arXiv:2302.01213v2 [math.FA] 4 Feb 2023

[1]

关于贝祖型不等式 Soprunov-Zvavitch 猜想的一项新排除条件

MAUD SZUSTERMAN

Abstract. 2015 年，I. Soprunov 和 A. Zvavitch 展示了如何利用 Bernstein-Khovanskii-Kushnirenko 定理，证明定义在凸体（对）上的某个双线性形式 F_Δ具有非负性。他们与 C. Saroglou 一起证明，在所有多面体中，F_K 的非负性刻画了单形。有人猜想，这一刻画对所有凸体也成立。围绕这一猜想，人们推导出了关于 K （使 F_K具有非负性的）的若干必要条件。我们给出一个以等周比表述的新必要条件，为在某个凸体子类中刻画单形这一（猜想中的）问题进一步推进了一步。

1. 引言

凸体的等周比 $K \subset \mathbb{R}^n$通常定义为 $\frac{|\partial K|_{n-1}^n}{|K|_n^{n-1}}$，或定义为该比值的某个幂。这里 $|K|_n$ 表示 K 的勒贝格测度（其体积），而 $|\partial K|_{n-1}$ 表示其表面积（其拓扑边界的（$n-1$）阶豪斯多夫测度）。凸几何中的一个经典结果——等周不等式指出，欧几里得球使该比值达到最小值，且是唯一的极小体。另一方面，等周比可以任意大。不过请注意，该比值不是仿射不变量。按照 K. Ball 的做法（参见 [Ba, 定理 2]），我们转而考虑以下仿射不变量：

$$Iso(K) = \min_{T \in O(n)} \frac{|\partial(TK)|_{n-1}^n}{|TK|_n^{n-1}},$$

其中最小值取遍正交群 $O(n)$。于是 $Iso(K)$ 有上界。事实上，记 Δ_n 为一个 n-单纯形，Ball 已证明：

$$Iso(K) \leq Iso(\Delta_n),$$

从而得到一个反向等周不等式。此外，[Ba] 证明了，n-单纯形是 $Iso(K)$ 的唯一极大化者。

记 $V_n(L_1, ..., L_n)$ 为 n 个凸体的混合体积，并记 $V_n(K) = V(K[n])$ 为 K的体积。由于 $|\partial K|_{n-1} = nV_n(K[n-1], B_2^n)$，其中 B_2^n表示 $\mathbb{R}^n$中的（单位）l_2-Ball，Ball 的结果可用混合体积的语言改述如下：对于任意凸体$K \subset \mathbb{R}^n$，存在一个椭球 $\mathcal{E}$，使得

$$V_n(K[n-1], \mathcal{E})^n V_n(\Delta_n)^{n-1} \leq V_n(\Delta_n[n-1], \mathcal{E})^{n-1} V_n(K)^{n-1}.$$

I. Soprunov 和 A. Zvavitch 推导出了另一个涉及 Δ_n 的有趣混合体积不等式（参见 [SZ16]），其使用了 Bernstein-Kushnirenko-Khovanskii 定理（参见 [Ber75], [Kho78],[Ku]），以及一个来自实代数几何、称为贝祖不等式的不等式：

$$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{K}^n : \quad V_n(L_1, L_2, \Delta_n[n-2]) V_n(\Delta_n) \leq V_n(L_1, \Delta_n[n-1]) V_n(L_2, \Delta_n[n-1]).$$

这组不等式（在 [SZ16]中称为贝祖不等式）可以看作双线性形式 F_Δ的非负性，其定义如下：

$$F_\Delta(A, B) = V_n(A, \Delta_n[n-1]) V_n(B, \Delta_n[n-1]) - V_n(A, B, \Delta_n[n-2]) V_n(\Delta_n).$$

[1]关键词：贝祖不等式、等周、混合体积、单纯形。2020年数学学科分类：主要分类 52A20；次要分类 52B60。作者在罗得岛州普罗维登斯数学计算与实验研究所参加调和分析与凸性项目期间，得到美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS-1929284）。

对于任意凸体 K，都可以定义类似的双线性形式 F_K。由于 $V_n(TL_1, ..., TL_n) = |det(T)|V_n(L_1, ..., L_n)$（对任意 n元组凸体（L_i）以及任意仿射变换 T均成立），因此 F_K 的非负性是一种仿射不变性质。2018年，Saroglou、Soprunov 和 Zvavitch 刻画了多面体中 n-单形：

定理 **命题 1.** 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 n-多面体。假设 $F_P \geq 0$。则 P 是一个 n-单纯形 .

（此处 $F_P \geq 0$ 表示对于所有 (A, B), $F_P(A, B) \geq 0$，其中 $\mathcal{K}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有凸体的集合。）

有人猜想，这一刻画还适用于所有（n维）凸体，见 [SZ16，猜想 1。2],或 [SSZ2，猜想 5。1]。

猜想 **e 1.** 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸体。假设 $F_K \geq 0$。那么 K 是一个 n-单纯形。

已推导出若干必要条件（ $F_K \geq 0$ 成立所需）： K 不能是可分解的，也不能是弱可分解的（见 [SSZ2，定义5。3] ，该文首次引入了这一概念）；其表面积测度 S_K 的支撑集中不能有正则方向[1]（见 [SSZ2，命题4。2]）； K 其边界上不能有无穷多个面。关于这些条件的证明和评述，参见 [SZ16], [SSZ1], [SSZ2] 。

在本文中，我们给出一个新的必要条件，即：

定理2。 设 K 是一个凸体，且 K 有一个面 F 满足： $Isop(F) > Isop(K)$。那么$F_K \geq 0$ 不成立：存在一对凸体$(A, B) \in (\mathcal{K}^n)^2$，使得 $F_K(A, B) < 0$。

特别地，它可以恢复至多具有有限个面的必要条件（对于 F_K的非负性）。我们将以下问题留作开放问题：定理2是否能够恢复多胞体之间的刻画，即定理1，见下文的问题 1。

致谢。 作者感谢 Artem Zvavitch 将她引入这一主题，并感谢其对本文初稿的反馈。作者还感谢 Evgueni Abakumov 和 Omer Friedland 进行了诸多讨论并给予支持。最后，衷心感谢 Dylan Langharst 指出了 Ball 的反向等周不等式，并提出了许多编辑建议，帮助改进了本文的表述。

2. Preliminaries

Minkowski 的经典结果 [Mink] 表明，对于任意 $m \geq 2$，以及 $\mathbb{R}^n$ 中任意一组 m 元组 $(K_1, ..., K_m)$ 紧凸集，Minkowski 和 $\sum \lambda_i K_i$ 的体积是 $\lambda_i \geq 0$ 的多项式。更准确地说，Minkowski 定理断言，存在系数 $c_a \geq 0$，其由 m 元组 $a = (a_1, ..., a_m) \in \mathbb{N}^m$ 求和为 n（即 $|a| = a_1 + ... + a_m = n$）进行索引；这些系数只依赖于 $(K_1, ..., K_m)$，并且对于任意 $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$:

$$\left|\sum_{i=1}^m \lambda_i K_i\right|_n = \sum_{a\in\mathbb{N}^m, |a|=n} \frac{n!}{a_1!...a_m!}\left(\prod_{j=1}^m \lambda_j^{a_j}\right) c_a =: \sum_{|a|=n} \binom{n}{a} \lambda^a c_a.$$

这些系数称为混合体积，通常记作

$$V_n(K_1[a_1], ..., K_m[a_m]) := c_a,$$

with $a = (a_1, ..., a_m)$，其中 $K_i[a_i]$ 表示 K_i 作为参数出现 a_i 次 .

