arXiv:2302.01253v1 [math.NT] 2 Feb 2023

6-正则分拆：新的组合性质、同余式与线性不等式

Cristina Ballantine圣十字学院数学与计算机科学系，伍斯特，MA01610，美国
cballant@holycross.edu

Mircea Merca
工程应用基础科学研究中心数学方法与模型系，布加勒斯特理工大学，RO-060042，罗马尼亚布加勒斯特
mircea.merca@profinfo.edu.ro

摘要

我们考察 n 的 6-正则分拆数 $b_6(n)$，并给出关于 $b_6(n)$ 的无穷多个模 3 同余式族（按等差数列排列）。我们还考察 n 拆分为互异部分且这些部分不与 ± 2 模 6 同余的分拆数 $Q_2(n)$，并探究 $b_6(n)$ 与 $Q_2(n)$ 之间的联系，为这些分拆函数提供新的组合解释。在此背景下，我们发现了涉及欧拉分拆函数 $p(n)$ 的新无穷多个线性不等式族。作为开放问题，我们提出了涉及 6-正则分拆函数 $b_6(n)$ 和互异分拆函数 $Q_2(n)$ 的无穷多个线性不等式族。

关键词：分拆、θ级数、θ乘积

2010年数学主题分类：11P81, 11P82, 05A19, 05A20

1 引言

回顾一下，正整数 n 的分拆是一个正整数序列，其和为 n。在写出 n 的分拆时，各加数的顺序并不重要；但为保持一致，n 的分拆将按加数非递增的顺序书写 [2]。按照惯例，我们用 $p(n)$ 表示

n 的整数分拆数，并且有生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty}.$$

此处及下文中，我们采用以下惯用的 q-级数记号:

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1, & \text{for } n = 0, \\ (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}), & \text{for } n > 0; \end{cases}$$
$$(a;q)_\infty = \lim_{n\to\infty} (a;q)_n.$$

此外，我们采用简记

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n; q)_\infty = (a_1;q)_\infty (a_2;q)_\infty \cdots (a_n;q)_\infty.$$

由于当 $a \neq 0$ 且 $|q| \geqslant 1$时，无穷乘积 $(a;q)_\infty$ 发散，因此在公式中出现 $(a;q)_\infty$ 时，我们均假设 $|q| < 1$。

对于整数 $\ell > 1$，如果一个分拆的各部分均不能被 ℓ 整除，则称其为 ℓ-正则分拆。n 的 ℓ-正则分拆数通常记作$b_\ell(n)$，其算术性质已在许多有趣的论文中得到研究，作者包括 Z. Ahmed 和 N. D. Baruah [1], R. Carlson 和 J. J. Webb, [16], S.-P. Cui 和 N. S. S. Gu [17], B. Dandurand 和 D. Penninston [18], D. Furcy 和 D. Penniston [19], M. D. Hirschhorn 和 J. A. Sellers [22], Q.-H. Hou 、 L. H. Sun 和 L. Zhang [23], J. Lovejoy 和 D. Penniston [25], D. Penniston [43, 44], E. X. W. Xia [48], E. X. W. Xia 和 O. X. M. Yao [49], L. Wang [51, 52],以及 J. J. Webb [53]。分拆理论中的初等方法给出生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_\ell(n)\, q^n = \frac{(q^\ell;q^\ell)_\infty}{(q;q)_\infty}. \tag{1}$$

2010 年，G. E. Andrews、M. D. Hirschhorn 和 J. A. Sellers [3] 证明了 $b_4(n)$ 满足两族无限的模 3 同余式。一年后，J. J. Webb [53] 对 $b_{13}(n)$ 证明了类似的结果。2012年，D. Furcy 和 D. Penniston [19] 将这些结果推广到了其他与 1 模 3 同余的 ℓ 值，即 $\ell \in \{7, 19, 25, 34, 37, 43, 49\}$。所有这些同余式的形式如下

$$b_\ell(3^\beta n + d) \equiv 0 \pmod 3.$$

此外，D. Furcy 和 D. Penniston [19] 证明了

$$b_{10}(9n+3) \equiv b_{22}(27n+16) \equiv b_{28}(27n+9) \equiv 0 \pmod 3.$$

近来，在2015年，Q.-H. Hou、L. H. Sun 和 L. Zhang [23] 发现了关于 ℓ-正则分拆且满足 $\ell \in \{3, 5, 6, 7, 10\}$ 的模 3、5 和 7 的无穷族同余关系。当 $\ell = 6$ 时，他们证明了对于 α， n

非负整数， p_i 满足模 24 同余于 13、17、19、23 的素数，以及 $j \neq 0$（模 $p_{\alpha+1}$），

$$b_6\left(p_1^2\cdots p_{\alpha+1}^2 n+\frac{p_1^2\cdots p_\alpha^2 p_{\alpha+1}(24j+5p_{\alpha+1})-5}{24}\right)\equiv 0 \pmod 3. \quad (2)$$

然后，在（2）中令 $\alpha = 0$，可得对于所有满足 $n \geqslant 0$、$p \equiv 13 \equiv$ 17、19、23（mod 24）的素数，以及 $j \neq 0$ （mod p），

$$b_6\left(p^2 n+pj+5\,\frac{p^2-1}{24}\right)\equiv 0 \pmod 3. \quad (3)$$

结果表明， [23] 中的结论可以推广到其他素数的选取。

定理 1.1. 设 α 为非负整数， $p_i \geqslant 5$、$1 \leqslant i \leqslant \alpha+1$ 为素数。若 $p_{\alpha+1} \equiv 3$（mod 4）且 $j \neq 0$ （mod $p_{\alpha+1}$），则对于所有整数 $n \geqslant 0$，均有

$$b_6\left(p_1^2\cdots p_{\alpha+1}^2 n+\frac{p_1^2\cdots p_\alpha^2 p_{\alpha+1}(24j+5p_{\alpha+1})-5}{24}\right)\equiv 0 \pmod 3. \quad (4)$$

特别地，若 $\alpha = 0$，定理 1.1 表明，对于所有满足 $p \equiv 3 \equiv$ （mod 4）、$j \neq 0 \equiv$ （mod p）且 $n \geqslant 0$ 的素数，等式（3）均成立。该结论可改述如下。

对于素数 $p \geqslant 5$，令

$$\alpha_p := 5\,\frac{p^2-1}{24} \mod p,$$

其中， a mod m 表示 a 除以 m所得的余数。等价地，

$$\alpha_p = \left\lfloor 5p^2/24 \right\rfloor \mod p$$

并且

$$\alpha_p = -5\cdot 24_p^{-1} \mod p,$$

其中， 24_p^{-1}是 24 模 p 的逆元。

于是，由定理 1.1，取 $\alpha = 0$ 以及 (3)，可得以下结果：

推论 1.2. 若 p 是一个模 24 同余于 7、11、13、17、19、23 的素数，且 $0 \leqslant j \leqslant p-1$、$j \neq \lfloor 5p/24 \rfloor$，则对所有 $n \geqslant 0$，有

$$b_6\left(p^2 n+pj+\alpha_p\right)\equiv 0 \pmod 3.$$

我们还考察了 n 的互异部分且模 6 不与 ± 2 同余的分拆，以便为 n 的 6-正则分拆数提供其他性质。

定义 1. 设 n 为一个非负整数。我们定义：

i) $b_{6,\ e}(n)$ 表示将 n 分拆为偶数个部分的 6-正则分拆的数量；

ii) $b_{6,o}(n)$ 表示将 n 分拆为奇数个部分的 6-正则分拆数。

显然， $b_6(n) = b_{6,e}(n) + b_{6,o}(n)$。例如，将 7 分拆为不为 6 的倍数的部分的分拆如下：

(7), (5, 2), (5, 1, 1), (4, 3), (4, 2, 1), (4, 1, 1, 1), (3, 3, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 1, 1),
(3, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 1), (2, 2, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).

