arXiv:2302.01227v1 [math.OC] 2 Feb 2023

Th全点对活力最大化（VIMAX）问题 m

Alice Paul alice paul@brown.edu,
布朗大学

Susan E. Martonosi
martonosi@g.hmc.edu，哈维穆德学院

2023年2月3日

摘要

传统的网络阻断问题着重于从网络中移除顶点或边，以断开网络中的路径或延长路径；网络导流问题则旨在移除顶点或边，使流经指定关键顶点或边的流量重新改道。我们提出了全点对活力最大化问题（*VIMAX*），在该问题中，删除顶点旨在使流经关键顶点的流量最大化，并以该顶点的全点对活力进行衡量。该问题假设，对于结构已知但顶点的物理位置可能未知的网络（例如社交网络），要定位某个人员或资产，可能需要能够检测到有足够流量（例如通信或金融交易）经过网络中相应顶点。我们将 VIMAX 表述为混合整数规划，并证明该问题是 NP 难。我们比较了混合整数规划和模拟退火启发式算法在真实与模拟数据集上的表现，并着重说明通过子集移除可能实现的关键顶点活力提升。我们还给出了图论结果，可用于缩小需要考虑移除的顶点范围。

1 引言

网络破坏在基础设施设计 [9, 48, 13], 能源传输 [10, 37], 鲁棒网络设计 [18, 22, 24], 生物系统 [59], 非法贸易网络[4], 和反恐 [7, 62]等领域具有重要应用。这方面的大量研究主要聚焦于三类问题：1）网络流阻断，即攻击者通过阻断顶点或边来降低网络的流量容量，使源点与汇点之间的最大流最小化（例如， [3, 6, 8, 44, 45, 61, 73, 23]）；2）最短路径阻断，即攻击者阻断顶点或边，使源点与汇点之间的最短路径最大化（例如， [39, 56, 75]）；以及3）网络转流，即确定一个最小成本的极小割集，使其被移除后，网络中的任意源汇路径都被迫经过一组特定的关键边（例如， [14, 19, 20]）。

本文关注顶点（等价地，边）活力这一概念，它衡量从图 [5, 42]中移除该顶点（或边）后，源点与汇点之间最大流的减少量。具有高活力的顶点是实现从源点到汇点高流量所必需的，因此，在达到最大流时，会有大量流经该顶点

。我们将顶点 v 的全点对活力 定义为：从图中移除顶点 v 后，所有节点对之间（不包括顶点 v本身）的最大流减少量之和。

我们提出以下组合优化问题，即全点对活力最大化问题（*VIMAX*）：给定一个连通的有向一般容量图 $G = (V, E)$，其顶点集为V，边集为 E，以及一个关注的关键顶点 k，找出一个顶点子集 S，将其从图 G 中移除后，使 k的全点对活力最大化。该问题最早由第二作者在一篇未发表的手稿中提出，针对的是无向单位容量图这一特定情形；在这种图中，一对顶点之间的最大流代表这对顶点之间边不相交路径的数量 [47]。

VIMAX 可视为一种有别于上述三种形式的网络破坏问题。秘密组织（如恐怖组织或贩毒集团）往往沿着较长且难以追踪的路径进行通信，这表明效率与隐秘性之间存在权衡，可能导致基于路径长度的攻击失效 [4, 26, 50]。此外，我们利用了这样一种可能性：某些类型网络中的关键顶点若被迫变得更加活跃，便可能暴露弱点。（例如，奥萨马·本·拉登以及后来的艾曼·扎瓦希里，都是基地组织恐怖网络的领导人，但他们多年来一直藏匿行踪，直到美国情报部门最终确定了他们的地理位置。）如果我们假设经过某个顶点的通信、资金或违禁品流量，可以作为该成员被情报人员发现概率的指标，并且组织成员之间的通信量与路径容量成正比，那么 VIMAX 就能识别出组织中哪些成员一旦被移除，便会使流经一位重要但隐匿的领导人的通信量最大化。与网络导流问题不同，我们不要求剩余图中的所有流都必须经过该顶点（事实上，在网络导流问题中，移除顶点或边后，经过关键顶点的流量可能会很小）；相反，我们要使经由该顶点的总流量最大化。

本文从计算和理论两个角度研究 VIMAX。第2节将本文置于现有文献的背景下进行阐述。第3节定义 VIMAX，将其表示为混合整数线性规划，并证明该问题是 NP难。第4节介绍一种用于求解 VIMAX 的模拟退火启发式算法。第5节比较这两种方法的计算性能。第6节介绍 VIMAX 的数学性质，这些性质可用于简化计算。第7节探讨本文未来的拓展方向，并作出总结。

2 文献综述

我们首先将文献中常见的网络阻断与转移问题，与本文将要介绍的 VIMAX 问题进行对比。随后讨论活力与其他图中心性指标之间的关系。最后介绍可能有助于解决活力最大化问题的优化方法研究。

2.1 网络阻断与转移

网络阻断模型研究的是如何从图中移除边或顶点，以阻止资源流经网络的物流问题。这一问题在军事

行动以及打击毒品或人口贩运方面均有应用 [41, 67, 75]。复杂网络阻断的分析通常侧重于断开网络、增加最短路径的长度、削减整体流量容量，或降低网络中路径的吸引力 [1, 25, 12, 27, 28, 29, 30, 33, 36, 38, 49, 55, 56, 66, 67, 74, 75]。最著名的模型涉及最大流网络阻断及其变体 [3, 8, 16, 44, 48, 57, 60, 61, 73]。值得注意的是， [73]提出了“对偶化并结合”（dualize-and-combine）方法，该方法在网络阻断文献中被广泛采用，本文也使用了这一方法。Smith和Song全面综述了网络阻断领域的文献，并指出，他们所综述的论文普遍采用的假设，使阻断问题成为斯塔克尔伯格博弈的一种特殊情形 [64]。

网络阻断的一个相关问题是网络改道问题，其中攻击者试图以最小成本阻断一组边（等价地，顶点），使得所有源汇流都必须经过预先指定的一组“转移”边或顶点中的至少一个。该问题最早由 [20]提出。其应用包括军事行动：迫使对手将资源转移经过一条防守严密的目标边可能是有利的；以及信息网络：通信经过一条单一边，从而更容易受到监控 [43]。

Cullenbine等人也研究了网络改道问题 [19]。他们给出了有向图的 NP 完全性证明、 $s-t$ 平面图的多项式时间求解算法、优于 [20], 中所给模型的混合整数线性规划模型，以及用于强化该模型的有效不等式。

Lee等人考察了网络改道问题的一个扩展，称为多流网络改道问题，其中同时考虑许多源汇对 [43]。他们定义了一个 S 可能源节点和 T 可能汇节点的集合。他们阻断一组最小成本的边，使网络中的所有剩余流都经过该转移边。他们将该问题表述为混合整数线性规划，并将其性能与标准组合式 Benders 分解和分支割平面法组合式 Benders 分解进行比较。不失一般性，顶点阻断可以表述为弧阻断：在修改后的图中，原图中的每个顶点 v 由两个顶点 v_i 和 v_o 表示，二者之间有一条弧（v_i， v_o）。原图中的每条弧（u， v）随后转换为修改后图中的对应弧（u_o， v_i）。在修改后的图中阻断该弧，等价于阻断原图中的相应顶点。对于无向图，首先将图转换为有向图，然后再进行上述转换。

[43] 有几个方面值得注意，因为它们与我们的工作相关。首先，从图中移除阻断集后，无法保证经过转移边的总流量特别大。在本文提出的活力最大化问题中，我们要确定一个顶点阻断集，使经过目标顶点的流量最大化，从而确保被监控的目标具有充足的流量。尽管我们的建模没有为每个被阻断的顶点设定成本，但删除子集过大并不利，因为这必然会导致经过目标顶点的流量下降。其次，我们采用了他们的测试方案，考察我们开发的算法在网格网络（平面网络）、随机$G_{n,m}$ 图 [40], 以及毒品贩运网络 [52]上的表现。

与网络阻断与转移相关的另一个问题是网络韧性和攻击检测。Sharkey等人综述了关于四种韧性的文献：鲁棒性、恢复力、可扩展性和适应性，重点关注网络鲁棒性以及网络在遭受攻击后恢复的能力 [63]。Dahan等人研究了如何

以便在网络中策略性地布置传感器来检测网络攻击 [21]。

2.2 活力与其他图中心性度量

活力是图中心性指标的几种类型之一。中心性指标用于量化网络中特定顶点的重要性。
Wasserman 和 Faust 的著作详细探讨了源自社会学领域的社会网络分析，并讨论了许多广为人知的中心性指标，包括度、中介中心性和接近中心性 [70]。Rasti 和 Vogiatzis 的综述介绍了计算生物学中常用的中心性指标 [58]。

顶点的度是其邻居的数量。顶点的中介中心性是所有顶点对之间、且经过该顶点的最短路径数量。接近中心性衡量图中该顶点与所有其他顶点之间最短路径长度的平均值。Vogiatzis等提出了混合整数规划公式，用于识别图中度、中介中心性或接近中心性最大的顶点群组 [69]。

Stephenson 和 Zelen 最早提出了信息中心性，并于 20 世纪 80 年代将其应用于一个由感染艾滋病的男性组成的网络 [65]。他们是最早开发一种中心性度量的人之一，这种度量不要求信息必须沿最短路径流动这一假设。他们运用统计估计理论，将信号沿路径传递的信息量定义为信号方差的倒数。假设路径上连续各边产生的噪声彼此独立，则每条路径上的方差具有可加性，信号的总方差会随着路径长度增加。随后，他们利用这一假设评估任意一对顶点之间传递的总信息量（s，t）。据此，他们将顶点 i 的中心性定义为从该顶点 i 到所有其他顶点所传递信息量倒数之和的调和平均数。他们指出：“信息……可能会被有意地引导经过许多中间节点，以便以测地路径无法捕捉的方式‘隐藏’或‘屏蔽’信息。”恐怖主义网络及其他秘密网络似乎也是如此 [11]。

中心性指标可用于指导网络破坏方法。Cavallaro等 表明，针对中介中心性较高的顶点，能够有效减小基于西西里黑手党网络的图中最大连通分量的规模 [12]。Grassi等 发现，中介中心性及其变体可用于识别犯罪网络中的领导人 [32]。

