arXiv:2302.01256v2 [math.DG] 2 Jun 2023

三维接触次黎曼几何中的施泰纳公式与管状公式

DAVIDE BARILARI* 和 TANIA BOSSIO*

摘要。我们证明了一个施泰纳公式，适用于配备任意光滑体积、且不含特征点的三维接触次黎曼流形中的正则曲面。我们得到的公式等价于一个半管公式，具有局部性质。因此，它可应用于不含特征点区域中的任意曲面。

我们对展开式中出现的系数给出几何解释，并在若干重要的三维次黎曼模型空间中计算这些系数。这些结果推广了[BFF+15]和[Rit21] 针对海森堡群所得的结果。

目录

1. 引言 1
2. 预备知识 6
3. 半管状邻域与余面积公式 9
4. 半管状邻域体积的局部公式 16
5. 泰勒展开。定理 1 的证明 17
6. 一个运算公式。命题5的证明 21
7. 模型空间中的曲面 25
附录 A. 命题 27 的证明 28
参考文献 30

1. 引言

著名的施泰纳公式指出，有界正则区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的 ε 邻域 Ω_ε 的勒贝格体积可以表示为关于 ε 的 n 次多项式

$$\operatorname{vol}(\Omega_\varepsilon) = \operatorname{vol}(\Omega) + \sum_{k=1}^{n} a_k(\Omega)\varepsilon^k, \tag{1}$$

其中， $a_k = a_k(\Omega)$ 是一些系数，称为闵可夫斯基拟体积。

Steiner公式与所谓的管公式，或者更准确地说，半管公式，自然相关。给定一个嵌入于$\mathbb{R}^n$中的紧超曲面 S ，可将其大小为 ε 的管状邻域定义为距 S不超过ε的点集，其中 S 。若超曲面 S 围成一个正则区域 Ω，则可将大小为 ε 的半管 $T_\varepsilon(\Omega)$定义为仅考虑“外管”，即不属于区域 Ω 的那些点。

* 帕多瓦大学“图利奥·莱维-奇维塔”数学系电子邮箱地址： davide.barilari@unipd.it, tania.bossio@phd.unipd.it。日期：2023年6月5日。2010年 数学学科分类号。 53C17, 49J15。

管状邻域。按照这一约定，显然有$T_\varepsilon(\Omega) = \Omega_\varepsilon \setminus \Omega$，而半管公式为

$$\mathrm{vol}(T_\varepsilon(\Omega)) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\Omega)\varepsilon^k.$$

对于以紧致曲面 $S = \partial\Omega$ 为边界、位于 $\mathbb{R}^3$ 中的正则区域 Ω，系数 a_1，a_2，a_3 可明确计算如下

$$\mathrm{vol}(T_\varepsilon) = \varepsilon \int_S dA - \varepsilon^2 \int_S H dA + \frac{\varepsilon^3}{3} \int_S K dA, \tag{2}$$

其中，H 是 S 的平均曲率，其计算采用由 Ω 的外向法向量所确定的曲面定向；K 是 S 的高斯曲率，而 dA 表示曲面测度。

施泰纳的原始研究证明了欧几里得空间中维数为 2 和 3 [Ste40] 的凸集满足公式（1）。同一时期，Weyl 证明了欧几里得空间 [Wey39] 中光滑子流形的管公式。关于这一主题的全面综述，读者可参阅 A. Gray 的专著 [Gra04]。

本文旨在探究次黎曼几何中施泰纳型（或半管型）公式的有效性。更具体地说，我们研究三维次黎曼接触流形中以曲面为基底构造的半管。我们对展开式中出现的系数给出几何解释，并将 [BFF+15, Rit21] 中关于嵌入海森堡群的曲面所得结果加以推广。

三维接触次黎曼流形是一个三元组 $(M, \mathcal{D}, g)$，其中M 是一个三维流形，$\mathcal{D}$ 是切丛中的一个由括号生成的二维分布，局部上是某个一维光滑形式的核 ω，满足 $\omega \wedge \mathrm{d}\omega \neq 0$，而 g 是定义在该分布上的光滑度量，使得二维诱导体积形式 vol_g 与接触二维形式 $\mathrm{d}\omega|_{\mathcal{D}}$一致。因此，三维形式 $\omega \wedge \mathrm{d}\omega$ 是与接触结构相关联的典范体积形式，而体积测度ν 称为***Popp*** 体积 (更多详情见 [BR13])。

以下假设流形 M 上给定了一个光滑测度 μ，一般可写为 $\mu = h\nu$，其中 h是一个光滑正函数。

1.1. 三维接触流形中的曲面。设 M 是一个三维接触次黎曼流形，S 是一个不含特征点的曲面（即对每个 $x \in S$，均有 $\mathrm{D}_x \neq T_xS$），且该曲面是闭正则区域 $\Omega \subset M$的边界。我们研究建立在 S之上的次黎曼半管的测度 μ，该半管通过次黎曼距离定义。