我们看到， $b_6(7) = 14$, $b_{6,e}(7) = 6$ 以及 $b_{6,o}(7) = 8$。

定义 2. 设 n 为一个非负整数。我们将 $Q_2(n)$定义为这样的分拆数：将 n 分拆成互异部分，且这些部分模 6 不与 ± 2同余。

例如，将 14 分拆成互异部分，且这些部分模 6 不与 ± 2同余，所得分拆如下：

$$(13, 1),\ (11, 3),\ (10, 3, 1),\ (9, 5),\ (8, 5, 1).$$

因此， $Q_2(14) = 5$。生成分拆生成函数的标准方法（参见 [2, 第 1]章）直接表明

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_2(n)\, q^n = (-q, -q^3, -q^5, -q^6; q^6)_\infty \tag{5}$$

其展开式开头为

$$1 + q + q^3 + q^4 + q^5 + 2q^6 + 2q^7 + 2q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + 3q^{11} + 5q^{12} + 5q^{13} + 5q^{14} + \cdots.$$

我们指出，数列 $Q_2(n)$ 已为人所知，可在《在线整数数列百科全书》中查到，编号为 [45, A328796]。

以下结果为分拆函数 $Q_2(n)$ 引入了一种新的组合解释。

定理 1.3. 对于 $n \geqslant 0$, $(-1)^n\, Q_2(n) = b_{6,\ e}(n) - b_{6,\ o}(n)$。

作为该定理的推论，我们得出以下奇偶性结果。

推论 1.4. 对于 $n \geqslant 0$, $Q_2(n)$ 和 $b_6(n)$ 具有相同的奇偶性。

为了获得关于 n 的 6-正则分拆以及将 n 分拆为模 6 不同余于 ± 2 的互异部分的其他组合解释，我们考虑以下受限分拆函数。

定义 3. 设 n 为一个非负整数。我们定义

i) $c(n)$ 表示将 n 分拆为满足各部分模 48 不同余于 0、 ± 2、 ± 20、± 22、24 的分拆数；ii) $d(n)$ 表示将 n 分拆为满足各部分模 48 不同余于 0、± 4、 ± 10、 ± 14、24 的分拆数。

我们有如下结果。

定理 1.5. 设 n 为非负整数。则

(i) $Q_2(n) = c(n) - d(n-2)$;

(ii) $b_6(n) = c(n) + d(n-2)$.

以下推论是定理1.3和定理 1.5的结果。该结果为6-正则分拆函数 $b_{6,e}(n)$ 和 $b_{6,o}(n)$ 引入了新的组合解释。

推论1.6. 对于 $n \geqslant 0$,

(i) $b_{6,e}(n) = \begin{cases} c(n), & \text{if } n \text{ is even} \\ d(n-2), & \text{if } n \text{ is odd;} \end{cases}$

(ii) $b_{6,o}(n) = \begin{cases} c(n), & \text{if } n \text{ is odd} \\ d(n-2), & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$

由推论1.6，我们可以为受限分拆函数 $c(n)$ 和 $d(n)$ 获得其他组合解释。

定义4. 设 n 为非负整数。我们定义

i) $b_{6,\ ee}(n)$ 表示 n 的具有偶数个偶数部分的 6-正则分拆数；ii) $b_{6,\ eo}(n)$ 表示 n 的具有奇数个偶数部分的 6-正则分拆数。

显然， $b_6(n) = b_{6,\ ee}(n) + b_{6,\ eo}(n)$。例如，7 的具有偶数个偶数部分的 6-正则分拆为:

$$(7),\ (5,1,1),\ (4,2,1),\ (3,3,1),\ (3,2,2),$$
$$(3,1,1,1,1),\ (2,2,1,1,1),\ (1,1,1,1,1,1,1),$$

而 7 的具有奇数个偶数部分的 6-正则分拆为:

$$(5,2),\ (4,3),\ (4,1,1,1),\ (3,2,1,1),(2,2,2,1),\ (2,1,1,1,1,1).$$

我们看到，$b_{6,\ ee}(7) = 8$ 以及 $b_{6,\ eo}(7) = 6$。

由于分拆 n 中奇数部分的个数的奇偶性由 n 的奇偶性决定，因此，当 n 为偶数（分别为奇数）时，$b_{6,ee}(n)$ 等于 $b_{6,e}(n)$ （分别等于 $b_{6,o}(n)$ ）；对于 $b_{6,eo}(n)$，结论类似。因此，推论1.6可等价地表述如下。

推论 1.7。对于 $n \geqslant 0$

(i) $c(n) = b_{6,ee}(n)$;

(ii) $d(n) = b_{6,eo}(n+2)$.

在 [4], 研究欧拉五边形数定理的截断形式时,

$$(q;q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \, q^{n(3n-1)/2}, \tag{6}$$

G. E. Andrews 和 M. Merca 引入了分拆函数 $M_k(n)$，它用于统计 n 的分拆数，其中 k 是最小的、不是分拆部分的正整数，且大于 $> k$ 的部分数多于 $< k$的部分数。例如，我们有 $M_3(18) = 3$，因为符合条件的三个分拆为

$$(5,5,5,2,1),\ (6,5,4,2,1),\ (7,4,4,2,1).$$

~最近，Xia 和 Zhao [50] 定义 $P_k(n)$ 为 n的分拆数，其中每个部分 $\leqslant k$ 至少出现一次，且第一个大于 ~ k 的部分至少出现 $k+1$ 次。例如， $P_2(17) = 9$，符合条件的分拆为

$$\begin{aligned}
&(5,3,3,3,2,1),\ (4,4,4,2,2,1),\ (4,4,4,2,1,1,1),\\
&(4,3,3,3,3,2,1,1),\ (3,3,3,3,2,2,1),\ (3,3,3,3,2,1,1,1),\\
&(3,3,3,2,2,2,1,1),\ (3,3,3,2,2,1,1,1,1),\ (3,3,3,2,1,1,1,1,1,1).
\end{aligned}$$

考虑 (1)，我们很容易推出，6-正则分拆函数 $b_6(n)$ 与欧拉分拆函数 $p(n)$ 密切相关，即

$$b_6(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, p\big(n - 3j(3j-1)\big). \tag{7}$$

还有两个更一般的结果，而恒等式 (7) 是它们的极限情形$k \to \infty$。

定理 1.8。对于 $n \geqslant 0$、 $k > 0$,

$$(-1)^k \left(b_6(n) - \sum_{j=-(k-1)}^{k} (-1)^j \, p\big(n - 3j(3j-1)\big) \right) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/6 \rfloor} b_6(n-6j)\, M_k(j).$$

定理 1.9。对于 $n \geqslant 0$、 $k > 0$,

$$(-1)^{k-1} \left(b_6(n) - \sum_{j=-k}^{k} (-1)^j \, p\big(n - 3j(3j-1)\big) \right) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/6 \rfloor} b_6(n-6j)\, \widetilde{P}_k(j).$$

另一方面，由 (1) 和 (6) 可轻易推导出一个类似于 $p(n)$ 的欧拉递推关系的线性递推关系，即，

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j\, b_6\big(n-j(3j-1)/2\big)=\begin{cases}(-1)^k, & \text{if } n=3k(3k-1),\, k\in\mathbb{Z},\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{8}$$

注记 1. 若将 $p_{<6}(n)$记作 n 中每个部分至多出现五次的分拆数，则 Glaischer双射从组合角度表明，对所有 $n\geqslant 0$，$b_6(n)=p_{<6}(n)$。于是，将 [14] 中定理 1.1 的第一个证明里的 4 替换为 6，就得到了 (8) 的一个组合证明。

除了这个递推关系外，$b_6(n)$还有另一个线性递推关系。对于任意整数 k，令

$$\rho_k:=\begin{cases}-2, & \text{if } k\equiv 1 \pmod 3,\\ 1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

定理 1.10. 对于 $n\geqslant 0$,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j\, b_6\big(n-j(j+1)/2\big)=\begin{cases}(-1)^k, & \textit{if } n=k(3k-2),\, k\in\mathbb{Z},\\ 0, & \textit{otherwise.}\end{cases}$$

作为定理 1.10 的推论，我们指出以下涉及广义八边形数 $n(3n\pm 2)$ 的奇偶性结果。

推论1.11. 对于 $n\geqslant 0$,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_6\big(n-3j(3j-1)/2\big)\equiv 1 \pmod 2$$

当且仅当 n是一个广义八边形数。

类比式 (7)，我们得到如下结果，它表明分拆函数 $Q_2(n)$ 可以用两种不同的方式表示为欧拉分拆函数 $p(n)$。

定理 1.12. 对于 $n\geqslant 0$,

(i) $Q_2(n)=\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j\, p\big(n-j(j+1)\big)$;

(ii) $Q_2(n)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}p\left(\frac{n-j(3j-2)}{3}\right)$,