根据 Minkowski 定理可直接得出，对于任意紧凸集 K_1、K_1'、K_2..... K_n，任意 $x_1 \in \mathbb{R}^n$、任意 $\lambda \geq 0$ 以及任意置换 $\sigma \in \mathcal{S}(n)$:

[1]一个单位向量 u，使得 K^u 为 0 维，其中 $K^u = \{y \in K : \langle y, u\rangle = \max_{z\in K}\langle z, u\rangle\}$

i- $V_n(K_1, ..., K_n) = \frac{1}{n!}\sum_{J\subset[n]}(-1)^{n-|J|}|K_J|_n$ 其中 [2] $K_J = \sum_{i\in J} K_i$ ii- $V_n(K_1 + x_1, K_2, ..., K_n) = V_n(K_1, ..., K_n)$（平移不变性） iii- $V_n(K_1 + \lambda K_1', K_2, ..., K_n) = V_n(K_1, K_2, ..., K_n) + \lambda V_n(K_1', K_2, ..., K_n)$（多重线性） iv- $V_n(K_{\sigma(1)}, ..., K_{\sigma(n)}) = V_n(K_1, ..., K_n)$（关于各自变量的对称性） v- $V_n(.)$ 在 $(\mathcal{K}^n)^n$ 上关于豪斯多夫拓扑连续。

此外，闵可夫斯基证明了 $V_n(.)$ 还具有以下性质：

vi- $V_n(K_1, ..., K_n) \geq 0$（非负性） vii- 若 $K_1 \subset K_1'$，则 $V_n(K_1, K_2, ..., K_n) \leq V_n(K_1', K_2, ..., K_n)$（单调性）。

因此， $V_n(.)$ 是定义在 $(\mathcal{K}^n)^n$ 上的（多线性）泛函。当底层维数（即 $V_n(.)$ 所接受的自变量总数）明确时，我们可以省略下标 n，写作 $V(.)$，而不是 $V_n(.)$。根据混合体积的定义可直接得出， $V_n(K[n]) = |K|_n$。因此，我们可以稍微滥用记号，用 $V_n(K)$，甚至 $V(K)$，代替 $V_n(K[n])$，因为文献中似乎常见这种简写。为避免混淆，我们仅在 K 确实是 n 维的情况下使用这种简写，即当 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非退化凸体时。

设 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ 为单位向量。记 π_u 为到 $u^\perp$ 上的正交投影。若 $u_1, ..., u_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 线性无关的单位向量，则记 π_U 为到 $(u_1, ..., u_k)^\perp$ 上的正交投影。我们还需要混合体积的如下著名性质：

viii-

$$V_n([0,u], K_2, ..., K_n) = \frac{1}{n}V_{n-1}(\pi_u K_2, ..., \pi_u K_n),$$

ix-

$$V_n([0,u_1], ..., [0,u_k], K_{k+1}, ..., K_n) = \frac{k!V_k([0,u_1], ..., [0,u_k])}{n(n-1)...(n-k+1)}V_{n-k}\left(\pi_U K_{k+1}, ..., \pi_U K_n\right).$$

（恒等式 (ix) 可由 (viii) 反复迭代得到。）

设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为紧凸集。其支撑函数 h_K 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，定义为 $h_K(x) = \max_{y\in K}\langle y, x\rangle$，其中 $\langle ., .\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的通常内积。由于对任意 $x \in \mathbb{R}^n$、 $\lambda > 0$ 都有 $h_K(\lambda x) = \lambda h_K(x)$，我们将更多地把 h_K 视为定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数。注意， h_K 刻画了 K，因为 $K = \bigcap_u H^-(u, h_K(u))$，其中 $H^-(u, b) = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, u\rangle \leq b\}$。

固定一个凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ 后，存在唯一的非负测度 S_K 定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上，使得对任意紧凸集 L，均有如下关系：

$$V_n(L, K[n-1]) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_L(u)dS_K(u). \tag{1}$$

例如，当 $K = P$ 是一个多面体时，关于 $V_n(L, P[n-1])$ 的如下积分表示是已知的：

$$V_n(L, P[n-1]) = \frac{1}{n}\sum_{u\in E(P)} h_L(u)|P^u|_{n-1} \tag{2}$$

其中， $E(P) = \{$是 $P\}$ 的外法向量，而 $P^u = P \cap H(u, h_P(u)) = \{y \in P : \langle y, u\rangle = h_P(u)\}$ 是其外法向量为 u 的面。这意味着， S_P 是离散测度 $S_P = \sum_{u\in E(P)} |P^u|_{n-1}\delta_u$，其中 δ_v 表示集中于 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ 的狄拉克测度。

尽管公式 1 可以作为表面积测度 S_K 的定义[3]，但也可以先通过 $S_P = \sum_{u\in E(P)} |P^u|_{n-1}\delta_u$ 定义多胞体的 S_P，然后再定义任意

[2] 按照约定， $K_\emptyset = \emptyset$[3]<style id='6'}知道 $\int h_K d\mu$ 对所有凸体 K，足以刻画 μ，即知道 $\int f d\mu$ 对于球面上的任意连续函数 f，这一点可由引理 1 轻易推出

凸体 K的表面积测度，借助逼近 [4] （见 [Sch，定理 4.1.1，定理 4.2。1]）。在这种情况下，积分公式1对多面体按定义成立，而一般情形下则可由混合体积以及（$L \mapsto S_L$）的连续性推导得出。

回顾一下，若 Ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的闭子集，且 g 是 Ω 上的连续函数，则相对于 $(\Omega\ g)$ 的沃尔夫形是凸体 $W(\Omega\ g) = \bigcap_{u\in\Omega}\{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, u\rangle \leq g(u)\}$。令 S_K为 K 的表面积测度。更具体地，若 K 是凸体，Ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的闭子集，若$supp(S_K) \subset \Omega$，且 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$是连续函数，则我们用 $(W_t)_t = (W(\Omega\ h_K + tf))_t$表示与 $(\Omega\ f)$ 相关联的 K 的沃尔夫形扰动族。注意，存在 $t_0 = t_0(K) < 0$，使得对所有 $t > t_0$ 都有 $V_n(W_t) > 0$。

当 $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$ 时，我们将相应的沃尔夫形记为 $W(g) = W(\mathbb{S}^{n-1}, g)$。例如，参见[SSZ2，定理 1.1]，其中利用沃尔夫形扰动（$\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$）推导出 n-单形是唯一满足 $G_K \geq 0$ 的凸体 K 的刻画，其中 G_K 是定义在 $(\mathcal{K}^n)^n$ 上的多线性形式，其定义为 $G_K(A_1, ..., A_n) = V_n(A_1, K[n-1])V_n(K, A_2, ..., A_n) - V_n(A_1, ..., A_n)V_n(K)$。

以下定理称为 Alexandrov 变分引理。证明参见 [Al1]，另见 [Sch，引理 7.4。3]。

定理 3。假设 K 是一个凸体，$supp(S_K) \subset \Omega$，且 $f \in \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R})$。对于 $t \in \mathbb{R}$，记作$W_t = W(\Omega\ h_K + tf)$。那么$(t \mapsto V_n(W_t))$在0处可微，并且

