arXiv:2302.01232v1 [astro-ph.IM] 2 Feb 2023

Schenberg引力波球形共振天线的设计应变灵敏度

Liccardo V.[1], [*] Lenzi C. H.[2], [†] Marinho Jr. R. M.[2], [‡] Aguiar O. D.[1], [§] Frajuca C.[3], [¶] Bortoli F. S.[4], [**] 和 Costa C. A.[1], [††][1]巴西国家空间研究所，巴西圣保罗州圣若泽-杜斯坎普斯，邮编 *12227-010*[2]航空技术研究所，巴西圣保罗州圣若泽-杜斯坎普斯，邮编 *12228-900*[3]南里奥格兰德联邦大学，巴西南里奥格兰德州南里奥格兰德，邮编 *96203-900*[4]圣保罗联邦学院，巴西圣保罗州圣保罗，邮编 *01109-010*（日期：2023年2月3日）

本研究的主要目的是回顾 Schenberg 共振天线的传递函数，并重新计算天线对引力波的设计应变灵敏度。我们研究的是采用半十二面体构型、配有六个换能器的球形天线。与天线耦合后，换能器-球体系统将作为一个由三个质量组成的质量-弹簧系统运行。第一个质量是每个四极模对应的天线有效质量，第二个是换能器机械结构第一机械模态的质量，第三个则是换能器膜的有效质量；该膜构成了微波腔壁之一。所有计算分别针对简并情形（球体的所有四极模频率相同）和非简并球体情形进行。我们得出的结论是，先进版 Schenberg 天线（aSchenberg）的“终极”灵敏度接近标准量子极限（尽管所用的参量换能器原则上能够突破这一极限）。然而，在 Schenberg 的工作频率范围内，O3观测运行中的两台 aLIGO 已经达到这一灵敏度。因此，重新组装 Schenberg 天线并设法使其达到标准量子极限灵敏度，唯一合理的理由应是采用与激光干涉仪不同的物理原理探测引力波。这个不同的物理原理是利用共振质量体（例如 Schenberg）吸收引力波能量。

I. 引言

引力波（GW）是大质量宇宙天体加速运动时产生的时空涟漪。这些涟漪以光速传播，并能激发弹性体的四极正则模。文献中广泛讨论了首次探测到一对黑洞（BH）向内旋近并合产生的引力波（GW150914） [1–4]。此外，近期同时探测到双中子星（NS）并合产生的引力波及其电磁对应体（GW170817），正式开启了涉及引力波的多信使天文学时代 [5, 6]。利用这两种本质迥异的信息研究宇宙，将有助于更深入地理解天体物理情景、核过程和核合成。在引力波天文学领域，这是首次能够

[*] vic2000@hotmail.it
[†] chlenzi1980@gmail.com
[‡] marinho.rubens@gmail.com[§] odylio.aguiar@inpe.br
[¶] Frajuca@gmail.com
[**] bortoli@ifsp.edu.br
[††] cescosta@gmail.com

得益于 LIGO/Virgo 合作组的三台干涉仪同时进行探测，人们得以确定源在天空中的位置 [5]。

巴西马里奥·舍恩贝格探测器基于检测球形共振质量体的五个四极模，这些模对应于质量为M_S = 1124 kg、半径为R = 32.33 cm的球体的机械振动（图1）。工作频带为3.15 - 3.26 kHz。天线由CuAl（6%）合金制成，该合金在4开尔文下具有较高的机械品质因数 Q ~ 2×10^6 。系统由振动隔离系统悬挂，能够将外部振动衰减约300 dB [7, 8]。仪器将由低温腔室（杜瓦瓶）维持在低温（~ 4 K）下，并由氦气流 [9]进行冷却。天线与参量换能器耦合，用于监测球体的四极／单极正规模的振动 [10–14]。引力波球形共振天线的主要优势之一是其全向灵敏度，因此对所有波的传播方向和偏振都具有同等响应。球形共振质量天线此前已得到深入研究 [15–17]。设计中的天线转换系统由固定在球体表面的九个换能器组成，其中六个采用Johnson和Merkowitz提出的截角二十面体构型 [18]。这种构型具有若干优点，不仅简化了运动方程，还能确定引力波在天空中的方向，并便于解读信号。有关Schenberg 天线的更多细节，请参阅 [19, 20] 及其中的参考文献。值得一提的是，Schenberg 天线除了可用于尝试探测引力波外，还可用于检验这样一种假设：时空结构曲率中的涟漪可能由一种更微小的“作用”引起，而探测这种作用需要达到超越标准量子极限的灵敏度 [21]。另一方面，Schenberg 探测器还可用于检验引力替代理论，例如参考文献 [22]所述的理论；该理论假定引力子有质量，因此具有六种偏振态。

本文的安排如下：在第（II）节中，我们研究中子星-黑洞双星系统螺旋内落过程中引力波的发射，并讨论 Schenberg 天线对该系统的可探测性。随后，在第（III）节中讨论引力波与物质的相互作用。第（IV）节介绍探测器模型，随后计算天线的响应函数。最后，在第（V）节中给出总结性讨论并分析研究结果。

II. 来自中子星-黑洞双星系统的引力波

中子星-黑洞双星的并合是地基天线最有希望探测的引力波源之一。人们认为，中子星-黑洞系统由大质量双星系统经历两次超新星爆发后形成 [23, 24]。包含中子星的双星所产生的引力波，为研究中子星的半径、紧致度和潮汐形变性等中子星性质提供了工具。了解中子星性质将有助于约束核密度物质的状态方程 [25], ，从而为核物理提供宝贵信息。系统形成后，由于长期的引力辐射反作用，轨道间距逐渐减小（即两个天体处于绝热螺旋内落运动中），最终两个天体并合形成黑洞。双星的最终命运主要取决于黑洞的质量和中子星的紧致度。然而，详细分析表明，黑洞自旋和中子星的状态方程也在决定最终命运方面发挥着重要作用[24]。有效单体形式（EOB）被提出 [26, 27]，作为一种有前景的方法，用于解析描述双星并合过程中发出的螺旋内落、并合和振铃波形。在电磁对应体的候选者中，短伽马射线暴（GRB）及其余辉正受到理论和观测研究的广泛关注 [28, 29]。关于中子星-黑洞双星的深入分析，参见 [24]。

本节讨论无自旋、质量为 1.4 – 3.0

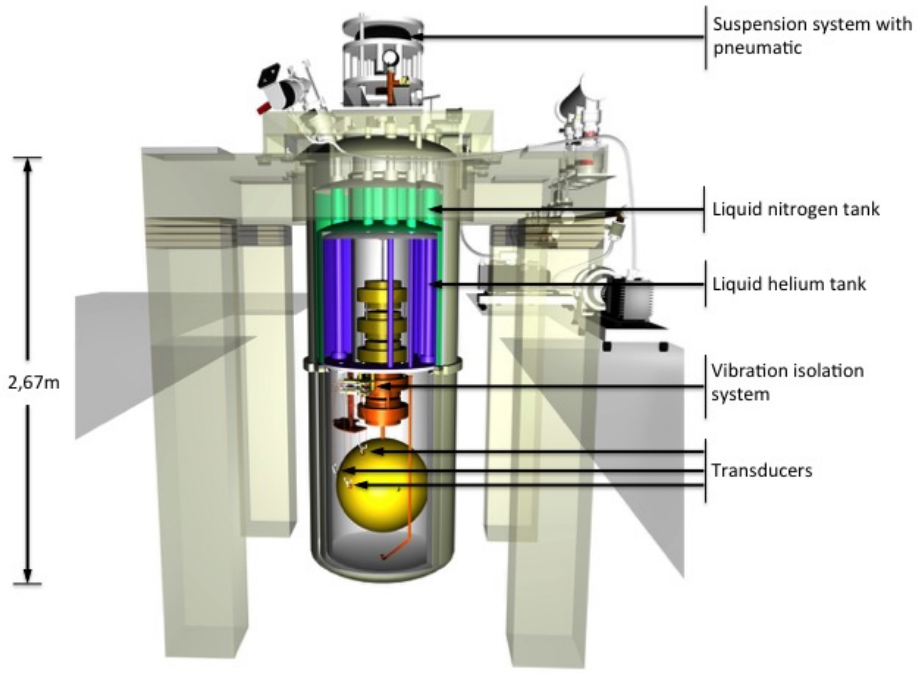

图 1. Schenberg 天线，其中九个参量换能器监测共振球形质量体的振动基模（图片来源：XavierP.M. Gratens）。

$M_\odot$ 中子星-黑洞双星系统并合产生的引力波信号，并忽略潮汐形变等有限尺寸效应。天线狭窄的频率窗口将黑洞质量限制在 $\lesssim 3\, M_\odot$。致密双星系统会发射周期性引力波，其频率随时间扫过频谱，并在接近并合时达到最大值。最后轨道附近引力波的特征振幅和频率由 [24] 给出

$$h \approx 3.6 \times 10^{-22} \left(\frac{M_{BH}}{6M_\odot}\right)\left(\frac{M_{NS}}{1.4M_\odot}\right)\left(\frac{6GM}{c^2 r}\right)\left(\frac{0.1\text{Gpc}}{D}\right), \tag{1}$$

$$f \approx \frac{\omega}{\pi} \approx 594\text{Hz}\left(\frac{6GM}{c^2 r}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{7.4M_\odot}{M}\right), \tag{2}$$

其中 ω 为角速度，$M = M_{BH} + M_{NS}$，而 r 和 D 分别为轨道间距和源距离。原则上，所研究的双星系统可能被探测到，因为并合前 ~ 1 毫秒时引力信号的频率落在巴西天线的频带内。中子星-黑洞并合也是干涉式引力波探测器的潜在目标。由于这类天线的灵敏频率范围宽得多（~ 10 - 4000 赫兹），它们会在 Schenberg 天线之前探测到信号（在旋近阶段）。值得注意的是，得益于截角二十面体构型，该天线能够确定引力波天体物理源的偏振和位置 [30–33]。

文献中存在大量波形族，它们根据源的类型以及模拟所采用的近似方法（数值相对论（NR）、有效单体形式、后牛顿（PN）近似等）而有所不同。我们的引力信号

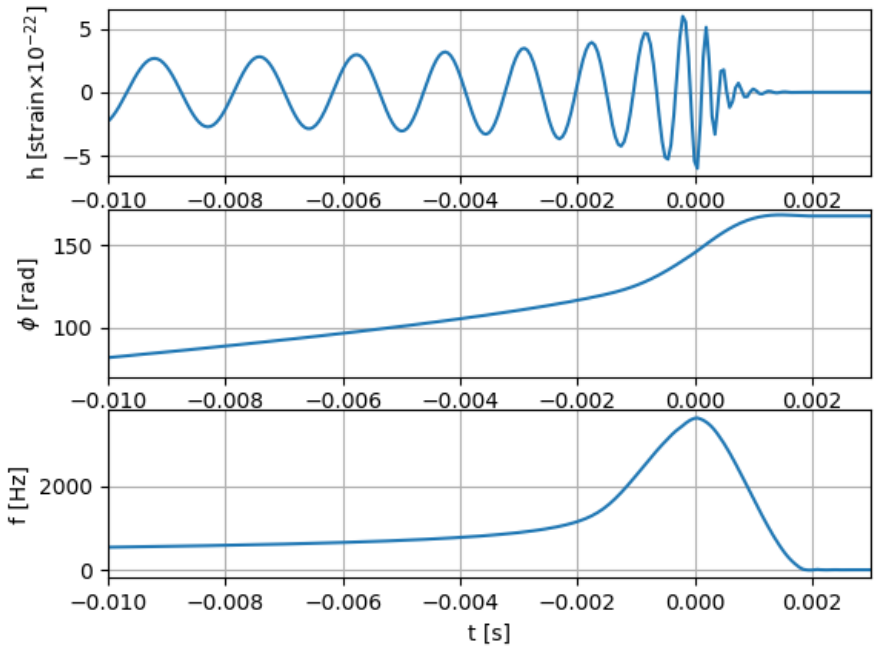

图 2. 非自旋的 1.4–3.0 $M_\odot$ 中子星-黑洞双星系统并合产生的引力波应变信号（顶部）、相位（中部）和频率（底部）随并合前时间的变化曲线。

分析使用 PyCBC 软件包 [34, 35]生成了波形。所采用的波形是 LIGO/Virgo 使用的波形之一，即经过数值相对论校准的有效单体模型（EOBNRv2）。只要天体的速度不处于极端相对论状态，后牛顿结果就能保持良好。然而，两个天体彼此绕行时，会通过发射引力波而损失能量，它们之间的距离随之缩短，速度则不断增加。因此，双星越接近并合，后牛顿预测就越不准确；而在接近并合时，有效单体方法通过将高阶真空项校准到数值相对论波形，能够提供更高的准确度。人们认为，EOBNRv2 波形对于在 aLIGO 灵敏频带内搜寻非自旋并合致密双星的信号而言，具有足够的准确度。有效单体形式经过多次改进，以纳入数值相对论的更多信息。根据可用数值相对论波形的数量以及对有效单体描述所作的修改，人们开发了多个版本的 EOBNR 模型 [36, 37]。本文不拟展示有效单体形式及其扩展的技术细节。图 2 还展示了本文所研究的非自旋中子星-黑洞双星的波形。该波形也经过重新采样，以适配 Schenberg 天线的采样率。