其中，当 x 不是非负整数时，$p(x)=0$。

注 2. 使用 Andrews 和 Newman 的记号，[7], $\mathrm{mex}_{2,2}(\lambda)$ 表示不是 λ 的一个部分的最小偶正整数。我们用 $pm_{2j}(n)$（分别用 $pm_{>2j}(n)$）表示满足 $\mathrm{mex}_{2,2}(\lambda) = 2j$（分别满足 $\mathrm{mex}_{2,2}(\lambda) > 2j$）的 n 的分拆 λ 的数量。若 λ 是 $n-j(j+1)$ 的一个分拆，则 $\lambda \cup (2j, 2(j-1), \ldots, 4, 2)$ 是 n 的一个分拆，且 $\mathrm{mex}_{2,2}(\lambda) > 2j$。因此

$$p\big(n-j(j+1)\big) - p\big(n-(j+1)(j+2)\big) = pm_{2j}(n).$$

因此，定理 1.12 (i) 等价于以下陈述：$Q_2(n)$ 等于满足 $\mathrm{mex}_{2,2}(\lambda) \equiv 2 \pmod 6$ 的 n 的分拆 λ 数量，减去满足 $\mathrm{mex}_{2,2}(\lambda) \equiv 4 \pmod 6$ 的 n 的分拆 λ 数量。

定理 1.12 (i) 使我们能够推出以下同余恒等式。

推论 1.13。对于 $n \geqslant 0$,

$$(i)\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} p\big(n-3j(3j-1)\big) \equiv Q_2(n) \pmod 2;$$

$$(ii)\ \sum_{j=0}^{\infty} p\big(n-j(j+1)\big) \equiv Q_2(n) \pmod 3.$$

定理 1.12 (ii) 可视为一个 Watson 型恒等式。关于 Watson 型恒等式的更多细节可参见 [8]。

与定理 1.10 类似，我们有分拆函数 $Q_2(n)$ 的以下线性递推关系。

定理 1.14。对于 $n \geqslant 0$,

$$(i)\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j\, Q_2\big(n-j(3j-1)/2\big) = \begin{cases} \rho_k, & \text{if } n = k(k+1),\ k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

$$(ii)\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j\, Q_2\big(n-3j(3j-1)/2\big) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = k(3k-2),\ k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 1.14 (ii) 提供了一种简单且相当高效的方法来计算 $Q_2(n)$ 的值。这个线性递推关系中的项数约为$\sqrt{8n/9}$。事实上，利用这个线性递推关系计算 $Q_2(n)$ 的值，需要用到所有满足 $k < n$ 的 $Q_2(k)$ 的值。

本文其余部分安排如下。定理 1.1 将在第 2 节中证明。在第 3 至 7 节中，我们将证明定理 1.3、1.5、1.8、1.10、1.12 和 1.14。我们对这些定理的证明依赖于生成函数。对于定理 1.3、1.12 (ii) 和 1.14 (ii)，我们还给出了组合证明。（若能为其余定理找到组合证明，将会非常有趣。）在本文最后一节中，我们提出关于分拆函数 $p(n)$、$b_6(n)$ 和 $Q_2(n)$ 的新无限族线性不等式猜想。

2 定理1.1的证明

Let

$$f(-q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}}=(q;q)_\infty$$

and

$$\psi(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\binom{n+1}{2}}=\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}$$

为拉马努金 theta 函数。正如在 [23] 中所提到的，而且也很容易直接看出，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}b_6(n)q^n&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty}\\&\equiv\frac{(q^2;q^2)_\infty^2}{(q;q^2)_\infty}\pmod 3\\&=f(-q^2)\psi(q)\pmod 3.\end{aligned}$$

我们将上述表达式改写为

$$f(-q^2)\psi(q)=(q^2;q^2)_\infty\frac{(q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty}{(q;q^2)_\infty}=(q^2;q^2)_\infty(q^4;q^4)_\infty(-q;q^2)_\infty$$

将 q 替换为 $-q$，得到

$$f(-q^2)\psi(-q)=\frac{(q^2;q^2)_\infty^2}{(-q;q^2)_\infty}=(q^2;q^2)_\infty(q^4;q^4)_\infty(q;q^2)_\infty=(q;q)_\infty(q^4;q^4)_\infty.$$

因此，

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_6(n)(-q)^n\equiv(q;q)_\infty(q^4;q^4)_\infty\pmod 3.$$

设 α 为非负整数。假设 $p_i\geqslant 5$、$1\leqslant i\leqslant\alpha+1$ 是素数，$p_{\alpha+1}\equiv 3$（模 4）且 $j\not\equiv 0$（模 $p_{\alpha+1}$）。给定 $n\geqslant 0$，令

$$m_n:=p_1^2\cdots p_{\alpha+1}^2 n+\frac{p_1^2\cdots p_\alpha^2 p_{\alpha+1}(24j+5p_{\alpha+1})-5}{24}.$$

我们证明，对于所有非负整数 n，q^{m_n} 在 $f(-q^2)\psi(-q)$ 中的系数均为零。我们两次使用欧拉五边形数定理 (6)，得到

$$f(-q^2)\psi(-q)=(q;q)_\infty(q^4;q^4)_\infty=\sum_{i,j=-\infty}^{\infty}(-1)^{i+j}q^{\frac{i(3i+1)}{2}+4\cdot\frac{j(3j+1)}{2}}.$$

我们考虑方程 $\frac{i(3i+1)}{2}+4\cdot\frac{j(3j+1)}{2}=m_n$，它等价于

$$a^2+(2b)^2=24m_n+5 \tag{9}$$

其中 $a=6i+1$、 $b=6j+1$。

由于 $j\not\equiv 0$ (模 $p_{\alpha+1}$)，可知 $p_{\alpha+1}\mid 24m_n+5$ 和 $p_{\alpha+1}$ 以奇数次幂出现在 $24m_n+5$ 的因式分解中。因此，方程 (9) 无解，且 q^{m_n} 在 $f(-q^2)\psi(-q)$中的系数为零。于是 $b_6(m_n)\equiv 0$(模 3)。定理 1.1 的证明至此完成。

注 3. 在定理 1.1 的证明中，我们将同余问题归结为一个整数表示为两个平方数之和的问题。[23, 定理 2.3]的证明依赖于一个不同的丢番图方程。我们注意到，[23,定理 2.2] 是关于 $b_3(n)$ 的一个同余结论，其中 n表示 3-正则分拆的个数。容易看出，[23] 的证明可归结为将一个整数表示为两个平方数之和。因此，可以使用定理 1.1 证明中的相同论证，说明 [23, 定理 2.2] 中的模 3 同余结论在更一般的情形下也成立；也就是说，只需素数 $p_{\alpha+1}$ 与 3 模 4 同余。为方便读者，我们在下文给出一般性表述。

定理 2.1. 设 α 为非负整数，$p_i\geqslant 5$、$1\leqslant i\leqslant \alpha+1$ 为素数。若 $p_{\alpha+1}\equiv 3$ (模 4) 且 $j\not\equiv 0$ (模 $p_{\alpha+1}$)，则对所有整数 $n\geqslant 0$

$$b_3\left(p_1^2\cdots p_\alpha^2 p_{\alpha+1}^2 n+\frac{p_1^2\cdots p_\alpha^2 p_{\alpha+1}(12j+p_{\alpha+1})-1}{12}\right)\equiv 0 \pmod 3.$$

3 定理 1.3 的证明

3.1 解析证明

定义

$$F(z,q)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-zq^{6k+1})(1-zq^{6k+2})(1-zq^{6k+3})(1-zq^{6k+4})(1-zq^{6k+5})}.$$

另一方面，我们有

$$F(z,q)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}b_6(n,m)\,z^m\,q^n,$$

其中 $b_6(n,m)$ 表示将 n 分拆为 m 个部分的分拆数，且这些部分均不与 0 模 6 同余。

因此，考虑 $b_6(n,m)$ 和 $Q_2(n)$ 的生成函数，我们可以写出

$$F(-1,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\big(b_{6,e}(n)-b_{6,o}(n)\big)\,q^n$$

and

$$F(-1,q)=\frac{1}{(-q,-q^2,-q^3,-q^4,-q^5;q^6)_\infty}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-q^6;q^6)_\infty}{(-q;q)_\infty} \\
&= (q;q^2)_\infty\,(-q^6;q^6)_\infty \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,Q_2(n)\,q^n,
\end{aligned}
$$

其中我们用到了欧拉恒等式 [2, (1.2.5)]

$$
\frac{1}{(q;q^2)_\infty} = (-q;q)_\infty.
$$

3.2 组合证明

我们首先指出，集合 (S_1, S_2)（其中 $S_1 = \{n \in \mathbb{N}:\ n \not\equiv 0 \pmod 6\}$ 且 $S-2 = \{n \in \mathbb{N}:\ n \not\equiv \pm 2 \pmod 6\}$）并非欧拉对，定理 1.3 的表述也不是 [13] 的定理 3.1 的特例。不过，证明 [13, 定理 3.1] 时所用的思路也可用于此处。给定一个分拆 λ，用 $\ell(\lambda)$ 表示 λ 中部分的个数。注意，在一个 6-正则分拆中，偶数部分模 6 同余于 ± 2。