给定一个没有特征点的超曲面，其曲面的次黎曼法向量是一个向量场，它生成分布中与 T_xS 正交的唯一方向（由于条件 $\mathrm{D}_x \neq T_xS$，该方向定义良好）。如果曲面局部定义为 $S = f^{-1}(0)$，其中 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $\mathrm{d}f \neq 0$ 的光滑函数，那么曲面 S 上的向量场 N 与水平梯度$\nabla_H f$ 平行，且相对于度量 g具有单位范数。因此，N 在符号意义下唯一。回顾一下，水平梯度 $\nabla_H f$ 是与分布 D 相切且满足以下恒等式的唯一向量场

$$\mathrm{d}f(X) = g(\nabla_H f, X)$$

对于每个与 D 相切的向量场 X。给定 D 上的一组标准正交基 X_1, X_2，有 $\nabla_H f = (X_1 f)\, X_1 + (X_2 f)\, X_2$。我们还用 X_0表示与该接触形式相关联的 Reeb向量场；回顾一下，它与 D 横截。

我们用 dV_μ 表示与 μ相关联的 M 上的三维光滑体积形式。也就是说， dV_μ 满足：对于每个 $B \subset M$ 可测集 B，都有 $\mu(B) = \int_B dV_\mu$ 。此外，我们可以定义与 μ相关联的曲面 S 上的光滑测度，即诱导次黎曼面积σ_μ：对于可测集 $U \subset S$，定义

$$\sigma_\mu(U) = \int_U dA_\mu, \quad \text{where} \quad dA_\mu := \iota_N dV_\mu$$

是通过限制体积形式 dV到 N 而得到的 S 上的二维体积形式 μ.

三维体积形式 dV_μ 与超曲面上诱导的次黎曼面积形式之间的关系由以下次黎曼版余面积公式给出，该公式在我们结果的证明中起着关键作用。给定可测函数 f：$M \to \mathbb{R}$和光滑映射 Φ：$M \to \mathbb{R}$，满足 $\nabla_H \Phi \neq 0$在 M上成立，则有

$$\int_M f \left\|\nabla_H \Phi\right\| dV_\mu = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Phi^{-1}(t)} f_{|\Phi^{-1}(t)} dA_\mu^t dt,$$

其中 dA_μ^t 是曲面 $\Phi^{-1}(t$上的诱导次黎曼面积形式。这个只涉及次黎曼量的公式，可由其经典黎曼对应形式推得（参见命题30 及其证明）。

最后，与 μ相关联的曲面 S 的次黎曼平均曲率 is 定义为的光滑函数 Hμ

$$\mathcal{H}_\mu = -\mathrm{div}_\mu \left(\nabla_H \delta\right). \tag{4}$$

其中 δ 表示到曲面 S 的次黎曼有符号距离函数 ，参见定义 14 了解更多详情。

我们强调，(4) 定义的 $\mathcal{H}^\mu$ 不仅定义在 S 上，也定义在曲面的一个邻域内 . 特别地，导数 N(Hμ) 是有意义的。

当 $\mu = \nu$ 测度与 Popp 体积形式 $\omega \wedge \mathrm{d}\omega$相关联时，我们在记号中省略对测度的依赖。对于 $\mathcal{H}:= \mathcal{H}_\nu$ ，根据局部标架可得以下表达式（参见引理 25）

$$\mathcal{H} = -X_1 X_1 \delta - X_2 X_2 \delta - c_{12}^2 \left(X_1 \delta\right) + c_{12}^1 \left(X_2 \delta\right).$$

本文的主要结果是关于局部半管状邻域测度的以下公式。具体而言，对于 $U \subset S$ ，我们考虑子集 U_ε，它由所有满足以下条件的点组成：点 $x \in M \backslash \Omega$ 到曲面 S 的距离由一条曲线实现，且该曲线的端点位于 U。

定理 1。 设 $(M, \mathcal{D}\ g)$ 是一个配备光滑测度 μ 的三维接触次黎曼流形。设 $S \subset M$ 是界定闭区域 Ω 的嵌入光滑曲面，并设 $U \subset S$ 是一个开且相对紧的集合，使得其闭包 $\overline{U}$ 不包含特征点。局部半管状邻域 U_ε 的体积关于 ε 是光滑的，并且对 $\varepsilon \to 0$ 满足：

$$\mu\left(U_\varepsilon\right) = \sum_{k=1}^{3} a_k(U, \mu) \frac{\varepsilon^k}{k!} + o(\varepsilon^3) \tag{5}$$