这类系统的并合率非常低，只能通过间接方式计算。假定所有短伽马射线暴/千新星都与中子星-黑洞并合有关 [28]，并假定所有 r 过程物质都产生于中子星-黑洞并合 [38]，据此给出了上限（$\sim 10^3\ \mathrm{Gpc^{-3}\ yr^{-1}}$）。

已有迹象表明，中子星-黑洞双星已被直接观测到 [39]，并且可以根据恒星演化综合 [40, 41]推导出一个估计的率密度 $\sim 0.04 \times 10^3\ \mathrm{Gpc^{-3}\ yr^{-1}}$。在本研究中，为了评估与中子星-黑洞并合相关的事件率，我们遵循 Li 等 [42]和 Abbott等 [43], 的研究；他们假设双星系统的

种群质量为 1.4–3 $M_\odot$，并将并合率限制在低于 6500 Gpcyr。这一估计对物理参数十分敏感，例如中子星物质的状态方程以及黑洞的质量/自旋分布。对于质量更大的黑洞，事件率上限会降低。其他暂现源的预期事件率更低，和/或可靠性较差。要探测到信号，引力波信号的振幅必须与天线的灵敏度相匹配。

对于先进版 Schenberg 天线（aSchenberg），它将在标准量子极限附近工作（第 IV 节），因此能够在天线的标称频率下探测到振幅为 $h \sim 10^{-22}$ 的引力信号。在这种情况下，特征振幅为 $\sim 3\times10^{-22}$ 的引力波信号可在约 0.1 Gpc 的距离处产生（图 2）。在这一体积内，信噪比为 ~ 1时，事件率将为 ~ 3.6 年$^{-1}$。这一结论依赖于如下假设成立：所有已观测到的千新星都与中子星-黑洞并合有关。此外，许多基于恒星演化综合和超新星率的统计研究预测，假设类银河系星系占主导地位，中子星-黑洞在银河系及近邻宇宙中的并合率为中子星-中子星双星并合率的 1–10%（每 $\sim 10^6$ –10^7 年一次）[44–46]。如果考虑椭圆星系的贡献，宇宙的总并合率可能会显著提高 [47]。这些估算表明，Schenberg 天线探测质量为 1.4–3.0 $M_\odot$ 的中子星-黑洞并合，前景十分可观。

III. 引力波与物质的相互作用

众所周知，引力波会在时间 t 和位置 $\boldsymbol{x}$ 处产生潮汐密度力（默认对重复指标求和）

$$f_i^{GW}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}\rho\ddot{h}_{ij}(t)x_j, \tag{3}$$

其中，ρ 为质量密度，h 为引力波振幅关于时间的二阶导数。由于 Schenberg 天线的共振频率约为 3 千赫兹，可探测引力波的波长约为 100 千米，因此可以使用球体中心处的 $h_{ij}(t)$ 数值。方程(3)可以用一个势的梯度表示

$$\boldsymbol{f}^{GW}(\boldsymbol{x},t)=-\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{x},t), \tag{4}$$

其中

$$\Phi(\boldsymbol{x},t)=-\frac{1}{4}\rho x_i\ddot{h}_{ij}(t)x_j=-\frac{1}{4}\rho r^2 n_i\ddot{h}_{ij}(t)n_j, \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是径向的单位向量，r 是大小。我们可以用本文中一直采用的实球谐函数展开 $\Phi(\boldsymbol{x},t)$：$Y^{\mathcal{R}}_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$，其定义基于传统球谐函数

$$\begin{aligned} Y^{\mathcal{R}}_{\ell,-m}(\vartheta,\varphi) &= \sqrt{2}\mathcal{I}[Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)] \\ Y^{\mathcal{R}}_{\ell 0} &= Y_{\ell 0} \\ Y^{\mathcal{R}}_{\ell m}(\vartheta,\varphi) &= \sqrt{2}\mathcal{R}[Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)]. \end{aligned} \tag{6}$$

球谐函数满足归一化条件

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} Y^{\mathcal{R}}_{\ell m}Y^{\mathcal{R}}_{\ell' m'}\sin\vartheta d\vartheta d\varphi=\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}. \tag{7}$$

从现在起，我们将省略上标 $\mathcal{R}$ ，并写作 $Y_{\ell}^{\mathcal{R}}{}_{m} = Y_{\ell m}$。展开后，我们得到（只有 $\ell = 2$对应的项，即四极模态，会保留下来）

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = -\sqrt{\frac{\pi}{15}}\rho r^2 \ddot{h}_m(t) Y_{2m}, \tag{8}$$

wh其中h_m 是展开系数，称为球面振幅，由 y

$$h_{-2} = h_{12} \tag{9}$$
$$h_{-1} = h_{23} \tag{10}$$
$$h_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} h_{33} \tag{11}$$
$$h_1 = h_{13} \tag{12}$$
$$h_2 = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}). \tag{13}$$

从实验室参考系观察，来自由极角和方位角（θ， ϕ）所确定方向的引力波，其球面振幅h_m 由下式给出（见附录（D））：

$$h_{-2} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)\sin 2\phi h_+ + \cos\theta \cos 2\phi h_\times \tag{14}$$
$$h_{-1} = -\frac{1}{2}\sin 2\theta \sin\phi h_+ - \sin\theta \cos\phi h_\times \tag{15}$$
$$h_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta h_+ \tag{16}$$
$$h_1 = -\frac{1}{2}\sin 2\theta \cos\phi h_+ + \sin\theta \sin\phi h_\times \tag{17}$$
$$h_2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)\cos 2\phi h_+ - \cos\theta \sin 2\phi h_\times. \tag{18}$$

采用矩阵记法，并绕偏振角 ψ旋转后，我们得到

$$\begin{pmatrix} h_{-2} \\ h_{-1} \\ h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\sin 2\phi & \cos\theta\cos 2\phi \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta \sin\phi & -\sin\theta\cos\phi \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\cos 2\phi & -\cos\theta\sin 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\psi & -\sin 2\psi \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_+ \\ h_\times \end{pmatrix}. \tag{19}$$

利用公式（8）和矢量球谐函数（见附录（C）），我们得到引力波密度力的表达式

$$\boldsymbol{f}^{GW} = \sqrt{\frac{4\pi}{15}}\rho r \ddot{h}_m(t)\left(\boldsymbol{Y}^L_{2m} + \frac{\sqrt{6}}{2}\boldsymbol{Y}^E_{2m}\right). \tag{20}$$

在这种情况下
อาคารจีเอ็มเอ็ม 方程（31）右侧的$\boldsymbol{f}$ 仅由引力波产生的情况下，重叠积分

$$f^{GW}_{n\ell m} = \int_V \boldsymbol{\Psi}_{n\ell m}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}^{GW}(\boldsymbol{x}, t) d^3x \tag{21}$$

是球体每个模态上的有效力，而

$$\boldsymbol{\Psi}_{n\ell m}(\boldsymbol{x}) = A_{n\ell}(r)\boldsymbol{Y}^L_{\ell m}(\theta, \phi) + B_{n\ell}(r)\sqrt{\ell(\ell+1)}\boldsymbol{Y}^E_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{22}$$

是未耦合球体模态的特征函数，方程 (32)，在此重列以便查阅。对角向部分积分后，对于 Schenberg 天线，此积分化简为

$$f_{n2m}^{GW} = \frac{1}{2}\ddot{h}_m(t) M_S R \sqrt{\frac{3}{5\pi}} \int_0^1 \xi^3 (A_{n2}(\xi R) + 3B_{n2}(\xi R)) d\xi = \frac{1}{2}\ddot{h}_m(t) M_S \chi_n R, \tag{23}$$

其中

$$\chi_n = \sqrt{\frac{3}{5\pi}} \int_0^1 \xi^3 (A_{n2}(\xi R) + 3B_{n2}(\xi R)) d\xi. \tag{24}$$

对于 Schenberg 天线，我们有 $\chi_1 = -0.6004$。

IV. 探测器模型

如上所述，Schenberg 天线的机械振荡由一组耦合在其表面的参量换能器进行监测。从数学角度来看，Johnson 和 Merkowitz [48] 提出了一种模型，其中通过将耦合在天线表面的六个换能器的输出数据分解为球体的四极模态，使这些输出数据彼此关联。该方法可用于重建表征入射引力波的参数。

受外力密度$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$作用的固体，其位移矢量场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$的运动方程为 [49]

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - (\lambda_L + \mu_L)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) - \mu_L \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{25}$$

其中，λ_L 和 μ_L 分别是材料的切向和体积拉梅系数。初始条件为$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ 以及 $\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, 0) = 0$。方程（25）的解可通过将位移向量$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$展开为方程的特征函数 $\boldsymbol{\Psi}_N(\boldsymbol{x})$级数得到

$$(\lambda_L + \mu_L)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})) + \mu_L \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) = -\rho^2 \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) \tag{26}$$

su在球体表面满足无张力边界条件 [50]

$$\lambda_L(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u})\hat{\boldsymbol{r}} + 2\mu_L(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \mu_L \hat{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) = 0. \tag{27}$$

位移矢量场可以展开为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_N a_N(t) \boldsymbol{\Psi}_N(\boldsymbol{x}), \tag{28}$$

其中 N 是一组指标，$a_N(t)$ 是随时间变化的模态振幅，$\boldsymbol{\Psi}_N$ 满足归一化条件

$$\int_V \rho(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\Psi}_N(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\Psi}_{N'}(\boldsymbol{x}) d^3x = M_S \delta_{NN'}. \tag{29}$$

积分是在球体的体积V 上进行的。将 (26) 和 (28) 代入 (25)，乘以 $\boldsymbol{\Psi}_{N'}$，并利用 (29) 对球体的体积积分后，我们得到

$$M_S \ddot{a}_N(t) + \kappa_S a_N(t) = \int_V \boldsymbol{\Psi}_N(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) d^3x \tag{30}$$

其中 κ_S 为弹性常数。
此时，在方程(30)中引入阻尼项较为方便

$$M_S \ddot{a}_N(t) + C_S \dot{a}_N(t) + \kappa_S a_N(t) = \int_V \mathbf{\Psi}_N(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) d^3x, \tag{31}$$

其中$C_S = w_N/Q_N$，w_N 为模态N 的固有角频率，而Q_N 为模态Q N的机械品质因数。参数的数值见表（I）。

A. 未耦合球体

方程(26)在其表面满足无张力边界条件时，其解即为球体的固有模态。它们由两类解构成：环向模态 $\mathbf{\Psi}^T{}_{n\ell m}$ 和椭球模态 $\mathbf{\Psi}_{n\ell m}$ （见 [51]）。我们在此用第(C)节定义的矢量球谐函数重写该解。对于环向模态，在耦合球体的情况下，它们不会使换能器产生径向运动，因此 Schenberg 探测器对其不敏感；此外，引力波也不会激发这些模态。

1. 椭球模态

椭球模态由下式给出

$$\mathbf{\Psi}_{n\ell m}(\boldsymbol{x}) = A_{n\ell}(r) \boldsymbol{Y}^L_{\ell m}(\theta, \phi) + B_{n\ell}(r) \sqrt{\ell(\ell+1)} \boldsymbol{Y}^E_{\ell m}(\theta, \phi), \tag{32}$$

其中

$$A_{n\ell}(r) = C_{n\ell} \left[\beta_3(k_{n\ell}R) j'_\ell(q_{n\ell}r) - \ell(\ell+1) \frac{q_{n\ell}}{k_{n\ell}} \beta_1(q_{n\ell}R) \frac{j_\ell(k_{n\ell}r)}{k_{n\ell}r} \right] \tag{33}$$

$$B_{n\ell}(r) = C_{n\ell} \left[\beta_3(k_{n\ell}R) \frac{j_\ell(q_{n\ell}r)}{q_{n\ell}r} - \frac{q_{n\ell}}{k_{n\ell}} \beta_1(q_{n\ell}R) \beta_5(k_{n\ell}r) \right]. \tag{34}$$

横波矢量 $k_{n\ell}$、纵波矢量 $q_{n\ell}$ 和固有角频率 $w_{n\ell} = 2\pi f_{n\ell}$ 是以下方程组的解

$$\det \begin{bmatrix} \beta_4(qR) & \ell(\ell+1)\beta_1(kR) \\ \beta_1(qR) & \beta_3(kR) \end{bmatrix} = 0 \tag{35}$$

$$qc_l = w \tag{36}$$

$$kc_t = w, \tag{37}$$

其中，β 的表达式为

$$\beta_0(z) = \frac{j_\ell(z)}{z^2} \tag{38}$$

$$\beta_1(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{j_\ell(z)}{z}\right) \tag{39}$$

$$\beta_2(z) = \frac{d^2 j_\ell(z)}{dz^2} \tag{40}$$

$$\beta_3(z) = \frac{1}{2}\beta_2(z) + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{2} - 1\right)\beta_0(z) \tag{41}$$

$$\beta_4(z) = \beta_2(z) - \frac{\sigma}{1-2\sigma} j_\ell(z) \tag{42}$$

$$\beta_5(z) = \frac{1}{z}\frac{d}{dz}(z j_\ell(z)). \tag{43}$$

系数c_l 和c_t 分别为纵向

$$c_l = \sqrt{\frac{\mu_L}{\rho}}\sqrt{\frac{2-2\sigma}{1-2\sigma}} \tag{44}$$

和横波

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu_L}{\rho}} \tag{45}$$

弹性波的速度。我们定义比值

$$\delta = \frac{c_l}{c_t}. \tag{46}$$

其中， ρ 是球体的密度， σ是泊松比。泊松比可用纵波与横波声速之比表示

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{\delta^2 - 2}{\delta^2 - 1}. \tag{47}$$