令 $\mathcal{B}'_6(n)$ 表示满足以下条件的 n 的 6-正则分拆 λ 的集合：λ 至少有一个偶数部分，或至少有一个模 6 不同余于 3 的重复部分。此外，分别用 $\mathcal{B}'_{6,\,e}(n)$ 和 $\mathcal{B}'_{6,\,o}(n)$ 表示 $\mathcal{B}'_6(n)$ 中 $\ell(\lambda)$ 为偶数和奇数的分拆子集。我们定义 φ 在 $\mathcal{B}'_6(n)$ 上的一个对合，使 $\ell(\lambda)$ 的奇偶性反转。

从 $\lambda \in \mathcal{B}'_6(n)$ 开始。我们用 r 表示 λ 中不与 3 模 6 同余的最大重复部分，用 e 表示 λ 中最大的偶数部分。如果 r 或 e 不存在，则令它们等于 0。

1. 若 $2r > e$，我们将 $\varphi(\lambda)$ 定义为这样一个分拆：将 λ 中两个等于 r 的部分替换为一个等于 $2r$ 的部分。注意，由于 $r \not\equiv 3 \pmod 6$，我们有 $2r \not\equiv 0 \pmod 6$。因此，$\varphi(\lambda) \in \mathcal{B}'_6(n)$。

2. 若 $2r \leqslant e$，我们将 $\varphi(\lambda)$ 定义为这样一个分拆：将 λ 中一个等于 e 的部分替换为两个等于 $e/2$ 的部分。注意，由于 $e \equiv \pm 2 \pmod 6$，我们有 $e/2 \not\equiv 0,3 \pmod 6$。因此，$\varphi(\lambda) \in \mathcal{B}'_6(n)$。

由于 φ：$\mathcal{B}'_6(n) \to \mathcal{B}'_6(n)$ 是一个会改变 $\ell(\lambda)$ 奇偶性的对合，因此我们有 $|\mathcal{B}'_{6,\,e}(n)| = |\mathcal{B}'_{6,\,o}(n)|$。

令 $\mathcal{Q}'_2(n)$ 为满足以下条件的分拆 $\lambda \in \mathcal{B}_6(n)$ 的集合：所有部分均为奇数，且只有模 6 同余于 3 的部分可以重复。由于 λ 的所有部分都是奇数，因此 $\ell(\lambda) \equiv n \pmod 2$。于是，

$$
b_{6,e}(n) - b_{6,o}(n) = (-1)^n |\mathcal{Q}'_2(n)|.
$$

最后，我们构造一个双射 ψ：$\mathcal{Q}'_2(n) \to \mathcal{Q}_2(n)$，其中 $\mathcal{Q}_2(n)$ 是由互异部分组成且部分模 6 不同余于 ± 2 的 n 的分拆。本文中，若 k 是一个正整数，且 η 是一个所有部分均可被 k 整除的分拆，则记 $\eta_{/k}$ 为这样一个分拆：其部分是 η 的各部分除以 k 所得的结果。

对于任意分拆 η，我们用 $k\eta$ 表示这样一个分拆：其部分是将 η 的各部分乘以 k 所得的结果。

令 $\lambda \in \mathcal{Q}_2'(n)$。本文中，两个分拆的并均指将它们的部件多重集合按非递减顺序排列后所得的并。写作 $\lambda = (\alpha, \beta)$，其中 $\alpha \cup \beta = \lambda$, α 是一个互异部件分拆，而 β 是一个各部分均具有偶重数的分拆。因此，β 的所有部分模 6 均同余于 3，且 $\beta_{/3}$ 是一个由奇数部分组成、每个部分均具有偶重数的分拆。我们用 φ_{Gl} 表示格莱舍双射，它将 n 的一个由奇数部分组成的分拆映射为 n 的一个互异部件分拆。于是，$\varphi_{Gl}(\beta_{/3})$ 是一个由互异偶数部分组成的分拆。分拆 $3\varphi_{Gl}(\beta_{/3})$ 的各部分互异，且均模 6 同余于 0。令 $\psi(\lambda) := \alpha \cup 3\varphi_{Gl}(\beta_{/3})$。于是，$\psi$ 是从 $\mathcal{Q}_2'(n)$ 到 $\mathcal{Q}_2(n)$ 的一个双射，从而完成定理的证明。

备注 4. 我们注意到，事实上，上述组合证明中的对合 φ 会改变一个分拆中偶数部分个数的奇偶性。因此，上述组合证明也是以下定理 1.3 推论的证明。

推论 3.1. 对于 $n \geqslant 0$, $Q_2(n) = b_{6,\ ee}(n) - b_{6,\ eo}(n)$.

4 定理 1.5 的证明

沃森五重乘积恒等式 [15, 47] 指出

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(3n+1)/2}\,(z^{-3n} - z^{3n+1}) = (z, q/z, q; q)_\infty\,(qz^2, q/z^2; q^2)_\infty. \tag{10}$$

分拆理论中的初等技巧可得以下生成函数

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c(n)\,q^n &= \frac{(q^2, q^{20}, q^{22}, q^{24}, q^{26}, q^{28}, q^{46}, q^{48}; q^{48})_\infty}{(q;q)_\infty} \\
&= \frac{(q^2, q^{22}, q^{24}; q^{24})_\infty\,(q^{20}, q^{28}; q^{48})_\infty}{(q;q)_\infty} \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{12n(3n+1)}\,(q^{-6n} - q^{6n+2}) \\
&\quad \text{(By (10), with } q \text{ replaced by } q^{24} \text{ and } z \text{ replaced by } q^2\text{)} \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{6n(6n+1)} - q^{(6n+1)(6n+2)})
\end{aligned}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(n)\,q^n = \frac{(q^4, q^{10}, q^{14}, q^{24}, q^{34}, q^{38}, q^{44}, q^{48}; q^{48})_\infty}{(q;q)_\infty}$$

$$= \frac{(q^{10},q^{14},q^{24};q^{24})_\infty\,(q^4,q^{44};q^{48})_\infty}{(q;q)_\infty}$$
$$= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{12n(3n+1)}\,(q^{-30n}-q^{30n+10})$$
(By (10), with q replaced by q^{24} and z replaced by q^{10})
$$= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{6n(6n-3)}-q^{(6n+2)(6n+5)}).$$

我们可以写成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(c(n)-d(n-2)\big)\,q^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c(n)\,q^n - \sum_{n=0}^{\infty} d(n)\,q^{n+2}$$
$$= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{6n(6n+1)}-q^{(6n+1)(6n+2)}-q^{6n(6n-3)+2}+q^{(6n+2)(6n+5)+2})$$
$$= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{6n(6n+1)}-q^{(6n+1)(6n+2)}-q^{(6n-1)(6n-2)}+q^{(6n+3)(6n+4)})$$
$$= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{3n(3n-1)}-q^{(3n+1)(3n+2)})$$
$$= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n(3n+1)}(q^{-6n}-q^{6n+2})$$
$$= \frac{(q^2,q^4,q^6;q^6)_\infty\,(q^2,q^{10};q^{12})_\infty}{(q;q)_\infty}$$
(By (10), with q replaced by q^6 and z replaced by q^2)
$$= \frac{(q^2;q^2)_\infty\,(q^2,q^{10};q^{12})_\infty}{(q;q^2)_\infty\,(q^2;q^2)_\infty}$$
$$= (-q;q)_\infty\,(q^2,q^{10};q^{12})_\infty$$
$$= (-q;q^2)_\infty\,(-q^2;q^2)_\infty\,(q^2,q^{10};q^{12})_\infty$$
$$= (-q;q^2)_\infty\,(-q^6;q^6)_\infty\,(-q^2,-q^4;q^6)_\infty\,(q^2,q^{10};q^{12})_\infty$$
$$= (-q;q^2)_\infty\,(-q^6;q^6)_\infty\,\frac{(q^2,q^4,q^8,q^{10};q^{12})_\infty}{(q^2,q^4;q^6)_\infty}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} Q_2(n)\,q^n.$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(c(n)+d(n-2)\big)\,q^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{6n(6n+1)} - q^{(6n+1)(6n+2)} + q^{(6n-1)(6n-2)} - q^{(6n+3)(6n+4)}) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{6n(6n+1)} - q^{(6n+3)(6n+4)}) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{3n(3n-1)} \\
&= \frac{(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty} \qquad \text{(By (6) with } q \text{ replaced by } q^6\text{)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_6(n)\, q^n.
\end{aligned}
$$