其中，系数 $a_k = a_k(U, \mu)$ 具有以下表达式：

$$a_1 = \int_U dA_\mu, \quad a_2 = -\int_U \mathcal{H}_\mu dA_\mu, \quad a_3 = \int_U \left(-N\left(\mathcal{H}_\mu\right) + \mathcal{H}_\mu^2\right) dA_\mu.$$

这里， dA_μ 是由 μ在 S 上诱导的次黎曼面积测度，$\mathcal{H}^\mu$ 是 S 相对于 μ 的平均次黎曼曲率，而 N 是该曲面的次黎曼法向量。

注 2。 由于我们的结果是局部的，因此可以放宽 S 作为正则闭区域 Ω 边界的要求。事实上，可以考虑任意光滑曲面S ，并且总能围绕一个子集构造局部半管状邻域，该子集 $U \subset S$ 是开、有向且相对紧的，并且 $\overline{U}$ 不含任何特征点。构造方式与 [Rit21]类似。

注 3. 与（1）中介绍的欧几里得情形不同，定理 5 中的公式（5 ）不是关于 ε的多项式。在欧几里得情形中，多项式展开与体积的特定选择有关，即勒贝格测度。在次黎曼情形中，即使选择自然体积，这一点也不成立。事实上，正如[BFF+15]所证明的，在赋予 Popp测度的第一海森堡群 $\mathbb{H}$ 中， ν 的体积 U_ε 关于 ε是解析的。举例来说，令 U 为 S 水平平面中以原点为中心的一个环带，可以计算泰勒级数的所有项，并验证它不是多项式，参见 [BFF+15，例5。1].

注 4. 次黎曼平均曲率 $\mathcal{H}$ 也可以等价地定义为黎曼平均曲率 H^ε 的极限，其中 S 相对于黎曼延拓 g^ε 收敛到次黎曼度量，并规定 Reeb向量场与 $\mathcal{D}$ 正交且其范数为 $1/\varepsilon$。当光滑测度 $\mathcal{H}\mu$ 与黎曼延拓 μ 相关联时，即使该延拓不一定通过 Reeb向量场定义，同样的结论也成立。对于赋予 Popp测度的海森堡群中的曲面，[BTV17和 BTV20] 证明了这一结果。一般情形下的类似表述见第 3.3 节。

为了计算展开式的系数（5），先验地需要知道次黎曼距离的显式表达式，而这通常是不可能的。我们给出一个公式，只需利用函数 f 局部定义 S，即可计算这些系数。我们在 $\mu = \nu$ 的情形下陈述结果，因此记号中省略对测度的依赖。

命题5。在定理*1*的假设下，设赋予了 *Popp*测度 ν ，且 S 局部定义为光滑函数 f 的等值集： $M \to \mathbb{R}$ 使得 $\nabla_H f|_U \neq 0$ 且$\langle \nabla_H f,\ \nabla_H \delta\rangle|_U > 0$。那么，展开式 a_2 和 a_3 中的(5)具有以下公式：

$$a_2 = -\int_U \operatorname{div}\left(\frac{\nabla_H f}{\|\nabla_H f\|}\right) dA;$$

$$a_3 = \int_U \left[2X_S\left(\frac{X_0 f}{\|\nabla_H f\|}\right) - \left(\frac{X_0 f}{\|\nabla_H f\|}\right)^2 - \kappa - \left\langle \operatorname{Tor}\left(X_0, X_S\right), \frac{\nabla_H f}{\|\nabla_H f\|}\right\rangle\right] dA$$

其中 $\kappa = \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle$ 其中 R 和Tor 分别是与 *Tanno*联络相关的曲率算子和挠率算子，而特征向量场的具体表达式为

$$X_S = \frac{X_2 f}{\|\nabla_H f\|} X_1 - \frac{X_1 f}{\|\nabla_H f\|} X_2.$$

我们强调，先验地并不明显能够写出这样的表达式。例如，观察公式（6）可见，系数 a_3 取决于$\mathcal{H}$ 沿 N的导数，而 N是一个横截于曲面的向量场。因此，它可能取决于$\mathcal{H}$ 在 S之外的取值，正如高阶系数的情形（关于海森堡群中的相关说明，参见注38 ）。

备注 6。 我们注意到，出现在（ a_2 2）中的二阶系数 以及展开式（ a_2 5）中相应的系数 [1]都是平均曲率的积分。

[1]次黎曼公式中多出的因子 2，源于欧几里得情形下将平均曲率定义为两个主曲率之和的一半。

因此，人们可能会想知道，对于三阶系数 a_3，是否也存在相同的类比。也就是说，展开式（ a_3 5）中的系数 是否等于在（ a_3 2）中出现的曲面的某种适当定义的子黎曼高斯曲率的积分。