此外，还存在与网络流相关的中心性度量， [42]对此进行了综述。具体而言，对于图上的任意实值函数，Kosch¨utzki等 将顶点（或边）的活力 定义为包含和不包含该顶点（或边）时函数值之差。当该函数表示一对顶点之间的最大流时，图中顶点的活力 k （等价地，边 u）相对于一 $s-t$对顶点定义为：从图中移除顶点 k （等价地，边 u）后， s 与 t 之间最大流的减少量。此外，当考察网络中相对于给定顶点、所有可能 $s-t$ 顶点对之间最大流的同一减少量时，我们得到Freeman等 所定义的网络流中心性 [26], ，或者称为本文所说的全点对活力 。

最关键边 或组件是指移除后能使网络中的最大流减少最多的边或组件。在网络中识别最关键边是一个由来已久的问题，可追溯至 [15], [72], 和 [60]的研究。近期研究包括 [2], 的工作，他们采用防御者—攻击者—防御者模型，构建数学规划以最大化韧性。他们还列举了最关键边问题的若干应用领域，包括电力系统、供应链网络、电信系统和交通运输。

Ausiello等人提出了一种计算所有边活力的方法（相对于给定的 s和 t），只需进行 2($n-1$) 次最大流计算，而不是逐一计算每条边的活力所需的 m 次计算 [5]。在已发现的有关活力的文献中，没有研究关注此处提出的问题：确定一组移除顶点，以最大化关键顶点的活力（VIMAX）。

3 优化框架

我们将展示如何将 VIMAX 表述为整数线性规划。首先介绍本文将用到的术语。

3.1 定义

我们考虑一个连通有向图 $G=(V,\ E)$，其顶点集为 V，边集为 E，并包含一个我们关注的关键顶点 k。每条边 $(i,\ j)$ 都有一个容量 u_{ij}，表示可沿该边输送的最大流量。图中有一个关键顶点 k，例如，它可以代表组织中一名重要却难以捉摸的参与者。活力最大化问题（*VIMAX*）旨在找出一个顶点子集，将其从图中移除 G，从而使 k 的全点对活力最大化。因此，目标是确定一组要从图中移除的顶点，使关键顶点 k 尽可能“活跃”，方法是迫使流经过该顶点。

对于任意源点—汇点 s-t 对，令 $z_{st}(G)$ 表示图 G 中的最大 s-t 流的值。我们将 $Z_k(G)$ 称为图 关于顶点 k 的流量容量，即 G 中既不以 k 为起点也不以其为终点的所有点对最大流。因此，

$$Z_k(G)=\sum_{\substack{s,t\in V\setminus\{k\}\\ s\neq t}} z_{st}(G). \tag{1}$$

k的全点对活力，$\mathcal{L}_k(G)$，等于图相对于 k 减去相对于 k 的流量容量，即移除顶点 k 后得到的子图 $G\setminus\{k\}$ 的流量容量：

$$\mathcal{L}_k(G)=Z_k(G)-Z_k(G\setminus\{k\}). \tag{2}$$

为了衡量移除顶点子集对关键顶点活力的影响，我们将子集 S 对关键顶点 k 的活力效应 定义为移除子集 S所导致的关键顶点 k活力变化：$\mathcal{L}_k(G\setminus S)-\mathcal{L}_k(G)$。如果 S 对 k 的活力效应为正，那么从图中移除子集 S 会使更多的流经过 k，这是我们期望的效果。

本研究旨在找出能够使活力效应最大化的顶点子集 S，这等价于最大化$\mathcal{L}_k(G\setminus S)$的值。我们将全点对活力最大化问题 (VIMAX)正式定义为

$$max_{S\subseteq V}\ \mathcal{L}_k(G\setminus S). \tag{3}$$

由表达式 (1) 和 (2) 可知，移除任意子集 S 对 k的活力效应并不一定为正。当从图中移除子集 S 时，总体流量容量 $Z_k(G\setminus S)$ 通常会下降，而不会上升，因为 S对流的贡献被移除了。要使移除子集 S对关键顶点k产生正向活力效应，剩余的流必须以足够大的流量经由 k 重新路由，以抵消

网络中的流量总体下降。不过，正如我们将在第5.3节中所展示的，识别出最优或近似最优的删除子集，往往能显著提高关键顶点的活力。

3.2 混合整数线性规划公式

为了将 VIMAX 表述为一个优化问题，我们首先构建一个线性规划，用于求解任意图 G中 k 的活力。然后，我们将该公式扩展为一个混合整数规划公式，以寻找要从图中移除的顶点最优子集 S，从而最大化所得图中 k 的活力。

3.2.1 活力最大流子问题。

按照 [39], 的方法，我们对问题 $Z_k(G\backslash\{k\})$取对偶，将其转换为一个具有相同最优目标函数值的最小割问题，并将其嵌入$\mathcal{L}_k(G)$的公式中。由于对偶问题是一个最小化问题，目标函数将正确对应于活力。令 $V' = V \setminus \{k\}$，并令 E' 为移除顶点 k 及其关联边后保留的边集合，我们得到以下用于求解$\mathcal{L}_k(G)$的线性规划：

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} v_{s,t} - \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} \sum_{(i,j)\in E'} u_{i,j} y_{i,j,s,t} \\
&\text{subject to} \\
&\qquad \sum_{j:(i,j)\in E} x_{i,j,s,t} - \sum_{j':(j',i)\in E} x_{j',i,s,t} = \begin{cases} v_{s,t} & \text{if } i = s \\ -v_{s,t} & \text{if } i = t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i \in V, \forall s,t \in V' \\
&\qquad x_{i,j,s,t} \le u_{i,j}, \forall (i,j) \in E, \forall s,t \in V' \\
&\qquad y_{i,s,t} - y_{j,s,t} + y_{i,j,s,t} \ge 0, \forall (i,j) \in E', \forall s,t \in V' \\
&\qquad -y_{s,s,t} + y_{t,s,t} \ge 1, \forall s,t \in V' \\
&\qquad v_{s,t} \ge 0, \forall s,t \in V' \\
&\qquad x_{i,j,s,t} \ge 0, \forall (i,j) \in E, \forall s,t \in V' \\
&\qquad y_{i,j,s,t} \ge 0, \forall (i,j) \in E', \forall s,t \in V' \\
&\qquad y_{i,s,t} \text{ unrestricted}, \forall i,s,t \in V'.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

变量 $x_{i、\ j、\ s、\ t}$ 和 $v_{s、\ t}$ 是问题 Z_k（G）的最大流公式中的原变量。$x_{i、\ j、\ s、\ t}$ 表示沿边（i，j）推送的最优流量，$v_{s、\ t}$ 表示最优流值。变量 $y_{i、\ s、\ t}$ 和 $y_{i、\ j、\ s、\ t}$ 是问题 Z_k（$G \setminus \{k\}$）的最小割公式中的对偶变量。我们可以将 $y_{i、\ s、\ t}$ 解释为顶点势：对于每条边（i，j），如果 $y_{i、\ s、\ t} < y_{j、\ s、\ t}$，也就是说，在计算最小割时，顶点 i 的势低于顶点 j，那么边（i，j）必定跨越该割。在这种情况下，对偶变量 $y_{i、\ j、\ s、\ t} = 1$，边容量 $u_{i、\ j}$ 则计入目标函数。

3.2.2 VIMAX：选择最优删除子集。

现在，我们已将 k 在 G 中的活力表示为线性规划，可以回到 VIMAX。VIMAX 用于找出一个顶点子集 S，移除该子集可使 k 的活力最大化。给定集合 S，将公式 4 中的线性规划应用于图 $G\backslash S$，即可求得 $\mathcal{L}_k$（$G \backslash S$）。我们必须修改上述线性规划，以选出一个子集 S，使目标函数 $\mathcal{L}_k$（$G\backslash S$）。最大化。

我们可以通过为每个顶点 i 创建二元变量 z_i 来对此进行形式化：当顶点i 仍保留在图中时，$z_i = 1$；当顶点 i 从图中移除时（即，i 包含在子集 S中），$z_i = 0$。我们还为每条边定义变量 $w_{i,\ j}$，用于指示移除 S 和/或 k后，边（$i,\ j$）是否仍保留在图中。我们定义连接约束，使得当顶点 i 和 j 均保留在图中（即，$z_i = z_j = 1$）时，$w_{i,\ j}$ 必须等于 1；而当顶点 i 或 j 中任意一个被选中删除（即，$z_i = 0$ 或 $z_j = 0$，或两者同时成立）时，$w_{i,\ j}$ 必须等于 0。（由于$w_{i,\ j}$ 与二元变量 z_i之间存在这种关系，因此无需明确声明，$w_{i,\ j}$ 实际上也受到约束，成为二元变量。）

对于公式 4，我们对原始原问题和对偶问题的约束作如下调整。我们约束原问题的流变量 $x_{i,\ j,\ s,\ t} \leq u_{i,\ j} w_{i,\ j}$，以反映边（$i,\ j$）是否仍保留在图中。我们还修改对偶势约束，使得当顶点 i 和 j 处于相同势值（与之前一样），或边（$i,\ j$）不再存在于图中时，$y_{i,\ j,\ s,\ t} = 0$。

引入变量 z_i 和 $w_{i,\ j}$，并修改活力约束后，我们现在可以写出完整的混合整数线性规划。给定一个图 $G = (V, E)$、一个关键顶点 k以及删除集的最大大小 m，以下混合整数线性规划可用于求解 VIMAX。

$$\text{Maximize} \quad \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} v_{s,t} - \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} \sum_{(i,j)\in E'} u_{i,j} y_{i,j,s,t}$$

subject to

$$\sum_{i\in V} z_i \geq n - m$$
$$z_k = 1$$
$$w_{i,j} \leq z_i, \forall (i,j) \in E$$
$$w_{i,j} \leq z_j, \forall (i,j) \in E$$
$$w_{i,j} \geq z_i + z_j - 1, \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{i,j,s,t} - \sum_{j':(j',i)\in E} x_{j',i,s,t} = \begin{cases} v_{s,t} & \text{if } i = s \\ -v_{s,t} & \text{if } i = t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i \in V, \forall s,t \in V' \tag{5}$$

$$x_{i,j,s,t} \leq u_{i,j} w_{i,j}, \forall (i,j) \in E, \forall s,t \in V'$$
$$y_{i,s,t} - y_{j,s,t} + y_{i,j,s,t} \geq -(1 - w_{i,j}), \forall (i,j) \in E', \forall s,t \in V'$$
$$-y_{s,s,t} + y_{t,s,t} \geq 1, \forall s,t \in V'$$

$$z_i \text{ binary}, \forall i \in V$$
$$w_{i,j} \geq 0, \forall (i,j) \in E$$
$$v_{s,t} \geq 0, \forall s,t \in V'$$
$$x_{i,j,s,t} \geq 0, \forall (i,j) \in E, \forall s,t \in V'$$
$$y_{i,j,s,t} \geq 0, \forall (i,j) \in E', \forall s,t \in V'$$
$$y_{i,s,t} \text{ unrestricted}, \forall i,s,t \in V'$$