证明至此结束。

5 定理 1.8 和 1.9 的证明

G. E. Andrews 和 M. Merca [4] 证明了式 (6) 的以下截断形式：对任意 $k \geqslant 1$,

$$
\frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=-(k-1)}^{k} (-1)^n\, q^{n(3n-1)/2} = 1 + (-1)^{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^{\binom{k}{2}+(k+1)n}}{(q;q)_n} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \tag{11}
$$

其中

$$
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, & \text{if } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

注意，式 (11) 右边的级数是 $M_k(n)$ 的生成函数，即

$$
\sum_{n=0}^{\infty} M_k(n)\, q^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^{\binom{k}{2}+(k+1)n}}{(q;q)_n} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.
$$

由式 (11)，将 q 替换为 q^6，可得

$$
\frac{1}{(q^6;q^6)_\infty} \sum_{n=-(k-1)}^{k} (-1)^n\, q^{3n(3n-1)} = 1 + (-1)^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} M_k(n)\, q^{6n}.
$$

将这个恒等式两边同时乘以

$$
\frac{(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty},
$$

可得

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-(k-1)}^{k}(-1)^n\,q^{3n(3n-1)}-\frac{(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty}=(-1)^{k-1}\frac{(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}M_k(n)\,q^{6n}$$

or

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}p(n)\,q^n\right)\left(\sum_{n=-(k-1)}^{k}(-1)^n\,q^{3n(3n-1)}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}b_6(n)\,q^n$$
$$=(-)^{k-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_6(n)\,q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}M_k(n)\,q^{6n}\right).$$

通过比较此方程两边 q^n 的系数，即可得出定理 1.8 的断言。

定理 1.9 的证明与定理 1.8 的证明十分相似。在[50], E. X. W. Xia 和 X. Zhao 的研究中，他们考察了欧拉五边形数定理 (6)，并证明了以下截断形式：对于任意 $k\geqslant 1$,

$$\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-k}^{k}(-1)^n\,q^{n(3n-1)/2}=1+(-1)^k\,\frac{q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+k+1)(k+1)}}{(q^{n+k+1};q)_\infty}.\quad(12)$$

我们注意到，(12) 右边的级数是 $P_k(n)$ 的生成函数，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{P}_k(n)\,q^n=\frac{q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+k+1)(k+1)}}{(q^{n+k+1};q)_\infty}.$$

由 (12) 可得，将 q 替换为 q^6，得到

$$\frac{1}{(q^6;q^6)_\infty}\sum_{n=-k}^{k}(-1)^n\,q^{3n(3n-1)}=1+(-1)^k\,\frac{q^{3k(k+1)}}{(q^6;q^6)_k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{6(n+k+1)(k+1)}}{(q^{6(n+k+1)};q^6)_\infty}.$$

将此恒等式两边乘以 $b_6(n)$ 的生成函数，得到

$$(-1)^k\left(\Big(\sum_{n=1}^{\infty}p(n)\,q^n\Big)\Big(\sum_{n=-k}^{k}(-1)^n\,q^{n(3n-1)/2}\Big)-\sum_{n=1}^{\infty}b_6(n)\,q^n\right)$$
$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_6(n)\,q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{P}_k(n)\,q^{6n}\right).$$

考虑两个幂级数的柯西乘积，即可轻松证明定理 1.9。

6 定理1.10的证明

雅可比三重乘积恒等式（参见 [20, 式 (1.6.1)]）指出：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-z)^n \, q^{n(n-1)/2} = (z, q/z, q; q)_\infty. \tag{13}$$

将 (13) 中的 q 替换为 q^6，并将 z 替换为 q，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \, q^{n(3n-2)} &= (q, q^5, q^6; q^6)_\infty \\
&= \frac{(q^6; q^6)_\infty}{(q; q)_\infty} \cdot (q, q^5; q^6)_\infty \, (q, q^2, q^3; q^3)_\infty \\
&= \frac{(q^6; q^6)_\infty}{(q; q)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n(3n+1)/2} \, (q^{-3n} - q^{3n+1}) \\
&\qquad \text{(By (10), with } q \text{ replaced by } q^3 \text{ and } z \text{ replaced by } q\text{)} \\
&= \frac{(q^6; q^6)_\infty}{(q; q)_\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n(3n-1)/2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(3n+1)(3n+2)/2} \right) \\
&= \frac{(q^6; q^6)_\infty}{(q; q)_\infty} \left(\sum_{\substack{n=0 \\ n \not\equiv 1 \pmod 3}}^{\infty} q^{n(n+1)/2} - \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 1 \pmod 3}}^{\infty} 2 \, q^{n(n+1)/2} \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_6(n) \, q^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \, q^{n(n+1)/2} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \rho_j \, b_6\big(n - j(j+1)/2\big) \right) q^n.
\end{aligned}$$

证明至此完成。

7 定理1.12和1.14的证明

7.1 解析证明

我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_2(n) \, q^n &= (-q; q^2)_\infty \, (-q^6; q^6)_\infty \\
&= \frac{(q^2; q^4)_\infty}{(q; q^2)_\infty} \, \frac{1}{(q^6; q^{12})_\infty} \\
&= \frac{1}{(q; q)_\infty} \cdot (q^2, q^{10}; q^{12})_\infty \, (q^2, q^4, q^6; q^6)_\infty
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n(3n+1)} \left(q^{-6n} - q^{6n+2}\right)$$

(By (10), with q replaced by q^6 and z replaced by q^2)

$$= \frac{1}{(q;q)_\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n(3n-1)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(3n+1)(3n+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{(q;q)_\infty} \left(\sum_{\substack{n=0 \\ n \not\equiv 1 \pmod 3}}^{\infty} q^{n(n+1)} - \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 1 \pmod 3}}^{\infty} 2\, q^{n(n+1)} \right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n\, q^{n(n+1)} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \rho_j\, p\big(n - j(j+1)\big) \right) q^n \tag{14}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_2(n)\, q^n = (-q^3;q^3)_\infty\, (-q,-q^5;q^6)_\infty$$

$$= \frac{(-q^3;q^3)_\infty}{(q^6;q^6)_\infty} \cdot (-q,-q^5,q^6;q^6)_\infty$$

$$= \frac{1}{(q^3;q^3)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(3n-2)}$$

(By (13), with q replaced by q^6 and z replaced by $-q$)

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^{3n} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(3n-2)} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} p\left(\frac{n - j(3j-2)}{3} \right) \right) q^n,$$

其中，若 x 不是非负整数，则 $p(x) = 0$。定理 1.12 得证。

另一方面，根据这些关系，我们可以推导出

$$(q;q)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} Q_2(n)\, q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n\, q^{n(n+1)}$$

and

$$(q^3;q^3)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} Q_2(n)\, q^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(3n-2)}.$$

考虑到（6），这些方程可以改写为

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,q^{n(3n-1)/2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}Q_2(n)\,q^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\,q^{n(n+1)}$$

and

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,q^{3n(3n-1)/2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}Q_2(n)\,q^n\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n(3n-2)}.$$

通过比较这些等式两边 q^n 的系数，可以轻易得出定理 1.14 的断言。

7.2 定理 1.12 (ii) 的组合证明

我们将使用 [11, 引理 2.1] 的一个特例。首先引入一些记号。令 $\mathcal{Q}_{6,1}(n)$ 表示由所有部件互异且模 6 同余于 ±1 的 n 的分拆组成的集合。令 $\mathcal{W}_{6,1}(n)$ 表示所有有序对 $(\mu,k(3k-2))$ 的集合，其中 μ 是一个部件能被6整除的分拆，$k\in\mathbb{Z}$，且 $|\mu|+k(3k-2)=n$。于是，[11, 引理 2.1] 配合 $m=6$ 和 $r=1$ 给出一个双射 $\xi_{6,1}:\mathcal{Q}_{6,1}(n)\to\mathcal{W}_{6,1}(n)$。

令 n 为一个非负整数。我们构造一个双射

$$\psi:\mathcal{Q}_2(n)\to\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{P}\left(\frac{n-j(3j-2)}{3}\right).$$

