) \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$$

在 (π, π) 下。根据引理陈述中的条件，它们像的扎里斯基闭包都是 C，因为 C 是不可约的。于是存在子集

$$U \subseteq (\pi, \pi)(V(Y - \epsilon X) \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*))$$

and

$$U' \subseteq (\pi, \pi)(V(Y - \epsilon' X) \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*))$$

使得 U 和 U' 在 C 中开稠密，因为不可约曲线上的可构造集要么是有限集，要么是余有限集，而在这种情况下，

$$(\pi, \pi)(V(Y - \epsilon' X) \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*))$$

是余有限的。因此，$U \cap U'$ 是无限集。由此存在无穷多个 $x_0 \in \mathbb{C}^*$ 使得 $(x_0 + 1/x_0, \epsilon^{-1}/x_0 + x_0/\epsilon^{-1}) \in U \cap U'$。因此，对每个这样的 x_0，都存在 $y_0 \in \mathbb{C}^*$ 使得

$$(x_0 + 1/x_0, \epsilon^{-1}/x_0 + x_0/\epsilon^{-1}) = (y_0 + 1/y_0, \epsilon'^{-1}/y_0 + y_0/\epsilon'^{-1}).$$

因此，$y_0 = x_0$ 或 $y_0 = 1/x_0$ 来自 $x_0 + 1/x_0 = y_0 + 1/y_0$。如果 $y_0 = x_0$，则有

$$\epsilon^{-1}/x_0 + x_0/\epsilon^{-1} = \epsilon'^{-1}/x_0 + x_0/\epsilon'^{-1}.$$

等式两边同乘 $\epsilon\epsilon' x_0$ ，得到

$$\epsilon' + \epsilon^2\epsilon' x_0^2 = \epsilon + \epsilon\epsilon'^2 x_0^2. \tag{2.1}$$

如果 $x_0 = 1/y_0,$ ，那么我们有

$$\epsilon^{-1}/x_0 + x_0/\epsilon^{-1} = \epsilon'^{-1}x_0 + 1/(x_0\epsilon'^{-1}).$$

两边乘以 $\epsilon\epsilon' x_0$ ，得到

$$\epsilon' + \epsilon^2\epsilon' x_0^2 = \epsilon x_0^2 + \epsilon\epsilon'^2. \tag{2.2}$$

由于这类 $(x_0$、$y_0)$ 对的集合是无限的，因此要么存在无穷多个满足 $x_0 = y_0$ 的 y_0 ，要么存在无穷多个满足 $x_0 = 1/y_0$的 y_0 。因此，要么有无穷多个 x_0 满足方程（2.1），要么有无穷多个 x_0 满足方程（2.2）。但是，如果方程（2.1）在 x_0 中有无穷多个解，那么 $\epsilon = \epsilon'$ ；同样，方程（2.2）有无穷多个解意味着 $\epsilon' = \epsilon^{-1}$。因此， ϵ' 要么是 ϵ ，要么是 ϵ^{-1}。最后一个结论显然，因为集合 $\{(x + 1/x, \epsilon^{-1}/x + x/\epsilon^{-1}) : \ x \in \mathbb{C}^*\}$ 在将 x 映射到 $1/x$的映射下，与 $\{(x + 1/x, \epsilon/x + x/\epsilon) : \ x \in \mathbb{C}^*\}$ 相同。□

引理 2.2. 设 K 为一个数域， $\pi(x) = x + 1/x,\ l(x) = ax + b$ with$a \in \mathbb{C}^*$ and $b \in \mathbb{C}$，且 $\epsilon \notin \{\pm 1\}$ 是一个单位根。设 C 是 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 中的一条不可约曲线，使得 $V(Y - \epsilon X) \subseteq (\pi, \pi)^{-1}(C)$。那么 $(l, l)(C)$ 由下式给出

$$V(Y^2+(\epsilon+1/\epsilon-2)b\cdot(X+Y)-(\epsilon+1/\epsilon)XY+X^2+(2-1/\epsilon-\epsilon)b^2+(\epsilon-1/\epsilon)^2a^2),$$

并且若它有无穷多个 K-点，则 $\epsilon + 1/\epsilon \in K,\ a^2 \in K$ and $b \in K$。

证明. 由条件 $V(Y - \epsilon X) \subset (\pi, \pi)^{-1}(C)$ ，我们可以显式推导出 C 的表达式，因为根据引理 2.1 的证明，我们知道.....的扎里斯基闭包

$$(\pi, \pi)(V(Y - \epsilon X) \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*))$$