在[BTV17中，BTV20] 作者通过黎曼逼近定义了曲面$\mathcal{K}_S$ 的次黎曼高斯曲率 S，其中曲面位于海森堡群 $\mathbb{H}$中。用我们的记号表示，其极限表达式为

$$\mathcal{K}_S = X_S(X_0\delta) - (X_0\delta)^2,$$

可以验证，该量的积分并不对应第三个系数 a_3；根据命题5 ，它可改写如下

$$a_3 = \int_U 2X_S\left(X_0\delta\right) - \left(X_0\delta\right)^2 \, dA. \tag{7}$$

其中 $\kappa = 0$ 而 Tor 是海森堡群中的零算子。我们的结果与 Ritoré 在 [Rit21]中得到的表达式一致。

我们利用命题5 给出一些例子。对于嵌入某些特定三维接触流形中的曲面，可以对结果进行特化；此时考虑定义次黎曼结构局部几何的度量不变量 χ 和 κ 。这些系数对应于自然仿射联络的挠率和水平标量曲率，并出现在系数中。对于配备 Popp测度的三维接触流形 $\chi = 0$ ，我们有 ν:

$$a_3 = \int_U 2X_S(X_0\delta) - (X_0\delta)^2 - \kappa \, dA.$$

此外，若以典范基表示 X_1，X_2 对于带有 $\chi \neq 0$ 的李群上的左不变次黎曼接触结构（例如参见[ABB19，命题17。14]），并且同样赋予 Popp测度 ν，则有

$$a_3 = \int_U 2X_S(X_0\delta) - (X_0\delta)^2 - \kappa + \chi\left((X_1\delta)^2 - (X_2\delta)^2\right) \, dA.$$

我们强调，在海森堡群 $\kappa = \chi = 0$中，可恢复公式（7）；而一般而言，在接触流形上，与 Tanno联络相关的曲率算子和挠率算子未必为零。

最后，我们计算（5）在嵌入于 $\mathbb{H}$ 且关于 z轴具有旋转对称性的曲面情形下的展开式。此外，我们证明，对于模型空间 SU（2）和 SL（2）中的“模型”曲面（参见[BBCH21], ，另见 [BH22]），有 $a_2 = a_3 = 0$ ，与 $\mathbb{H}$中的水平平面情形相同。

1.2. **论文结构**。 在第 2 节中，我们回顾三维次黎曼接触流形、Tanno联络以及次黎曼距离的一些预备概念。在第 3 节中，我们定义局部半管状邻域 U_ε 并讨论次黎曼平均曲率。此外，我们证明了余面积公式的一个次黎曼版本，以推导出关于 U_ε的测度公式。第 4 节致力于研究指数映射在固定时刻的雅可比行列式，以推导出便于计算的表达式。定理1 的证明见第 5节。在第 6节中，我们介绍一种实用方法，无需显式知道距离函数即可计算展开式（5）中的系数。此外，我们还将结果具体应用于几何不变量 χ 和 κ取特定值的三维接触流形情形。在第7 节中，我们展示这些结果在海森堡群中的旋转曲面以及空间 SU（2）和 SL（2）中的模型曲面上的一些应用。

致谢。 Davide Barilari 感谢欧盟 NextGenerationEU 项目“NewSRG——次黎曼几何的新方向”在 STARS@UNIPD 2021 计划下提供的资助。作者还部分获得 INdAM–GNAMPA 2022 项目“次黎曼结构中的几何分析”（CUP E55F22000270001）的资助。

2. 预备知识

本节回顾有关三维接触次黎曼流形、典范 Tanno 联络和次黎曼距离的一些定义与性质。更详细且一般性的介绍，参见[ABB19]。

2.1. 三维接触次黎曼流形。

定义 7. 一个三维接触次黎曼流形$(M,\mathrm{D}\ g)$是一个三维光滑流形 M，其上配备一个二维向量分布 D，该分布是一维形式 ω 的核，且满足 $\omega\wedge\mathrm{d}\omega\neq 0$。我们在分布 D 上赋予一个光滑度量 g。

将接触形式乘以一个处处非零函数后，总可以使其相对于 g 满足如下规范化条件：$\mathrm{d}\omega|_{\mathcal{D}}$ 与度量 g 在 D 上定义的体积形式一致，即对 D 的任意正向标准正交标架，均有 $\mathrm{d}\omega(X_1,X_2)=1$。下文中我们始终假设已作此规范化。

条件 $\ker\omega=\mathrm{D}$ 和 $\omega\wedge\mathrm{d}\omega\neq 0$ 等价于：对于 D 中任意一对局部定义且线性无关的向量场 X 和 Y，李括号 $[X,Y]$ 不属于 D。换言之，D 是李括号生成的。