从 $\lambda\in\mathcal{Q}_2(n)$ 开始。写作 $\lambda=\alpha\cup\beta$，其中 α 是由模 6 同余于 1 或 5 的互异部分构成的分拆，而 β 是由可被 3 整除的互异部分构成的分拆。因此，$\beta_{/3}$ 是一个具有互异部分的分拆，而 $\varphi_{Gl}^{-1}(\beta_{/3})$ 是一个具有奇数部分的分拆。此外，$3\varphi_{Gl}^{-1}(\beta_{/3})$ 是一个部分模 6 同余于 3 的分拆，且 $|3\varphi_{Gl}^{-1}(\beta_{/3})|=|\beta|$。令 $\xi_{6,1}(\alpha)=(\mu,k(3k-2))$，其中 $k\in\mathbb{Z}$。由于 μ 的各部分均可被 6 整除，因此 $\mu\cup3\varphi_{Gl}^{-1}(\beta_{/3})$ 的所有部分均可被 3 整除。定义 $\psi(\lambda)=(\mu\cup3\varphi_{Gl}^{-1}(\beta_{/3}))_{/3}$。由于 $|\mu|=|\alpha|-k(3k-2)$ 且 $|\alpha|+|\beta|=n$，可知 $\psi(\lambda)$ 是一个 ${}^{n-k}{}_{(3k-2)\ 3}$ 的分拆。

对于逆映射，令 $k\in\mathbb{Z}$。从一个 ${}^{n-k}{}_{(3k-2)\ 3}$ 的分拆 η 开始。~~于是 3η 是~~ $n-k(3k-2)$ 的一个分拆。记作 $3\eta=\mu\cup\pi$，其中 μ（分别为 π）的部分模 6 同余于 0（分别同余于 3）。我们有，$\xi_{6\ 1,}^{-1}(\mu,k(3k-2))$ 是一个由模 6 同余于 1 或 5 的部分组成的 $|\mu|+k(3k-2)$ 分拆。分拆 $\pi/3$ 含有奇数部分，而 $3\varphi_{Gl}(\pi_{/3})$ 是一个由可被 3 整除的互异部分组成的分拆，且 $|3\varphi_{Gl}(\pi/3)|=|\pi|$。于是 $\psi^{-1}(\eta)=\xi_{6\ 1,}^{-1}(\mu,k(3k-2))\cup3\varphi_{Gl}(\pi/3)\in\mathcal{Q}_2(n)$。

7.3 定理 1.14 (ii) 的组合证明

我们用 $\mathcal{Q}(n)$ 表示 n 的互异部分分拆集合，并令 $\mathcal{Q}:=\cup_{n\geq0}\mathcal{Q}(n)$，$\mathcal{Q}_2:=\cup_{n\geq0}\mathcal{Q}_2(n)$，以及 $\mathcal{Q}_{6,1}:=\cup_{n\geq0}\mathcal{Q}_{6,1}(n)$。令 φ_F 为

Franklin 为给出欧拉五边形数定理的组合证明而定义的对合（例如参见 [2, 定理 1.6]）。令

$$\mathcal{A}(n) := \{(\lambda, \mu) : \lambda \in \mathcal{Q}_2, \mu = 3\eta \text{ with } \eta \in \mathcal{Q}, |\lambda| + |\mu| = n\}$$

and

$$\mathcal{EA}(n) := \{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}(n) : \mu_{/3} \text{ pentagonal partition}\}.$$

这里，五边形分拆要么是 $\emptyset$，要么是形如 $(2i, 2i-1, \ldots, i+1)$ 或 $(2i-1, 2i-2, \ldots, i)$ 的分拆，其中 $i > 0$ 为某个整数。

对合 $(\lambda, \mu) \mapsto (\lambda, 3\varphi_F(\mu_{/3}))$ 在 $\mathcal{A}(n) \setminus \mathcal{EA}(n)$ 上给出了组合证明，说明

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, Q_2\big(n - 3j(3j-1)/2\big)$$

是下列对象的生成函数

$$|\{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}(n) : \ell(\mu) \text{ even}\}| - |\{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}(n) : \ell(\mu) \text{ odd}\}|. \tag{15}$$

我们在 $\mathcal{A}(n)$ 的一个子集上定义另一个对合，它会改变有序对中第二个分拆长度的奇偶性。给定 $(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}(n)$，记作$\lambda = \lambda^{3|} \cup \lambda^{3\nmid}$，其中 $\lambda^{3|}$ 的各部分均为 λ 中能被 3 整除的部分。若 $\ell(\lambda^{3|}) \not\equiv \ell(\mu) \pmod 2$，则将 $(\lambda^{3|}, \lambda^{3\nmid}, \mu)$ 映射为 $(\mu, \lambda^{3\nmid}, \lambda^{3|})$。若 $\ell(\lambda^{3|}) \not\equiv \ell(\mu) \pmod 2$ 且 $\lambda^{3|} \neq \mu$，令 i 为满足 $\lambda_i^{3|} \neq \mu_i$ 的最小整数。若 $\lambda_i^{3|} > \mu_i$，则从 $\lambda^{3|}$ 中移去部分 $\lambda_i^{3|}$，并向 μ 中插入一个等于 $\lambda_i^{3|}$ 的部分。若 $\lambda_i^{3|} < \mu_i$，则从 μ 中移去部分 μ_i，并向 $\lambda^{3|}$ 中插入一个等于 μ_i 的部分。由此，我们在集合 $\{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}(n) : \lambda^{3|} \neq \mu\}$ 上得到一个对合，它会改变 $\ell(\mu)$ 的奇偶性。因此，(15) 等于

$$|\{(\lambda, \lambda^{3|}) \in \mathcal{A}(n) : \ell(\lambda^{3|}) \text{ even}\}| - |\{(\lambda, \lambda^{3|}) \in \mathcal{A}(n) : \ell(\lambda^{3|}) \text{ odd}\}|.$$

将$(\lambda, \lambda^{3|}) = (\lambda^{3|}, \lambda^{3\nmid}, \lambda^{3|})$映射到$(\lambda^{3\nmid}, 2\lambda^{3|})$，并令

$$\mathcal{B}(n) := \{(\alpha, \beta) : \alpha \in \mathcal{Q}_{6,1}, \beta = 6\gamma \text{ with } \gamma \in \mathcal{Q}, |\alpha| + |\beta| = n\},$$

我们看到，(15)等于

$$|\{(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}(n) : \ell(\beta) \text{ even}\}| - |\{(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}(n) : \ell(\beta) \text{ odd}\}|.$$

设 $\mathcal{C}(n)$为满足如下条件的三元组$(\gamma, k(3k-2), \beta)$的集合：$k \in \mathbb{Z}$、γ和 β 是部件能被6整除的分拆，$\beta \in \mathcal{Q}$，且 $|\gamma| + k(3k-2) + |\beta| = n$。

我们如下定义从 $\mathcal{B}(n)$到集合 $\mathcal{C}(n)$的一个双射：

$$(\alpha, \beta) \mapsto (\xi_{6,1}(\alpha), \beta) = (\gamma, k(3k-2), \beta)$$

其中，$\xi_{6,1} : \mathcal{Q}_{6,1}(n) \to \mathcal{W}_{6,1}(n)$ 是 [11, 引理 2.1]中的双射。因此，等于 (15)

$$|\{(\gamma, k(3k-2), \beta) \in \mathcal{C}(n) : \ell(\beta) \text{ even}\}| - |\{(\gamma, k(3k-2), \beta) \in \mathcal{C}(n) : \ell(\beta) \text{ odd}\}|.$$

最后，我们在 ζ 上定义一个对合

$$\{(\gamma, k(3k-2), \beta) \in C(n) : (\gamma, \beta) \neq (\emptyset, \emptyset)\}.$$

从 $(\gamma, k(3k-2)\ \beta)\ \in C(n)$ 开始，其中 $(\gamma, \beta)\ \neq (\emptyset, \emptyset)$。若 $\gamma_1 > \beta_1$，则从 γ 中移除部分γ_1，并向 β 中插入一个等于 γ_1 的部分。若 $\gamma_1 \leq \beta_1$，则从β 中移除部分 β_1，并向 γ 中插入一个等于 β_1 的部分。对合 ζ 会改变$\ell(\beta)$的奇偶性。