是 C。换言之，在.....上消失的二元不可约多项式

$$\left\{\left(\frac{1}{x} + x, \frac{1}{\epsilon x} + \epsilon x\right) : \forall x \in \mathbb{C}^*\right\}$$

是 C 的定义方程。由引理 2.1 可知，不可约曲线 C 的定义方程次数至少为 2，因为二者都

$$(x + 1/x, \epsilon/x + x/\epsilon)$$

and

$$(x + 1/x, \epsilon x + 1/(\epsilon x))$$

属于 C ，并且也属于 $\epsilon \notin \{\pm 1\}$。可以验证

$$C = V(Y^2 - (\epsilon + 1/\epsilon)XY + X^2 + (\epsilon - 1/\epsilon)^2). \tag{2.3}$$

那么 $(l, l)(C)$ 由下式给出

$$V(Y^2+(\epsilon+1/\epsilon-2)b(X+Y)-(\epsilon+1/\epsilon)XY+X^2+(2-\epsilon-1/\epsilon)b^2+(\epsilon-1/\epsilon)^2a^2). \tag{2.4}$$

如果 $(l, l)(C)$ 有无限多个 K-点，那么方程 (2.4) 中定义多项式的系数全都属于 K。因此

$$a^2, b \text{ and } \epsilon + 1/\epsilon \in K.$$

□

下面的引理广为人知，事实上，[7, 命题 2.28]，的证明中提到了类似的结论，但我们不知道有任何明确的参考文献。

引理 2.3. 设 $C \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的一条不可约曲线，在 (P_r, P_r) 或 $(-P_r, -P_r)$ 作用下保持不变。那么，要么 $C = V(X^m Y^n - \nu)$，其中 $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 满足 $\gcd(m, n) = 1$，且 ν 是单位根；要么 C 是 $\{0\} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \{0\}$, $\{\infty\} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 或 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \{\infty\}$ 之一。

证明. 我们先考察 C 是 (P_r, P_r) 作用下的不变不可约曲线的情形。若 $C \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) = \varnothing$，则 C 是 $\{0\} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \{0\}$,$\{\infty\} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 或 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \{\infty\}$ 之一。否则，令 $W = C \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$ 为 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 内的一条曲线，它在 (P_r, P_r) 作用下保持不变。由于 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 中只有可数多个挠点（将其视为一个以逐点乘法为运算的代数群），我们可以取一个非挠点 $(a, b) \in W$，并令 $\Gamma \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 为由 (a, b) 生成的子群。于是，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\Gamma \cap W$ 都有无穷多个点，因为 $(P_r^{\circ n}(a), P_r^{\circ n}(b)) \in \Gamma \cap W$。半阿贝尔簇上的 Mordell-Lang 猜想（由 Vojta [11] 证明）表明，$\Gamma \cap W = \cup_{1 \leqslant i \leqslant k}(\lambda_i H_i)$，其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, H_i 是 Γ 的子群，且 $k \geqslant 0$。由于 $\Gamma \cap W$ 在 C 中稠密，且 C 不可约，故存在某个 j 使得 $\overline{\lambda_j H_j} = C$。因此，对于某些 $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 和 $\nu \in \mathbb{C}^*$，有 $C = V(X^m Y^n - \nu)$。事实上，$\gcd(m, n) = 1$，否则 $X^m Y^n - \nu$ 将是可约的。C 在映射 (P_r, P_r) 作用下保持不变这一事实表明，ν 是单位根。关于 $(-P_r, -P_r)$ 作用下的不变曲线的情形类似，证明中唯一的区别是，我们取由 $\{(a, b), (-1, -1)\}$ 生成的 Γ。□

3. Proof of Theorem 1.2

本节完成定理 1.2 的证明。首先构造 $N \in \mathbb{N}^+$ 和 $Z \subset \mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$。

令 $\Delta_K \subseteq (\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K)$ 为对角子簇。根据 [2, 引理 5.7]，所有与 Δ不同、具有 Zariski 稠密的 K-点集，并且包含在形如（f、f）（其中 $f \in S$）的元素下的 Δ 的原像中的 $\mathbb{C}$ 上的所有可能的不可约曲线，都属于有限集 Σ。此外，根据[2, 定理 1.6], 的证明，存在一个有限集 $Z \subset \mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$，具有如下性质：如果 $C \in \Sigma$ 且 C' 是（f的一个不可约分支，$f)^{-1}(C)$ 不在 Σ 中，则 $C'(K) \subseteq Z$。令

$$N = \#\Sigma. \tag{3.1}$$

现在我们证明：若存在一点 (a, b) 位于 Z 之外，使得对于某些 $(\phi_1, \ldots, \phi_k) \in S^k$ 且 $k > N$，消去方程 (1.1) 和 (1.2) 不成立，那么定理 1.2 的陈述中必有一个 $(1) - (3)$ 成立。