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_n(W_t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{V_n(W_t) - V_n(K)}{t} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u)dS_K(u), \tag{3}$$

对上述定理的证明稍作修改，即可得到关于（一阶）混合体积的类似结论，具体如下。

引理 *1*（混合体积的亚历山德罗夫变分引理）。设 K 是一个凸体，$supp(S_K) \subset \Omega$，且 $f \in \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R})$。记 $W_t = W(\Omega\ h_K + tf)$，$t \in \mathbb{R}$。记 $V_1(t) = V_n(W_t, K[n-1])$。则 $(t \mapsto V_1(t))$ 在 [5] 处于 *0* 可微，且：

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_1(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{V_1(t) - V_n(K)}{t} = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u)dS_K(u), \tag{4}$$

固定 K，Ω 和 f（如上），并令 $t_0 = \sup\{t < 0 : \ |W_t|_n = 0\} < 0$。记 $(W_t)_t$ 为相应的沃尔夫形扰动族。容易验证，对任意 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，映射 $(t \mapsto h_{W_t}(u)$ 在 $]t_0$ 上是凹的，$+\infty[$。特别地，该映射在$t = 0$处既有左导数也有右导数。事实上，引理 1 在此还可以得出更精确的结论。

引理 2. 设$(W_t)_t$ 是给定凸体 K 相对于$(\Omega\ f)$的沃尔夫形扰动。那么，对于 S_K-几乎处处的 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}h_{W_t}(u)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{h_{W_t}(u) - h_K(u)}{t} = f(u). \tag{5}$$

这个逐点收敛引理的证明留在附录中，另见 [SSZ2，定理 4。1]其中该结论是由 Alexandrov 变分引理（定理 3）推导得出的。下文证明命题 1 时将用到引理 2。

最后，引入以下定义将很方便。

定义 4. 对于 $K \in \mathcal{K}^n$，贝祖常数 定义为

$$b_2(K) = \sup\frac{V_n(L_1, L_2, K[n-2])V_n(K)}{V_n(L_1, K[n-1])V_n(L_2, K[n-1])},$$

其中，上确界取遍凸体对 $(L_1, L_2) \in (\mathcal{K}^n)^2$。

[4]如果（P_k）是逼近 K的一列多胞体，那么测度序列（S_{P_k}）关于弱拓扑是紧的：将 S_K 定义为 S_{P_k}[5]两侧的弱极限

记$F_{K,\ b}(A,\ B):=bV(A,\ K[n-1])\ V(B,\ K[n-1])\ -V(A,\ B,\ K[n-2])\ V(K)$，那么 $b_2(K)$可以等价地定义为满足$F_{K,\ b}\geq 0$的最小 $b\geq 1$。注意，对于每个仿射变换 T，$b_2(TK)=b_2(K)$。

显然，$F_K=F_K$。1. 一个布拉施克选取论证表明，该上确界实际上是一个最大值；特别地，对所有的 $K\in\mathcal{K}^n.$，都有 $b_2(K)<\infty$。事实上，对任意 K，都有[6]，$b_2(K)\leq 2$。注意，$b_2(K)>1$等价于不存在 $F_K\geq 0$（即存在一对(A,B)，使得 $F_K(A,B)<0$）。

3. An excluding condition with isoperimetric ratios

若某个性质 $\mathcal{P}$（例如可分解性）满足：当 K 具有 $\mathcal{P}$时，F_K 不可能为非负（在$(\mathcal{K}^n)^2$的所有元素上），则我们称 $\mathcal{P}$ 为一个排除条件（按照 [SZ16], 的术语，一个凸体 K 不能同时满足 $\mathcal{P}$ 并满足贝祖不等式）。[SSZ1, SSZ2] 表明，弱可分解性（该性质尤其包括不是 n-单纯形的多胞体，或可分解性）是一个排除条件。记 $\mathcal{K}_F$ 为 $\mathcal{K}^n$ 的一个子类，由至少具有一个面的凸体组成：$\mathcal{K}_F$ 在闵可夫斯基加法下封闭，并且包含 n-多胞体这一类。在本节中，我们给出一个新的排除条件，它涉及凸体 $K\in\mathcal{K}_F$。我们将在 $\mathbb{R}^n$ 中并取 $n\geq 3$进行研究。

设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 为非空紧凸集。回顾一下，存在唯一的仿射子空间 H，使得 H属于 $\mathbb{R}^n$，且 H 的（仿射）余维最大。K 的维数定义为该子空间 H的维数。另一种定义方式是：$\dim(K)$为最大的 $k\geq 1$，使得可以在 K中找到 $k+1$ 个仿射无关点。

设 $k\geq 2$，且 $K\in\mathcal{K}^n$ 为 k维。记

$$\mathrm{Isop}(K)=\frac{1}{k}\frac{|\partial K|_{k-1}}{|K|_k}.$$

命题 1. 设 K 为凸体，且 K 有一个面 F 满足：等周比(F) > 等周比(K)。则 $b_2(K)>1$。

证明。假设 K有一个面 $F=K^{u_0}$，使得 $\frac{|\partial F|_{n-2}}{(n-1)|F|_{n-1}}>\frac{|\partial K|_{n-1}}{n|K|_n}$。令

$$c_0:=\frac{|\partial F|_{n-2}|K|_n}{n-1}-\frac{|\partial K|_{n-1}|F|_{n-1}}{n}>0,$$

且 $c=\frac{2}{n-1}|\partial F|_{n-2}|K|_n>2c_0$。固定 $\epsilon>0$，使得 $c_0>\epsilon c$。

由于 $S_K(\{u_0\})=|F|_{n-1}>0$且 $S_K(\mathbb{S}^{n-1})=|\partial K|_{n-1}<+\infty$，可以选取 f一个定义在球面上的非负连续函数，使得 $f(u_0)=\max_{\mathbb{S}^{n-1}}f=1$且 $\int f(u)dS_K(u)<(1+\epsilon)S_K(u_0)=(1+\epsilon)|F|_{n-1}$。固定这样一个正函数 f，并定义 $L_t=W(h_K+tf)$，即相对于函数 h_K+tf的 Wulff 形。可以将 L_t 视为 K的一个扰动版本，且大部分扰动都沿着方向 u_0。

设 $M=H^-_{u_0}\cap B_2^n=\{x\in B_2^n:\ \langle x,u_0\rangle\leq 0\}$ 为一个半欧几里得球，其唯一的面是欧几里得球 $M^{u_0}=\pi_{u_0^\perp}(M)$，且 u_0为外法向量。我们将证明，当 $A=L_t$、$B=M$且 $t>0$足够小时，$F_K(A,\ B)<0$，从而证明 $b_2(K)>1$。

假设 $t\geq 0$。回顾一下，混合表面积测度 $\sigma:=S(M,\ K[n-2]、。)$ 是一个非负测度，并且由于 $f\geq 0, h_K(u)\leq h_{L_t}(u)$，对所有 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$ 均成立。因此：

$$\begin{aligned}V_n(L_t,M,K[n-2])-V_n(M,K[n-1])&=\frac{1}{n}\int(h_{L_t}-h_K)(u)d\sigma(u)\\&\geq\frac{1}{n}(h_{L_t}-h_K)(u_0)\sigma(\{u_0\}).\end{aligned}$$

[6]这称为 Fenchel不等式，参见 [FGM]