至此，定理 1.14(ii) 的组合证明完成。

8 不等式与未解决的问题

涉及分拆函数（尤其是欧拉分拆函数 $p(n)$）的线性不等式，近年来受到 G. E. Andrews 和 M. Merca [4, 5, 6], 、C. Ballantine 和 M. Merca [8, 9, 10], 、C. Ballantine、M. Merca、D. Passary 和 A. J. Yee [12], 、V. J. W. Guo 和 J. Zeng [21], 、J. Katriel [24],、M. Merca
[26, 27, 28, 29, 30, 31, 38, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39], 、M. Merca 和 J. Katriel [40], 、M. Merca、C. Wang 和 A. J. Yee [41], 、以及 M. Merca 和 A. J. Yee[42]的研究。例如，G. E. Andrews 和 M. Merca [4] 证明了：对于 $n \geqslant 0$,$k > 0$,

$$(-1)^{k-1} \sum_{j=-(k-1)}^{k} (-1)^j\, p\big(n - j(3j-1)/2\big) \geqslant 0.$$

最近， [5, 推论 11], 同一批作者发现了一个关于 $p(n)$的新的无限族线性齐次不等式，其中涉及三角数：如果 n 和 k 中至少有一个是奇数,

$$(-1)^{k-1} \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j(j-1)/2}\, p\big(n - j(j+1)/2\big) \geqslant 0.$$

作为定理 1.8 的推论，我们指出关于 $p(n)$的一个新的无限族线性不等式。

推论 8.1. 对于 $n \geqslant 0$, $k > 0$,

$$(-1)^k \left(b_6(n) - \sum_{j=-(k-1)}^{k} (-1)^j\, p\big(n - 3j(3j-1)\big) \right) \geqslant 0,$$

当 $n \geqslant 3k(3k+1)$时，不等式严格成立。

例如，该推论的情形 $k = 1$ 和 $k = 2$ 给出了以下双重不等式

$$p(n) - p(n-6) - p(n-12) + p(n-30) \leqslant b_6(n) \leqslant p(n) - p(n-6). \qquad (16)$$

用 $\mathrm{mex}_{2,2}$，表示，不等式 (16) 变为

$$pm_2(n) + pm_4(n) - pm_8(n) - pm_{10}(n) \leqslant b_6(n) \leqslant pm_2(n) + pm_4(n).$$

在本节中，受恒等式 (8) 以及定理 1.10、1.12 和 1.14 的启发，我们提出关于分拆函数 $p(n)$、$b_6(n)$ 和 $Q_2(n)$ 的新的无限族线性不等式猜想。

8.1 欧拉分拆函数

受定理 1.12 的启发，对于 $k \geqslant 0$，我们研究了以下级数：

$$(-q;q^2)_\infty\,(-q^6;q^6)_\infty - \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{j=0}^{k}\rho_j\,q^{j(j+1)}.$$

大量数值证据表明，我们可以猜想：当 k 不与 0 模 3 同余时，该级数的系数非负；当 k 与 0 模 3 同余时，该级数的系数非正。此外，我们猜想，该级数中 q^n 的系数非零，当且仅当 $n \geqslant (k+1)(k+2)$。对此猜想，我们有如下组合解释。

猜想 1. 对于 n、$k \geqslant 0$,

(i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{3k}\rho_j\,p\big(n-j(j+1)\big) \geqslant Q_2(n)$,

with strict inequality if $n \geqslant (3k+1)(3k+2)$;

(ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{3k+1}\rho_j\,p\big(n-j(j+1)\big) \leqslant Q_2(n)$;

当 $hn \geqslant 3\quad +2\quad 3\quad +3$ 时，(严格不等式成立)。

假设这一猜想成立，我们注意到以下双重不等式：

$$\begin{aligned} p(n) - 2p(n-2) + p(n-6) &\leqslant Q_2(n) \\ &\leqslant p(n) - 2p(n-2) + p(n-6) + p(n-12). \end{aligned} \tag{17}$$

用 $\mathrm{mex}_{2,2}$，表示，不等式（17）变为

$$pm_2(n) - pm_4(n) \leqslant Q_2(n) \leqslant pm_2(n) - pm_4(n) + pm_{>6}(n).$$

8.2 6-正则分拆

受恒等式 (8) 和截断五边形数定理 (11) 的启发，对于 $k > 0$，我们考虑了以下级数：

$$(q^6;q^6)_\infty - \frac{(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-(k-1)}^{k}(-1)^n\,q^{n(3n-1)/2}.$$

大量数值证据表明，我们可以猜想：当 k 为偶数时，该级数的系数非负；当 k 为奇数时，系数非正。此外，我们猜想，该级数中 q^n 的系数非零，当且仅当 $n \geqslant k(3k+1)/2$。我们对这一猜想有如下组合解释。对于任意整数 n，令

$$\alpha_n := \begin{cases} (-1)^m, & \text{if } n = 3m(3m-1),\ m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

猜想 2. 对于 $n \geqslant 0,\ k > 0,$

$$(-1)^k \left(\alpha_n - \sum_{j=-(k-1)}^{k} (-1)^j\, b_6\big(n - j(3j-1)/2\big) \right) \geqslant 0,$$

当 $n \geqslant k(3k+1)/2$ 时，严格不等式成立

我们指出，这个不等式可用 $M_k(n)$ 改写如下：对于 $n \geqslant 0,\ k > 0,$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j\, M_k\big(n - 3j(3j-1)\big) \geqslant 0, \tag{18}$$

当 $n \geqslant k(3k+1)/2$ 时，严格不等式成立。

类比猜想 2，我们还提出以下猜想。

猜想 3. 对于 $n \geqslant 0,\ k > 0,$

$$(-1)^{k-1} \left(\alpha_n - \sum_{j=-k}^{k} (-1)^j\, b_6\big(n - j(3j-1)/2\big) \right) \geqslant 0,$$

当 $n \geqslant k(3k+1)/2$ 时，不等式为严格不等式。

很容易看出，猜想 3 是猜想 2 的较弱版本。猜想 3 给出的 $\widetilde{}$不等式可用 $P_k(n)$ 重写如下：对于 $n \geqslant 0,\ k > 0,$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j\, \widetilde{P}_k\big(n - 3j(3j-1)\big) \geqslant 0, \tag{19}$$

当 $n \geqslant k(3k+1)/2$ 时，不等式为严格不等式。显然，不等式 (18) 蕴含不等式 (19)。

受定理 1.10 的启发，对于 $k \geqslant 0$ ，我们研究了以下级数：

$$(q, q^5, q^6; q^6)_\infty - \frac{(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty} \sum_{j=0}^{k} \rho_j\, q^{j(j+1)/2}.$$

大量数值证据支持这样的猜想：如果 k 不被 3 整除，该级数的系数均非负；如果 k 被 3 整除，该级数的系数均非正。此外，当且仅当 $n \geqslant (k+1)(k+2)/2$ 时，该级数中 q^n 的系数非零。我们对这一猜想有如下组合解释。对于任意整数 n，令

$$\beta_n := \begin{cases} (-1)^m, & \text{if } n = m(3m-2),\ m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

猜想 4. 对于 n、$k \geqslant 0$,

(i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{3k} \rho_j\, b_6\big(n - j(j+1)/2\big) \geqslant \beta_n,$

with strict inequality if $n \geqslant (3k+1)(3k+2)/2$;

(ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{3k+2} \rho_j\, b_6\big(n - j(j+1)/2\big) \leqslant \beta_n$;

with strict inequality if $n \geqslant (3k+2)(3k+3)/2$.

假设这一猜想成立，我们指出下面的双重不等式:

$$b_6(n) - 2b_6(n-1) + b_6(n-3) \leqslant \beta_n \leqslant b_6(n) - 2b_6(n-1) + b_6(n-3) + b_6(n-6).$$

8.3 互异部件分拆 $\neq \pm 2$ （模 6）

受定理 1.14.(i) 的启发，对于 $k > 0$，我们考虑下面的级数:

$$(q^2, q^{10}; q^{12})_\infty\, (q^2; q^2)_\infty - (-q; q^2)_\infty\, (-q^6; q^6)_\infty \sum_{j=-(k-1)}^{k} (-1)^j q^{j(3j-1)/2}.$$

大量数值证据表明，可以猜想：当 k 为偶数时，该级数的系数为非负；当 k 为奇数时，该级数的系数为非正。我们对这一猜想有如下组合解释。对于任意非负整数 n，令

$$\gamma_n := \begin{cases} \rho_m, & \text{if } n = m(m+1),\ m \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

猜想 5. 对于 $n \geqslant 0$, $k > 0$,

$$(-1)^k \left(\gamma_n - \sum_{j=-(k-1)}^{k} (-1)^j\, Q_2\big(n - j(3j-1)/2\big) \right) \geqslant 0.$$

我们指出，这个不等式可以用 $M_k(n)$ 改写如下：对于 $n \geqslant 0, k > 0$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \, M_k\big(n - j(j+1)\big) \geqslant 0. \tag{20}$$