3.1. 构造 h_1 和一条不可约不变曲线。

更确切地说，假设存在 $k \in \mathbb{N}$、$k > N$、$(a, b) \in (\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K)\backslash Z$和 $\phi_j \in S$、$j = 1,2,3, \ldots, k$，使得

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_1(a) = \phi_k \circ \cdots \circ \phi_1(b)$$

and

$$\phi_{k-1} \circ \cdots \circ \phi_1(a) \neq \phi_{k-1} \circ \cdots \circ \phi_1(b).$$

断言 3.1. 存在 $k-N-1<m_1<m_2\leqslant k-1$ 和一个 $C'\in\Sigma$，它是 $(\phi_k\circ\cdots\circ\phi_{m_2+1}$、 $\phi_k\circ\cdots\circ\phi_{m_2+1})^{-1}(\Delta)$ 的不可约分支，使得

$$(\phi_{m_1}\circ\cdots\circ\phi_1(a),\phi_{m_1}\circ\cdots\circ\phi_1(b))\in C' \tag{3.2}$$

and

$$(\phi_{m_2}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1},\phi_{m_2}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1})(C')=C'. \tag{3.3}$$

证明。由于 $\phi_{i_k}\circ\cdots\circ\phi_{i_1}(a)=\phi_{i_k}\circ\cdots\circ\phi_{i_1}(b)$，我们有

$$(\phi_{i_k}\circ\cdots\circ\phi_{i_1}(a),\phi_{i_k}\circ\cdots\circ\phi_{i_1}(b))\in\Delta.$$

我们取 $C_0=\Delta$。于是存在一个 $C_1\in\Sigma$ 使得

$$(\phi_{k-1}\circ\cdots\circ\phi_1(a),\phi_{k-1}\circ\cdots\circ\phi_1(b))\in C_1,$$
$$C_1\subseteq(\phi_k,\phi_k)^{-1}(C_0).$$

一般而言，对于 $1\leqslant j\leqslant k$，我们可以找到 $C_{k-j}\in\Sigma$ 使得

$$(\phi_j\circ\cdots\circ\phi_{i_1}(a),\phi_j\circ\cdots\circ\phi_1(b))\in C_{k-j},$$
$$C_{k-j}\subseteq(\phi_{j+1},\phi_{j+1})^{-1}(C_{k-j-1})$$

其中 $1\leqslant j<k$。这样的曲线 $C_1,\ldots,C_k\in\Sigma$ 存在，因为 $(a,$ 而 $b)$ 不属于 Z。然而我们知道 $k>N$ 且 $N=\#\Sigma$。因此存在 m_1 和m_2，满足 $k-N-1<m_1<m_2\leqslant k-1$，使得$C_{k-m_1}=C_{k-m_2}$。令$C'=C_{k-m_1}=C_{k-m_2}$。根据 C_i的构造，我们有

$$(\phi_{m_1}\circ\cdots\circ\phi_{i_1}(a),\phi_{m_1}\circ\cdots\circ\phi_1(b))\in C',$$
$$C'\subseteq(\phi_{m_2}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1},\phi_{m_2}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1})^{-1}(C')$$

特别地，$(\phi_{m_2}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1},\phi_{m_2}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1})(C')\subseteq C'$。因此，$C'$ 是 $(\phi_{i_{m_2}}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1},\phi_{m_2}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1})$ 的不变曲线，因为该映射是非恒定态射，因而是满射 [10, 243, I §5, 定理 4]；即$(\phi_{m_2}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1},$ $\phi_{m_2}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1})(C')=C'$. □

我们取

$$h_1=\phi_{m_2}\circ\cdots\circ\phi_{m_1+1}. \tag{3.4}$$

那么，C' 是在 (h_1,h_1)下不变的一条不可约曲线。

3.2. 化简为定理 1.2 中的情形 $(1)-(3)$

在本小节中，我们继续使用第 3.1 小节中的记号。我们已经看到，方程 (3.4) 中的 h_1 可以表示为 $\langle S\rangle$中不超过 N 个元素的复合。在本小节中，我们希望构造相应的 h_2，并证明 h_2 可以表示为 $\langle S\rangle$中不超过 N 个元素的复合。