任何与 D 相切的光滑向量场（分别地，任何速度几乎处处位于 D 中的绝对连续曲线）称为水平向量场（分别地，称为水平曲线）。

李括号生成条件意味着，在 M 中任意两点之间至少存在一条水平曲线将它们连接起来（Chow-Rashevkij 定理）。

*Reeb*向量场 X_0 是满足以下条件的唯一向量场：

$$i_{X_0}\omega=1,\qquad i_{X_0}\mathrm{d}\omega=0, \tag{8}$$

其中 i_{X_0} 表示内积。对于 D 的每个正向定向局部标准正交标架 X_1,X_2，都有 X_1,X_2,X_0 是 TM 的局部标架，并满足恒等式 $[X_2,X_1]=X_0$ 模 D。

最后，我们可以在 M 上引入一个黎曼度量，使得 X_1,X_2,X_0 是 TM 的局部标准正交标架；也就是说，将定义在 D 上的度量 g 延拓，并规定 X_0 的范数为单位范数，且与 D 正交。该黎曼度量记作 $\mathrm{h}\cdot,\cdot\mathrm{i}$，相应的诱导范数记作 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}$。

定义 8. 给定一个光滑函数 $f:\ M\to\mathbb{R}$，我们将其水平梯度记作 $\nabla_H f$。它是满足恒等式 $\mathrm{d}f(v)=g(\nabla_H f,v)$ 的唯一水平向量场，对每个 $v\in\mathrm{D}$ 都成立。

将 ∇f 记作 f 关于环境黎曼度量的黎曼梯度。相对于如上选取的局部标准正交标架 X_1,X_2,X_0，梯度的表达式如下：

$$\nabla f=(X_1f)X_1+(X_2f)X_2+(X_0f)X_0,$$
$$\nabla_H f=(X_1f)X_1+(X_2f)X_2.$$

由定义 Reeb向量场的性质（8）以及接触形式的归一化可知，对于 $\mathcal{D}$ 的任意正向标准正交标架

李括号可表示如下

$$
\begin{aligned}
[X_2, X_1] &= c_{12}^1 X_1 + c_{12}^2 X_2 + X_0, \\
[X_1, X_0] &= c_{01}^1 X_1 + c_{01}^2 X_2, \\
[X_2, X_0] &= c_{02}^1 X_1 + c_{02}^2 X_2.
\end{aligned} \tag{9}
$$

对于定义在 M 上的适当光滑函数 c_{ij}^k。注意，若李群上的次黎曼结构是左不变的，则这些函数为常数。

定义 9. 令 $J\colon TM \to TM$ 为由以下恒等式定义的向量丛线性态射

$$J(X_1) = X_2, \quad J(X_2) = -X_1, \quad J(X_0) = 0.$$

注意，对于每个 X, Y 属于 TM，都有 $g(X, JY) = -\mathrm{d}\omega(X, Y)$，因此 $g(X, JX) = 0$，且 $J|_{\mathcal{D}}\colon \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ 保持次黎曼度量不变。

下面的引理可由直接计算得出。

引理 10. 设 $Y_1, Y_2 = JY_1$ 和 $X_1, X_2 = JX_1$ 是两对满足以下条件的水平向量场

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

对于某个光滑函数 $\theta\colon M \to \mathbb{R}$。于是我们有

$$[Y_2, Y_1] = [X_2, X_1] - X_1(\theta) X_1 - X_2(\theta) X_2.$$

2.2. **Tanno联络**。现在我们来引入 Tanno 联络，它是接触流形上的一个典范联络，例如参见 [Tan89, ABR17]。

定义 11. Tanno 联络 ∇ 是满足以下条件的 TM 上的唯一线性联络

(i) $\nabla g = 0$, $\nabla X_0 = 0$; (ii) $\mathrm{Tor}(X, Y) = -\langle X, JY\rangle X_0 = \mathrm{d}\omega(X, Y) X_0$ 对所有 $X, Y \in \mathrm{D}$ 均成立; (iii) 对任意向量场 X，$\mathrm{Tor}(X_0, JX) = -J\mathrm{Tor}(X_0, X)$ 在 M 上成立。

其中 Tor 表示联络 ∇ 的挠率。

注 12。Tanno 联络 ∇ 与算子 J 可交换，即

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y.$$

事实上，根据 J 的定义，$J\nabla_X Y$ 是水平的，而 $\nabla_X JY$ 是水平的，因为

$$0 = X\langle JY, X_0\rangle = \langle \nabla_X JY, X_0\rangle + \langle JY, \nabla_X X_0\rangle = \langle \nabla_X JY, X_0\rangle.$$

此外，由于 J 保持度量不变，我们可以推得

$$\langle \nabla_X JY, JY\rangle = \frac{1}{2} X\langle JY, JY\rangle = \frac{1}{2} X\langle Y, Y\rangle = \langle \nabla_X Y, Y\rangle = \langle J\nabla_X Y, JY\rangle.$$

最后，由于 $\langle Y, JY\rangle = 0$，可得

$$0 = X\langle Y, JY\rangle = \langle \nabla_X Y, JY\rangle + \langle Y, \nabla_X JY\rangle = \langle -J\nabla_X Y, Y\rangle + \langle \nabla_X JY, Y\rangle.$$