将 [53] 的方法扩展到一般容量和有向图后，我们可以证明 VIMAX 是 NP难的。对于 $m = 1$ 且至多只能移除一个顶点的情况，我们可以通过穷举求解上述 MIP：令 $z_i = 0$，并针对所有 $i \in V'$令其他 $z_j = 1$。

定理1。 全点对活力最大化问题是*NP*难的。

证明。 其证明见附录A。

□

4 模拟退火启发式算法

作为使用混合整数规划精确求解 VIMAX 的替代方案，我们设计了一种模拟退火启发式算法。每次模拟退火迭代都从一个候选删除子集开始。第一次迭代时，该子集为空；之后的迭代则以在前一次迭代结束时找到的最佳解作为初始解。每个解的目标函数值根据从图中移除该子集时关键顶点的活力计算。每次调用该算法都包含一个退火阶段 和一个 局部搜索阶段。

在退火阶段，通过切换单个顶点或一对顶点是否纳入候选删除

子集，且需满足约束 $|S| \leq m$，从而得到当前解的邻近解。如果邻近解使目标函数值有所改善，则会自动被接受并纳入考量。如果邻近解的目标函数值更差，则会以由温度函数 T决定的接受概率取代当前解。温度较高时（即迭代初期），即使邻近解的目标函数值低于当前最优解的目标函数值，它仍有较高的概率被接受。这有助于广泛探索解空间。在后续迭代中，温度函数逐渐冷却，降低了考虑目标函数值较低的解的可能性。这有助于开发解空间中有希望的区域。

给定温度 T，当目前找到的最佳目标函数值为 $e_{max} > e_0$ 时，接受目标函数值为 e_0 的解的概率由 $P = e^{-(e_{max}-e_0)/T}$ 给出。初始温度 T 的选择应确保：目标函数值至少达到初始目标函数值 90% 的解，其接受概率至少为 95%。在后续迭代中，T 按 0.95 的乘法因子逐渐冷却。

经过指定次数的退火迭代后，对目前找到的最佳解执行一次局部搜索：依次切换每个顶点的状态，以确定将其纳入或排除是否会改善目标函数值。随后返回找到的最佳解。

我们使用全点对最大流问题的 Gomory-Hu 树实现，以便快速计算启发式算法遇到的每个修改后的图中关键顶点的活力 [31, 34]。出于第6节所讨论的数学原因，我们可以在任何删除子集中排除叶节点。正如我们在第5.3节所讨论的，这两项改进使模拟退火启发式算法即使在较大的实例上也能运行得非常快。

5 计算分析

我们现在对混合整数规划公式和模拟退火启发式算法在各种数据集上的表现进行比较。按照 [43], 的方法，我们生成平面网格网络。我们还测试了这些方法在随机网络 [40] 以及真实毒品贩运网络 [52]上的表现。我们首先介绍这些数据集和所使用的计算平台，然后呈现结果。代码和数据文件可在我们的 GitHub 仓库中获取：`https://github.com/alicepaul/network_interdiction`。

5.1 数据

5.1.1 网格网络。

我们以与 [43] 类似的方式生成网格网络。我们生成边长为 $M \times M$ 、M 从五到八变化的正方形网格。这类图的边密度为 $M^4/(M+1)$，从 $M = 5$ 时的 13.3% 到 $M = 8$ 时的 5.6%。在每个网格上，我们从 1 到 M 的整数中独立、均匀地随机生成边容量。对于每种情况，我们同样考虑两种情形，测试最大移除子集大小为 $m = 1$ 或 $m = M$ （即 $\sqrt{|V|}$）。对于每种网格大小与移除子集大小的组合，我们生成三个试验图。每次试验中，均从所有顶点中均匀随机地选取一个关键顶点。

顶点	Role
1, 2, 3	哥伦比亚头目
5	信使
6	运营管理
7	任务分配
14	技术运营
16	安全

表1：角　　色可卡因贩运网络中重要顶点的角色，Natarajan等 [52]　　.

5.1.2 随机网络。

随机 $G_{n,\ m}$ 图由顶点数 $n = |V|$ 和边数 $m = |E|$ [40] 参数化。每个图都是从具有 n 个节点和 m 条边的所有连通图中随机抽取的。我们在顶点数和边数与上述网格网络相同的图上测试我们的方法： $|V| = \{25，36，49，64\}$ 个顶点，边数分别为 $\{40，60，84，112\}$。在每个图上，我们从 1 到 $\sqrt{|V|}$ 的整数中独立、均匀地随机生成边容量。对于每种情况，我们同样考虑两种情形，测试最大移除子集大小为 $m = 1$ 或 $m = \sqrt{|V|}$。对于每种图大小与移除子集大小的组合，我们生成三个试验图。每次试验中，选取中介中心性最高的顶点作为关键顶点。

5.1.3 毒品贩运网络。

最后，我们在一个真实世界的秘密可卡因贩运团伙上测试模型。该团伙于 1996 [52]在纽约市被起诉。这个网络由28人组成，在两个月期间，通过电话窃听截获了他们之间的151次电话通话。如果数据集中至少记录了一次 i 与 j 之间的通话，则这两人之间存在一条边。该图中共有40条边，对应的边密度为10.6%。我们可以考虑该网络的单位容量版本，也可以考虑一般容量版本，其中边 $i - j$ 的容量等于数据中记录的双方通话次数。加权网络如图1所示，线条宽度与两名行动人员之间被电话窃听截获的通话次数成正比。根据Natarajan等人的说法，网络中的一些人员已知担任表1所述的角色。我们测试最大移除子集大小为 $m = 1$ 或$m = 5 \approx \sqrt{|V|}$。由于哥伦比亚头目（顶点1、2和3）是对组织运作至关重要的高级领导人，因此我们将这些顶点视为关键顶点，并尝试以此最大化活力。

5.2 计算框架

在配备 3 GHz 六核英特尔酷睿 i5 处理器和 16 GB 内存的计算机上测试了混合整数规划和模拟退火启发式算法的性能。单顶点 VIMAX 和 VIMAX 混合整数规划实例使用 Python 3.9.6 运行，通过 CPLEX Python API 调用 CPLEX 求解器，每个实例的计算时间均限制为两小时。模拟退火启发式算法也使用 Python 编写，每个测试实例的迭代次数限制为 10,000 次。初步结果使用极端科学与工程发现环境 (XSEDE) 超级计算机收集， [68]计算时间最长为五小时，但结果并无显著差异。此外

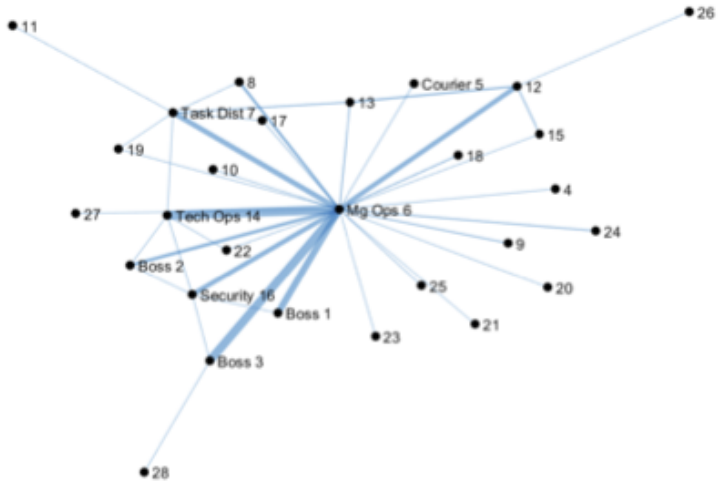


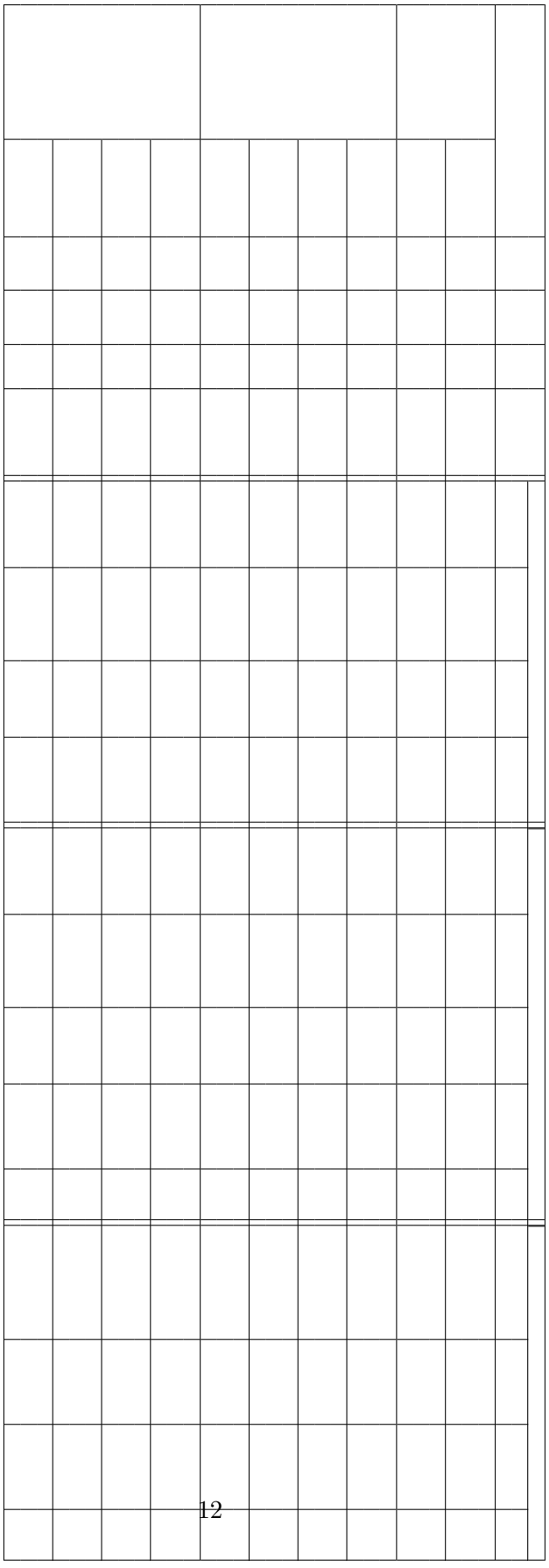
图1：Natarajan等人的可卡因贩运网络。线宽与行动人员 [52] 各对之间被电话窃听的通话次数成正比。