我们还提出以下比猜想 5 更弱的猜想。

猜想 6. 对于 $n \geqslant 0, k > 0$,

$$(-1)^{k-1} \left(\gamma_n - \sum_{j=-k}^{k} (-1)^j \, Q_2\big(n - j(3j-1)/2\big) \right) \geqslant 0.$$

~这个不等式可用 $P_k(n)$ 重写如下：对于 $n \geqslant 0, k > 0$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \, \widetilde{P}_k\big(n - j(j+1)\big) \geqslant 0. \tag{21}$$

显然，不等式 (20) 推出不等式 (21)。

对于不等式 (18) - (21)，若能对它们的和给出组合解释，将十分有意义。

参考文献

[1] Z. Ahmed, N. D. Baruah，$\ell \in \{5, 6, 7, 49\}$ 的 ℓ-正则分拆的新同余式，拉马努金杂志 40(3)（2016年）649–668。

[2] G. E. Andrews，《分拆理论》，剑桥数学丛书，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。1976年原版的重印本。

[3] G. E. Andrews, M. D. Hirschhorn, J. A. Sellers，《偶数部分互异的分拆的算术性质》，《拉马努金杂志》23(1–3) (2010) 169–181。[4] G. E. Andrews, M. Merca，《截断五边形数定理》，J. Combin. Theory Ser. A, 119 (2012年) 1639–1643。[5] G. E. Andrews, M. Merca，《截断 theta 级数与 Guo 和 Zeng 的一个问题》，J. Combin. Theory Ser. A，154 (2018年) 610–619。[6] G. E. Andrews, M. Merca，《所有将n 拆分为互异部分的分拆中的偶数部分个数》，Ann. Comb. 24 (2020年) 47–54。[7] G. E. Andrews, D. Newman，《整数分拆中的最小排除数》，J. Integer Seq. 23 (2020年)，第 2 期，文章 20.2.3，11 页。

[8] C. Ballantine, M. Merca, 《Watson型恒等式》, Ars Math. Contemp. 17 (2019年) 277–290。[9] C. Ballantine, M. Merca, 《最小排除数与彩色分拆》, S ´em. Lothar. Combin. 84B (2020年) 文章 #23。[10] C. Ballantine, M. Merca, 《最小排除数定理的组合证明》, 《国际数论杂志》17(8) (2021年) 1765–1779。[11] C. Ballantine, M. Merca, 《近似 3-正则上分拆》, 《拉马努金杂志》58 (2022年), 第 3 期, 957–971。[12] C. Ballantine, M. Merca, D. Passary, A. J. Yee, 《两个截断 theta 级数定理的组合证明》, J. Combin. Theory Ser. A 160 (2018年) 168–185。[13] C. Ballantine, M. Merca, C.-S. Radu, 《3-正则分拆数的奇偶性与丢番图方程》, arXiv:2212.09810, 2022年。[14] C. Ballantine, A. Welch, Amanda, 《PED与POD分拆：递推关系的组合证明》, 《离散数学》346 (2023年), 第 3 期, 论文编号 113259。[15] L. Carlitz, M. V. Subbarao, 《五重乘积恒等式的一个简单证明》, 《美国数学会会刊》32 (1972) 42–44。[16] R. Carlson, J. J. Webb, 《 k-正则分拆的同余式的无限多个无限族》, 《拉马努金杂志》33 (2014) 329–337。[17] S.-P. Cui, N. S. S. Gu, 《 ℓ-正则分拆的算术性质》, 《应用数学进展》51(4) (2013) 507–523。[18] B. Dandurand, D. Penninston, 《 ℓ-正则分拆函数的 ℓ-整除性》, 《拉马努金杂志》19 (2009) 63–70。[19] D. Furcy, D. Penniston, 《 ℓ-正则分拆函数模 3 同余式》, 《拉马努金杂志》27 (2012年) 101–108。[20]G. Gasper, M. Rahman, 《基本超几何级数》, 《数学及其应用百科全书》35, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1990。[21] V. J. W. Guo, J. Zeng, 《高斯的两个截断恒等式》, J. Combin. Theory Ser. A, 120 (2013) 700–707。[22] M. D. Hirschhorn, J. A. Sellers, 《5-正则分拆奇偶性结果的初等证明》, 《澳大利亚数学会通报》81(1) (2010) 58–63。[23] Q.-H. Hou, L. H. Sun, L. Zhang, 《二次型与模 3、5 和 7 的ℓ-正则分拆同余式》, 《应用数学进展》70 (2015年) 32–44。

[24] J. Katriel，渐近平凡线性齐次分拆不等式，《数论杂志》184 (2018) 107–121[25] J. Lovejoy，D. Penniston，3-正则分拆与模 $K3$ 曲面，《当代数学》291 (2001) 177–182.[26] M. Merca，生成升序合成的快速算法，数学建模与算法杂志 11 (2012) 89–104.[27] M. Merca，欧拉分拆函数的欧拉五边形数递推关系的一种推广，拉马努金杂志 37 (2015) 589–595.[28]M. Merca，重新审视截断五边形数定理，喀尔巴阡数学杂志 32 (2016) 97–101.[29] M. Merca，欧拉分拆函数的高阶差分与高阶部分和，罗马尼亚科学院数学与应用数学系列年刊 10(1) (2018) 59–71.[30] M. Merca，关于二分五边形数定理的一种组合解释，拉马努金数学学会杂志 7(1) (2019) 7–18.[31] M. Merca，截断θ级数与罗杰斯–拉马努金函数，《实验数学》30(3) (2021) 364–371.[32] M. Merca，关于 n 互异部件分拆中的部分之和，《澳大利亚数学会通报》104(2) (2021) 228–237.[33] M. Merca，关于互异部分分拆与奇数部分分拆，《数学问题》44(8) (2021) 1095–1105.[34] M. Merca，广义兰伯特级数与欧拉五边形数定理，《地中海数学杂志》18:29 (2021).[35] M. Merca，多边形数与罗杰斯–拉马努金–戈登定理，拉马努金杂志 55 (2021) 783–792.[36] M. Merca，关于不含模 12 余 0 的部分的分拆数，± 3《匈牙利数学期刊》83 (2021) 133–143.[37] M. Merca，关于互异部分分拆的线性不等式，拉马努金杂志 58 (2022) 491–503.[38] M. Merca，关于两个截断五重级数定理，《实验数学》31(2) (2022) 606–610.[39] M. Merca，秩分拆函数与截断θ恒等式，《应用分析与离散数学》(2021) https://doi.org/10.2298/AADM190401023M.[40] M. Merca 和 J. Katriel，证明非平凡线性齐次分拆不等式的一般方法，拉马努金杂志 51(2) (2020) 245–266.

[41] M. Merca，C. Wang 和 A. J. Yee，高斯的一个截断θ恒等式与奇数部分过分拆，《Ann. Comb.》23 (2019) 907–915.[42] M. Merca 和 A. J. Yee，关于 n 所有分拆中重数至少为 2 的部分之和，《国际数论杂志》17(3) (2021) 665–681.[43] D. Penniston，p^a-正则分拆函数模 p^j，《数论杂志》94 (2002) 320–325.[44] D. Penniston，ℓ-正则分拆函数的算术，《国际数论杂志》4 (2008) 295–302.[45] N. J. A. Sloane，在线整数数列百科全书。电子版发布于 http://oeis.org (2022).[46] N. A. Smoot，关于建立等差数列中分拆数与 eta 商相关恒等式的计算：Radu 算法的一种实现，《符号计算杂志》104 (2021) 276–311.[47] M. V. Subbarao，M. Vidyasagar，关于 Watson 五重乘积恒等式，《美国数学会会刊》26 (1970) 23–27.[48] E. X. W. Xia，关于某些 ℓ-正则分拆模 t的同余式，《数论杂志》152 (2015) 105–117.[49] E. X. W. Xia，O. X. M. Yao，9-正则分拆的奇偶性结果，拉马努金杂志 34 (2014) 109–117.[50] E. X. W. Xia，X. Zhao，分拆函数的截断和与 Merca 问题，《西班牙皇家精确、物理与自然科学研究院杂志 A 辑：数学》116:22 (2022).[51] L. Wang，5-正则分拆模 5 的幂的同余式，拉马努金杂志 44 (2017) 343–358.[52] L. Wang，7-正则分拆的算术性质，拉马努金杂志 47 (2018) 99–115.[53] J. J. Webb，13-正则分拆函数模 3 的算术，拉马努金杂志 25 (2011) 49–56.