方程组（35、36、37）的解仅取决于c_l 和c_t，因此利用测得的单极频率和四极频率值，我们能够确定它们。结果见表（I）。

泊松比与杨氏模量E 以及拉梅系数λ_L 和μ_L 之间的关系为

$$\frac{\lambda_L}{\mu_L} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma} \qquad \mu_L = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \tag{48}$$

B. 天线参数（4开尔文）

线性热膨胀随温度变化的关系由 [52, 53] 给出

$$\alpha_{\text{lin}}(T) = \alpha_0 \frac{\rho}{3BA}\left(\gamma c_V^{\text{ion}}(T) + \frac{2}{3}c_V^{\text{el}}(T)\right), \tag{49}$$

其中， α_0 是一个常数，使得 $\alpha_{\text{lin}}(273.15) = 1.75 \times 10^{-5}\text{K}^{-1}$ [54]； A 是 CuAl6 原子质量的加权平均值（单位：kg）， B是体积模量

$$B = \frac{E}{3(1-2\sigma)} = \frac{2\rho c_t^2(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)} \tag{50}$$

且 γ 是　　CuAl6 格吕奈森系数的加权平均值。晶格比热 i　　s

$$c_V^{\text{ion}}(T) = 3R_G f_D\left(\frac{\Theta_D}{T}\right), \tag{51}$$

其中 R_G 是气体常数，　Θ_D 是 CuAl6 德拜温度的加权平均值。德拜函数为

$$f_D(y) = \frac{3}{y^3}\int_0^y \frac{\mathrm{e}^x x^4}{(\mathrm{e}^x-1)^2}dx. \tag{52}$$

电子比热由下式给出

$$c_V^{\text{el}}(T) = R_G\frac{\pi^2}{2}\frac{T}{T_F} \tag{53}$$

其中 T_F 是 CuAl6 费米温度的加权平均值。因此，4开尔文时的半径为

$$R = R_0 + R_0\int_{300}^{4}\alpha_{lin}(T)dT. \tag{54}$$

根据 CuAl6 在 300 K 和 2 K 时的测量值，并采用单极模的频率和四极模的平均频率，计算 c_l 和 c_t后，我们便能够计算 4开尔文时的球体半径。求解时必须考虑线膨胀系数取决于泊松比，方程（35、36、37）也取决于泊松比。采用此方法可以计算 CuAl6 的物理常数。结果见表（I）。

C. 与换能器耦合的天线

为了探测引力波，六个两级换能器与 Schenberg 天线耦合 [10]。每个换能器级的共振频率都与第一四极模的共振频率相同$f_0 = 3205.94\text{Hz}$，并且只对球体的径向运动敏感。换能器是用于监测天线表面运动的装置。如果假设的引力波激发了球体的四极模态，相应的机械能便会从天线传递到换能器。Jonhson & Merkowitz [18] 发现，如果使用六个换能器，并将它们分别放置在投影到球体一个半球上的截角二十面体五边形面的中心，那么通过对换能器的输出进行适当的线性组合，即所谓的模通道，我们就能在引力波的球面振幅$h_m(t)$与球体的四极模之间建立直接对应关系$a_{2m}(t)$。各换能器的角度见表（II）。

Schenberg 天线采用双模参数换能器。在此模型中，换能器仅作径向运动，我们只关注 m 四极模。在均匀球体中，各模态是简并的，但在实际天线中则并非如此。

作用于球体上的力（图 3）是引力波力，其表达式为

$$\boldsymbol{f}^{GW} = \sqrt{\frac{4\pi}{15}}\rho r\ddot{h}_m(t)\left(\boldsymbol{Y}_{2m}^L + \frac{\sqrt{6}}{2}\boldsymbol{Y}_{2m}^E\right), \tag{55}$$

表 I. Schenberg 天线的参数。

描述	数值	方法
2 K 时的四极频率	3172.485, 3183.000, 3213.623, 3222.900, 3240.000 ± 0.001 赫兹	测得
300 K 下的四极频率	3045、3056、3086、3095、 3102 ± 0.5 赫兹	实测
300 K 下的单极频率	f_{10} = 6443.0 ± 0.5 赫兹	实测
300 K 时的天线半径	R_0 = 0.3233 m	测量值
天线质量	M_S = 1124千克	测量值
天线在300 K时的密度	ρ = 7938.523 ± 19千克/米^3	测得
换能器第一级质量	M_1 = 59.7100 ± 0.5 毫克	测得
换能器第二级质量	M_2 = 12.0 ± 0.5 毫克	测量值
4开尔文下的单极频率	f_{10} = 6713.42 赫兹	计算值
4开尔文时的平均四极频率	$\bar{f}_{12}$ = 3205.94 赫兹	计算得出
4开尔文时的纵向声速	c_l = 4937.6 米/秒	根据（35、36、37）计算得出
4开尔文下的横向声速	c_t = 2448.2 米/秒	使用（35、36、37）计算
273.15 开尔文下的线性热膨胀系数	$\alpha_0 = 1.75 \times 10^{-5} \mathrm{K}^{-1}$	参考文献 [54]
CuAl6 德拜温度的加权平均值	Θ_D = 319.74 开尔文	参考文献 [52]
CuAl6 费米温度的加权平均值	T_F = 84449.46 开尔文	参考文献 [52]
CuAl6 格吕奈森系数的加权平均值	γ = 1.912	参考文献 [55]
声速比	r = 2.016847	使用（46）计算
泊松比	σ = 0.337010	根据（47）计算
4 K时的球体半径	R = 0.32213 米	根据（35、36、37、54）计算
4 K时的球体密度	ρ = 8025.04 千克/米^3	计算所得
体积拉梅系数	μ_L = 48.100 GPa	使用（45）计算
切向拉梅系数	λ_L = 99.455 GPa	根据（48）计算
杨氏模量	E = 128.621 GPa	根据（48）计算
体积模量	B = 131.522 GPa	使用（50）计算
χ因子	$\chi = -0.6004$	使用（24）计算
在$r = R$处的径向分量因子	α = 2.88345	$\alpha = A_{12}(R)$
天线等效质量	M_{eq} = 340千克	$M_{\mathrm{eq}} = \frac{4\pi}{5\sigma^2} M_S$
天线有效质量	M_{eff} = 283千克	$M_{\mathrm{eff}} = \frac{5}{6} M_{\mathrm{eq}}$
换能器放大系数	放大 = $\sqrt{\frac{M_{\mathrm{eff}}}{M_2}}$ = 4740	

TA表 II. 换能器位置的极角和方位角（θ, ϕ）， $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

换能器	θ	ϕ
T3	$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}\varphi\sqrt{\varphi+2}}\right) = 79.18^{\mathrm{o}}$	0°
T6	$\arccos\left(\frac{\varphi+1}{\sqrt{3}\sqrt{\varphi+2}}\right) = 37.37^{\mathrm{o}}$	60°
T2	$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}\varphi\sqrt{\varphi+2}}\right) = 79.18^{\mathrm{o}}$	120°
T5	$\arccos\left(\frac{\varphi+1}{\sqrt{3}\sqrt{\varphi+2}}\right) = 37.37^{\mathrm{o}}$	18°
T1	$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}\varphi\sqrt{\varphi+2}}\right) = 79.18^{\mathrm{o}}$	24°
T4	$\arccos\left(\frac{\varphi+1}{\sqrt{3}\sqrt{\varphi+2}}\right) = 37.377^{\mathrm{o}}$	30°

六个换能器在位置 $\boldsymbol{x}_a$ 处对球体产生的弹簧反作用力

$$\boldsymbol{f}_1^K = \sum_{a=1}^{6} \kappa_1 (x_{1a} - u_a) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_a) \boldsymbol{e}_a, \tag{56}$$

球体上各位置处六个换能器的谐振器所产生的阻尼反作用力

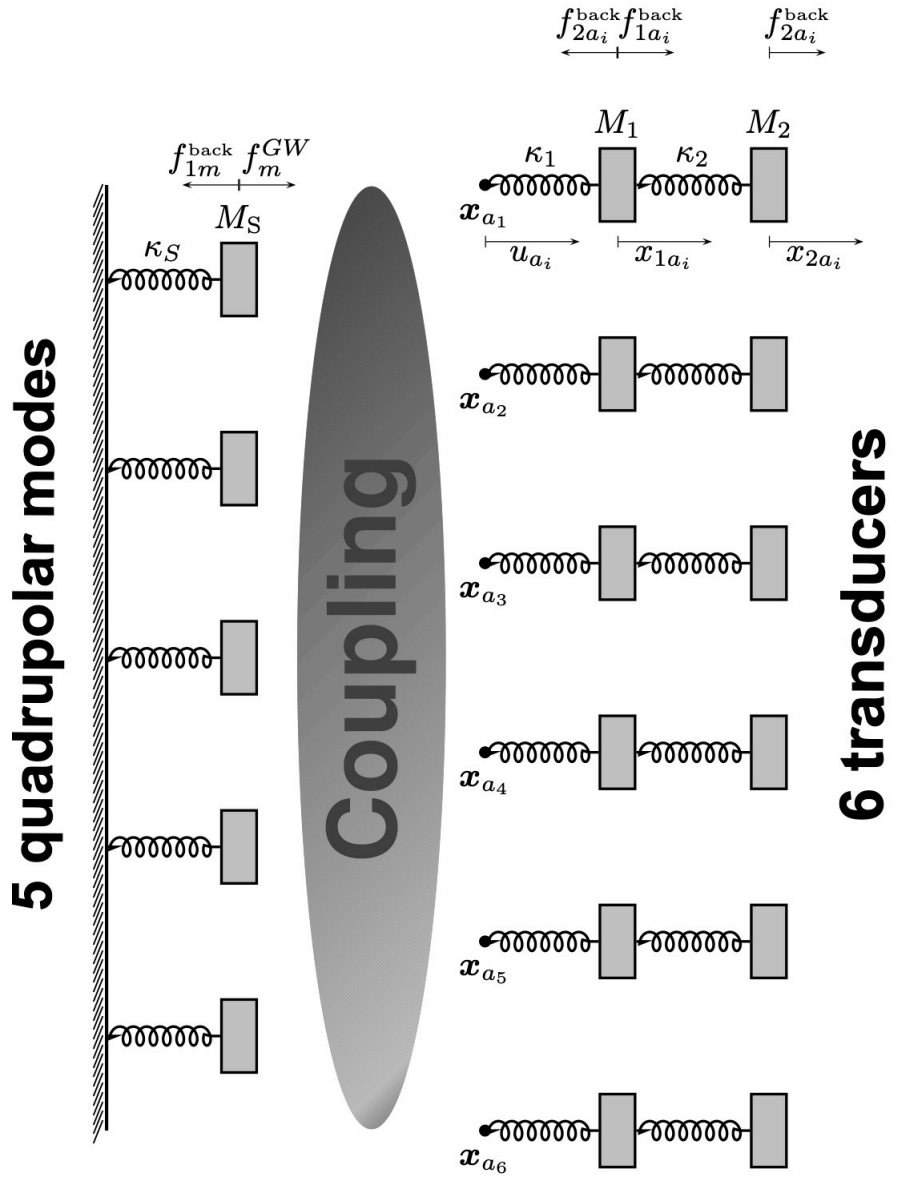

图 3. 以二维示意图表示 Schenberg 球形天线的前五个四极矩（独立）模态（左）与六个双模换能器（右）之间的三维耦合。每个换能器与球体的每个四极模的耦合程度各不相同，这取决于其在球体表面上的位置与相应四极模之间的关系。由于这些耦合，每个换能器都会输出来自全部 17 个模式的信息。

$\boldsymbol{x}_a$

$$\boldsymbol{f}_1^C = \sum_{a=1}^{6} C_1(\dot{x}_{1a} - \dot{u}_a)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_a)\boldsymbol{e}_a, \tag{57}$$

其中C_1 是第一个谐振器的阻尼项。谐振器产生的噪声反作用力为

$$\boldsymbol{f}_1^{back} = \sum_{a=1}^{6} f_{1a}^{back}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_a)\boldsymbol{e}_a, \tag{58}$$

其中x_{1a}是第一个谐振器相对于其平衡位置的位移，$\boldsymbol{e}_a$是球体上位置$\boldsymbol{x}_a$处的径向单位矢量，而u_a是球体在$\boldsymbol{x}_a$处的形变，其表达式如下（为方便起见，此处重复列出）

$$u_a = \sum_{m=-2}^{2} a_m(t)\boldsymbol{\Psi}_m(\boldsymbol{x}_a)\cdot\boldsymbol{e}_a. \tag{59}$$

方程 r $\boldsymbol{\Psi}_m$（方程(32)）在此改写为$n = 1, \ell = 2$、$A_{12}(r) = \alpha(r)$和$B_{12} = \beta(r)$

$$\boldsymbol{\Psi}_m(\boldsymbol{x}) = \alpha(r)\boldsymbol{Y}_m^L(\theta,\phi) + \beta(r)\sqrt{6}\boldsymbol{Y}_m^E(\theta,\phi), \tag{60}$$

因此，对于u_a，有

$$u_a = \alpha(R)\sum_{m=-2}^{2} a_m(t)Y_m(\theta_a,\phi_a) = \alpha(R)\sum_{m=-2}^{2} a_m(t)B_{ma}. \tag{61}$$