注意，对于每个 $c\in\mathbb{C}$，$(\infty$、$c)$ 和 $(c$、$\infty)$ 都不属于 C'，因为

$$\phi_k\circ\cdots\circ\phi_1(\infty)\neq\phi_k\circ\cdots\circ\phi_1(c).$$

从 C' 中去掉 $(\infty$、$\infty)$ 后，我们可以将 C' 视为 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 中的一条不可约曲线，并且它在 $(h_1$、$h_1)$ 作用下不变。于是，[8, 定理 4.9] 表明，如果 h_1 不与 P_r 或 $\pm T_r$ 线性共轭，那么 C' 的形式为 $V(y-p(x))$ 或 $V(x-p(y))$，其中某个多项式 p 与 h_1 交换。

3.2.1. 情形 1： h_1 不与循环多项式或切比雪夫多项式线性共轭。那么，不失一般性，我们假设

$$C' = V(y - p(x)). \tag{3.5}$$

由于 $C' \subseteq (\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}, \phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1})^{-1}(\Delta)$，多项式 p满足

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}(x) = \phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}(p(x)).$$

根据简单的次数论证，这只可能在 $\deg(p) = 1$ 时发生；即，$p(x) = sx + t$。此外，由于 $C' \neq \Delta$，我们有 $(s,t) \neq (1,0)$。于是

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}(x) = \phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}(sx + t),$$

并且由于 h_1 与 p可交换，我们还有

$$h_1(sx + t) = sh_1(x) + t.$$

如果 $s = 1$ 和 $t \neq 0$，那么 $\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}$ 是一个常函数，这是不可能的。因此，$s \neq 1$，并且存在 $l(x) = x + t/(1 - s)$ 使得

$$l \circ h_1 \circ l(sx) = sl^{-1} \circ h_1 \circ l(x).$$

那么 s 必为一个单位根，这可以通过考察多项式的首项看出。因此

$$l^{-1} \circ h_1 \circ l(x) = xQ(x^d)$$

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1} \circ l = P \circ P_d$$

对于某些多项式 Q、P 和 $d > 1$，其中 d 是 s 作为单位根的阶。由于 $m_2 > k - N - 1$，我们可以取

$$h_2 = \phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1} \tag{3.6}$$

其中 h_2 可写成 S 中不超过 N 个元素的复合。此外，由于

$$C' = V(y - p(x)) = V(y - sx - t) \in \Sigma$$

包含一个 Zariski 稠密的 K-点集，s、$t \in K$ 和 $l(x) = x + t/(1 - s)$。因此，我们处于定理 1.2 的情形 (1)。

现在只剩下 h_1 与 P_r 或 $\pm T_r$ 线性共轭的情形。

3.2.2. 情形 2： h_1 与 P_r 线性共轭。不失一般性，我们可以假设对于某个 r，$h_1 = P_r$。因此，C' 是在 $(P_r$、$P_r)$ 作用下不变的不可约曲线。根据引理 2.3，$\mathbb{C}$ 上在幂映射作用下不变的不可约曲线为 $X^m Y^n = \nu$，其中 m、$n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，$\gcd(m$、$n) = 1$，且 ν 是单位根；或者是 $\{0\} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$、$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \{0\}$、$\{\infty\} \times \mathbb{P}^1_C$、$\mathbb{P}^1_C \times \{\infty\}$ 之一。由构造 C' 可知，我们有 $(\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}$、$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1})(C') \subseteq \Delta$；通过简单的次数论证，第一种情形在 $m = -n$ 下成立。因此，不变的不可约曲线具有 $V(Y - \epsilon X)$ 的形式，其中某个满足 $(\epsilon x)^r = \epsilon x^r$ 的单位根 ϵ。这意味着 ϵ 的阶 d 满足 $d|(r - 1)$。条件 $(\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}$、$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1})(C') \subseteq \Delta$ 和 $C' \neq \Delta$ 得出

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1} = P \circ P_d \tag{3.7}$$

对于某些多项式 P和 $d \geqslant 2$。一般而言，结论是存在复线性多项式 $l = ux + v$，使得

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1} \circ l = P \circ P_d$$

$$l^{-1} \circ h_1 \circ l = P_r$$

对于某些多项式 P、 $d|(r-1)$ 和 $d \geqslant 2$。类似地，我们可以取

$$h_2 = \phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1} = P \circ P_d \circ l^{-1} \tag{3.8}$$