由引理 2 可知，对于 $0 < t < t_0(\epsilon)$，$h_{L_t}(u_0) - h_K(u_0) > t(1-\epsilon)f(u_0) = t(1-\epsilon)$。此外，$\sigma(\{u_0\}) = S(M, K[n-2], u_0) = V_{n-1}(M^{u_0}, K^{u_0}[n-2]) = V_{n-1}(B_2^{n-1}, F[n-2]) = \frac{|\partial F|_{n-2}}{n-1}$。

因此，当 $0 < t < t_0(\epsilon)$ 时：

$$V_n(L_t, M, K[n-2]) - V_n(M, K[n-1]) \geq (1-\epsilon)\frac{t}{n(n-1)}|\partial F|_{n-2}.$$

另一方面，对于任意 $t > 0$：

$$\begin{aligned} V_n(L_t, K[n-1]) - V_n(K) &= \frac{1}{n}\int (h_{L_t} - h_K)(u) dS_K(u) \\ &\leq \frac{t}{n}\int f(u) dS_K(u) < (1+\epsilon)\frac{t}{n}|F|_{n-1}. \end{aligned}$$

其中 f 的选择保证了最后一个不等式成立。此外，根据混合体积的单调性：

$$V_n(M, K[n-1]) \leq V_n(B_2^n, K[n-1]) = \frac{1}{n}|\partial K|_{n-1}.$$

现在，通过简单计算即可得出结论。为方便记号，设 $a_2 = V_n(L_t, M, K[n-2])$、$a_0 = V_n(K)$、$a_t = V_n(L_t, L[n-1])$ 和 $a_m = V_n(M, K[n-1])$。我们将证明 $F_K(L_t, M) < 0$，其可改写为 $(a_t - a_0)a_m - (a_2 - a_m)a_0 < 0$。

记 $b_1 = (a_2 - a_m)a_0$ 和 $b_2 = (a_t - a_0)a_m$，使得 $F_K(L_t, M) = b_2 - b_1$。上述上下界给出：$b_1 \geq (1-\epsilon)\frac{t}{n(n-1)}|\partial F|_{n-2}|K|_n$ 和 $b_2 \leq (1+\epsilon)\frac{t}{n^2}|\partial K|_{n-1}|F|_{n-1}$。

由此可得：

$$\begin{aligned} F_K(L_t, M) &\leq \epsilon\frac{t}{n}\left(\frac{|\partial F|_{n-2}|K|_n}{n-1} + \frac{|F|_{n-1}|\partial K|_{n-1}}{n}\right) - \frac{t}{n}\left(\frac{|\partial F|_{n-2}|K|_n}{n-1} - \frac{|F|_{n-1}|\partial K|_{n-1}}{n}\right) \\ &\leq \frac{t}{n}(\epsilon c - c_0) < 0. \end{aligned}$$

□

Re称 $F_K \geq 0$ 为仿射不变性质。另一方面，量 ty

$$\sup_F \frac{\mathrm{Isop}(F)}{\mathrm{Isop}(K)} = \sup_F \frac{n|\partial F|_{n-2}|K|_n}{(n-1)|F|_{n-1}|\partial K|_{n-1}},$$

其中上确界取遍各个面，并非仿射不变。因此，上述命题立即推出以下结论。

命题 2。设 K 是一个凸体，其某个仿射对 $K' = TK$ 有一个面 F' 满足：

$$\frac{|\partial F'|_{n-2}}{(n-1)|F'|_{n-1}} > \frac{|\partial K'|_{n-1}}{n|K'|_n}.$$

那么 $b_2(K) > 1$。

由此可知，如果 $\max_T \sup_{F\text{等周比}(TF)\text{等周比}(TK)} > 1$，其中 max 取遍 $T \in O(n)$，那么 $b_2(K) > 1$. 下面列出具体示例。全文中，我们将用 $|\cdot|$ 表示勒贝格测度（维数为 n、$n-1$ 或 $n-2$）。

a- 单位立方体的体积为 1，其任一面也是如此。因此 $|\partial C_n| = 2n$，且等周比$(C_n) = \frac{|\partial C_n|}{n|C_n|} = 2$。由于它的每个面本身都是一个单位立方体（维数为 $n-1$），它们也满足等周比$(F) = 2$。因此 $\max_{F\text{等周比}(F)\text{等周比}(C)} = 1$。但取 T 仿射变换，使得 $Te_i = e_i$ 对所有 $i \neq 1$ 都成立，且 $Te_1 = 2e_1$。令 $C' = TC$ 为所得的长方体。那么，对于外法向量为 e_1 的那个面，$\frac{|\partial F|}{(n-1)|F|} = 2$，而等周比$(C') = 2 - \frac{1}{n}$。由此可得 $\text{等周比}(F)\text{等周比}(C') > 1$，因此 $b_2(C) = b_2(C') > 1$。

b- 八面体。它有 2^n 个面，每个面都是体积为 $|F|_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$ 的正则单形。令 Δ_k 表示二个边长为 $\sqrt{2}$ 的正则 k-单形（因此 $|\Delta_k|_k = \frac{\sqrt{k+1}}{k!}$）。那么，若 $n \geq 3$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Isop}(F)}{\mathrm{Isop}(O_n)} &= \frac{n|O_n||\partial F|}{(n-1)|\partial O_n||F|} = \frac{n}{n-1}\frac{n|\Delta_{n-2}|}{n!|F|^2} \\ &= \frac{n}{n-1}\frac{(n-1)!^2}{n!(n-2)!}\sqrt{n-1} = \sqrt{n-1} > 1.\end{aligned}$$

c- 圆柱体。设 L 是一个 $(n-1)$ 维凸体。定义 $C = Conv(L, L')$，其中 $L' = L + te_n$ 是与之平行的 L 的一个平移。于是 $|C| = t|L|$，因此：

$$\frac{\mathrm{Isop}(L)}{\mathrm{Isop}(C)} = \frac{n|C||\partial L|}{(n-1)|\partial C||L|} = \frac{tn}{n-1}\frac{|\partial L|}{|\partial C|} = \frac{tn}{n-1}\frac{|\partial L|}{(2|L| + t|\partial L|)}.$$

当 t 足够大时（只要 $t > 2\frac{n}{n-1}(\mathrm{Isop}(L))^{-1}$），这个比值就大于 1。取适当的仿射变换 T，即 $Te_n = t_0 e_n$，以及 $Te_i = e_i\,(i \leq n-1)$，其中 t_0 足够大，由此可得 $b_2(C) = b_2(TC) > 1$，因为 $\mathrm{Isop}(TL)\,\mathrm{Isop}(TC) = \mathrm{Isop}(L)\,\mathrm{Isop}(TC) > 1$。

d- 半球。记 $H_+ = \{x_n \geq 0\}$ 为一个闭半空间，B_2^n 为（单位）欧几里得球，$M = H_+ \cap B_2^n$ 为一个半球。于是 $|M|_n = \kappa_n/2$，$|\partial M|_{n-1} = \frac{n\kappa_n}{2} + \kappa_{n-1}$，因此 $\mathrm{Isop}(M) = 1 + \frac{2\kappa_{n-1}}{n\kappa_n}$。$M$ 的唯一的面是 $F \approx B_2^{n-1}$，因此 $\mathrm{Isop}(F) = 1$。于是 $\mathrm{Isop}(F)\,\mathrm{Isop}(M) < 1$。