除了通用 VIMAX 混合整数规划外，还测试了单顶点移除混合整数规划（单顶点 VIMAX）。由于单顶点移除模拟退火的结果实际上与暴力搜索等效，因此未予报告。

5.3 结果

表2呈现了所有已完成试验的结果。前五列说明图类型、顶点数（$|V|$）、边数（$|E|$），以及对于允许多重移除的一般 VIMAX 问题，删除子集的最大允许大小 m。第六列给出原图中未移除任何顶点时关键顶点的初始活力。第七至第十列给出单顶点移除混合整数规划（单顶点 VIMAX）的性能结果；第十一至第十五列给出多重移除混合整数规划（VIMAX）的结果；第十六至第十九列则给出多重移除模拟退火启发式算法的结果。（单顶点 VIMAX 无需使用模拟退火，因为可以通过依次测试移除每个顶点来求解。）对于这三种方法，表中给出了在时间或迭代次数限制内找到的最佳活力、可用时的混合整数规划间隙、该方法找到的最佳活力相对于完整图中关键顶点初始活力的增幅百分比，以及以秒为单位的运行时间。对于多重移除方法，还给出了找到的最佳删除子集大小（$|S|$）。因达到时间限制而终止的混合整数规划实例，其时间报告为 $'-'$。

首先，我们注意到表2提供了一个概念验证，表明有可能



通过子集移除提高关键顶点的活力（有时提升幅度显著）。在所有混合整数规划于时间限制内求得最优解的网格网络实例中，移除单个顶点使活力提高了 42%–200%；在随机图实例中，最高提高了 82%。在药物网络中，移除单个顶点未能提高关键顶点的活力。允许多重移除时，模拟退火能够找到删除子集，使关键顶点的活力最高提高了 1,373%。

允许多重移除的完整 VIMAX 混合整数规划比单顶点移除的混合整数规划更难求解，这一点并不令人意外。在网格网络和随机网络中，对于节点数至少为 $n = 36$ 的所有实例，混合整数规划都未能在两小时的时间限制内终止。在 $n = 36$ 随机网络以及 7×7 和 8×8 网格网络实例中，单顶点移除的混合整数规划也未能在时间限制内终止，但更多情况下返回了改进解。允许多重移除的混合整数规划存在较大的混合整数规划间隙，表明未能找到改进的整数解。

对于多个顶点移除，模拟退火启发式算法仅用单次移除混合整数规划所需时间的一小部分，就得到了出色的解。在多个移除混合整数规划达到时间限制的大型实例中，模拟退火启发式算法找到的解明显优于混合整数规划当前最优解。对于多个移除混合整数规划求得最优解的实例，模拟退火找到的解通常也是最优的，且始终接近最优。

通过移除顶点来最大化活力的效果，似乎取决于网络结构和关键顶点的选择。药物网络的顶点数和边数与随机网络和网格网络的25节点实例大致相同，但在这些试验中选取的关键顶点（对应于图1中的顶点 Boss 1、Boss 2 和 Boss 3）不太适合用于活力最大化。药物网络中有大量叶节点，而网格网络中则没有。正如我们将在第6节看到的，没有至少两条通往关键顶点的顶点不相交路径的顶点（例如叶节点），绝不会出现在最优移除子集中。

最后，在这些实验中，我们将删除子集的大小限制为最多 m 个顶点。限制删除子集大小的原因是缩小问题的解空间，从而降低问题的复杂度。这个决定是合理的，因为我们知道，移除过多顶点会导致网络中的总体流量下降，以至于关键顶点的活力无法增加。因此，一个重要的问题是，m 取何值才能有效缩小解空间，同时又不影响所找到解的质量？我们没有这个问题的明确答案。不过，我们发现，在许多实验中，各种方法确定的最佳删除子集大小都严格小于$m \approx \sqrt{|V|}$，这表明，对于本文所考虑的图的规模和类型，选择 m 是合理的。

6 利用活力的结构性质

到目前为止，我们已经确立，删除子集可以大幅提高关键顶点的活力。然而，即使对于规模适中的图，将该问题准确地表述为混合整数规划（MIP）来求解，在计算上也是难以处理的。幸运的是，模拟退火是一种颇具吸引力的替代方法，其求得的解质量非常高，而所需时间则远少于混合整数规划（MIP）。本节将探讨能够刻画在子集移除优化方法中可被忽略的顶点的数学性质。我们将说明如何利用这些性质，简化运行 VIMAX 所针对的图。

6.1 识别降低活力的顶点

为降低优化公式的复杂性，我们转而识别会导致某个顶点对关键顶点产生活力-降低 作用的条件。这样，我们就可以在任何候选删除子集中忽略此类顶点，并缩小 VIMAX 问题的解空间。

我们的第一个观察是，环的存在是移除一个顶点能够提高关键顶点活力的必要条件。叶节点的活力始终等于 0，因此，任何会使 k 成为叶节点的子集移除，也无法提高 k 的活力。由此可推知，如果 k 的邻居集合为 $N(k)$，且移除了 k 的邻居中超过 $|N(k)|-2$，那么对 k 的活力效应将不为正。

我们可以进一步推广这一结论。当从 i 到 k 不存在至少两条顶点不相交路径时，任何包含 i 的删除子集对 k 的活力效应，都不会大于不包含 i 的相同子集；这一结论由以下定理[1]给出：

定理 2。设 G 是一个图，其关键顶点为 k；设 i 是一个顶点，且不存在至少两条从 i 出发并以 k 为终点的顶点不相交路径。设 S 是任意一个包含 i 的顶点子集，并设 $T = S \setminus \{i\}$。那么，$L_k(G \setminus S) \leq L_k(G \setminus T)$。因此，$T$ 对 k 的活力效应至少与 S 一样大。

证明。其证明可见附录 B。 □

简单来说，i 与 k 之间仅存在一条顶点不相交路径，这意味着 i 和 k不在同一个环上。因此，移除 i 后，之前经过i 的任何 $s-t$ 路径都无法改道至经过 k的任何替代路径。

请注意，找出与 k 之间不存在至少两条顶点不相交路径的顶点，在计算上很简单。我们可以在相关图 $\hat{}\, G$ 上求解所有 $u-k$ 对之间的最大流问题：将每个顶点 u 替换为一对由一条单位容量边连接的顶点（u，u'）。对于原图中的每条有向边 $i-j$，我们在修改后的图中加入有向边（i'，j）。利用 Gomory-Hu 树，我们可以在 $O(|V|^3\sqrt{|E|})$ 时间内完成求解[31, 34]。在 $\hat{}G$ 中，与 $\hat{}G$ 里的顶点 u' 对应且最大流为一的任何顶点 u，在原图中都不存在与 k 之间至少两条顶点不相交路径，因此可以从任何删除子集中忽略。我们将这类顶点的集合记为 Q。图中应保留 Q 中的每个顶点，不将其视为待移除对象。

这些性质表明，在寻找用于移除的活力最大化子集时，我们可以忽略所有包含以下顶点的子集：

- 位于 Q 中的顶点（即它们与 k 不共享一个环）；
- 超过 $|N(k)|-2$ 的邻居。

对图进行预处理以识别 $N(k)$ 和 Q 后，我们可以在混合整数规划公式中添加以下约束：

[1]对于一种特殊情形，即图中所有边的容量均为单位容量 [47] 的无向图，还存在一个更一般的割定理。在这种图中，最大 $s-t$ 流的值等于图中 s 与 t 之间边不相交路径的数量。在这种情况下，关键顶点k 与待移除候选顶点 i之间的割的大小，以及该割边界上顶点之间的连通性，两者之间的关系揭示了移除 i对 k 产生的活力效应。读者还可参阅 [54]，了解该定理如何在单位容量无向图中实际应用。

图类型		$\|V\|$	$\|E\|$	$\|Q\|$	$\|\hat{V}\|$	$\|\hat{E}\|$	% 降 Time	% 增 Obj
药物网络	单位容量	28	40	14	18	30	93.19	0.00
		28	40	14	18	30	94.68	0.00
		28	40	13	18	30	91.83	0.00
	一般容量	28	40	14	20	32	89.40	0.00
		28	40	14	20	32	92.91	0.00
		28	40	13	20	32	90.98	0.00
随机	$n = 25$	25	40	23	12	11	99.98	0.00
		25	40	1	25	40	62.92	0.00
		25	40	6	24	38	23.98	0.00
	$n = 36$	36	60	33	5	4	99.99	0.00
		36	60	4	35	59	-	13.56
		36	60	8	35	59	-	0.00
	$n = 49$	49	84	6	48	83	-	0.00
		49	84	7	47	82	-	0.00
		49	84	7	48	83	-	0.00
	$n = 64$	64	112	8	64	112	-	0.00
		64	112	10	63	111	-	0.00
		64	112	10	63	111	-	0.00

表3：通过识别降低活力的顶点并采用图简化，VIMAX实例关键规模参数的改进。 $|Q|$ 是无法通过至少两条顶点不相交路径到达 k 的顶点数量；VIMAX可以忽略 Q 中的顶点（见第6.1节）。 $|\hat{V}|$ 和 $|\hat{E}|$ 分别是应用第6.2节的图简化方法后，约简图中的顶点数和边数。最后两列报告了与表2所示的多重移除混合整数规划结果相比，图简化方法的时间减少百分比和最佳目标函数值增加百分比。标记为“-”的条目表示混合整数规划在两小时内未能终止的实例。

$$\begin{aligned} z_i &= 1, \forall i \in Q \\ \sum_{i \in N(k)} z_i &\geq 2 \end{aligned} \tag{6}$$

尽管上述约束为 VIMAX 提供了更紧凑的表述，但这些约束预期带来的收益可能有限。表3展示了第 5 节测试所用的每个图中，不存在至少两条通往 k的顶点不相交路径的顶点数量 $|Q|$ 。

鉴于网格网络的结构，这一结果并不令人意外：其中所有顶点都至少有两条到达 k的顶点不相交路径；因此，这些顶点都不能排除在考虑范围之外，故未列入表3。相比之下，稀疏毒品贩运网络中近一半的顶点没有至少两条到达关键顶点的顶点不相交路径；这显著减少了可供移除的候选顶点数量，但 VIMAX 在这个本就规模较小的网络上仍然易于处理。因此，仅凭这一标准不太可能使此前无法处理的混合整数规划实例变得可处理。