用矩阵记法表示为

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{B}^T\mathbf{a}, \tag{62}$$

其中 $\alpha = \alpha(R)$以及粗体字母均为矩阵，每个矩阵元素代表一个换能器。球体表面位移$\mathbf{u}$ 的运动方程见第(B)节。

作用于第一个谐振器的力包括：第一个谐振器与球体之间的噪声力 f_1^{back}、谐振器1与谐振器2之间噪声力的反作用 $-\mathrm{f}$ back 2、弹簧2对谐振器1的反作用 $\mathrm{f}_2^{\kappa} = \kappa_2(\mathrm{x}_{2a} - \mathrm{x}_{1a})$、弹簧2的阻尼反作用 $\mathrm{f}_2^C = \mathrm{C}_2(\dot{\mathrm{x}}_{2a} - \dot{\mathrm{x}}_{1a})$、弹簧1的作用力 $-\mathrm{f}_1^{\kappa} = -\kappa_1(\mathrm{x}_{1a} - \mathrm{u}_a)$、弹簧1的阻尼 $-\mathrm{f}\,\mathrm{C}_1 = -\mathrm{C}_1(\dot{\mathrm{x}}_{1a} - \dot{\mathrm{u}}_a)$。作用于谐振器2的力包括：谐振器1与谐振器2之间的噪声力 f back 2、弹簧2的反作用力 $-\mathrm{f}_2^{\kappa} = -\kappa_1(\mathrm{x}_{2a} - \mathrm{x}_{1a})$、弹簧2的阻尼 $-\mathrm{f}_2^C$。系统的方程为

$$M_S\ddot{a}_m(t) = -C_S\dot{a}_m(t) - \kappa_S a(t) + \int \boldsymbol{\Psi}_m(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)d^3x \tag{63}$$

$$M_1\ddot{x}_{1a} = f_{1a}^{back} - f_{2a}^{back} - \kappa_1(x_{1a}-u_a) - C_1(\dot{x}_{1a}-\dot{u}_a) + \kappa_2(x_{2a}-x_{1a}) + C_2(\dot{x}_{2a}-\dot{x}_{1a}) \tag{64}$$

$$M_2\ddot{x}_{2a} = \boldsymbol{f}_{返回\,2a} - \kappa_2(x_{2a}-x_{1a}) - C_2(\dot{x}_{2a}-\dot{x}_{1a}), \tag{65}$$

其中$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ t) = \boldsymbol{f}_1^{\kappa}(\boldsymbol{x},\ t) + \boldsymbol{f}_{C1}(\boldsymbol{x},\ t) - \boldsymbol{f}_{返回\,1}(\boldsymbol{x},\ t) + \boldsymbol{f}_{引力波}(\boldsymbol{x},\ t)$ 分别是作用于球体表面的表面力和引力波力。换能器频率经过调谐，使其与均匀球体的四极模频率w_0 保持一致，从而

$$\frac{\kappa_S}{M_S} = \frac{\kappa_1}{M_1} = \frac{\kappa_2}{M_2} = w_0^2. \tag{66}$$

对于实际天线，我们将w_0 取为测得的四极模频率w_m的平均值。为使能量从球体最大程度地传递到谐振器，质量需满足关系式 [56]

$$\frac{M_1}{M_{\mathrm{eff}}} = \frac{M_2}{M_1} = \mu^2, \tag{67}$$

其中，天线的有效质量M_{eff} 在附录 (A) 中计算。方程 (63) 中的积分可写为

$$\int \mathbf{\Psi}_m(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) d^3x = \int \mathbf{\Psi}_m \cdot \boldsymbol{f}_1^{\kappa} d^3x + \int \mathbf{\Psi}_m \cdot \boldsymbol{f}_1^{C} d^3x - \int \mathbf{\Psi}_m \cdot \boldsymbol{f}_1^{back} d^3x + \int \mathbf{\Psi}_m \cdot \boldsymbol{f}_m^{GW} d^3x. \tag{68}$$

右侧的第一个积分为

$$\int \mathbf{\Psi}_m \cdot \boldsymbol{f}_1^{\kappa} d^3x = \kappa_1 \alpha \sum_{a=1}^{N} Y_m(\theta_a, \phi_a) q_{1a} = \kappa_1 \alpha \sum_{a=1}^{N} B_{ma} q_{1a} = \kappa_1 \alpha [\mathbf{B}\mathbf{q}_1]_m. \tag{69}$$

类似地，第二个积分为

$$\int \mathbf{\Psi}_m \cdot \boldsymbol{f}_1^{C} d^3x = C_1 \alpha \sum_{a=1}^{N} Y_m(\theta_a, \phi_a) \dot{q}_{1a} = C_1 \alpha [\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1]_m \tag{70}$$

第三个积分为

$$\int \mathbf{\Psi}_m \cdot \boldsymbol{f}_1^{back} d^3x = \alpha \sum_{a=1}^{N} Y_m(\theta_a, \phi_a) f_{1a}^{back} = \alpha [\mathbf{B}\mathbf{f}_1^{back}]_m, \tag{71}$$

其中 $q_{1a} = x_{1a} - u_a$ 和 $q_{2a} = x_{2a} - x_{1a}$，第四个为方程 (24)。结果为

$$\int \mathbf{\Psi}_m(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) d^3x = \kappa_1 \alpha [\mathbf{B}\mathbf{q}_1]_m + C_1 \alpha [\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1]_m - \alpha [\mathbf{B}\mathbf{f}_1^{back}]_m + f_m^{GW}(t). \tag{72}$$

从现在起，我们将使用列矩阵

$$\mathbf{f}^{GW}(t) = \begin{pmatrix} f_{-2}^{GW}(t) \\ f_{-1}^{GW}(t) \\ f_{0}^{GW}(t) \\ f_{1}^{GW}(t) \\ f_{2}^{GW}(t) \end{pmatrix}. \tag{73}$$

用新变量和矩阵记法表示的方程为

$$\begin{aligned} M_S \ddot{\mathbf{a}} + C_S \dot{\mathbf{a}} + \kappa_S \mathbf{a} - C_1 \alpha \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1 - \kappa_1 \alpha \mathbf{B}\mathbf{q}_1 &= \mathbf{f}^{GW} - \alpha \mathbf{B}\mathbf{f}_1^{back} \\ M_1 \alpha \mathbf{B}^T \ddot{\mathbf{a}} + M_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + M_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + C_1 \dot{\mathbf{q}}_1 - C_2 \dot{\mathbf{q}}_2 + \kappa_1 \mathbf{q}_1 - \kappa_2 \mathbf{q}_2 &= \mathbf{f}_1^{back} - \mathbf{f}_2^{back} \\ M_2 \alpha \mathbf{B}^T \ddot{\mathbf{a}} + M_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 + M_2 \ddot{\mathbf{q}}_1 + M_2 \ddot{\mathbf{q}}_1 + M_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 + C_2 \dot{\mathbf{q}}_2 - C_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \kappa_2 \mathbf{q}_2 - \kappa_1 \mathbf{q}_1 &= \mathbf{f}_2^{back}. \end{aligned} \tag{74}$$

用分块矩阵记法表示为

$$\begin{bmatrix} M_S \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ M_1 \alpha \mathbf{B}^T & M_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ M_2 \alpha \mathbf{B}^T & M_2 \mathbf{I} & M_2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{a}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{Diag}(C_{iS}) & -C_1 \alpha \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_1 \mathbf{I} & -C_2 \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{Diag}(k_{iS}) & -k_1 \alpha \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_1 \mathbf{I} & -k_2 \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\alpha \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{GW} \\ \mathbf{f}_1^{back} \\ \mathbf{f}_2^{back} \end{bmatrix}. \tag{75}$$

这些方程可以用块矩阵重写为

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}'\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}'\mathbf{q} = \mathbf{P}\mathbf{f}. \tag{76}$$

从现在起，我们使 用无衬线粗体字母表示块矩阵。这里$\mathbf{q}$ 是位移矩阵

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}, \tag{77}$$

其中，$\mathbf{a}_{5\times1}$ 是天线的模态振幅，$\mathbf{q}_{16\times1}$ 和$\mathbf{q}_{26\times1}$ 分别是每个换能器中谐振器1和谐振器2的相对位移向量。质量矩阵为

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} M_S\,\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ M_1\alpha\mathbf{B}^T & M_1\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ M_2\alpha\mathbf{B}^T & M_2\mathbf{I} & M_2\mathbf{I} \end{bmatrix}, \tag{78}$$

其中，$\mathbf{B}_{5\times6}$ 是模型矩阵。让我们用有效质量及比值 μ 和

$$\nu^2 = \frac{M_S}{M_{\text{eff}}}. \tag{79}$$

我们有

$$\mathbf{M}' = M_{\text{eff}}\begin{bmatrix} \nu^2\,\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mu^2\alpha\mathbf{B}^T & \mu^2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mu^4\alpha\mathbf{B}^T & \mu^4\mathbf{I} & \mu^4\mathbf{I} \end{bmatrix} = M_{\text{eff}}\mathbf{M} \tag{80}$$

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \text{Diag}(k_{iS}) & -k_1\alpha\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_1\mathbf{I} & -k_2\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_2\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{81}$$

or

$$\mathbf{K}' = M_{\text{eff}}w_0^2\begin{bmatrix} \nu^2\text{Diag}\left(\frac{w_m^2}{w_0^2}\right) & -\mu^2\alpha\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu^2\mathbf{I} & -\mu^4\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mu^4\mathbf{I} \end{bmatrix} = M_{\text{eff}}w_0^2\mathbf{K} \tag{82}$$

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \text{Diag}(C_{iS}) & -C_1\alpha\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_1\mathbf{I} & -C_2\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_2\mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{83}$$

正如我们将在第 IV D 节中看到的，将这个矩阵写成以下形式会很方便:

$$\mathbf{C}' = M_{\text{eff}}\begin{bmatrix} 2\nu^2\text{Diag}(\beta_m) & -2\mu^2\beta_1\alpha\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mu^2\beta_1\mathbf{I} & -2\mu^4\beta_2\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2\mu^4\beta_2\mathbf{I} \end{bmatrix}, \tag{84}$$

其中 $2\beta_m = w_m/Q$、 $2\beta_1 = w_0/Q_1$ 和 $2\beta_2 = w_0/Q_2$，中，Q_1 和 Q_2 是谐振器的品质因数（图 3）。这个矩阵还可以写成

$$\mathbf{C}' = M_{\text{eff}}\frac{w_0}{Q}\begin{bmatrix} \nu^2\text{Diag}\left(\frac{w_mQ}{w_0Q_m}\right) & -\mu^2\frac{Q}{Q_1}\alpha\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu^2\frac{Q}{Q_1}\mathbf{I} & -\mu^4\frac{Q}{Q_2}\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mu^4\frac{Q}{Q_2}\mathbf{I} \end{bmatrix} = M_{\text{eff}}\frac{w_0}{Q}\mathbf{C}. \tag{85}$$

此时我们知道

$$\mathrm{Diag}\left(\frac{w_n}{w_0}\right) \approx \mathrm{Diag}\left(\frac{w_n^2}{w_0^2}\right) \approx \mathbf{I}, \tag{86}$$

如果我们近似认为

$$\frac{Q}{Q_m} = 1 \qquad \frac{Q}{Q_1} = 1 \qquad \frac{Q}{Q_2} = 1 \tag{87}$$

我们得到

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \nu^2\mathbf{I} & -\mu^2\alpha\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu^2\mathbf{I} & -\mu^4\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mu^4\mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{88}$$

那么，将$\mathbf{C} = \mathbf{K}$视为合理。矩阵$\mathbf{P}$ 为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\alpha\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{89}$$

及其逆矩阵

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \alpha\mathbf{B} & \alpha\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{90}$$

力矩阵为

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{GW} \\ \mathbf{f}_1^{back} \\ \mathbf{f}_2^{back} \end{bmatrix}. \tag{91}$$

于是运动方程为

$$M_{\mathrm{eff}}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + M_{\mathrm{eff}}\frac{w_0}{Q}\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + M_{\mathrm{eff}}w_0^2\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}\mathbf{f}. \tag{92}$$

我们需要将矩阵 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 对角化，但这个矩阵不是对称矩阵。为了使其对称，我们改变定义$\mathbf{q} = \mathbf{N}\mathbf{y}$ 的坐标，其中

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}/\nu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}/\mu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}/\mu^2 \end{bmatrix} \tag{93}$$

并左乘$\mathbf{N}$

$$M_{\mathrm{eff}}\mathbf{NMN}\ddot{\mathbf{y}} + M_{\mathrm{eff}}\frac{w_0}{Q}\mathbf{NKN}\dot{\mathbf{y}} + M_{\mathrm{eff}}w_0^2\mathbf{NKN}\mathbf{y} = \mathbf{NP}\mathbf{f}. \tag{94}$$

将方程两边乘以$(\mathbf{NMN})^{-1}$ 并定义 $2\beta = {}^{w^0}{}_{Q}$，我们得到 — t

$$M_{\mathrm{eff}}\ddot{\mathbf{y}} + 2\beta M_{\mathrm{eff}}(\mathbf{NMN})^{-1}\mathbf{NCN}\dot{\mathbf{y}} + M_{\mathrm{eff}}w_0^2(\mathbf{NMN})^{-1}\mathbf{NKN}\mathbf{y} = (\mathbf{NMN})^{-1}\mathbf{NP}\mathbf{f}. \tag{95}$$

定义变量 $\mathbf{M}_y$、$\mathbf{K}_y$ 和$\mathbf{P}_y$，其中下标表示这些矩阵属于$\mathbf{y}$的方程。于是方程可写为

$$M_{\text{eff}}\ddot{\mathbf{y}} + 2\beta M_{\text{eff}}\mathbf{C}_y\dot{\mathbf{y}} + M_{\text{eff}}w_0^2\mathbf{K}_y\mathbf{y} = \mathbf{P}_y\mathbf{f}, \tag{96}$$