尽管如此，仍可找到一个仿射变换 T，使得 等周比(TF) 等周比$(TM) > 1$，这表明$b_2(M) > 1$。事实上，取足够大的 $c > 1$，并令 T 为满足 $Te_n = ce_n$的唯一仿射变换，且对于 $i \leq n-1$，有 $Te_i = e_i$。计算表明，等周比$(TM) = \frac{|\partial\mathcal{E}|}{n|\mathcal{E}|} + \frac{2\kappa_{n-1}}{n\kappa_n c} < \frac{|\partial\mathcal{E}|}{n|\mathcal{E}|} + \frac{1}{c} < 1 =$等周比$(TF) =$等周比$(F)$，从而表明 $b_2(M) = b_2(TM) < 1$.（计算细节见附录）。

在上述四个例子（单位立方体、八面体 O_n、圆柱体、半球）中，我们使用命题1 （或命题 2）来论证 $b_2(K) > 1$。对于这些例子，$b_2(K) > 1$ 这一事实早已为人所知：圆柱体和立方体一样是可分解的；半球的边界上有（许多）正曲率点；而且文献 [SZ15] 已直接证明了 $b_2(O_n) = 2$（通过选取适当的线段）。半球这一例子表明，当 K 处于其 John 位置时，$\max_F$ 等周比(F) 等周比(K) 可能达到最小值。

作为合理性检验，可以计算 $\max_F$等周比(F) 等周比(Δ)，其中 Δ 是一个 n-单纯形，以检验该量是否小于 1。若 $\Delta = T_n$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正则单形，则 $|T_n| = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}$，且 $|\partial T_n| = (n+1)|T_{n-1}| = (n+1)\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$，因此等周比$(T_n) = \sqrt[n]{n(n+1)}$。由此可得，对于正则$n$-单纯形：

$$\max_F \frac{\mathrm{Isop}(F)}{\mathrm{Isop}(T_n)} = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

若 $\Delta_n = Conv(0,\ e_1,\ \ldots\ldots,\ e_n)$，则 $|\Delta_n| = \frac{1}{n!}$，且 $|\partial\Delta_n| = \frac{n}{(n-1)!} + \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$，因此等周比$(\Delta_n) = n + \sqrt{n}$。面有两种：一种是 Δ_{n-1}，另一种是 T_{n-1}。它们的等周比分别为等周比$(T_{n-1}) = \sqrt{n(n-1)}$ 和等周比$(\Delta_{n-1}) = n - 1 + \sqrt{n-1} >$等周比$(T_{n-1})$。因此：

$$\max_F \frac{\mathrm{Isop}(F)}{\mathrm{Isop}(\Delta_n)} = \frac{\mathrm{Isop}(\Delta_{n-1})}{\mathrm{Isop}(\Delta_n)} = \frac{n-1+\sqrt{n-1}}{n+\sqrt{n}}.$$

注意，$\max_F$等周比(F) 等周比$(\Delta_n) >$ $\max_F$等周比(F) 等周比(T_n)。可以猜想，$\max_F$等周比(F) 等周比$(T_n) = \min_T$ $\max_F$等周比(TF) 等周比$(T\Delta_n)$，也就是说，当单纯形处于 John 位置时，（最大）比值最小。

最后，我们指出，命题 2 给出了以下结果的一个更简洁的证明，该结果表明，具有无限多个面的情形是一个排除条件。

定理 5 ([SSZ2]中的定理 4.2。 设 K 是一个具有无限多个面的凸体。那么$b_2(K) > 1$。

证明。 如果 K 有无穷多个面，那么其中无穷多个将满足 Isop$(F) >$ Isop(K)，因此定理 5可由命题 1得出。

设 C 是一个 d 维凸体。那么

$$\mathrm{Isop}(C) = \frac{1}{d}\frac{|\partial C|_{d-1}}{|C|_d} = \frac{1}{d}\frac{|\partial C|_{d-1}}{|C|_d^{d-1/d}}|C|_d^{-1/d} \geq \frac{1}{d}\frac{|\partial B_2^d|_{d-1}}{|B_2^d|_d^{d-1/d}}|C|_d^{-1/d} = \frac{\kappa_d^{1/d}}{|C|_d^{1/d}},$$

其中我们用到了等周不等式，且 κ_d 表示 d 维欧几里得球的体积。

由此可得，当 $|F|_{n-1} \to 0$时，Isop$(F) \to +\infty$。由于凸体的表面积测度有限，因此如果 K 有无穷多个面，那么除有限多个外，其余面都满足 Isop$(F) >$ Isop(K)。□

我们以以下问题结束本章节。

问题 *1*： 设 P 是一个非单纯形的多面体。记 $\mathcal{F}_{n-1}(P)$ 为其面集。是否必有 $\max_{T\in O(n)}\max_{F\in\mathcal{F}_{n-1}(P)}\mathrm{Isop}(F)\,\mathrm{Isop}(P) > 1$?

换言之：（若 P 不是单纯形）是否总存在一个仿射变换 T，使得$P' = TP$至少有一个面 F'满足 Isop(F') >Isop(P')?
如果答案是肯定的，那么这将给出定理 1 的另一种证明（应用命题 1即可）。

4. Appendix

4.1. **Wulff 形状引理。** 我们回顾混合体积的亚历山德罗夫变分引理（引理 1）的陈述，随后给出证明。

引理 3 （亚历山德罗夫变分引理，混合体积版本）。 设 K 是一个凸体，$supp(S_K) \subset \Omega$，且 $f \in \mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R})$。记 $W_t = W(\Omega\ h_K + tf)$， $t \in \mathbb{R}$。记 $V_1(t) = V_n(W_t, K[n-1])$。则 $(t \mapsto V_1(t))$ 在 0[7] 处可微，且：

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_1(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{V_1(t) - V_n(K)}{t} = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u)dS_K(u),$$

设 K 为凸体，Ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 确定[8] K 的闭子集，亦即 $K = \bigcap_{u\in\Omega} H^-(u, h_K(u))$，并设 f 是定义在 Ω 上的连续 [9] 函数。回顾一下，我们将相应的沃尔夫形扰动记作 $W_t = W(\Omega\ h_K + tf)$：若 $t > t_0$，则 W_t 是一个凸体。

沿用 Alexandrov 的记号（参见 [All]），我们将 $V_k(t) = V_n(W_t[k], K[n-k])$ 记作（特别地，$V_0(t) = V_n(K)$ 与 t 无关）。我们分别对 $t \to 0^+$ 和~~$t \to 0^-$~~证明 $\frac{V_1(t)-V_0}{t} \to \frac{1}{n}\int_\Omega f(u)dS_K(u)$。为清晰起见，我们有时会在记号中省略部分依赖关系： V_1 表示 $V_1(t)$，类似地，V_k 表示 $V_k(t)$。

证明。 对于所有 t，注意到（根据 W_t 的定义）$V_1 - V_0 = \frac{1}{n}\int_\Omega (h_{W_t} - h_K)(u)dS_K(u) \leq \frac{t}{n}\int_\Omega f(u)dS_K(u)$。特别地，$\limsup_{t\to 0^+}\frac{V_1(t)-V_0}{t} \leq \frac{1}{n}\int_\Omega f(u)dS_K(u)$。