其中 h_2 可表示为 S中不超过 N 个元素的复合。此外

$$C' = (l,l)(V(Y - \epsilon X)) = V(Y - \epsilon X + (\epsilon - 1)v) \in \Sigma, \tag{3.9}$$

对于某个 d次单位根 $\epsilon \neq 1$，包含无穷多个 K-点。这意味着 $Y - \epsilon X + (\epsilon - 1)v$ 定义在 K上。因此 ϵ， $v \in K$。所以我们处于定理 1.2 的情形 (2) 。

3.2.3. 情形 3： h_1 与 $\pm T_r$线性共轭。不妨先假设 h_1 为 T_r 或 $-T_r$。注意， π : 由 $\pi(x) = 1/x + x$ 给出的 $\mathbb{C}^* \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ 是支配的，且 $\pm T_r \circ \pi = \pi \circ (\pm P_r)$。因此，在 $(\pm T_r$、 $\pm T_r)$作用下， $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 中不变子簇关于 $(\pi$、 $\pi)$ 的原像，是 $(\pm P_r$、 $\pm P_r)$作用下的不变子簇。回顾第 3.1 节， C' 是一条在 $(h_1$、 $h_1)$ 作用下不变的不可约曲线，且其K-点集是 Zariski 稠密的。现在，在这种情况下， C' 是一条定义在 $\mathbb{C}$上的不可约曲线，在$(T_r$、 $T_r)$ 或 $(-T_r$、 $-T_r)$ 其中一组作用下不变，因此

$$E = \overline{(\pi,\pi)^{-1}(C')} \tag{3.10}$$

是 (P_r, P_r) 或 $(-P_r, -P_r)$ 作用下的不变子簇。令 $E_1, \ldots, E_t$ 为 E 的不可约分支。由于 E 在 $(\pm P_r, \pm P_r)$ 作用下不变，我们有

$$\overline{(\pm P_r, \pm P_r)(E_i)} = E_{\tau(i)}$$

对于某个映射 τ: $\{1,2,\ldots,t\} \to \{1, 2, \ldots, t\}$。于是存在 $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ 和 $w \in \mathbb{N}^+$ ，使得 $\tau^w(j) = j$ ，因此

$$(\pm P_r, \pm P_r)^{\circ w}(E_j) = E_j,$$

因为 $(\pm P_r, \pm P_r)^{\circ w}$ 不是常值态射，因此是满射。现在我们知道， E_j 是在 $(P_r, P_r)^{\circ w}$ 或 $(-P_r, -P_r)^{\circ w}$ 作用下不变的不可约曲线。

在两种情况下，根据引理 2.3， E_j 都由 $X^m Y^n = \nu$ 给出，其中 m, n 是互素的非零整数， ν 是一个单位根，因为它不可能是 $\{0\} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \{0\}$, $\{\infty\} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 或 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \{\infty\}$ 之一，因为

$$(\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}, \phi_k \circ \cdots \circ \phi_{2+1}) \circ (\pi,\pi)(E_j) \subseteq \Delta.$$

同理，通过次数论证可得 $m = -n$。因此

$$E_j = V(Y - \epsilon X) \tag{3.11}$$

其中 ϵ 是一个阶为 $d > 1$的单位根。从现在起，以下讨论与 $(\pm T_r$、 $\pm T_r)$ 的符号无关，因此我们只考虑 $(h_1$、 $h_1) = (T_r$、 $T_r)$的情形。于是 $E_j = V(Y - \epsilon X) \subseteq E$是一个阶为 $d > 1$的单位根 ϵ，由引理 2.1 可得

$$V(Y - \epsilon X) \text{ and } V(Y - \epsilon^{-1} X)$$

是 $E = (\pi,\pi)^{-1}(C')$ 的仅有不可约分支。 E 在 $\overline{(P_r, P_r)}$ 下不变这一事实意味着

$$(P_r, P_r)(V(Y - \epsilon X)) \subset V(Y - \epsilon X) \cup V(Y - \epsilon^{-1} X). \tag{3.12}$$

特别地，方程（3.12）意味着 $\epsilon^r \in \{\epsilon^{-1}, \epsilon\}$。因此

$$d|(r-1) \text{ or } d|(r+1).$$

另一方面，$(\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}, \phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1})(C') \subseteq \Delta$ 意味着