其中

$$\mathbf{C}_y = (\mathbf{NMN})^{-1}\mathbf{NCN} = \begin{pmatrix} \operatorname{diag}\frac{w_nQ}{w_0Q_n} & -\gamma\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ -\gamma\mathbf{B}^T\operatorname{diag}\frac{w_nQ}{w_0Q_n} & \left(\frac{3\gamma^2}{2\pi}+1\right)\mathbf{I} - \frac{\gamma^2}{4\pi}\mathbf{1} & -\mu\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} & (\mu^2+1)\mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{97}$$

$$\mathbf{K}_y = (\mathbf{NMN})^{-1}\mathbf{NKN} = \begin{pmatrix} \operatorname{diag}\frac{w_n^2}{w_0^2} & -\gamma\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ -\gamma\mathbf{B}^T\operatorname{diag}\frac{w_n^2}{w_0^2} & \left(\frac{3\gamma^2}{2\pi}+1\right)\mathbf{I} - \frac{\gamma^2}{4\pi}\mathbf{1} & -\mu\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} & (\mu^2+1)\mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{98}$$

其中 $\gamma = \alpha\mu/\nu$，而$\mathbf{1}$ 是一个元素全为 1 的矩阵

$$(\mathbf{NMN})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\gamma\mathbf{B}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mu & \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{99}$$

$$\mathbf{P}_y = (\mathbf{NMN})^{-1}\mathbf{NP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu}\mathbf{I} & -\frac{\gamma}{\mu}\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ -\frac{\gamma}{\nu}\mathbf{B}^T & \left(\frac{3\gamma^2}{2\pi\mu}+\frac{1}{\mu}\right)\mathbf{I} - \frac{\gamma^2}{4\pi\mu}\mathbf{1} & -\frac{1}{\mu}\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)\mathbf{I} \end{pmatrix}. \tag{100}$$

此时需要进行一些近似。可以看出，K_y 并非对称矩阵，但我们也知道，$\operatorname{diag}(\mathrm{w}_n^2/\mathrm{w}_0^2) \approx \mathrm{I}$。因此，在矩阵 K_{y21} 中，我们将 $\operatorname{diag}(\mathrm{w}_n^2/\mathrm{w}_0^2) = \mathrm{I}$ 作为近似。另一方面，如果要用同一个矩阵 U 将阻尼矩阵 C_y 对角化（该矩阵 U 也用于将 K_y 对角化），我们在矩阵 C_{y21} 中采用近似 $\mathrm{Q}/\mathrm{Q}_n = 1$和 $\operatorname{diag}(\mathrm{w}_n/\mathrm{w}_0) = \mathrm{I}$，并在矩阵 C_{y11} 中采用近似 $\mathrm{Q}/\mathrm{Q}_n = \mathrm{w}_n/\mathrm{w}_0$。这样 $\mathrm{C}_y = \mathrm{K}_y$，并且两个矩阵都能用同一个矩阵 U 对角化。于是方程可写为

$$M_{\text{eff}}\ddot{\mathbf{y}} + M_{\text{eff}}2\beta\mathbf{K}_y\dot{\mathbf{y}} + M_{\text{eff}}w_0^2\mathbf{K}_y\mathbf{y} = \mathbf{P}_y\mathbf{f}. \tag{101}$$

为使用模态矩阵$\mathbf{U}$将$\mathbf{K}_y$ 对角化，我们定义$\mathbf{y} = \mathbf{Uz}$，在方程两边左乘$\mathbf{U}^T$，并进行傅里叶变换。结果为

$$-M_{\text{eff}}w^2\tilde{\mathbf{z}} + M_{\text{eff}}2\beta jw\mathbf{D}\tilde{\mathbf{z}} + M_{\text{eff}}w_0^2\mathbf{D}\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{U}^T\mathbf{P}_y\tilde{\mathbf{f}}, \tag{102}$$

其中$\mathbf{D}$ 是由$\mathbf{D} = \mathbf{U}^T\mathbf{K}_y\mathbf{U}$ 给出的对角矩阵，带波浪号的变量表示相应变量的傅里叶变换。为使符号更简洁，有些情况下我们省略了w 依赖关系。定义该对角矩阵

$$\mathbf{L}(w) = (-M_{\text{eff}}w^2\mathbf{I} + M_{\text{eff}}2\beta jw\mathbf{D} + M_{\text{eff}}w_0^2\mathbf{D}) \tag{103}$$

我们得到

$$\mathbf{L}(w)\tilde{\mathbf{z}}(w) = \mathbf{U}^T\mathbf{P}_y\tilde{\mathbf{f}}(w). \tag{104}$$

反演得出 $\tilde{\mathbf{z}}$

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{L}^{-1}(w)\mathbf{U}^T\mathbf{P}_y\tilde{\mathbf{f}}, \tag{105}$$

其中

$$\mathbf{L}^{-1}(w)=\frac{1}{M_{\text{eff}}}\text{Diag}\left(\frac{1}{-w^2+(2j\beta w+w_0^2)D_{11}},\cdots,\frac{1}{-w^2+(2j\beta w+w_0^2)D_{1717}}\right). \tag{106}$$

换回原变量后，我们得到

$$\tilde{\mathbf{q}}=\mathbf{NUL}^{-1}(w)\mathbf{U}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}\tilde{\mathbf{f}}. \tag{107}$$

˜输入**f** 的传递函数为

$$\mathbf{G}(w)=\mathbf{NUL}^{-1}(w)\mathbf{U}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}, \tag{108}$$

其中，分块矩阵**G** 可写为

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}\mathbf{G}_{00} & \mathbf{G}_{01} & \mathbf{G}_{02}\\ \mathbf{G}_{10} & \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12}\\ \mathbf{G}_{20} & \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22}\end{pmatrix}. \tag{109}$$

于是，方程（107）可写为

$$\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{a}}\\ \tilde{\mathbf{q}}_1\\ \tilde{\mathbf{q}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{G}_{00} & \mathbf{G}_{01} & \mathbf{G}_{02}\\ \mathbf{G}_{10} & \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12}\\ \mathbf{G}_{20} & \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{f}}_0\\ \tilde{\mathbf{f}}_1\\ \tilde{\mathbf{f}}_2\end{pmatrix}. \tag{110}$$

D. 经典噪声功率谱矩阵

在本文中，我们假设噪声是一个遍历广义平稳随机过程，并在时间区间T_o内进行分析。设$x(t)$是满足这些条件的过程，其傅里叶变换为 ˜$x(w)$，则x 的功率谱密度（PSD）计算如下（详情参见 Whalen 第（2）章 [57] 和 Maggiore [50] ）

$$S_{xx}=E[\tilde{x}(w)\tilde{x}(w)^*]T_o. \tag{111}$$

我们的系统受到热噪声力$\boldsymbol{f}_{\text{th}}$、作用于膜的反作用力$\boldsymbol{f}_{\text{bk}}$、串联力$\boldsymbol{f}_{\text{se}}$ 和相位力$\boldsymbol{f}_{\text{ph}}$的干扰。测量量是系统的输出$\mathbf{q}_2$（传感器膜）

$$\tilde{\mathbf{q}}_2=\mathbf{G}_{20}\tilde{\mathbf{f}}_0+\mathbf{G}_{21}\tilde{\mathbf{f}}_1+\mathbf{G}_{22}\tilde{\mathbf{f}}_2+\mathbf{G}_{22}\tilde{\mathbf{f}}_{bk}+\tilde{\mathbf{f}}_{se}+\tilde{\mathbf{f}}_{ph}. \tag{112}$$

输出$\mathbf{q}_2$ 的功率谱密度为，假设不同类型的噪声力彼此不相关˜，且这些力**f** 源于热噪声

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{qq}&=\mathbf{G}_{20}E[\tilde{\mathbf{f}}_0\tilde{\mathbf{f}}_0^\dagger]\mathbf{G}_{20}^\dagger+\mathbf{G}_{21}E[\tilde{\mathbf{f}}_1\tilde{\mathbf{f}}_1^\dagger]\mathbf{G}_{21}^\dagger+\mathbf{G}_{22}E[\tilde{\mathbf{f}}_2\tilde{\mathbf{f}}_2^\dagger]\mathbf{G}_{22}^\dagger+\mathbf{G}_{22}E[\tilde{\mathbf{f}}_{bk}\tilde{\mathbf{f}}_{bk}^\dagger]\mathbf{G}_{22}^\dagger+E[\tilde{\mathbf{f}}_{se}\tilde{\mathbf{f}}_{se}^\dagger]+E[\tilde{\mathbf{f}}_{ph}\tilde{\mathbf{f}}_{ph}^\dagger]\\&=\mathbf{G}_{20}\mathbf{S}_{f_0f_0}\mathbf{G}_{20}^\dagger+\mathbf{G}_{21}\mathbf{S}_{f_1f_1}\mathbf{G}_{21}^\dagger+\mathbf{G}_{22}\mathbf{S}_{f_2f_2}\mathbf{G}_{22}^\dagger+\mathbf{G}_{22}\mathbf{S}_{bk}\mathbf{G}_{22}^\dagger+\mathbf{S}_{se}+\mathbf{S}_{ph}.\end{aligned} \tag{113}$$

热噪声功率谱基于涨落耗散定理，该定理指出，给定一个具有方程的系统

$$\mathbf{L}(w)\tilde{\mathbf{z}}=\tilde{\mathbf{f}} \tag{114}$$

涨落力的功率谱<行间公式 id='1'>f</行间公式>表示为

$$\mathbf{S}_{ff}=4k_BT\text{Re}[\mathcal{Z}(w)], \tag{115}$$

其中，Z 是系统的阻抗，表示为

$$\mathcal{Z}(w) = \frac{\mathbf{L}(w)}{jw}. \tag{116}$$

在我们的情形中，有

$$\mathbf{S}_{th} = 4k_B T \mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{L}(w)}{jw}\right]. \tag{117}$$

但由方程(76)和方程(83)可得

$$\mathbf{S}_{th} = 4k_B T \mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}' = 4k_B T \begin{pmatrix} M_S \frac{w_0}{Q}\mathbf{I}_{5\times5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_1 \frac{w_0}{Q_1}\mathbf{I}_{6\times6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_2 \frac{w_0}{Q_1}\mathbf{I}_{6\times6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{f_0 f_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{f_1 f_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{f_2 f_2} \end{pmatrix} \qquad [\mathrm{N}^2/\mathrm{Hz}]. \tag{118}$$

作用于膜的反作用噪声力为 [58]

$$\mathbf{S}_{bk} = \frac{P_{\mathrm{inc}}^2 S_{\mathrm{am}}}{2w_p^2}\left(\frac{2Q_e}{f_p}\frac{df}{dx}\right)^2 \mathbf{I}_{6\times6} \qquad [\mathrm{N}^2/\mathrm{Hz}], \tag{119}$$

直接作用于输出的串联噪声为

$$\mathbf{S}_{se} = \frac{(T_{\mathrm{amp}} + T)k_B}{P_{\mathrm{inc}}}\left(\frac{2Q_e}{f_p}\frac{df}{dx}\right)^{-2} \mathbf{I}_{6\times6} \qquad [\mathrm{m}^2/\mathrm{Hz}] \tag{120}$$

同样直接作用于输出的相位噪声为

$$\mathbf{S}_{ph} = S_{pph}\left(\frac{2\pi}{w}\frac{df}{dx}\right)^{-2} \mathbf{I}_{6\times6} \qquad [\mathrm{m}^2/\mathrm{Hz}]. \tag{121}$$

E. 标准量子极限噪声

在下一节中，我们将推导标准量子噪声的表达式。这将使我们能够得到 Schenberg 探测器的标准量子极限。对于最优滤波器（匹配滤波器），功率信噪比 ρ^2 为 [59]

$$\rho^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(w)|^2}{S_{nn}^{\mathrm{ds}}(w)} dw, \tag{122}$$

其中，$M(w)$ 是感兴趣信号的傅里叶变换，而 $S_{nn}^{\mathrm{ds}}(w)$ 是噪声的双边功率谱密度。我们的信号是由球面振幅$\mathbf{h}(t)$ 构成的向量。使用单边功率谱密度矩阵$\mathbf{S}_{nn}(w)$，功率信噪比的表达式变为

$$\rho^2 = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{h}}^{\dagger}(w)\mathbf{S}_{nn}^{-1}(w)\tilde{\mathbf{h}}(w) dw. \tag{123}$$

~对于持续时间为 $\tau_g \approx 1$ 毫秒的爆发信号，最大带宽频率为 $\Delta f_{\max} \approx 1$ 千赫兹，并且 $\mathbf{h}(w)$ 相较于其在探测器频带 Δf 内共振频率 f_0 处的数值变化不大。我们可以定义平均功率谱密度 S_{nn}，使得该积分可近似为

$$\rho^2 = \frac{4\Delta w}{2\pi}|\tilde{\mathbf{h}}^{\dagger}(w_0)|\left(\frac{1}{\Delta w}\int_0^{\infty}\hat{\tilde{\mathbf{h}}}^{\dagger}\mathbf{S}_{nn}^{-1}(w)\hat{\tilde{\mathbf{h}}}dw\right)|\tilde{\mathbf{h}}(w_0)| = \frac{4|\tilde{\mathbf{h}}(w_0)|^2\Delta f}{\bar{S}_{nn}}, \tag{124}$$