[7]两边[8]我们遵循 Schneider 的术语 [Sch][9]（f 在 Ω 上可测且有界也同样适用

设 $\lambda_t = V_1(t)/V_0$，且 $\mu_t = V_{n-1}(t)/V_n(t)$（只要$t > t_0$，它们都有良好定义且为正）。那么，利用布伦-闵可夫斯基不等式：

$$(\mathbf{BM1}) \qquad (V_1 - V_0)\sum_{r=0}^{n-1}\lambda_t^r = \frac{V_1^n - V_0^n}{V_0^{n-1}} \geq \frac{V_n V_0^{n-1} - V_0^n}{V_0^{n-1}} = V_n - V_0.$$

对称地：

$$(\mathbf{BM2}) \qquad (V_{n-1} - V_n)\sum_{r=0}^{n-1}\mu_t^r = \frac{V_{n-1}^n - V_n^n}{V_n^{n-1}} \geq \frac{V_0 V_n^{n-1} - V_n^n}{V_n^{n-1}} = V_0 - V_n.$$

因此（结合上述两点）

$$V_1 - V_0 \geq \alpha_t(V_n - V_{n-1}) \quad \text{where } \alpha_t = \frac{\sum_{r=0}^{n-1}\mu_t^r}{\sum_{r=0}^{n-1}\lambda_t^r}.$$

由于 $W_t \to K$ 作为 $t \to 0$（对于豪斯多夫距离），V_n（。）的连续性意味着 $V_k(t) \to V_0$（对于所有 $k \leq n$），而（弱）连续性 $(L \mapsto S_L)$ 意味着 $S_{W_t} \to S_K$（对于球面上拉东测度的弱拓扑）。因此 $\alpha_t \to 1$，而

$$\begin{aligned}\frac{V_n - V_{n-1}}{t} &= \frac{1}{n}\int_\Omega \frac{(h_{W_t} - h_K)(u)}{t} dS_{W_t}(u)\\ &= \frac{1}{n}\int_\Omega f(u) dS_{W_t}(u) \to \frac{1}{n}\int_\Omega f(u) dS_K(u)\end{aligned}$$

其中我们使用了对于 S_{W_t}-几乎处处的 $u \in \Omega$，有 $h_{W_t}(u) = h_K(u) + tf(u)$。因此，

$$\liminf_{t\to 0^+}\frac{V_1 - V_0}{t} \geq \left(\lim_{t\to 0^+}\alpha_t\right)\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{V_n - V_{n-1}}{t}\right) = \frac{1}{n}\int_\Omega f(u) dS_K(u).$$

类似地，对于所有 $t_0 < t < 0$：$\frac{V_1 - V_0}{t} \geq \frac{1}{n}\int_\Omega f(u) dS_K(u)$，而结合 **BM1** 和 **BM2** 可得

$$\limsup_{t\to 0^+}\frac{V_1 - V_0}{t} \leq \left(\lim_{t\to 0^-}\alpha_t\right)\left(\lim_{t\to 0^-}\frac{V_n - V_{n-1}}{t}\right) = \frac{1}{n}\int_\Omega f(u) dS_K(u).$$

□

我们回顾（几乎必然）逐点收敛引理 2 的陈述（我们在命题 1的证明中用到了该引理），并在此给出一个简单的证明。

引理4. 设 $(W_t)_t$ 是给定凸体 K相对于(Ω, f)的沃尔夫形扰动。那么，对于 S_K-几乎处处的 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$：

$$(6) \qquad \left.\frac{\mathrm{d}h_{W_t}(u)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{h_{W_t}(u) - h_K(u)}{t} = f(u).$$

证明. 首先，回顾一下，对于所有 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，映射 $(t \mapsto h_{W_t}(u))$ 在 $]t_0$ 上 $+\infty[$，是凹的，其中$t_0 = t_0(K, \Omega, f) = \inf\{t \in \mathbb{R} : |W_t|_n > 0\}$。

事实上，设 $t_0 < t_1 < t_2$，并设 $\lambda \in (0,1)$。设 $x \in (1-\lambda)W_{t_1} + \lambda W_{t_2}$，并设 $u \in \Omega$。设$x_i \in W_{t_i}$，$i = 1,2$，使得 $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$。记 $t_\lambda := (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2$. 那么

$$\langle x, u\rangle = (1-\lambda)\langle x_1, u\rangle + \lambda\langle x_2, u\rangle \leq (1-\lambda)h_{W_{t_1}}(u) + \lambda h_{W_{t_2}}(u) \leq h_K(u) + t_\lambda f(u).$$

由于这对任意 $u \in \Omega$ 都成立，因此可得 $(1-\lambda)W_{t_1} + \lambda W_{t_2} \subset W_{t_\lambda}$，由此可直接推出，对于任意固定的 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，$(t \mapsto h_{W_t}(u))$ 在定义域 $]t_0$，$+\infty[$ 上是凹函数。

特别地，对于任意 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，映射 $(t \mapsto h_{W_t}(u))$ 在 $t = 0$的某个邻域上是凹的，这意味着 $\lim_{t\to 0^+}$（$\frac{h_{W_t} - h_K)(u)}{t}$ 和 $\lim_{t\to 0^-}$ $\frac{(h_{W_t} - h_K)(u)}{t}$ 均存在，对任意 ~~$u \in \mathbb{S}^{n-1}$~~皆如此。现在我们说明如何由引理 1推出右导数和左导数（在 $t = 0$处）一致，且这对 S_K-几乎处处的 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$成立。

接下来我们证明，对于 S_K-几乎处处的 u，$\lim_{t\to 0^+} (h_{W_t}-h_K)(u)_t = f(u)$ 成立（在 0 左侧的证明类似）。令 $l_d(u) = \lim_{t\to 0^+} (h_{W_t}-h_K)(u)\ t$，根据凹性，该值对所有 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ 都有定义。注意到（根据 W_t 的定义），对所有 u，$l_d(u) \le f(u)$。令 $U_\epsilon = \{u \in \mathbb{S}^{n-1}\colon\ l_d(u) < f(u) - \epsilon\}$。只需证明 $S_K(U_\epsilon) = 0$（对任意 $\epsilon > 0$）。

由法图引理，

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to 0^+} \int_{U_\epsilon} \frac{(h_{W_t}-h_K)(u)}{t} dS_K(u) &\le \int_{U_\epsilon} \limsup_{t\to 0^+} \frac{(h_{W_t}-h_K)(u)}{t} dS_K(u)\\ &= \int_{U_\epsilon} l_d(u) dS_K(u)\\ &\le \int_{U_\epsilon} f(u) dS_K(u) - \epsilon S_K(U_\epsilon).\end{aligned}$$

因此：

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{V_1(t)-V_0}{t} \le \frac{1}{n}\int_\Omega f(u) dS_K(u) - \frac{\epsilon}{n} S_K(U_\epsilon).$$

由引理 1 可知 $S_K(U_\epsilon) = 0$。

类似地，令 $l_g(u) = \lim_{t\to 0^-} (h_{W_t}-h_K)(u)\ t$，$u \in \mathbb{S}^{n-1}$，使得对所有 $u \in \Omega$，$l_g(u) \ge f(u)$，并令 $V_\epsilon = \{u \in \mathbb{S}^{n-1}\colon\ l_g(u) > f(u) + \epsilon\}$。固定 $x_0 \in int(K)$，并令 $K' = K - x_0$。若 $|t|$ 足够小，则 $(1 - C|t|)K'$ 的一个平移包含于 W_t中，且 $C = (\max_u |f|)/(\min_u h_{K'}) > 0$。