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}(\epsilon^{\pm 1}/x + x/\epsilon^{\pm 1}) = \phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}(1/x + x). \tag{3.13}$$

注意，每个多项式都可以写成切比雪夫多项式的线性组合；特别地，

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}(x) = \sum_{i=1}^{v} a_i T_i(x)$$

对于某些常数 $a_i \in \mathbb{C}$，满足 $v = \deg(\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1})$。对于 $\mu = \epsilon^{\pm 1}$，我们有

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}(\mu/x + x/\mu) = \sum_{i=1}^{v} a_i(\mu^i/x^i + x^i/\mu^i) = \sum_{i=1}^{v} a_i(1/x^i + x^i) \tag{3.14}$$

由方程（3.13），对所有 $x \in \mathbb{C}^*$ 均成立。因此，对于每个满足$a_i \neq 0$的 $i \in \{1$、2、...、$v\}$，我们有 $\mu^i = 1$；即 $d|i$。特别地， $d|v$。因此

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1}(x) = \sum_{j=1}^{v/d} a_{jd} T_j \circ T_d = P \circ T_d$$

对于某个多项式 P。因此，一般而言，存在一个复线性多项式 $l(x) = ux + v$，使得

$$\phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1} \circ l = P \circ T_d,$$

$$l^{-1} \circ h_1 \circ l = \pm T_r$$

其中 $d|(r+1)$ 或 $d|(r-1)$ 和 P是任意多项式。同样，我们可以取

$$h_2 = \phi_k \circ \cdots \circ \phi_{m_2+1} \tag{3.15}$$

其中 h_2 可表示为由 S中的至多 N 个元素构成的复合。此外，方程（3.10）和（3.11）意味着

$$V(Y - \epsilon X) \subset \overline{(\pi, \pi)^{-1}((l, l)^{-1}(C'))} \tag{3.16}$$

其中某个阶为 d 的单位根 $\epsilon \neq 1$ 满足， $C' \in \Sigma$ 有无穷多个 K-点。若 $d = 2$，则在这种情况下，由方程（3.16）

$$C' = V(Y + X - 2v) = (l, l)(\overline{(\pi, \pi)(V(Y + X))}) \in \Sigma.$$

特别地， C' 有无穷多个 K-点等价于 $v \in K$。这就是定理 1.2 的 $3(a)$。若 $d > 2$，则由引理 2.2 和方程（3.16），可得

$$C' = V(Y^2 + (\epsilon + 1/\epsilon - 2)v(X + Y) + (\epsilon - 1/\epsilon)XY + X^2 + (2 - \epsilon - 1/\epsilon)v^2 + (\epsilon - 1/\epsilon)^2 u^2). \tag{3.17}$$

有无穷多个 K 点。由于这是一个圆锥曲线，特别是零亏格曲线，因此它有无穷多个 K 点，当且仅当它至少有一个这样的点。这是定理 1.2 的 $3(b)$。如果进一步有 r 为偶数，那么

$$l \circ \pm T_r \circ l^{-1} \in K[x]$$

意味着 $u^{r-1} \in K$。由引理 2.2 并回忆 $C' \in \Sigma$，我们有

$$u^2, v, \epsilon + 1/\epsilon \in K.$$

因此， $u \in K$。注意，

$$(2u + v, u(\epsilon + 1/\epsilon) + v) \in K^2$$

是 C'中的一个点。因此， C' 具有 K点，当且仅当 $u, v, \epsilon + 1/\epsilon \in K$。

3.3. 定理 1.2 中 $(1) - (3)$ 的充分性。
为此，我们只需验证定理 1.2 的 moreover 陈述。设存在定理 1.2 的陈述中情形 $(1) - (3)$ 所述的 h_1、 h_2 和 l 。其思想是，根据前面的章节，我们已经得到了在 $(h_1$、 $h_1)$ 下的不变曲线；于是，在不变曲线上取 K点的集合，但排除其与 Δ 的交点在 $(h_1$、 $h_1)$ 的某些迭代下的原像，该集合将满足定理 1.2 中的方程 (1.3) 和 (1.4)。我们将具体说明如下。