6.2 简化图

由于 VIMAX 的规模会随顶点数量迅速增长，我们可以将原图简化为一个顶点更少的活力保持图，从而提高 VIMAX 的计算可处理性。为此，我们大量依赖定理 2。

假设顶点 v 将图断开为两个连通分量 T_1 和 T_2，且 $k \in T_1$。那么，根据定理 2，最优解不会包含 T_2 中的任何顶点。此外，T_2 内各顶点对之间的最大流不会对 k 的活力效应产生影响。因此，要在简化图中保留对 k 的活力效应，只需保留关于所有满足 $s \in T_1$ 且 $t \in T_2$ 的顶点对 s, t 之间最大流的信息。

对于所有顶点 $t \in T_2$，我们在 t 和 v 之间创建一条边，其容量等于 t 和 v 之间的最大流。这会替换 T_2 中各顶点之间此前的所有边。这会影响全点对最大流问题的值，但不会影响任何子集 $S \subset T_1$ 对 k 的活力效应。此外，如果某个顶点子集 $T' \subseteq T_2$ 中的所有顶点具有相同的新容量值，我们就将 T' 合并为一个权重为 $|T'|$ 的顶点。在计算图中任意一对顶点 s 和 t 之间的最大流时，我们将流乘以这些顶点权重的乘积，以反映这种简化。

按照上一节所述的过程，我们可以找出这样一个顶点子集$Q \subseteq V \setminus \{k\}$，其中的顶点到 k没有至少两条顶点不相交路径。给定一个顶点 $i \in Q$，我们找到一条从 i 到 k 的路径，并沿着 i到 k 的路径，找到第一个至少有两条顶点不相交路径通向 k的顶点 v。移除顶点 v 会使图不连通。因此，我们按照上述简化过程，将相应 T_2中的所有顶点（包括 i）标记为已处理。然后，我们反复找出 Q 中任何尚未处理的顶点，以进一步简化图。在处理完 Q 中的所有顶点后，这些顶点都会成为新简化图中的带权叶节点，其权重取决于合并的顶点数量。所有其他顶点的权重均保持为一。

图 2 展示了这一简化过程的一个示例，其中两个连通分量已完成简化。请注意，顶点 4、6 和 7 已合并为一个权重为三的顶点。此外，顶点 5 和 8 已合并为一个权重为二的顶点。

如上所述，简化图中所有属于同一组件的顶点对之间的最大流，永远不会对 k的活力效应产生贡献。因此，我们通过移除相应的变量和约束，在优化问题中忽略这些顶点对。因此，我们只需检查是否保留了所有不属于同一组件的顶点对之间的最大流。由于权重相乘，这一点自然成立。例如，在图 2 中，对于顶点 4 和顶点 1 之间的最大流，我们乘以权重 4，从而涵盖顶点 4、6、7 与顶点 1 之间的所有路径。因此，我们的优化问题仍能在简化图中找到一个最优子集，使其在原图中也是最优的。顶点对的数量从 45 减少到 19，因为不包括 k的顶点数量从 10 减少到 7，而且在简化图中，我们可以忽略顶点 9 和 10 之间以及顶点 4 和 8 之间的流。

表3展示了应用图简化算法后，各测试图中的顶点数（$|\hat{V}|$）和边数（$|\hat{E}|$）。简化后规模明显缩小的图类型只有毒品贩运网络和较小的随机图。我们认为，与较稀疏的网络相比，网格网络等高度连通的图不太适合采用这种简化方法。表3还列出了时间减少的百分比，以及

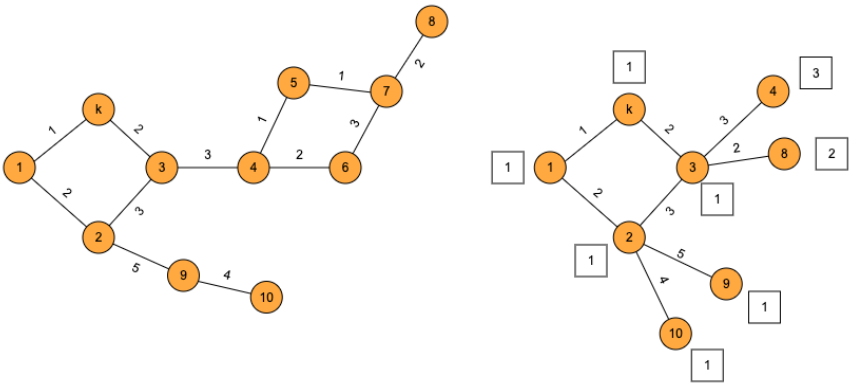


图 2：一个图（左）及其简化版本（右）的示例，图中标有顶点权重。顶点 4、6 和 7 已合并为一个权重为 3 的顶点。此外，顶点 5 和 8 已合并为一个权重为 2 的顶点。

通过图简化得到的最佳目标函数值相较于表2所报告的多重移除混合整数规划移除结果的增幅。时间统计包括执行图简化所用的时间，而该过程非常高效。对于节点数和边数显著减少的图，混合整数规划的运行时间也相应缩短。对于未能在时间限制内终止的较大网络，我们只在一个实例中观察到最佳活力有所提升。

7 未来工作与结论

本文介绍了 VIMAX 优化问题，该问题旨在确定一个顶点子集，移除该子集后，经过网络中某个关键顶点的流量最大化。VIMAX 是 NP难问题。我们采用 [73] 的对偶化与组合方法，将 VIMAX 建模为混合整数线性规划，并将其性能与模拟退火启发式算法进行了比较。我们还展示了如何通过识别那些没有至少两条顶点不相交路径通向关键顶点的顶点，来简化图并缩短某些图类型上的计算时间。

此外，本文也开辟了一个广阔的未来研究领域。

- 计算改进——图简化：对于降低活力的顶点，可以针对一般容量情形推导出更多性质，例如 [54] 中针对单位容量情形所述的性质，并用于预处理或简化图，以缩小 VIMAX 的解空间。尤其是，若能识别图中的小割，使割另一侧的所有顶点都能像 k 一样被忽略、不予考虑，将会很有帮助。

- 计算改进——Benders分解：由于 VIMAX 混合整数规划中的约束数量按 $O(|E||V|^2)$ 的阶增长，我们可以使用 Benders 分解算法来求解大型图上的问题。该分解方法见附录C，但初步测试未能提升混合整数规划的性能。Smith和Song的综述

介绍了多种可用于提升 VIMAX [64] 的 Benders分解性能的方法。

- 优化：本文着重识别对关键顶点具有较高活力效应的顶点，但未考虑将这些顶点从图中移除的成本或难度。对 VIMAX 的改进可以纳入预算约束，根据移除难度限制可选子集。

- 博弈论与动态响应：本文所述的破坏技术聚焦于网络在某一时间快照下的状态，并假设任何子集移除都是同时发生的，且网络保持静态。对 VIMAX 的扩展可以探讨顺序移除顶点所产生的级联效应，类似于多时段阻断相关文献中的级联失效 [23],、用于应对反阻断响应的基于智能体的模型 [17, 51, 76], ，以及网络针对破坏采取的博弈论响应，例如添加新边 [46], 。

- 不完全信息：本文提出的 VIMAX 表述假设对网络结构拥有完整且准确的认知。然而，执法机构通常并不了解秘密网络的完整结构，而且该结构可能迅速演变 [41]。未来的研究可以探讨将 VIMAX 应用于结构不确定或未知的网络。

- 鲁棒网络设计：我们可以利用本研究的结果来设计电信网络等基础设施网络，使其能够抵御活力转移攻击 [18]。

- 多个关键顶点：如果我们想最大化流经一组 S 关键顶点的流量，可以扩展活力最大化的定义，以最大化 S的全点对活力。相应地，可以更新混合整数规划和模拟退火算法。

VIMAX 广泛适用于多种问题，包括瓦解有组织犯罪团伙（例如从事恐怖主义、毒品走私和人口贩运的团伙），破坏电信网络和电力网络，以及鲁棒网络设计。

8 致谢

本研究使用了极端科学与工程发现环境（XSEDE） [68], ，该环境由美国国家科学基金会资助，项目编号为 ACI-1548562。具体而言，本研究通过 MTH210021 资源分配，在匹兹堡超级计算中心使用了 XSEDE Bridges-2 极限内存和常规内存超级计算机。我们感谢顾问 T. J. Olesky 协助排查 AMPL 批处理调用问题，这项工作得益于 XSEDE扩展协作支持服务（ECSS）计划 [71]。作者还要感谢 Doug Altner、Michael Ernst、Elizabeth Ferme、Sam Gutekunst、Danika Lindsay、Yaniv Ovadia、Sean Plott 和 Andrew S. Ronan 对本研究早期工作的贡献[47, 35, 53]。本研究得到了美国国家科学基金会本科生研究体验计划（NSF-DMS-0755540）的支持。

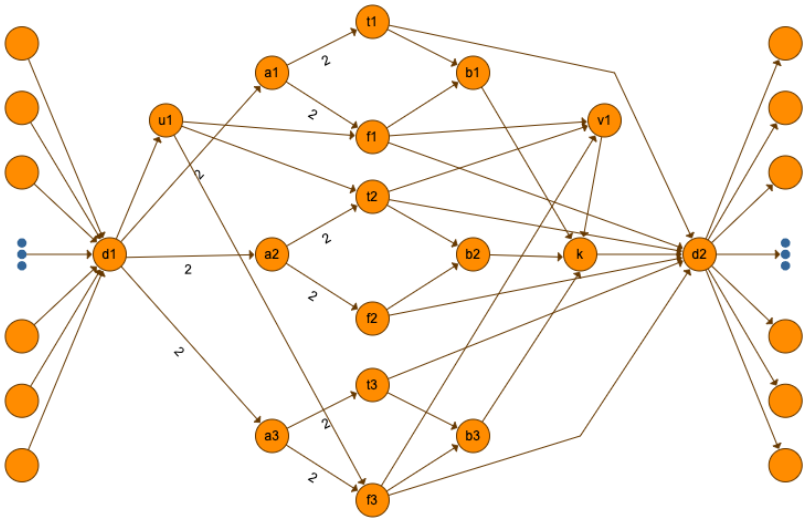


图3：由三个变量和子句（x_1 或 x_2 或 x_3）构成的单子句 3SAT 问题的图表示。除另有说明外，所有边的容量均为1。

定理1的证明

本节证明定理1所述的全点对活力最大化问题是 NP 难的。我们的证明扩展了 [53] 针对无向单位容量边这一特殊情况的证明。我们首先将 VIMAX 重述为一个判定问题：对于固定值 C，是否存在一个子集 S使得 $\mathcal{L}_k(G \setminus S) \geq C$?