引理 13. 对于 M 上的每个 X 向量场，都成立

$$\langle \mathrm{Tor}(X_0, X), JX\rangle = \frac{1}{2}\langle [JX, X_0], X\rangle + \frac{1}{2}\langle [X, X_0], JX\rangle.$$

证明。 利用定义 11的 (iii)，我们得到等式

$$\langle \mathrm{Tor}\,(X_0, X)\,, JX\rangle = \langle \mathrm{Tor}\,(X_0, JX)\,, X\rangle\,.$$

另一方面，根据挠率的定义，我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Tor}\,(X_0, X)\,, JX\rangle &= \langle \nabla_{X_0} X + [X_0, X]\,, JX\rangle\,,\\ \langle \mathrm{Tor}\,(X_0, JX)\,, X\rangle &= \langle \nabla_{X_0} JX + [X_0, JX]\,, X\rangle\,.\end{aligned}$$

将两个方程相加即可得到结论；此外，回想一下，$\mathsf{h}\nabla_{X_0} JX, X\mathsf{i} = -\mathsf{h}\nabla_{X_0} X, JX\mathsf{i}$，因为 X和 JX正交。□

设 $\tau\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$为线性算子 $\tau(X) = \mathrm{Tor}(X_0, X)$，其中 X是 $\mathcal{D}$中的向量场。相对于满足（ τ 9）的正交且正向定向标架 X_1, X_2 ，算子 $\mathcal{D}$ 的对称矩阵为

$$\begin{pmatrix} c^1_{01} & \dfrac{c^1_{02} + c^2_{01}}{2} \\ \dfrac{c^1_{02} + c^2_{01}}{2} & c^2_{02} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

注意，对于光滑函数 f，如果将 ∇ 理解为 Tanno联络，那么记号 ∇f 与其黎曼梯度相容。

2.3. 次黎曼距离。 回顾一下，两点 $x, y \in M$ 之间的次黎曼距离 d_{SR}定义为

$$d_{SR}(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_{x,y}\}$$

其中 $\ell(\gamma) = \int_0^T \mathsf{k}\dot\gamma(t)\mathsf{k}dt$ ，下确界取遍连接两个固定点 x, y 的绝对连续（AC）水平曲线集合 $\mathsf{C}_{x,y}$ ，即

$$\mathcal{C}_{x,y} = \{\gamma \in \mathrm{AC}([0, T], M) \mid \gamma(0) = x, \gamma(T) = y, \dot\gamma(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)} \text{ a.e. in } [0, T]\}, \tag{12}$$

请注意，水平曲线的长度在重参数化下保持不变；更多细节请参阅 [ABB19]。

与三维接触流形上的次黎曼长度极小化问题相关的哈密顿量 $H\colon T^*M \to \mathbb{R}$ 为

$$H(\lambda) = H(p, x) = \frac{1}{2}\left[\langle p, X_1(x)\rangle^2 + \langle p, X_2(x)\rangle^2\right],$$

其中 $p \in T^*_x M$，且 $\mathsf{h}\cdot,\cdot\mathsf{i}$ 表示对偶配对。考虑典范辛形式 $\sigma \in \Lambda^2(T^*M)$，由此诱导的 T^*M 上的哈密顿向量场 $\vec H$ 定义为 $dH(\cdot) = \sigma(\cdot\ \vec H)$。于是，哈密顿方程为

$$\dot\lambda = \vec H(\lambda). \tag{13}$$

给定一个初始余向量 $\lambda_0 \in T^*M$，方程（ $\lambda(t) = e^{tH}(\lambda_0)$ （13）的唯一解称为正规极值曲线。此外， $\gamma(t) = \pi(\lambda(t))$，其中 $\pi\colon T^*M \to M$ 是到 M上的典范投影，是一条局部~~长度极~~小且以恒定速度参数化的曲线$\sqrt{2H(\lambda_0)}$。

在三维接触次黎曼流形中，所有长度极小曲线都以这种方式得到（参见[ABB19，命题 4。8]）。要得到弧长参数化的长度极小曲线，必须考虑满足（13）且 $\lambda_0 \in H^{-1}(1/2)$ 的解。

3. 半管状邻域与余面积公式

设 $(M, \mathrm{D}\ g)$ 是一个配备光滑体积测度 μ 的三维接触流形，且 S 是嵌入于 M 中并围成闭区域 Ω 的光滑曲面。考虑 D 上由向量场 X_1、X_2 给出的正向局部标准正交标架，并将次黎曼度量 g 扩展为黎曼度量，使 Reeb向量场 X_0 与分布正交且范数为单位。此外，记 T^*M 上与 X_1、X_2、X_0 对偶的 1-形式为 ω^1、ω^2、ω^0。注意，$\omega^0 = \omega$ 是归一化的接触形式。回顾一下，$\omega \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = \omega \wedge \mathrm{d}\omega$ 是三维接触次黎曼流形的 Popp 体积形式（例如参见 [ABB19]）。