^其中$\mathbf{h}(w_0) = |\mathbf{h}(w_0)|\mathbf{h}$,

$$|\mathbf{h}(w_0)| = \sqrt{\sum_{m=-2}^{2} h_m^2(w_0)} \tag{125}$$

and

$$\bar{S}_{nn} = \left(\frac{1}{\Delta w}\int_0^{\infty}\hat{\tilde{\mathbf{h}}}^{\dagger}\mathbf{S}_{nn}^{-1}(w)\hat{\tilde{\mathbf{h}}}dw\right)^{-1}. \tag{126}$$

我们可以使用公式 [60]，得到 $|\mathbf{h}(w_0)|$ 作为爆发信号在球体上沉积能量的函数

$$E_s = \frac{1}{2M}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{jw_0t}dt\right|^2, \tag{127}$$

其中，$f(t)$是作用于简谐振子的外力，M 是其质量。从球体模态的运动方程（方程30）出发，根据归一化条件，模态的质量为M_S，而外力为$f(t) = \frac{1}{2}M_S\chi R\ddot{h}_m(t)$。积分后可得每个$m$模态的结果

$$E_{sm} = \frac{1}{8}M_S\chi^2R^2w_0^4|\tilde{h}_m(w_0)|^2, \tag{128}$$

而所有模态中沉积的能量为

$$E_s = \frac{1}{8}M_S\chi^2R^2w_0^4|\tilde{\boldsymbol{h}}(w_0)|^2. \tag{129}$$

当 $\rho^2 = 1$时可得到灵敏度。利用该数值，将方程(124)与方程(129)进行比较，可得以球体中沉积的能量为函数的平均功率密度谱

$$\bar{S}_{nn} = \frac{32E_s}{M_S\chi^2R^2w_0^4}. \tag{130}$$

以声子数n 表示的沉积能量为$E_s = n\hbar w_0$。量子极限下的灵敏度对应于$n = 1$

$$S_{\mathrm{SQL}} = \frac{32\hbar\Delta f}{M_S\chi^2R^2w_0^3}. \tag{131}$$

我们可以将该表达式写成四极模态的纵向声速和纵向波矢的函数$w_0 = w_{12} = q_{12}v_{\parallel}$

$$S_{\mathrm{SQL}} = \frac{32\hbar\Delta f}{M_S\chi^2(q_{12}R)^2v_{\parallel}^2w_0}. \tag{132}$$

对于处于 4开尔文 的 Schenberg，$f_0 = f_{12} = 3205.94$ 赫兹，$M_S = 1124$ 千克，$\chi = -0.6004$，$R = 32.214$ 厘米以及$\Delta f = 110$ 赫兹。使用这些数值，谱振幅为

$$h_S(w_0) = \sqrt{S_{\mathrm{SQL}}} = 3.29\times10^{-23}\ \sqrt{\mathrm{Hz}^{-1}}. \tag{133}$$

F. 经典噪声下的灵敏度

谱振幅 $h_S(w)$ 表示输入的引力波谱，该引力波谱会产生一个与在天线仪器输出端观测到的噪声谱相等的信号。
表征引力波探测器灵敏度的一种有效方法，是计算$h_S(w)$，使得经过最优滤波后，信噪比

$$\rho^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(w)dw \tag{134}$$

在每个带宽内都等于 1。这里

$$\sigma(w) = \tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\dagger}\mathbf{S}_{qq}^{-1}\tilde{\boldsymbol{q}}_2, \tag{135}$$

其中$\boldsymbol{q}_2$ 是第二个换能器的谐振器的输出，† 表示厄米共轭。探测器的灵敏度通过寻找一个振幅为$\mathbf{h}$ 的入射引力波来确定，该波在输出端产生的效果与热噪声相当，且每个带宽内的 $\rho = 1$ 为此值。换言之，我们要寻找一个$\mathbf{h}$，使得

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\dagger}\mathbf{S}_{qq}^{-1}\tilde{\boldsymbol{q}}_2 = 1 \tag{136}$$

or

$$X(w)^2\tilde{\mathbf{h}}^{\dagger}\mathbf{T_v}^{T}\mathbf{G}_{20}^{\dagger}(w)\mathbf{S}_{qq}^{-1}\mathbf{G}_{20}(w)\mathbf{T_v}\tilde{\mathbf{h}} = 1. \tag{137}$$

由于我们不知道入射波的偏振和方向，因此对所有角度取平均

$$\int_{\psi=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\tilde{\mathbf{h}}^{\dagger}\mathbf{T_v}^{T}\mathbf{G}_{20}^{\dagger}(w)\mathbf{S}_{qq}^{-1}\mathbf{G}_{20}(w)\mathbf{T_v}\tilde{\mathbf{h}}\frac{\sin\theta d\psi d\theta d\phi}{4\pi^2} = \frac{1}{X(w)^2}. \tag{138}$$

于是得到

$$\frac{1}{5}(\tilde{h}_+^2 + \tilde{h}_\times^2)\mathrm{Tr}(\mathbf{G}_{20}^{\dagger}(w)\mathbf{S}_{qq}^{-1}\mathbf{G}_{20}(w)) = \frac{1}{X(w)^2} \tag{139}$$

以及振幅谱密度 $h_S(w) = \sqrt{\tilde{h}_+^2 + \tilde{h}_\times^2}$

$$h_S(w) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{X(w)^2\mathrm{Tr}(\mathbf{G}_{20}^{\dagger}(w)\mathbf{S}_{qq}^{-1}\mathbf{G}_{20}(w))}}. \tag{140}$$

采用表（III）所给参数，实际天线的六个换能器各自针对各种噪声的灵敏度曲线如图（4）所示。对于简并球体，六个换能器各自的灵敏度曲线如图（5）所示。

Schenberg 天线的灵敏度将优于每个换能器的灵敏度。假设所有换能器的灵敏度相同，Schenberg 天线的灵敏度（h_S）将为 $(1/h_S)^2 = (1/h_{T1})^2 + (1/h_{T2})^2 + (1/h_{T3})^2 + (1/h_{T4})^2 + (1/h_{T5})^2 + (1/h_{T6})^2 = 6\times(1/h_T)^2$,这意味着 $h_S = h_T/\sqrt{6}$。

表 III. 灵敏度曲线中使用的参数。

描述	数值
温度	T = 100毫开尔文
球体机械品质因数	$Q = 1 \times 10^7$
谐振器 1 机械品质因数	$Q_1 = 1 \times 10^6$
谐振器 2 机械品质因数	$Q_2 = 1 \times 10^5$
换能器中心频率	F_T = 3206.3 赫兹
换能器负频率	F_- = 3172.5 赫兹
换能器正频率	F_+ = 3240.0 赫兹
泵浦频率	$F_{\text{pump}} = 1 \times 10^{10}$赫兹
电耦合常数	$\beta_e = 0.65$
频移与距离的关系	$\frac{df}{dx}$ = 7。26^{14} 赫兹/m
振荡器入射功率	$P_{\text{inc}} = 1 \times 10^{-10}$W
噪声放大器温度	T_{amp} = 10K
电学品质因数	Q_e = 3。8×10^5
相位噪声功率谱密度	$S_p = 1 \times 10^{-13}$ 分贝/赫兹
幅度噪声功率谱密度 $S_a = 1 \times 1$	0^{-14} 分贝/赫兹
放大器损耗	$L_{\text{amp}} = 5$

V. 讨论与结论

本研究修订了 Schenberg 天线设计中球体六个换能器各自的灵敏度计算，同时考虑了简并（理想球体）和非简并球体（频率各不相同的四极模）；这种差异是由于加工用于固定换能器的孔以及用于悬挂球体的铜杆时造成的对称性破缺。按照惯例，所有噪声均以“球体输入端”为参考点，即球体表面发生振荡运动的位置。

对于 Schenberg 天线的这一初始版本，考虑到目前可用的参数，主要噪声为布朗噪声和串联噪声。对于一个先进版本的 Schenberg 天线（aSchenberg），其可达到标准量子极限（$3.29 \times 10^{-23} sqrtHz^{-1}$），每个换能器的灵敏度将达到这一数值的– √6 倍（即 ~ $8 \times 10^{-23} sqrtHz^{-1}$）。要使每个铌换能器达到这一灵敏度，我们必须将其替换为蓝宝石或硅换能器，并在微波腔区域采用铌涂层。这样一来，机械品质因数便可达到 10^8 [61] 量级。球体则必须经过退火处理，或替换为其他材料，例如铍铜。Frossati（1996） [62] 已使小型铍铜球体的机械品质因数接近 10^8 。

对参量换能器微波速调管腔体的边缘进行倒圆处理，并使用杂质含量低于百万分之100的铌沉积，可将串联噪声降至最低，使已达到的38万电学品质因数提高10倍或更多。将信号从换能器传送至低温放大器（系统中的第一级放大器）的微波传输线损耗L_{amp} 需要降低5倍。这可以通过使用铌同轴电缆实现。最后，需要用能够将噪声温度从10 K降至1 K的电子设备替换低温放大器中使用的电子设备，

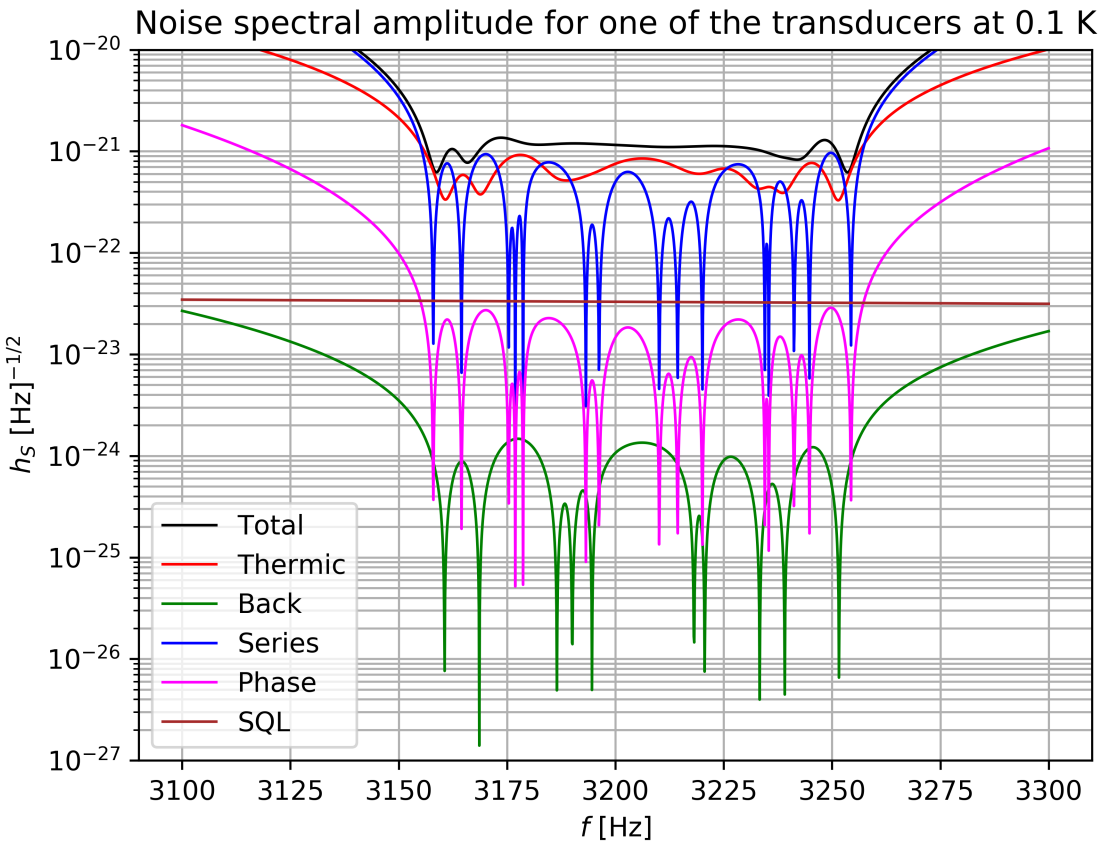

图4. Schenberg 天线六个换能器之一在 T = 0.1 K 时各种类型噪声的灵敏度曲线。

10 GHz 的工作频率。

要达到标准量子极限，需要进行上述所有改进。对于直径为0.65 cm的小型球形天线而言，这些改进颇具挑战，但并非无法实现。由于采用了参量换能器，因此可以进行信号压缩并超越标准量子极限；但这需要更高的机械和电气品质因数，以及噪声更低的电子设备，而这开始变得难以实现，甚至令人怀疑是否可行。

然而，需要注意的是，aLIGO 在 O3观测运行中达到的灵敏度已经达到这款球形天线的标准量子极限。因此，重新安装 Schenberg 天线并尝试使其达到标准量子极限灵敏度，唯一合理的理由是利用不同于激光干涉仪所采用的另一种物理原理来探测引力波。这种物理原理就是共振质量体对引力波能量的吸收。由此产生的问题是，引力波信号到达地球时是否具有足够的振幅，使工作在标准量子极限下的球形天线能够探测到它们。为回答这个问题，我们正在分析 aLIGO 的 O3 数据，分析范围为 Schenberg 天线灵敏度最高的频段：3.15 kHz 至 3.26 kHz，并搜寻各种类型的信号（爆发信号、啁啾信号、连续信号或随机信号）。我们期待在不久的将来公布这项研究的结果。