若满足定理 1.2 中 (1) 或 (2) 的条件，则取

$$C = V(Y - \epsilon X - v(1 - \epsilon))$$

其中 $\epsilon \in K$是一个本原的 d次单位根。根据上一节中的论证，或者直接验证可得

$$(h_1, h_1)(C) \subseteq C.$$

设 j 为一个非负整数，并设

$$Z_1 = (h_1, h_1)^{-j}(C \cap \Delta) \cap C.$$

注意到 Z_1 是一个有限集。因此，取 $(a$、 $b) \in C(K) \backslash Z_1$ ，则

$$h_1^j(a) \neq h_1^j(b),$$
$$(h_1^j(a), h_1^j(b)) \in C$$

并且

$$h_2 \circ h_1^j(a) = h_2 \circ h_1^j(b)$$

根据 h_2的构造。

对于定理 1.2 中的情形 (3) ，设 ϵ 是一个本原 d 次单位根，并设 C 为

$$V(Y^2 + (\epsilon + 1/\epsilon - 2)v(X + Y) + (\epsilon + 1/\epsilon)XY + X^2 + (2 - \epsilon - 1/\epsilon)v^2 + (\epsilon - 1/\epsilon)^2 u^2)$$

如果定理 1.2 中的 $3(b)$ 成立；或者

$$C = V(Y + X - 2v)$$

如果定理 1.2 中的 $3(a)$ 成立。设 j 为一个非负整数，并设

$$Z_1 = (h_1, h_1)^{-j}(C \cap \Delta) \cap C,$$

这是一个有限集。因此，对于任意 K 个点 $(a$、 $b) \in C(K) \backslash Z_1$ ，我们有

$$h_1^j(a) \neq h_1^j(b).$$

回想上一小节中的论证， C 在 $(h_1$、 $h_1)$ 和 $(h_2$、 $h_2)(C) \subset \Delta$ 作用下是不变的。因此

$$h_2 \circ h_1^j(a) = h_2 \circ h_1^j(b).$$

证明到此结束。

4. Effectively Computing N in Theorem 1.2

自然会问，定理 1.2 中的数 N 以及 Z 中的点数是否可以得到显式界。对 $\#Z$ 进行界定，会使我们考察在映射 $(f、f)$（满足 $f \in \langle S \rangle$）下的 $\Delta \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$的原像中出现的亏格为 $\geqslant 2$ 的曲线的 K-点。关于如何仅根据数域 K和曲线的亏格 [3]，一致地界定曲线上 K-点的数量，目前仍是一个开放问题。此外，一般而言，有效地界定给定曲线上的 K-点数量也很困难。因此，界定 $\#Z$并非易事。但我们确实可以得到 N的一个界:

推论 4.1。沿用定理 1.2 的记号。存在一个依赖于 S 的可显式计算的数 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得在定理 1.2 的表述中可以取 $N = N_0$。

证明。利用 [1]，中的多项式分解算法，我们可以将 $S = \{\phi_1, \ldots, \phi_r\}$ 中的元素分解为不可分解多项式的复合，并得到一个数域 L，使得每个不可分解因子都定义在其上。对于每个 $\phi_i \in S$，令 $\phi_i = f_{i,1} \circ \cdots \circ f_{i,r_i}$为这样的分解，其中每个 $f_{i,j}$ 均不可分解。考虑嵌入

$$i_{\mathcal{O}_{(1,1)}} : \mathbb{P}^1_L \times \mathbb{P}^1_L \to \mathbb{P}^3_L$$

$$i_{\mathcal{O}_{(1,1)}}((x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) = (x_1y_1 : x_1y_2 : x_2y_1 : x_2y_2),$$

其中 $(x_1 : \ x_2)$ 和 $(y_1 : \ y_2)$ 是 $\mathbb{P}^1_L \times \mathbb{P}^1_L$的两个因子的齐次坐标。于是，对于每个 $f_{i,j}$，存在一个态射 $F_{i,j} : \ \mathbb{P}^3_L \to \mathbb{P}^3_L$，使得 $i_{\mathcal{O}_{(1,1)}} \circ (f_{i,j}, f_{i,j}) = F_{i,j} \circ i_{\mathcal{O}_{(1,1)}}$。我们考虑高度函数 h 以及子簇的典范高度函数 $\hat{h}_{f_{i,j}}$：先通过$i_{\mathcal{O}_{(1,1)}}$ 将子簇嵌入 $\mathbb{P}^3_L$，再根据定义 4.1 和定义 4.8]中子簇的高度与典范高度函数的定义，得到 $\mathbb{P}^1_L \times \mathbb{P}^1_L$ 中的子簇。令 Σ 为定理 1.2 证明中相同的不可约曲线集合，并注意到我们还证明了，在证明中可取 N 为 $\#\Sigma$。根据定理 1.2 的表述特点，每个 $N \geqslant \#\Sigma$ 均适用。令