3.1. **距离函数与管状邻域的正则性**。我们回顾一下，点 $x \in S$ 称为特征点，当且仅当 $T_xS = \mathcal{D}_x$，并且集合 $\Gamma(S)$中位于 S 的特征点集是闭集，并且在曲面 S 上的测度为零，见[Bal03]。因此，在 $S \setminus \Gamma(S)$上，我们可以通过交集 $\mathcal{D}_x \cap T_xS$定义良好的特征叶状结构。

定义14。考虑 M 上的次黎曼有符号距离函数，该函数表示从曲面 S到点的距离：

$$\delta_S(p) = \begin{cases} \inf\{d_{SR}(p,x) \mid x \in S\}, & p \notin \Omega, \\ -\inf\{d_{SR}(p,x) \mid x \in S\}, & p \in \Omega. \end{cases}$$

我们的目标是获得曲面 S的外部次黎曼 ε-半管状邻域的体积结果，即

$$S_\varepsilon = \{x \in M \setminus \Omega \mid 0 < \delta_S(x) < \varepsilon\}.$$

更准确地说，我们将研究局部结果，考虑 S 中不包含特征点的开集和相对紧子集的 ε-半管状邻域。为此，我们给出一个关于曲面次黎曼距离函数光滑性的关键结果。

定理 15。设 S 是三维接触次黎曼流形 M 中一个闭区域的边界光滑曲面。考虑开集 $U \subset S$，它是相对紧的，且 $\overline{U}$ 不含特征点。则

(1) 存在 $\varepsilon > 0$ 和一个光滑映射 $G : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$，该映射在其像上是微分同胚，并且对所有 $(t, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times U$

$$\delta_S(G(t,x)) = t \quad \textit{and} \quad dG(\partial_t) = \nabla_H \delta_S;$$

(2) δ_S 在 $G((-\varepsilon, \varepsilon) \times U)$ 上光滑，其中 $\|\nabla_H \delta_S\| = 1$。

定理 15 可见于 [FPR20，命题 3。1] 以及 [Ros22，定理 3。3] 分别针对紧超曲面和任意余维数的子流形给出了该结果；这些对象嵌入于次黎曼流形中，且不含特征点。这里给出的版本参照 [Ros22，定理 3。7]，该结果进一步改进了前述关于非特征超曲面有符号距离的结果。我们的目标是研究 . 的以下子集的测度。

定义16。设 $U \subset S$ 为开集且相对紧，并且其闭包不含特征点。对于 $\varepsilon > 0$，我们将相对于 U 的 S 的（外部）局部半管状邻域定义为

$$U_\varepsilon = G((0, \varepsilon) \times U) \subset S_\varepsilon,$$

其中 $G : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ 是定理 15中的微分同胚。

注 17。 请注意，集合 U_ε 的定义良好，这得益于命题 22。事实上，映射 G 是唯一的，并在（24）中得到了明确刻画。局部化的半管状邻域 U_ε 可描述为包含在 S_ε 中的长度最短曲线的并集；这些曲线实现了从曲面 S 到 U上某个端点的距离。通过微分同胚 G 的描述保证 U_ε 在 M中是开集且光滑的，因此可测。

定理*15*的证明。我们仅给出证明的概要，因为它基本上照搬自[Ros22，定理 3。7]只需稍作调整以适应我们的˜情形。集合 $\Gamma(S)$ 中的特征点 S是闭集，因此我们可以考虑 U的一个开邻域，$\overline{U}$在 U 中的紧闭包 S不含特征点。定义湮灭丛

$$\mathcal{A}\widetilde{U} = \{(x,\lambda) \in T^*M \mid x \in \widetilde{U}, \langle \lambda, T_xS\rangle = 0\}.$$

指数映射 E：由 $E(\lambda) = \pi \circ e^{\vec{H}(\lambda)}$定义的 A $\widetilde{U} \to M$，在每个 $(x, 0) \in \overline{U}$ 处都是局部微分同胚。由于 $\overline{U}$ 是紧的，存在 $\varepsilon > 0$，使得 E 在开集

$$\{(x,\lambda) \mid x \in U, 0 < \sqrt{2H(\lambda)} < \varepsilon\} \subset \mathcal{A}\widetilde{U},$$