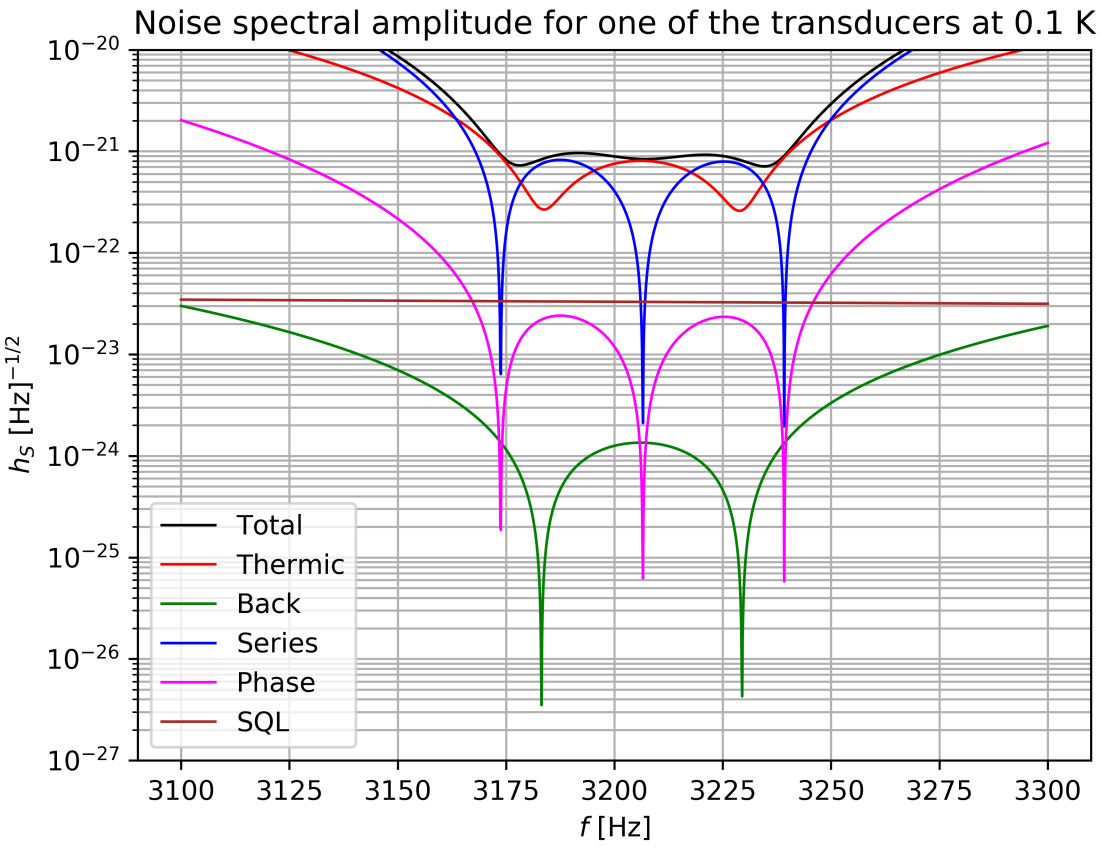

图 5. 在球体简并情形下，Schenberg 天线系统中六个换能器之一在 T = 0.1 K 时的各种噪声灵敏度曲线。

附录 A：有效质量

根据 Zhou [63]，换能器所感知到的天线有效质量，是指放置在球体表面上的质量所获得的能量与球体所具有的能量相同。我们先来计算四极模的等效质量。天线在四极模m 下的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}\int \rho \Psi_m^2 \dot{a}_m^2 d^3x = \frac{1}{2} M_S \dot{a}_m^2. \tag{A1}$$

换能器在位置a 处沿径向的表面速度，对于模态m为

$$v_{rma} = \dot{a}_m \mathbf{\Psi}_m \cdot \boldsymbol{e}_a = \dot{a}_m \alpha Y_m(\theta_a, \phi_a). \tag{A2}$$

模态m 在该位置的有效质量动能为

$$E_k = \frac{1}{2} M_m \alpha^2 Y_m^2(\theta_a, \phi_a) \dot{a}_m^2. \tag{A3}$$

比较 (A1) 和 (A3)，得到模态m的有效质量方程

$$M_S = M_m \alpha^2 Y_m^2(\theta_a, \phi_a) \tag{A4}$$

重新整理方程可得

$$\frac{M_S}{\alpha^2 M_m} = Y_m^2(\theta_a, \phi_a). \tag{A5}$$

对所有模态求和可得

$$\frac{M_S}{\alpha^2} \sum_{m=-2}^{2} \frac{1}{M_m} = \sum_{m=-2}^{2} Y_m^2(\theta_a, \phi_a). \tag{A6}$$

四极矩球谐函数的求和规则给出

$$\sum_{m=-2}^{2} Y_m^2(\theta, \phi) = \frac{5}{4\pi}. \tag{A7}$$

若将球体各模态的等效质量定义为

$$\frac{1}{M_{\text{eq}}} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{1}{M_3} + \frac{1}{M_4} + \frac{1}{M_5} \tag{A8}$$

then

$$M_{\text{eq}} = \frac{4\pi}{5\alpha^2} M_S \tag{A9}$$

并使用 $M_S = 1124$ 千克和 $\alpha^2 = 8.28584$，我们得到

$$M_{\text{eq}} = 0.30228 M_S = 340.934\,\text{kg}. \tag{A10}$$

正如我们将在下一节明确展示的，考虑五个模态时，N 个换能器的有效质量为

$$M_{\text{eff}} = \frac{5}{N} M_{\text{eq}} \quad \text{for six transducers} \quad M_{\text{eff}} = 284.111\,\text{kg}. \tag{A11}$$

1. 有效质量**的显式计算：**N**个换能器**

2. 当$N=1$**时**

当换能器位于a位置时，我们有

$$\frac{1}{2} M_S \sum_{m=-2}^{2} \dot{a}_m^2 = \frac{1}{2} M_{\text{eff}_1} v_a^2. \tag{A12}$$

球体表面在该位置的速度为

$$v_a = \alpha \sum_{m=1}^{5} \dot{a}_m Y_m(\theta_a, \phi_a). \tag{A13}$$

平方为

$$v_a^2 = \alpha^2 \sum_{m,n=1}^{5} \dot{a}_m \dot{a}_n Y_m(\theta_a, \phi_a) Y_n(\theta_a, \phi_a) \tag{A14}$$

角度的平均值为

$$\overline{v_a^2} = \alpha^2 \sum_{m,n=1}^{5} \dot{a}_m \dot{a}_n \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int Y_m(\theta,\phi) Y_n(\theta,\phi) \sin\theta d\theta}_{\delta_{mn}} = \frac{\alpha^2}{4\pi} \sum_{m=-2}^{2} \dot{a}_m^2. \tag{A15}$$

对方程 (A12) 两边取平均，得到

$$\frac{1}{2} M_S \sum_{m=-2}^{2} \dot{a}_m^2 = \frac{1}{2} M_{\mathrm{eff}_1} \overline{v_a^2} = \frac{1}{2} M_{\mathrm{eff}_1} \frac{\alpha^2}{4\pi} \sum_{m=-2}^{2} \dot{a}_m^2, \tag{A16}$$

使得

$$M_{\mathrm{eff}_1} = \frac{4\pi}{\alpha^2} M_S = \frac{5}{1} \frac{4\pi}{5\alpha^2} M_S = \frac{5}{1} M_{\mathrm{eq}} = 1705\,\mathrm{kg}. \tag{A17}$$

3. 对于N个换能器

如果有N 个换能器，动能是.....的函数

$$\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + \cdots + \vec{v}_N^2 = N \frac{\alpha^2}{4\pi} \sum_{m=-2}^{2} \dot{a}_m^2 \tag{A18}$$

使得

$$M_{\mathrm{eff}_N} = \frac{1}{N} \frac{4\pi}{\alpha^2} M_S = \frac{5}{N} \frac{4\pi}{5\alpha^2} M_S = \frac{5}{N} M_{\mathrm{eq}}. \tag{A19}$$

4. 截角二十面体构型中的六个换能器

用矩阵记法，方程 (A12) 可写为

$$\frac{1}{2} M_S \dot{\mathbf{a}}^T \dot{\mathbf{a}} = \frac{1}{2} M_{\mathrm{eff}} \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} M_{\mathrm{eff}} \alpha^2 \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{B}\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{a}}. \tag{A20}$$

模型矩阵

$$\mathbf{B} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \begin{pmatrix} \frac{3\varphi+2}{4\varphi+3} & -\frac{3\varphi+2}{4\varphi+3} & 0 & -\frac{1}{\varphi+2} & 0 & \frac{1}{\varphi+2} \\ -\frac{\varphi+1}{4\varphi+3} & \frac{\varphi+1}{4\varphi+3} & 0 & -\frac{\varphi+1}{\varphi+2} & 0 & \frac{\varphi+1}{\varphi+2} \\ -\frac{2\varphi+1}{4\varphi+3} & -\frac{2\varphi+1}{4\varphi+3} & -\frac{2\varphi+1}{4\varphi+3} & \frac{\varphi}{\varphi+2} & \frac{\varphi}{\varphi+2} & \frac{\varphi}{\varphi+2} \\ \frac{\varphi+1}{\sqrt{3}(4\varphi+3)} & \frac{\varphi+1}{\sqrt{3}(4\varphi+3)} & -\frac{2(\varphi+1)}{\sqrt{3}(4\varphi+3)} & -\frac{\varphi+1}{\sqrt{3}(\varphi+2)} & \frac{2(\varphi+1)}{\sqrt{3}(\varphi+2)} & -\frac{\varphi+1}{\sqrt{3}(\varphi+2)} \\ -\frac{3\varphi+2}{\sqrt{3}(4\varphi+3)} & -\frac{3\varphi+2}{\sqrt{3}(4\varphi+3)} & \frac{2(3\varphi+2)}{\sqrt{3}(4\varphi+3)} & -\frac{1}{\sqrt{3}(\varphi+2)} & \frac{2}{\sqrt{3}(\varphi+2)} & -\frac{1}{\sqrt{3}(\varphi+2)} \end{pmatrix} \tag{A21}$$

具有一些特殊性质，这些性质可直接从矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中获得，或借助球谐函数求和规则推导得出

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \frac{3}{2\pi}\mathbf{I} \qquad \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \frac{3}{2\pi}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{6}\mathbf{1}\right) = \frac{3}{2\pi}\mathbf{\Gamma} \qquad \mathbf{B}\mathbf{1} = \mathbf{0}. \tag{A22}$$

此外，$\mathbf{B}$ 的 Moore-Pensore 伪逆 $\mathbf{B}^+$ 为

$$\mathbf{B}^{+} = \mathbf{B}^{T}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{T})^{-1} = \frac{2\pi}{3}\mathbf{B}^{T} \tag{A23}$$

因此

$$\mathbf{B}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{\Gamma}. \tag{A24}$$

由方程 (A20) 可得

$$\frac{1}{2}M_S\dot{\mathbf{a}}^{T}\dot{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}M_{\text{eff}}\frac{3\alpha^2}{2\pi}\dot{\mathbf{a}}^{T}\dot{\mathbf{a}} \tag{A25}$$

then

$$M_{\text{eff}} = \frac{2\pi}{3\alpha^2}M_S = \frac{5}{6}M_{\text{eq}} = 284\,\text{kg}. \tag{A26}$$

附录 B：以表面形变表示的运动方程

我们已经看到，裸球的模态在N个$\boldsymbol{f}_a = f_a\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_a)\boldsymbol{e}_a$类型的外力作用下，其运动方程由位于$\boldsymbol{x}_a$处的外力给出：

$$\ddot{\mathbf{a}} + 2\beta\dot{\mathbf{a}} + w_0^2\mathbf{a} = \frac{1}{M_S}\alpha\mathbf{B}\mathbf{f}. \tag{B1}$$

将此方程乘以 $\alpha\mathbf{B}^{T}$，即可得到以球面形变$\boldsymbol{u}$表示的方程

$$\ddot{\mathbf{u}} + 2\beta\dot{\mathbf{u}} + w_0^2\mathbf{u} = \frac{1}{M_S}\alpha^2\mathbf{B}^{T}\mathbf{B}\mathbf{f} \tag{B2}$$

再利用方程 (A22)，可得

$$\ddot{\mathbf{u}} + 2\beta\dot{\mathbf{u}} + w_0^2\mathbf{u} = \frac{3\alpha^2}{2\pi M_S}\mathbf{\Gamma}\mathbf{f} = \frac{1}{M_{\text{eff}}}\mathbf{\Gamma}\mathbf{f}. \tag{B3}$$

最后，换能器所在位置处球体表面形变的运动方程为

$$M_{\text{eff}}\ddot{\mathbf{u}} + 2M_{\text{eff}}\beta\dot{\mathbf{u}} + M_{\text{eff}}w_0^2\mathbf{u} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{f}. \tag{B4}$$

附录 C：实矢量球谐函数

正交实矢量球谐函数表示为 [64]

$$\boldsymbol{Y}^{L}_{\ell m}(\theta,\phi) = Y^{\mathcal{R}}_{\ell m}(\theta,\phi)\hat{\boldsymbol{r}} \tag{C1}$$

$$\boldsymbol{Y}^{E}_{\ell m}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}r\boldsymbol{\nabla}Y^{\mathcal{R}}_{\ell m}(\theta,\phi) \tag{C2}$$

$$\boldsymbol{Y}^{M}_{\ell m}(\theta,\phi) = \hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{Y}^{E}_{\ell m}(\theta,\phi), \tag{C3}$$