定理3. 全点对活力最大化问题是*NP*难问题。

证明. 我们通过从3-可满足性问题（3SAT）归约得到结果。给定一个包含 n 个布尔变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 以及 m 个3-合取范式子句 $c_1, c_2, \ldots, c_m$的3SAT实例，3SAT判定问题是判断是否存在一种变量赋值，使变量取真/假值并满足所有子句。例如，对于包含三个变量的实例，任何将 x_3 设为假的赋值都能满足两个子句（x_1 或 x_2 或 x_3）和（x_1 或 x_2 或 x_3）。

给定一个3SAT实例，我们构造一个对应的VIMAX实例。首先构建有向图 G，其中包含三个顶点 d_1、k（关键顶点）和 d_2，并添加一条从 k 到 d_2、容量为 $n+m$的边。此外，对于每个变量 x_i，我们创建四个顶点$\{a_i, b_i, t_i, f_i\}$，并添加边（d_1, a_i）、（a_i, t_i）和（a_i, f_i），每条边的容量均为2；还添加边（t_i, b_i）、（f_i, b_i）、（t_i, d_2）、（f_i, d_2）和（b_i, k），每条边的容量均为1。

然后，对于每个子句 c_j，我们创建两个变量 u_j 和 v_j，并添加单位容量边 (d_1, u_j) 和 (v_j, k)。为了对这个子句进行编码，对于子句 c_j 中的每个变量 x_i，我们添加单位容量边 (u_j, t_i) 和 (t_i, v_j)；对于子句 c_j 中的每个变量 x_i，我们添加单位容量边 (u_j, f_i) 和 (f_i, v_j)。最后，我们创建$M = 8 \cdot (m + n + n \cdot m)$个叶节点，并添加从它们到 d_1 的单位容量边；再创建 M 个叶节点，并添加从 d_2 到它们的单位容量边，然后设置$C = (M+1)^2(n+m)$。图 3 给出了一个单子句、三变量的 3SAT问题示例图，其子句为 (x_1 或 x_2 或 x_3)。

注意，与 d_1 和 d_2 相邻的叶节点实质上增加了 d_1 和 d_2之间流的权重。特别地，如果我们定义

$$\mathcal{L}_k^{s,t}(G \setminus S) := z_{st}(G \setminus S) - z_{st}(G \setminus (S \cup \{k\}))$$

并令 V' 表示除这些叶节点以及 d_1、d_2 和 k之外的所有顶点，则我们可以将全点对活力改写为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_k(G \setminus S) \\
&= \sum_{\substack{s,t \in V \setminus (S \cup \{k\}) \\ s \neq t}} \mathcal{L}_k^{s,t}(G \setminus S) \\
&= (M+1)^2 \mathcal{L}_k^{d_1,d_2}(G \setminus S) + (M+1) \sum_{s \in V' \setminus S} \left[\mathcal{L}_k^{d_1,s}(G \setminus S) + \mathcal{L}^{s,d_2}(G \setminus S) \right] + \sum_{\substack{s,t \in V' \setminus S \\ s \neq t}} \mathcal{L}_k^{s,t}(G \setminus S) \\
&= (M+1)^2 \mathcal{L}_k^{d_1,d_2}(G \setminus S) + (M+1) \sum_{s \in V' \setminus S} \mathcal{L}^{s,d_2}(G \setminus S).
\end{aligned}$$

最后一行成立，因为从 d_1 到 $s \in V' \setminus S$ 或在 s 与 $t \in V' \setminus S$ 之间的路径都无法经过 k。此外，我们可以对每个最大流的起始节点，以其流出容量为活力设上界，从而对上述求和的后一部分设上界。

$$\begin{aligned}
(M+1) \sum_{s \in V' \setminus S} \mathcal{L}^{s,d_2}(G \setminus S) &\leq (M+1)(4m + 9n + 2m \cdot n) \\
&\leq \frac{1}{2}(M+1)^2.
\end{aligned}$$

这表明，不属于$\{d_1, d_2\}$ 的点对所产生的最大流对总体活力的贡献微不足道。因此，找到一个满足 $\mathcal{L}_k($ $G \setminus S) \geq C = (M+1)^2(n+m)$ 的子集，等价于找到一个满足 $\mathcal{L}_k^{d_1\ d_2,}(G \setminus S) \geq n+m$ 的子集 S。

现在我们证明，给定一个使所有子句都成立的变量到布尔值的赋值，我们可以找到一个等价的子集 S，使得 $\mathcal{L}_k^{d_1\ d_2,}(G$ $\setminus S) \geq n+m$。令 S包含所有满足以下条件的 i对应的 t_i：x_i 被设为假；并包含所有满足以下条件的 i 对应的 f_i：x_i 被设为真。

考虑 $G \setminus S$ 中 d_1和 d_2之间的最大流。对于每个满足 $t_i \in S$的变量 x_i，我们发送两单位的流：一单位沿路径 (d_1–a_i–f_i–b_i–k–d_2)，另一单位沿路径 (d_1–a_i–f_i–d_2)。反之，若 $f_i \in S$，则路径改为使用 t_i，而不是 f_i。此外，对于每个子句j，由于该子句得到满足，因此至少存在一个与 u_j 相邻、但不在 S中的顶点 t_i 或 f_i。不失一般性，设该顶点为 t_i。我们沿路径 (d_1–u_j–t_i–v_j–k–d_2)发送一单位的流。总流值为 $2n+m$。由于所有与 d_1相邻的边都已饱和，因此这是一个最大流。

现在考虑 $G \setminus (S \cup \{k\})$ 中 d_1和 d_2之间的最大流。对于每个满足 $t_i \in S$的变量 x_i，我们沿路径 (d_1–a_i–f_i–d_2)发送一单位的流。反之，若 $f_i \in S$，则路径改为使用 t_i，而不是 f_i。总流值为 n。由于在 $G \setminus (S \cup \{k\})$ 中，与 d_2 相邻的所有边都已饱和，因此这是一个最大流。这表明 $\mathcal{L}_k^{d_1\ d_2,}(G \setminus S) \geq n+m$。

现在我们必须证明反方向，才能完成证明。假设我们找到了一个子集 S，使得 $\mathcal{L}_k(G \setminus S) \geq C$。那么，鉴于除 d_1 和 d_2 之外的所有点对对活力的贡献至多为$1\ 2(M+1)^2$，必然有 $\mathcal{L}_k^{d_1\ d_2,}(G \setminus S) \geq n+m$。我们将流分解为

从 d_1 到 d_2 的单位流路径。令 $f(s,t)$ 表示在从 d_1 到 d_2 的最大流中，从 s 到 t 的这些路径的数量；令 $f'(s,t)$ 表示在 $G \setminus (S \cup \{k\})$ 中从 d_1 到 d_2 的最大流所包含的、从 s 到 t 的路径数量。那么，

$$\mathcal{L}_k^{d_1,d_2}(G \setminus S) = \sum_{i=1}^{n}[f(a_i,d_2) - f'(a_i,d_2)] + \sum_{j=1}^{m}[f(u_j,d_2) - f'(u_j,d_2)]. \tag{7}$$

对于方程 7 中的第一项，我们可以验证，$[f(a_i,d_2) - f'(a_i,d_2)] \leq 1$ 当且仅当 t_i和 f_i中恰好有一个位于 S中，且$\{a_i,b_i\} \cap S = \emptyset$；否则，该值至多为零。特别地，如果 t_i和 f_i都位于S中，那么 $f(a_i,d_2) = f'(a_i,d_2) = 0$。如果 t_i和 f_i都不在 S中，那么在两张图中，从 a_i 到 d_2 的流量至多为两个单位，并且 t_i 和 f_i 都可以避开顶点 k。只有当 t_i 和 f_i 中恰好有一个被选中时，才至少有一条路径必定经过顶点 k。对于第二项，由于从 d_1 到u_j的边具有单位容量，每一项也都至多为一。因此，

$$\mathcal{L}_k^{d_1,d_2}(G \setminus S) = \sum_{i=1}^{n}[f(a_i,d_2) - f'(a_i,d_2)] + \sum_{j=1}^{m}[f(c_j,d_2) - f'(c_j,d_2)] \leq n+m. \tag{8}$$

由于$\mathcal{L}_k^{d_1,d_2}(G \setminus S) \geq n+m$，这意味着等式处处成立，并且对于所有$i = 1,2,\ldots,n$，$|\{t_i,f_i\} \cap S| = 1$。对于 t_i位于 S中的每个变量，我们将该变量赋值为假。否则，我们将该变量赋值为真。最后，为了使每个子句对总体活力的贡献至少为一，u_j 必须与某个不在 S中的 t_i 或 f_i 相邻。根据我们网络的设计，这表明该赋值满足该子句。

总之，这表明每个 3SAT 判定问题都可以归约为一个 VIMAX 判定问题，并且 VIMAX 是 NP难的。□

B 定理 2 的证明

这里我们证明定理 2：移除任何一个无法通过至少两条顶点不相交路径连接到关键顶点 k 的顶点，都不会增加 k 的活力。

定理 4. 设 G 是一个图，其关键顶点为 k；设 i 是一个顶点，使得不存在至少两条从 i 出发并以 k 为终点的顶点不相交路径。设 S 是任意一个包含 i 的顶点子集，并设 $T = S \setminus \{i\}$。那么，$L_k(G \setminus S) \leq L_k(G \setminus T)$。因此，$T$ 对 k 的活力效应至少与 S 一样大。

证明。设 G 是一个图，其关键顶点为 k，并设 i 是一个顶点，使得不存在至少两条从 i 出发并以 k 为终点的顶点不相交路径。那么，存在一个割点 v，移除该割点会将图断开为至少两个连通分量。我们考虑两种情况，$v \neq i$ 和 $v = i$。

当 $v \neq i$ 时，v 将包含 k 的组件 G_k 与包含 i 的组件 G_i 分隔开。考虑一对 $s-t$（s，$t \neq k$）之间的最大流。

- 如果 s 和 t 都在 G_i中，那么它们之间的流不会受到移除顶点 k的影响，无论是否从图中移除顶点 i。这是因为，任何经过顶点 k 的最优流路径都必须先进入再离开顶点 v，从而形成一个流循环$s-\ldots-v-\ldots-k-\ldots-v-\ldots-t$，因此等同于完全避开 G_k的流路径 $s-\ldots-v-\ldots-t$。

- 如果 s 和 t 都在 G_k中，那么根据上述相同的逻辑，移除 i 不会影响它们对 k 活力的贡献：任何经过顶点 i 的最优流路径都必须进入再离开顶点 v，从而形成一个流循环，因此等同于完全避开 G_i 的流路径。