换言之，对任意 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，以及任意 $t < 0$（其中 $|t|$ 足够小），$(h_{W_t}-h_K)(u)_t \le C h_{K'}(u)$。因此，由控制收敛定理，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^-} \frac{V_1 - V_0}{t} &= \frac{1}{n}\int_{V_\epsilon} l_g(u) dS_K(u) + \frac{1}{n}\int_{\Omega\setminus V_\epsilon} l_g(u) dS_K(u)\\ &\ge \frac{1}{n}\int_\Omega f(u) dS_K(u) + \frac{\epsilon}{n} S_K(V_\epsilon).\end{aligned}$$

因此，$S_K(V_\epsilon) = 0$，由引理 1。由此可得 $l_g(u) = f(u)$ 对于 S_K几乎处处的 $u \in \Omega$。 □

4.2. **命题 1 适用的例子：计算。** 我们回顾命题 2之后列出的一个例子。

设 M 是半个欧几里得球：$M = B_2^n \cap H_+$，其中 $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ x_n \ge 0\}$。那么

$$\mathrm{Isop}(M) = \frac{|\partial M|}{n|M|} = \frac{2|\partial M|}{n\kappa_n} = \frac{n\kappa_n}{n\kappa_n} + \frac{2\kappa_{n-1}}{n\kappa_n} = 1 + \frac{1}{nW_n} > 1.$$

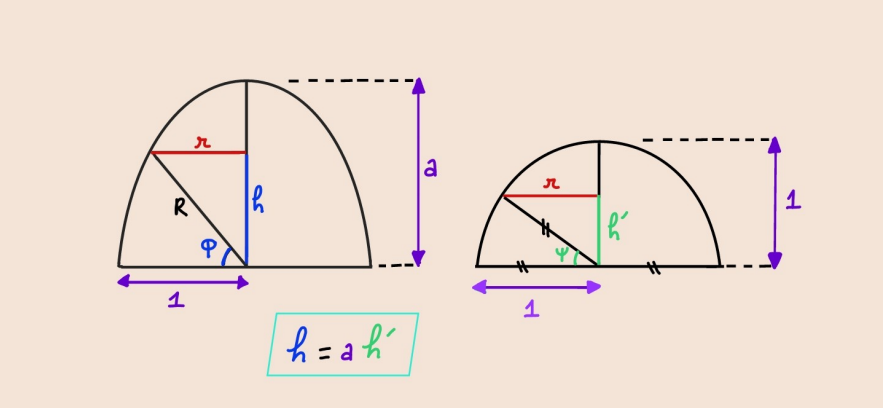
其中 $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(\phi))^n d\phi$（回忆一下 $\kappa_n = 2\kappa_{n-1}W_n$）。

设 $T = T_a$ 是满足以下条件的线性映射：当 $i \le n-1$ 时，$Te_i = e_i$，且 $Te_n = ae_n$。那么 $TB_2^n = \mathcal{E}_a$ 是一个体积为 $a\kappa_n$的椭球。此外，还可以计算其表面积：

$$|\partial \mathcal{E}_a| = 2(n-1)\kappa_{n-1}\int_0^{\pi/2} R_\phi^{n-1}(\cos(\phi))^{n-2} d\phi = 2(n-1)\kappa_{n-1}\int_0^{\pi/2} r_\phi^{n-1}\frac{d\phi}{\cos(\phi)}.$$

曲面 $\partial\mathcal{E}_a$ 的方程为 $r^2 + \frac{h^2}{a^2} = 1$，其中 $h = x_n$，且 $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$。该曲面可根据 $r = R\cos(\phi) \in [0,1]$ 分层，并可将 r 写作 $r =:$ 对于某个$\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$，$\cos(\psi)$。于是 $\tan^2(\psi) = \frac{1-r^2}{r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{h^2}{r^2} = \frac{1}{a^2}\tan^2(\phi)$，因此 ~~（求导后）~~ $(1+\tan^2(\psi))d\psi = \frac{1}{a}(1+\tan^2(\phi))d\phi = \frac{1}{a}(1 + a^2\tan^2(\psi))d\phi$，即 $d\phi = a\ \frac{1+\tan^2(\psi)}{1+a^2\tan^2(\psi)}\ d\psi = a_{1+\ a^2-1}\frac{1}{(\ )\ \sin^2(\psi)}\ d\psi$。

Also, $\cos(\phi) = \frac{r}{R} = \frac{r}{(a^2-(a^2-1)r^2)^{1/2}} = \frac{\cos(\psi)}{(1+(a^2-1)\sin^2(\psi))^{1/2}}$.



将 ϕ 中的参数化改为 ψ 中的参数化，可得曲面表面积：

$$|\partial\mathcal{E}_a| = 2(n-1)\kappa_{n-1}\int_0^{\pi/2}(\cos(\psi))^{n-2}\frac{a}{(1+(a^2-1)\sin^2(\psi))^{1/2}}d\psi.$$

当 $a=1$ 时，可得到 $|\partial\mathcal{E}_1| = 2(n-1)\kappa_{n-1}W_{n-2} = 2\kappa_{n-1}nW_n = n\kappa_n$。当 $a>1$ 时，可得到 $|\partial\mathcal{E}_a| = \lambda(an\kappa_n)$，其中 $\lambda\in(a^{-1},1)$ 通过以下方式定义：

$$\lambda := \int_0^{\pi/2}(\cos(\psi))^{n-2}\frac{1}{(1+(a^2-1)\sin^2(\psi))^{1/2}}d\psi\left(\int_0^{\pi/2}(\cos(\psi))^{n-2}d\psi\right)^{-1}.$$

因此 TM，半球 M 在 T 下的像是一个半椭球，其“等周比”由下式给出：

$$\mathrm{Isop}(TM) = \frac{|\partial\mathcal{E}_a|}{n|\mathcal{E}_a|} + \frac{2\kappa_{n-1}}{n|\mathcal{E}_a|} = \lambda + \frac{1}{anW_n}.$$

唯一的面 F满足 $TM\mathrm{Isop}(F) = 1$：因此 TM满足命题 2的条件，只要 a 满足：$\lambda < 1 - \frac{1}{anW_n}$。

如果 $n=2$且 $a\geq 3$，那么 $1-\frac{1}{anW_n} = 1-\frac{2}{a\pi} > \frac{3}{4}$，并且容易验证 $\lambda < \frac{3}{4}$，因此 $\mathrm{Isop}(TM) < 1$ 成立。由于 $(\psi\mapsto(1+(a^2-1)\sin^2(\psi)))$ 随 $\psi\in[0,\pi/2]$ 增大而增大，可以对 $\lambda=\lambda_a$ 作上界估计：

$$\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+(a^2-1)\sin^2(\psi))^{1/2}}d\psi < \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{a^2+1}\right)^{1/2}\right) < \frac{3}{4}\quad(\text{if } a\geq 3).$$

如果 $n\geq 3$，那么我们使用估计 $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq W_n^2 < \frac{\pi}{2n}$，从而得到

$$nW_n > \sqrt{\frac{\pi n}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} > \sqrt{\frac{\pi n}{2}}\left(1-\frac{1}{2n}\right) \geq \frac{5}{6}\sqrt{\frac{\pi n}{2}} > \sqrt{n},$$