其中，实球谐函数 $Y^{\mathcal{R}}_{\ell\ m}$ 由传统球谐函数的实部和虚部给出，见方程(6)， [65]。实矢量球谐函数满足归一化条件

$$\int \boldsymbol{Y}^{A}_{N}\cdot\boldsymbol{Y}^{B}_{N'}\sin\theta d\theta d\phi = \delta_{NN'}\delta_{AB}. \tag{C4}$$

附录 D：将h^{ij}从波动参考系变换到实验室参考系

波动参考系中沿Z 方向传播的引力波，其偏振张量由偏振h_+ 和 $h_\times$ 表示，为 [48]

$$\mathbf{h}_{WF} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{D1}$$

矩阵$\mathbf{A}(\theta,\phi,\psi) = \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\phi)$按照欧拉 y 角约定，将实验室参考系旋转至方向（$\theta,\phi,\psi$）。任何向量$\boldsymbol{v}$ 都可以通过该方向旋转，方法是对该矩阵$\mathbf{A}^T(\theta,\phi,\psi) = \mathbf{R}_z^T(\phi)\mathbf{R}_y^T(\theta)\mathbf{R}_z^T(\psi)$进行转置。对于引力波，我们不关注 ψ旋转，因为它只会混合h_+、$h_\times$ 偏振。去掉 ψ 旋转后，矩阵$\mathbf{A}$变为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{D2}$$

若入射波沿实验室参考系的z 轴方向传播，则将其旋转至方向（θ,ϕ）后，从实验室参考系观察到的波为

$$\mathbf{h}_{LF} = \mathbf{A}^T\mathbf{h}_{WF}\mathbf{A}. \tag{D3}$$

致谢

作者谨此感谢圣保罗州研究基金会 (FAPESP)通过资助编号 1998/13468-9、2006/56041-3、2013/26258-4、2017/05660-0、2018/02026-0 和 2020/05238-9 提供经费支持。ODA 也感谢巴西科学、技术与创新部以及巴西航天局。此外，作者也感谢国家科学技术发展委员会 (CNPq)通过资助编号 302841/2017-2、310087/2021-0 和 312454/2021 提供支持。

---

[1] B. P. Abbott、R. Abbott、T. D. Abbott、M. R. Abernathy、F. Acernese、K. Ackley、C. Adams、T. Adams、P. Addesso、R. X. Adhikari 等，《物理评论快报》**116**, 061102 (2016), arXiv:1602.03837[gr-qc].[2] B. P. Abbott、R. Abbott、T. D. Abbott、M. R. Abernathy、F. Acernese、K. Ackley、C. Adams、T. Adams、P. Addesso、R. X. Adhikari 等，《物理评论 X》**6**, 041015 (2016), arXiv:1606.04856 [gr- qc].[3] B. P. Abbott、R. Abbott、T. D. Abbott、M. R. Abernathy、F. Acernese、K. Ackley、C. Adams、T. Adams、P. Addesso、R. X. Adhikari 等，《物理评论 X》**6**, 041014 (2016), arXiv:1606.01210 [gr- qc].[4] B. P. Abbott、R. Abbott、T. D. Abbott、M. R. Abernathy、F. Acernese、K. Ackley、C. Adams、T. Adams、P. Addesso、R. X. Adhikari 等，《物理评论快报》**116**, 241102 (2016), arXiv:1602.03840[gr-qc].[5] B. P. Abbott、R. Abbott、T. D. Abbott、F. Acernese、K. Ackley、C. Adams、T. Adams、P. Addesso、R. X. Adhikari、V. B. Adya 等，《物理评论快报》**119**, 161101 (2017), arXiv:1710.05832 [gr- qc].

[6] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, 等，Apjl 848, L12 (2017)，arXiv:1710.05833 [astro-ph.HE].[7] J. L. Melo, W. F. Velloso, Jr., 和 O. D. Aguiar，《经典与量子引力》19, 1985 (2002)。[8] F. da Silva Bortoli, C. Frajuca, S. T. de Sousa, A. de Waard, N. S. Magalhaes, 和 O. D. de Aguiar，《巴西物理学杂志》46, 308 (2016)，引用次数：23。[9] A. de Waard, L. Gottardi, 和 G. Frossati，《经典与量子引力》19, 1935 (2002)。[10] L. A. N. de Paula, E. C. Ferreira, N. C. Carvalho, 和 O. D. Aguiar，《仪器学杂志》10, P03001 (2015)。[11] V. Liccardo, E. K. França, O. D. Aguiar, R. M. Oliveira, K. L. Ribeiro, 和 M. M. N. F. Silva，《仪器学杂志》11, P07004 (2016)。[12] F. da Silva Bortoli, C. Frajuca, N. S. Magalhaes, O. D. Aguiar, 和 S. T. de Souza，《巴西物理学杂志》49, 133 (2019)，引用次数：15。[13] C. Frajuca, M. A. Souza, D. Coppedé, P. R. M. Nogueira, F. S. Bortoli, G. A. Santos, 和 F. Y. Nakamoto，《巴西机械科学与工程学会杂志》40 (2018)，引用次数：13。[14] F. S. Bortoli, C. Frajuca, N. S. Magalhaes, S. T. de Souza, 和 W. C. da Silva Junior，《巴西物理学杂志》50, 541 (2020)，引用次数：8。[15] E. Coccia, J. A. Lobo, 和 J. A. Ortega，Prd 52, 3735 (1995)。[16] G. M. Harry, T. R. Stevenson, 和 H. J. Paik，Prd 54, 2409 (1996)，gr-qc/9602018。[17] J. A. Lobo，Mnras 316, 173 (2000)，gr-qc/0006109。[18] W. W. Johnson 和 S. M. Merkowitz，《物理评论快报》70, 2367 (1993)。[19] O. D. Aguiar, L. A. Andrade, J. J. Barroso, F. Bortoli, L. A. Carneiro, P. J. Castro, C. A. Costa, K. M. F. Costa, J. C. N. de Araujo, A. U. de Lucena, W. de Paula, E. C. de Rey Neto, S. T. de Souza, A. C. Fauth, C. Frajuca, G. Frossati, S. R. Furtado, N. S. Magalhães, R. M. Marinho, Jr., J. L. Melo, O. D. Miranda, N. F. Oliveira, Jr., K. L. Ribeiro, C. Stellati, W. F. Velloso, Jr., 和 J. Weber，《经典与量子引力》23, S239 (2006)。[20] O. D. Aguiar, J. J. Barroso, N. C. Carvalho, P. J. Castro, C. E. C. n. M, C. F. da Silva Costa, J. C. N. de Araujo, E. F. D. Evangelista, S. R. Furtado, O. D. Miranda, P. H. R. S. Moraes, E. S. Pereira, P. R. Silveira, C. Stellati, N. F. Oliveira, Jr., X. Gratens, L. A. N. de Paula, S. T. de Souza, R. M. Marinho, Jr., F. G. Oliveira, C. Frajuca, F. S. Bortoli, R. Pires, D. F. A. Bessada, N. S. Magalhtilde aes, M. E. S. Alves, A. C. Fauth, R. P. Macedo, A. Saa, D. B. Tavares, C. S. S. Brandtilde ao, L. A. Andrade, G. F. Marranghello, C. B. M. H. Chirenti, G. Frossati, A. de Waard, M. E. Tobar, C. A. Costa, W. W. Johnson, J. A. de Freitas Pacheco, 和 G. L. Pi mentel，载于《物理学会议系列杂志》，《物理学会议系列杂志》，第 363 卷 (2012)，第 012003 页。[21] J. F. Messina，《物理学进展》11, 202 (2015)。[22] W. L. S. de Paula, O. D. Miranda, 和 R. M. Marinho，《经典与量子引力》21, 4595 (2004)。[23] W. H. Lee, E. Ramirez-Ruiz, 和 G. van deVen，Apj 720,953(2010)，arXiv:0909.2884 [astro-ph.HE].[24] M. Shibata 和 K. Taniguchi，《相对论生活评论》14, 6 (2011)。[25] F. Foucart, M. B. Deaton, M. D. Duez, E. O'Connor, C. D. Ott, R. Haas, L. E. Kidder, H. P. Pfeiffer, M. A. Scheel, 和 B. Szilagyi，Prd 90, 024026 (2014)，arXiv:1405.1121 [astro-ph.HE].[26] A. Buonanno 和 T. Damour，Prd 59, 084006 (1999)，gr-qc/9811091。[27] A. Buonanno 和 T. Damour，Prd 62, 064015 (2000)，gr-qc/0001013。[28] E. Nakar，Physrep 442, 166 (2007)，astro-ph/0701748。[29] E. Berger，Araa 52, 43 (2014)，arXiv:1311.2603 [astro-ph.HE].[30] N. S. Magalhaes, W. W. Johnson, C. Frajuca, 和 O. D. Aguiar，Mnras 274, 670 (1995)。[31] N. S. Magalhães, W. W. Johnson, C. Frajuca, 和 O. D. Aguiar，Apj 475, 462 (1997)。

[32] C. H. Lenzi, N. S. Magalhães, R. M. Marinho, C. A. Costa, H. A. B. Araújo, and O. D. Aguiar, 《物理评论D》78, 062005 (2008).[33] C. H. Lenzi, N. S. Magalhães, R. M. Marinho, C. A. Costa, H. A. B. Araújo, and O. D. Aguiar, 《广义相对论与引力》40, 183 (2008).[34] T. Dal Canton 等, 《物理评论D》90, 082004 (2014), arXiv:1405.6731 [gr-qc]。[35] S. A. Usman 等, 《经典与量子引力》33, 215004 (2016), arXiv:1508.02357 [gr-qc]。[36] T. Damour 和 A. Nagar, Prd 79, 081503 (2009), arXiv:0902.0136 [gr-qc]。[37] Y. Pan, A. Buonanno, M. Boyle, L. T. Buchman, L. E. Kidder, H. P. Pfeiffer, and M. A. Scheel, Prd 84, 124052 (2011), arXiv:1106.1021 [gr-qc]。[38] A. Bauswein, R. A. Pulpillo, H.-T. Janka, and S. Goriely, 《天体物理学杂志快报》795, L9 (2014).[39] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, 等, 《天体物理学杂志快报》915, L5 (2021).[40] J. Abadie, B. P. Abbott, R. Abbott, M. Abernathy, T. Accadia, F. Acernese, C. Adams, R. Adhikari, P. Ajith, B. Allen, 等, 《经典与量子引力》27, 173001 (2010), arXiv:1003.2480[astro-ph.HE]。[41] M. Dominik, E. Berti, R. O'Shaughnessy, I. Mandel, K. Belczynski, C. Fryer, D. E. Holz, T. Bulik, and F. Pannarale, Apj 806, 263 (2015), arXiv:1405.7016 [astro-ph.HE]。[42] X. Li, Y.-M. Hu, Z.-P. Jin, Y.-Z. Fan, and D.-M. Wei, Apjl 844, L22 (2017), arXiv:1611.01760 [astro- ph.HE]。[43] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, 等, Apjl 832, L21 (2016), arXiv:1607.07456 [astro-ph.HE]。[44] R. Voss and T. M. Tauris, Mnras 342, 1169 (2003), astro-ph/0303227.[45] V. Kalogera, K. Belczynski, C. Kim, R. O' Shaughnessy, and B. Willems, Physrep 442, 75 (2007), astro-ph/0612144.[46] R. O' Shaughnessy, C. Kim, V. Kalogera, and K. Belczynski, 《天体物理学杂志》672, 479 (2008).[47] R. O'Shaughnessy, V. Kalogera, and K. Belczynski, 《天体物理学杂志》716, 615 (2010).[48] S. M. Merkowitz and W. W. Johnson, 《物理评论D》56, 7513 (1997).[49] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 《弹性理论》第3版，6，卷7（培格曼出版社，英国，1986）。[50] M. Maggiore, 《引力波：理论与实验》（牛津，2008）。[51] J. A. Lobo, 《物理评论D》52, 591 (1995).[52] N. D. Ashcroft, N. W.; Mermin, 《固体物理学》（哈考特学院出版社，1976）。[53] F. Reif, 《统计与热物理学基础》（麦格劳-希尔，1981）。[54] R. B. Ross, 《金属材料规范手册》（施普林格，1992）。[55] H. B. Callen, 热力学（约翰·威立父子出版公司，1960）。[56] J.-P. Richard, 《物理评论快报》52, 165 (1984).[57] R. McDonough and A. Whalen, 《噪声中的信号检测》（学术出版社，1995）。[58] M. E. Tobar, E. N. Ivanov, and D. G. Blair, 《广义相对论与引力》32, 1799 (2000).[59] L. Wainshtein 和 V. Zubakov, 《从噪声中提取信号：L.A. Wainstein（及）V.D. Zubako 著

v

（普伦蒂斯-霍尔，1962年）。[60] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz, 《力学》，第2版，第1卷（MIR，莫斯科，1966年）。[61] C. Locke, 迈向宏观谐振振荡器标准量子极限的测量

r,

博士学位论文，西澳大利亚大学（2001年）。[62] G. Frossati，载于《第一届全向引力辐射

观测站

（世界科学出版社，1997）。

[63] C. Z. Zhou 和 P. F. Michelson，《物理评论》**51**（1995）。[64] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz，《相对论量子理论》，第1版，1，第4卷（MIR，莫斯科，1972年）。[65] J. D. Jackson，《经典电动力学》，第2版，1，第1卷（约翰·威立父子出版公司，纽约，1975年）。