- 若不失一般性地， $s \in G_i$ 且 $t \in G_k$，那么移除顶点 i 可能会减少 $s - \ldots - v$之间的流量，但路径 $v - \ldots - t$的其余部分不受影响。因此，与 i 存在时相比，移除 i 时无法有更多流量经过 k 。

当 $v = i$时， i 会将组件 G_k 与图G_i的其余部分分隔开来，而该组件包含 k 。在这种情况下，无论 k 是否位于图中，移除 i都会消除 $s \in G_i$和 $t \in G_k$之间的所有 $s-t$流量。因此，与 i 存在时相比，从图中移除 i 时无法有更多流量经过 k 。

□

C Benders 分解

由于 VIMAX 混合整数规划中的约束数量按 $O(|E||V|^2)$的阶增长，我们可以使用 Benders 分解算法来求解大规模图上的问题。在我们的情形中，整数主问题负责选择要移除的顶点子集；该问题的变量和约束相对较少。给定一个固定的删除子集后，我们会得到一个规模较大的线性网络流子问题，并且可以保证该问题有整数最优解。

我们在方程 5 中看到，这些约束将$w_{i,\ j}$、 $x_{i,\ j,\ s,\ t}$、 $y_{i,\ j,\ s,\ t}$ 和 $y_{i,\ s,\ t}$联系起来。我们令 z_i's 和 $w_{i,\ j}$'s 作为主问题中的变量。我们的初始主问题仅包含与$w_{i,\ j}$'s 和 z_i's 相关的约束，表示要移除的子集的选择。因此，主问题为

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & \mathcal{L}_k \\
\text{subject to} \quad & \\
& \textstyle\sum_{i \in V} z_i \geq n - m \\
& z_k = 1 \\
& w_{i,j} \leq z_i, \forall (i,j) \in E \\
& w_{i,j} \leq z_j, \forall (i,j) \in E \\
& w_{i,j} \geq z_i + z_j - 1, \forall (i,j) \in E \\
& \\
& z_i \text{ binary}, \forall i \in V \\
& w_{i,j} \geq 0, \forall (i,j) \in E \\
& \mathcal{L}_k \geq 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

这里，$\mathcal{L}_k$ 表示 k的最优活力。目前，它的取值不受任何限制 .

求解公式9可确定可行的 z 和 w，我们可以用它们计算k 在线性子问题对偶问题中的活力。求对偶问题时，我们令$x_i^{'}$、$_{s,\ t}$ 为与$x_{i,\ j,\ s,\ t}$的流量平衡约束对应的对偶变量，并令$x_i^{'}$、$_{j,\ s,\ t}$ 为与$x_{i,\ j,\ s,\ t}$的容量约束对应的对偶变量。同样，我们令$y_i^{'}$、$_{j,\ s,\ t}$ 为与$y_{i,\ j,\ s,\ t}$上的边约束对应的对偶变量，并令$y_s^{'}$、$_{t}$ 为与$y_{s,\ s,\ t}$ 和$y_{t,\ s,\ t}$之间关系的约束对应的对偶变量。线性子问题变为

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} \sum_{(i,j)\in E} u_{i,j} w_{i,j} x'_{i,j,s,t} + \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} y'_{s,t} - \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} \sum_{(i,j)\in E'} (1-w_{i,j}) y'_{i,j,s,t} \\
\text{subject to} \quad & \\
& x'_{i,s,t} - x'_{j,s,t} + x'_{i,j,s,t} \geq 0, \forall (i,j) \in E, \forall s,t \in V' \\
& -x'_{s,s,t} + x'_{t,s,t} \geq 1, \forall s,t \in V' \\
& \sum_{j:(i,j)\in E'} y'_{i,j,s,t} - \sum_{k:(k,i)\in E'} y'_{k,i,s,t} = \begin{cases} y'_{s,t} & \text{if } i = s \\ -y'_{s,t} & \text{if } i = t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i,s,t \in V' \\
& y'_{i,j,s,t} \geq -u_{i,j}, \forall (i,j) \in E', \forall s,t \in V' \\
& \\
& x'_{i,j,s,t} \geq 0, \forall (i,j) \in E, \forall s,t \in V' \\
& x'_{i,s,t} \text{ unrestricted}, \forall i,s,t \in V' \\
& y'_{s,t} \leq 0, \forall s,t \in V' \\
& y'_{i,j,s,t} \leq 0, \forall (i,j) \in E', \forall s,t \in V'.
\end{aligned} \tag{10}
$$

在每次迭代 c开始时，求解主问题，并得到z_i 和$w_{i的j}$最优值。初始时，我们从无穷大的目标函数和所有 $z_i = 1$开始。随后，将最优的$w_{i,\ j}$代入公式10所示的线性子问题对偶问题并求解。

如果子问题无界，单纯形法会返回极射线，定义$\mathbf{x}'_c$ 和$\mathbf{y}'_c$，然后我们添加约束

$$
\sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} \sum_{(i,j)\in E} u_{i,j} w_{i,j} x'_{i,j,s,t,c} + \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} y'_{s,t,c} - \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} \sum_{(i,j)\in E'} (1-w_{i,j}) y'_{i,j,s,t,c} \geq 0.
$$

如果子问题的目标函数值小于或等于$\mathcal{L}_k$的当前最优值，则我们添加约束

$$
\sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} \sum_{(i,j)\in E} u_{i,j} w_{i,j} x'_{i,j,s,t,c} + \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} y'_{s,t,c} - \sum_{\substack{s,t\in V'\\ s\neq t}} \sum_{(i,j)\in E'} (1-w_{i,j}) y'_{i,j,s,t,c} \geq \mathcal{L}_k.
$$

否则，算法终止。

对 VIMAX 的 Benders 分解进行的初步测试表明，它存在与大规模混合整数规划公式相同的问题：所遇到的线性子问题的目标函数值，与任何可行整数解的目标函数值相比都相当大。因此，添加的割无法充分约束主问题。未来还需进一步研究，以开发改进的 Benders 分解。

参考文献

[1] R. Albert、H. Jeong 和 A. L. Barab´asi。复杂网络的错误与攻击容忍性。*Nature*, 406(6794):378–382，2000。

[2] D. L. Alderson、G. G. Brown、W. M. Carlyle 和 L. A. Cox。有时并不存在“最关键”的弧：评估并提升系统的运行韧性。*Military OperationsResearch*，18(1):21–37，2013。

.[3] D. S. Altner、O. Ergun 和 N. A. Uhan。最大流网络阻断问题：有效不等式、整数性间隙与可近似性。《运筹学快报》，38:33–38，2010。[4] R. Anzoom、R. Nagi 和 C. Vogiatzis。非法供应链网络研究综述及遏制此类网络的新方向。《*IISE*汇刊》，54(2):134–158，2021。doi: 10.1080/ 24725854.2021.1939466。[5] G. Ausiello、P. G. Franciosa、I. Lari 和 A. Ribichini。一般图和平面 st 图中的最大流活性。*Networks*，74(1):70–78，2019。doi: https://doi.org/10.1002/net.21878。[6] A. Balcioglu 和 R. K. Wood。《枚举近最小 s-t 割》，第2章，第21–49页。《网络阻断与随机整数规划》。克吕维尔学术出版社，2003年。[7] A. Basu。印度恐怖组织的社会网络分析。载于北美计算社会与组织科学协会*2005*年会议论文集，2005年。[8] Dimitris Bertsimas、Ebrahim Nasrabadi 和 James B. Orlin。论随机化在网络阻断中的力量。《运筹学快报》，44(1):114–120，2016年1月。[9] G. G. Brown、M. W. Carlyle、J. Salmer´on 和 R. K. Wood。关键基础设施防护。《*Interfaces*》，36:530–544，2006。[10] D. S. Callaway、M. E. J. Newman、S. H. Strogatz 和 D. J. Watts。网络鲁棒性与脆弱性：随机图上的渗流。*Physical Review Letters*，85(25):5468–5471，2000年12月18日。[11] T. Carpenter、G. Karakostas 和 D. Shallcross。分析恐怖主义网络的实际问题与算法。技术报告，Telecordia Technologies，莫里斯敦，新泽西州，2002年。[12] Lucia Cavallaro、Annamaria Ficara、Pasquale De Meo、Giacomo Fiumara、Salvatore Catanese、Ovidiu Bagdasar、Wei Song 和 Antonio Liotta。通过数据分析瓦解韧性犯罪网络：西西里黑手党案例。《*PLOS One*》，15(8):e0236476，2004。doi: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0236476。[13] R. L. Church、M. P. Scaparra 和 R. S. Middleton。识别关键基础设施：中位设施阻断问题与覆盖设施阻断问题。《美国地理学家协会年刊》，94:491–502，2004年。[14] A. Cintron-Arias、N. Curet、L. Denogean、R. Ellis、C. Gonzalez、S. Oruganti 和 P. Quillen。网络转移脆弱性问题，2001年。取自明尼苏达大学数字典藏库， `https://hdl.handle.net/11299/3553`.[15] H. W. Corley, Jr. 和 H. Chang。寻找流网络中 n 最关键的节点。《管理科学》，21(3):362–364，1974年。[16] K. J. Cormican、D. P. Morton 和 R. K. Wood。随机网络阻断。*OperationsResearch*，46:184–197，1998年。