$$d_{i,j} = \deg(f_{i,j})$$

并令 $\deg_{\mathcal{O}_{(1,1)}}(W)$ 表示子簇 $W \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 在L 上定义、相对于嵌入 $i_{\mathcal{O}_{(1,1)}}$ 的次数。我们取 $M, C \in \mathbb{R}$ 使得

$$\tilde{C} = \max\left\{\frac{4C(f_{i,j}, 3, 4)}{(d_{i,j} - 1)}\right\}_{i,j}, \tag{4.1}$$

其中 $C(f_{i,j}, 3, 4)$ 是 [5, 定理 1.1]中显式计算出的常数，满足

$$|\hat{h}_{f_{i,j}}(W) - h(W)| \leqslant \frac{4C(f_{i,j}, 3, 4)}{(d_{i,j} - 1)}$$

对于每个定义在 L 上的子簇 $W \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，其 $\deg_{\mathcal{O}_{(1,1)}}(W) \leqslant 4$，且满足 M

- $h(\Delta) < M$

- $\max\left(\frac{d_{i,j}^2-1}{d_{i,j}^2}\right) < (1-\frac{2\tilde{C}}{M})^2$.

˜注意，根据我们的构造，这个 C 满足

$$|\hat{h}_{f_{i,j}}(W) - h(W)| \leqslant \tilde{C} \tag{4.2}$$

对分解中出现的每个 $f_{i,j}$，若它属于某个 $\phi_i \in S$ 的分解，且 $W \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 定义在 L 上，并且 $\deg_{\mathcal{O}_{(1,1)}}(W) \leqslant 4$。我们取 Σ' 为由定义在 L 上的不可约曲线 $W \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 构成的集合，使得

$$\deg_{\mathcal{O}_{(1,1)}}(W) \leqslant 4,$$

and

$$h(W) < M/\left(1 - \frac{2\tilde{C}}{M}\right).$$

于是，根据 [2, 第 5], 节中的论证，我们有 $\Sigma \subseteq \Sigma'$。由于 $\#\Sigma'$ 受一个可显式计算的数 N_0 控制（它是一个由高度和次数均有界的子簇组成的集合，且这些界都可显式计算），因此我们可以取 $N = N_0 \geqslant \#\Sigma$。□

Acknowledgments

感谢 Jason P. Bell 提供有益的讨论。

References

1. D. R. Barton 和 R. Zippel, *Polynomial decomposition algorithms*, 《符号计算杂志》1（1985），第 2 期，159–168。2. J. P. Bell、Y. Matsuzawa 和 M. Satriano, *On dynamical cancellation*, 即将发表于《国际数学研究通知》。3. L. Caporaso, J. Harris 和 B. Mazur, *Uniformity of rational points: an up-date and corrections* **4** 2022 1, 183 201 , 《突尼斯数学杂志》（），第 – 期。4. A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV* 1967 32, , 《高等科学研究所数学出版物》（），第 期。5. B. Hutz, *Good reduction and canonical heights of subvarieties*, 预印本见 arXiv，编号 arxiv:1603.00860（2016）。6. Y. Matsuzawa, S. Meng, T. Shibata 和 D. Zhang, *Non-density of points of small arithmetic degrees* 2002 10976 2020 , 预印本见 arXiv，编号 arxiv: 。（）。7. A. Medvedev 和 T. Scanlon, *Invariant varieties for polynomial dynamical systems*, 《数学年刊》（第 2 辑）179（2014），第 1 期，81–177。8. F. Pakovich, *Polynomial semiconjugacies decompositions of iterations and invariant curves* 5 **17** 2017 4, 1417 1446 , , , 《比萨高等师范学院科学年刊》（）（），第 – 期。9. J. Rivera-Letelier, *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux*, 《Ast´erisque》（2003），第 287 期，xv，147–230。10. I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer Study Edition, Springer-Verlag，柏林—纽约，1977，由 K. A. Hirsch 从俄文译出；《数学科学基础丛书》第 213 卷（1974 年）的修订版。11. Paul Vojta, *Integral points on subvarieties of semiabelian varieties. I*, 《数学发明》126（1996），第 1 期，133–181。

University of Waterloo, Department of Pure Mathematics, Waterloo, On-tario, Canada N2L 3G1*Email address*: x48zhong@uwaterloo.ca