因此 $1-\frac{1}{anW_n} > 1-\frac{1}{a\sqrt{n}}$。

可以验证，若 $a\geq 4n\sqrt{n}$，则 $\lambda\equiv\lambda_a < 1-\frac{1}{a\sqrt{n}}$。事实上，令 $w_\psi := \cos(\psi)^{n-2}$，与二维情形类似，可通过拆分积分来给 λ 求得上界：

$$\begin{aligned}\lambda W_{n-2} &= \int_0^{\pi/2n}(1+(a^2-1)\sin^2(\psi))^{-1/2}w_\psi d\psi + \int_{\pi/2n}^{\pi/2}(1+(a^2-1)\sin^2(\psi))^{-1/2}w_\psi d\psi \\ &< \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\frac{n}{(n^2+a^2-1)^{1/2}}\end{aligned}$$

利用 $w_\psi = (\cos\psi)^{n-2} \le 1$。于是可得，当 $a > n$ 足够大时：

$$\lambda W_{n-2} < \left(1 - \frac{1}{a\sqrt{n}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2n}} < \left(1 - \frac{1}{a\sqrt{n}}\right) W_{n-2}$$

从而等周比$(TM) = \lambda + \frac{1}{anW_n} < \lambda + \frac{1}{a\sqrt{n}} < 1 =$等周比$(F)$，正如所需。

References

[Al1] A. D. Aleksandrov, *Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern III. Die Erweiterung zweier Lehrsätze Minkowskis über die konvexen Polyeder auf die beliebigen konvexen Körper*（俄文，德文摘要）Mat. Sb., 3(45), 1, (1938), 27–46. [Al2] A. D. Aleksandrov, *A.D. Alexandrov, Selected works. Part I. Selected scientific papers*。由 P. S. V. Naidu 从俄文翻译。Yu. G. Reshetnyak 和 S. S. Kutateladze 编订并撰写序言。苏联数学经典，4。Gordon and Breach Publishers，阿姆斯特丹，1996。x+322 页 [AFO] S. Artstein-Avidan, D. Florentin, Y. Ostrover *Remarks about mixed discriminants and volumes*，《当代数学通讯》。16 (2014)，第 2 期，1350031。[Ba] K. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality* 2 44 1991 2, 。J. London 351 359 Math. Soc. ( ) ( )，第 – 期。[Ber75] D. N. Bernstein, *The number of roots of a system of equations*，Funct. Anal. and Appl. 9 (2), (1975) 183–185. [Bo1] J. Bourgain, *On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math., Vol. 108, No. 6, (1986), 1467–1476. [Bo2] J. Bourgain, *Geometry of Banach spaces and harmonic analysis*，国际数学家大会论文集（伯克利，1986），Amer. Math. Soc., (1987), 871–878. [BLYZ1] K. J. Böröczky, E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *The log-Brunn–Minkowski inequality*，Adv. Math. 231 (2012), 1974–1997. [BLYZ2] K. J. Böröczky, E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *The logarithmic Minkowski problem*，J. Amer. Math. Soc. 26 (2013), 831–852. [BGL] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, D-M. Liakopoulos, *Uniform cover inequalities for the volume of coordinate sections and projections of convex bodies* 18, 3, 2018 345 354 , Adv. Geo m., Vol. No. ( ) – . [D] V.I, Diskant, *Bounds for the discrepancy between convex bodies in terms of the isoperimetric difference*（俄文）。Sibirskii Mat. Zh. (1972). [F] W. Fulton, *Intersection Theory*，第 2 版，Springer，1998。[FGM] M. Fradelizi, A. Giannopoulos, M. Meyer, *Some inequalities about mixed volumes*，Israel J. Math. 135 (2003), 157–179. [Ga] R. J. Gardner, *The Brunn–Minkowski inequality*，Bull. Am. Math. Soc. 39 (2002), 355–405. [GHP] A. Giannopoulos, M. Hartzoulaki and G. Paouris, *On a local version of the Aleksandrov-Fenchel inequality for the quermassintegrals of a convex body* 130 2002 2403 2412 , Proc. Amer. Math. Soc. ( ), – . [HLYZ] C. Haberl, E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *The even Orlicz Minkowski problem*, Adv. Math. 224 (2010), 2485–2510. [HuLYZ] Y. Huang, E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang, *Geometric measures in the dual Brunn-Minkowski theory and their associated Minkowski problems* 216 2016 2, 325 388 , Acta Math. ( ), 第 – 期。[KaKh] K. Kaveh, A. G. Khovanskii, *Algebraic equations and convex bodies*，《分析、几何与拓扑展望》，263–282，Progr. Math., 296, Birkh¨auser/Springer，纽约，2012。[Kho78] A. G. Khovanskii, *Newton polyhedra and the genus of complete intersections*，Funct. Anal. Appl., 12 (1978), pp. 38–46. [Khov] A. G. Khovanskii, *Newton polyhedron, Hilbert polynomial, and sums of finite sets*，Funct. Andal. Appl., 26 (1992), pp. 276–281. [Kl] B. Klartag, *Isotropic constants and Mahler volumes*。Adv. Math. 330 (2018), 74–108. [KM] A. V. Kolesnikov, E. Milman, *Local L^p-Brunn-Minkowski inequalities for $p < 1$* 2017 1711 01089 , ( ) arXiv: . [ ] math.FA[Ku] A. G. Kushnirenko, *Newton polyhedra and Bezout's theorem*（俄文）Funkcional. Anal. i Prilozhen. 10, no. 3, (1976) 82–83. [Kus76] A. G. Kushnirenko, *Polyedres de Newton et nombres de Milnor.*, Invent. Math., 32(1):1–31, 1976. [Las] M. Lassak, *Approximation of convex bodies by inscribed simplices of maximum volume.* Beitr. Algebra Geom. 52 (2011), no. 2, 389–394. [Lu] E. Lutwak, *The Brunn-Minkowski-Firey theory. I. Mixed volumes and the Minkowski problem*，J. Differential Geom. 38 (1993), no. 1, 131–150. [Mink] H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen*，第二卷。B.G. Teubner，1911。[RZ] D. Ryabogin and A. Zvavitch, *Analytic methods in convex geometry*，IM PAN 讲义，第 2 卷，华沙 2014。[Sa] Saroglou, *On the equivalence between two problems of asymmetry on convex bodies*，Discrete Comput. Geom. 54 (2015), no. 3, 573–585.

[SSZ1] Saroglou, I. Soprunov and A. Zvavitch, *Characterization of simplices via the Bezout inequality for mixed volumes* 144 2016 12, 5333 5340 , Proc. Amer. Math. Soc., ( ), no. – . [SSZ2] Saroglou, I. Soprunov and A. Zvavitch, *Wulff shapes and a characterization of simplices via a Bezout type inequality* 357 2019 106789 , Advances in Math., ( ), . [Sch] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*。第二扩充版。《数学及其应用百科全书》第 151 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014。[SW] F. Schuster, M. Weberndorfer, *Volume inequalities for asymmetric Wulff shapes,* J. Differential Geom. 92 (2012), no. 2, 263–283. [SZ16] I. Soprunov, A. Zvavitch, *Bezout Inequality for Mixed volumes*，国际数学研究通知，2016，第 23 期，7230–7252。[Wu] G. Wulff, *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystal lflächen*，Z. Kristal-logr. 34 (1901), 449–530. [Xi] Jian Xiao, *Bézout type inequality in convex geometry*，国际数学研究通知，国际数学研究通知，16, (2019), 4950–4965。

(MAUD SZUSTERMAN) Department of Mathematics, Universite de Paris, France*Email address*: maud.szusterman@imj-prg.fr