[17] P. Crucitti、V. Latora 和 M. Marchiori。复杂网络级联失效模型。*Physical Review E*, 69(4):045104，2004。[18] P. Crucitti、V. Latora、M. Marchiori 和 A. Rapisarda。复杂网络的错误与攻击容忍性。*Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*，340(1-3):388–394，2004。[19] C. A. Cullenbine、R. K. Wood 和 A. M. Newman。网络转流的理论与计算进展。*Networks*，62(3):225–242，2013。 https://doi.org/10.1002/net.21514.[20] N. Curet。网络改道问题。*Military Operations Research*，6(2):35–44，2001。[21] Mathieu Dahan、Lina Sela 和 Saurabh Aminc。用于检测策略性攻击的网络检查。*Operations Research*，70(2):1008–1024，2022。[22] P. S. Dodds、D. J. Watts 和 C. F. Sabel。组织网络中的信息交换与鲁棒性。美国国家科学院院刊，100(21):12516–12521，2003年10月14日。[23] Forough Enayaty-Ahangar、Chase E. Rainwater 和 Thomas C. Sharkey。用于多周期网络阻断模型的基于逻辑的分解方法。*Omega*，87:71–85，2019。[24] E. Estrada。网络对定向攻击的鲁棒性：扩张性与度分布的相互作用。*European Physical Journal B*，52(4):563–574，2006年8月。[25] A. D. Flaxman、A. M. Frieze 和 J. Vera。无标度随机图过程中的对抗性删除。*Combinatorics Probability and Computing*，16(2):261–270，2007。[26] L. C. Freeman、S. P. Borgatti 和 D. R. White。赋权图中的中心性：一种基于网络流的中介中心性度量。*Social Networks*，13:141，1991。[27] L. K. Gallos、P. Argyrakis、A. Bunde、R. Cohen 和 S. Havlin。无标度网络的容忍性：从友善到蓄意攻击策略。*Physica A-Statistical Mechanics and itsApplications*，344(3-4):504–509，2004。[28] L. K. Gallos、R. Cohen、P. Argyrakis、A. Bunde 和 S. Havlin。攻击与防御策略下无标度网络的稳定性与拓扑结构。*Physical Review Letters*，94(18):188701，2005。[29] L. K. Gallos、R. Cohen、F. Liljeros、P. Argyrakis、A. Bunde 和 S. Havlin。复杂网络上的攻击策略。*Computational Science - ICCS 2006, Pt 3, Proceedings*，3993:1048–1055，2006。
http://www.springerlink.com/content/p31817656v18234j/fulltext.pdf.[30] T. Gierszewski、W. Molisz 和 J. Rak。关于无标度网络在恶意攻击下的某些行为。*Computer Safety, Reliability, and Security, Proceedings*，4166:29–41，2006。[31] R. E. Gomory 和 T. C. Hu。多终端网络流。*SIAM Journal on Applied Math-ematics*，9:551–556，1961。[32] R. Grassi、F. Calderoni、M. Bianchi 和 A. Torriero。利用中介中心性评估犯罪网络中的领导人：双重投影方法的新证据。*Social Networks*，56:23–32，2019。doi：https://doi.org/10.1016/j.socnet.2018.08.001。

[33] T. H. Grubesic、T. C. Matisziw、A. T. Murray 和 D. Snediker。评估网络脆弱性的比较方法。*International Regional Science Review*，31(1):88–112，2008。[34] D. Gusfield。所有节点对网络流分析的极简方法。*SIAM Journal onComputing*，19:143–155，1990。[35] S. Gutekunst。网络中强制通信的特征分析。学士论文（克莱蒙特：哈维穆德学院），2014年5月。[36] P. Holme、B. J. Kim、C. N. Yoon 和 S. K. Han。复杂网络的攻击脆弱性。*Physical Review E*，65(5):056109，2002。[37] A. J. Holmgren。利用图模型分析电力网络的脆弱性。*Risk Analysis*，26(4):955–969，2006年8月。[38] Tim Holzmann 和 J. Cole Smith。采用随机化阻断策略的最短路径阻断问题：复杂性与算法。*Operations Research*，69(1):82–99，2021。[39] E. Israeli 和 R. K. Wood。最短路径网络阻断。*Networks*，40:97–111，2002。[40]Donald E Knuth。计算机程序设计艺术，第*2*卷：半数值算法。Addison-Wesley Professional，2014。[41] Renata A. Konrad、Andrew C. Trapp、Timothy Palmbach 和 Jeffrey S. Blom。通过运筹学与分析学打击人口贩运：方法、模型与应用的机遇。*European Journal of Operational Research*，259(2):733–745，2017年6月1日。[42] D. Kosch¨utzki、K. A. Lehmann、L. Peeters、S. Richter、D. Tenfelde-Podehl 和 O. Zlotowski。中心性指标。载于 U. Brandes 和 T. Erlebach 编，网络分析，计算机科学讲义第3418卷，计算机科学讲义，第3章。施普林格出版社，柏林、海德堡，2005。[43] C. Lee、D. Cho 和 S. Park。用于有向多流网络转移问题的组合式 Benders分解算法。*Military Operations Research*，24(1):23–40，2019。[44] Xiao Lei、Siqia n Shen 和 Yongjia Song。异质风险偏好下的随机最大流阻断问题。*Computers and Operations Research*，90:97–109，2018。[45] C. Lim 和 J. C. Smith。离散与连续多商品流网络阻断问题的算法。*IIE Transactions*，39:15–26，2007。[46] Nicholas R. Magliocca、Kendra McSweeney、Steven E. Sesnie、Elizabeth Tellman、Jennifer A. Devine、Erik A. Nielsen、Zoe Pearson 和 David J. Wrathall。将可卡因贩运者与禁毒拦截力量建模为复杂适应系统。美国国家科学院院刊，116(16):7784–7792，2019年4月16日。doi：https://www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1812459116。[47] S. E. Martonosi、D. S. Altner、M. Ernst、E. Ferme、K. Langsjoen、D. Lindsay、S. Plott 和 A. Ronan。网络破坏的新框架。未发表手稿。 `https://arxiv.org/abs/1109.2954`。，2011年8月。[48] A. W. McMasters 和 T. M. Mustin。供应网络的最优阻断。*Naval ResearchLogistics Quarterly*，17:261–268，1970。

[49] N. Memon、N. Harkiolakis 和 D. L. Hicks。在隐秘网络中识别高价值个体：伦敦7/7爆炸案案例研究。载于*IEEE/ACS*计算机系统与应用国际会议，第206–215页，多哈，2008年。[50] C. Morselli、C. Gigu`ere 和 K. Petit。犯罪网络中的效率与安全权衡。*Social Networks*，29：143–153，2007年。[51] A. E. Motter 和 Y. C. Lai。复杂网络上的级联攻击。*Physical Review E*，66(6)：065102，2002年。[52] M. Natarajan。理解贩毒组织的结构：对话分析，第273–298页。摘自《非法毒品市场：从研究到预防政策》。Criminal Justice Press/Willow Tree Press，美国，2000年。[53] Y. Ovadia。提升隐秘网络中顶点可见性的计算可行性。高级论文（克莱蒙特：哈维穆德学院），2010年5月。[54] A. Paul。识别恐怖主义网络中的隐秘成员。高级论文（克莱蒙特：哈维穆德学院），2012年5月。[55] G. Paul、S. Sreenivasan 和 H. E. Stanley。复杂网络对随机崩溃的韧性。*Physical Review E*，72(5)：056130，2005年。[56] Babak Saleck Pay、Jason R. W. Merrick 和 Yongjia Song。具有不完整偏好的随机网络阻断。*Networks*，73：3–22，2019年。[57] C. A. Phillips。网络抑制问题。载于第*25*届*ACM*计算理论年度研讨会论文集，第776–785页，1993年。[58] S. Rasti 和 C. Vogiatzis。蛋白质相互作用网络计算方法综述。《运筹学年鉴》，276(1-2)：35–87，2019年5月。doi：10.1007/s10479-018-2956-2。[59] S. Rasti 和 C. Vogiatzis。基于群结构研究蛋白质相互作用网络必需性的新型中心性指标。*Networks*，80(1)：3–50，2022年7月。doi：10.1002/net.22071。[60] H. D. Ratliff、G. T. Sicilia 和 S. H. Lubore。寻找流网络中的 n 关键边。《管理科学》，21(5)：531–539，1975年。[61] J. O. Royset 和 R. K. Wood。求解双目标最大流网络阻断问题。《*INFORMS*计算杂志》，19(2)：175–184，2007年春。[62] M. Sageman。理解恐怖网络。宾夕法尼亚大学出版社，费城，2004年。[63] T. C. Sharkey、S. G. Nurre Pinkley、D. A. Eisenberg 和 D. L. Alderson。探索网络韧性：基于优化的视角。*Networks*，77(2)：225–254，2021年。[64] J. C. Smith 和 Y. Song。网络阻断模型与算法综述。*EuropeanJournalof OperationalResearch*，283(3)：797–811，2020年。doi：https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.06.024。

[65] K. Stephenson 和 M. Zelen。重新思考中心性：方法与示例。*Social Networks*，11(1)：1–37，1989年。[66] S. Sun、Z. X. Liu、Z. Q. Chen 和 Z. Z. Yuan。具有局部优先连接的演化网络的错误与攻击容忍性。*Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*，373：851–860，2007年。[67] Barıs Tezcan 和 Kayse Lee Maass。具有决策依赖型成功的贩运人口阻截。*engrxiv. org*，2022年。访问日期：2023年1月11日，网址：`https://doi.org/10.31224/osf.io/dt8fs`。[68] J. Towns、T. Cockerill、M. Dahan、I. Foster、K. Gaither、A. Grimshaw、V. Hazlewood、S. Lathrop、D. Lifka、G. D. Peterson、R. Roskies、J. R. Scott 和 N. Wilkins-Diehr。XSEDE：加速科学发现。*Computing in Science & Engineering*，16(5)：62–74，2014年9–10月。doi：10.1109/MCSE.2014.80。[69] C. Vogiatzis、A. Veremyev、E. L. Pasiliao 和 P. M. Pardalos。用于寻找中心性最高和最低的中心团的整数规划方法。*Optimization Letters*，9(4)：615–633，2015年4月。doi：10.1007/s11590-014-0782-2。[70] S. Wasserman 和 K. Faust。社会网络分析：方法与应用。剑桥大学出版社，美利坚合众国，1994年。[71] N. Wilkins-Diehr、S. Sanielevici、J. Alameda、J. Cazes、L. Crosby、M. Pierce 和 R. Roskies。XSEDE扩展协作支持计划概述。载于高性能计算应用——第六届国际会议 *ISUM 2015* 修订精选论文，第595卷计算机与信息科学通信，第3–13页，德国，2016年1月。施普林格出版社。ISBN 9783319322421。doi：10.1007/978-3-319-32243-8 1。[72] R. D. Wollmer。确定铁路网络中最关键边的一些方法。技术报告，兰德公司，圣莫尼卡，加利福尼亚州，1963年。[73] R. K. Wood。确定性网络阻断。*Mathematical and Computer Modelling*，17：1–18，1993年。[74] J. Wu、H. Z. Deng、Y. J. Tan 和 D. Z. Zhu。不完全信息下复杂网络遭受蓄意攻击时的脆弱性。*Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*，40(11)：2665–2671，2007年。`http://ej.iop.org/links/ro1CUSGL9/er2PTSUV3BGSmWSlav5vpA/a7_11_005.pdf`。[75] Jing Zhang、Jun Zhuang 和 Brandon Behlendorf。随机最短路径网络阻断：以亚利桑那州—墨西哥边境为例。*Reliability Engineering and System Safety*，179：62–73，2018年。[76] L. Zhao、K. H. Park、Y. C. Lai 和 N. Ye。无标度网络对攻击诱发级联的容忍度。*Physical Review E*，72(2)：025104，2005年。