是到其像上的微分同胚。最后，由于 U 是定向的，存在 AU 的一个光滑˜ ˜ ˜非零外向截面，即 λ： $U \to$ AU，满足对每个 $x \in U$，均有 $E(\lambda(x))$ $\notin\Omega$。不失一般性，我们可以假设 $2H(\lambda(x)) = 1$，那么我们要寻找的映射定义为

$$G(t,x) = E(t\lambda(x)). \qquad \square$$

注记 18. 要求 U 具有紧闭包且不含特征点，这对于定义定理 15中的微分同胚至关重要。不存在特征点保证了映射的光滑性，而 U 的闭包紧致这一假设，则保证存在一个最小值$\varepsilon > 0$，从而我们可以定义映射 G。

3.2. 横截性条件。取 $U \subset S$ 为开集且相对紧，并且其闭包不含任何特征点。根据定理 15，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，集合 $G((-\varepsilon,\varepsilon) \times U)$ 是 M 中的一个开子流形。为简便起见，从现在起，我们将 $G((-\varepsilon,\varepsilon) \times U) \subset M$ 称为环境空间，并将从 U 出发的次黎曼有符号距离函数记为 δ。这样， δ 是一个光滑函数；又由于 $\nabla_H\delta \neq 0$，我们可以将 δ 视为 U 的定义函数，即 $U = \delta^{-1}(0)$ 且 $U_\varepsilon = \delta^{-1}(]0,\varepsilon[)$。

在坐标中，恒等式 $\|\nabla_H\delta\|^2 = 1$ 定理 15 可写为

$$(X_1\delta)^2 + (X_2\delta)^2 = 1, \tag{16}$$

其中我们回顾一下， $\nabla_H\delta = (X_1\delta)X_1 + (X_2\delta)X_2$。

还可以在 U 上引入如下特征向量场

$$X_S = (X_2\delta)X_1 - (X_1\delta)X_2, \tag{17}$$

并考虑由 X_S 和组成的 TU 上的正交基

$$Y_S = (X_0\delta)\,\nabla_H\delta - X_0. \tag{18}$$

注记 19。 注意， X_S 是一个单位范数的光滑向量场，并且对每个 $\mathcal{D}_x \cap T_xS$都张成 $x \in U$。此外，我们回顾一下，如果曲面包含特征点，那么 X_S 仍可通过式（17定义，只需将次黎曼距离函数 δ 替换为光滑函数 f： $M \to \mathbb{R}$ 该函数在局部将曲面定义为其零水平集，即 $X_S = (X_2f)X_1 - (X_1f)X_2$。在这种情况下，所得向量场的范数不为单位范数，并且在特征点处消失。

曲面 δ 上的距离函数限制在 U_ε 上后，可改写如下

$$\delta(x)=\inf\left\{\ell(\gamma)=\int_0^T\|\dot\gamma(t)\|dt\mid\gamma\in\mathcal{C}_{x_0,x},\,x_0\in U\right\},\qquad\text{for } x\in U_\varepsilon, \tag{19}$$

其中，$\mathcal{C}_{x_0,x}$ 在（12）中定义。考虑 $\gamma:[0,\delta(x)]\to M$，它是一条弧长参数化曲线，实现了从 $x=\gamma(\delta(x))$ 到曲面的距离（19）。作为（13）的解，γ的提升 $\lambda:[0,\delta(x)]\to T^*M$必须满足庞特里亚金极大值原理（PMP）给出的横截性条件，该原理适用于初始点和终止点受约束的最优控制问题（参见 [AS04，定理 12.13]）。更确切地说，关于 $\lambda(0)=\lambda_0$ 的条件为

$$\langle\lambda_0,v\rangle=0,\qquad\forall v\in T_{\gamma(0)}U. \tag{20}$$

利用这一事实，可以计算出初始余向量，它确定了从 U_ε 中某个固定点到曲面的最短距离所对应的弧长参数化曲线。

命题20。设 $\gamma:[0,T]\to M$是一条弧长参数化曲线，且满足 $\gamma(0)\in U$，并且该曲线使从 $\gamma(T)\in U_\varepsilon$到 U的距离最小。设 $\lambda:[0,T]\to T^*M$是相应的提升，满足 (13)。那么初始余向量为

$$\lambda_0=(X_1\delta)\,\omega^1+(X_2\delta)\,\omega^2+(X_0\delta)\,\omega\in T^*_{\gamma(0)}M. \tag{21}$$

此外，$\gamma(t)=\pi\circ e^{tH}(\lambda_0)$ 以及 $\dot\gamma(0)=\nabla_H\delta$。

证明。考虑 U由以下向量组成的局部正交基 X_S,Y_S，其定义见（17）和（18）。将横截条件（20）应用于向量场 X_S，可写为如下形式

$$0=\langle\lambda_0,X_S\rangle=(X_2\delta)\,\langle\lambda_0,X_1\rangle-(X_1\delta)\,\langle\lambda_0,X_2\rangle$$

由此可得 $\langle\lambda_0,X_1\rangle=c(X_1\delta,X_2\delta)$，其中 $c\in\mathbb{R}$。接下来考察 Y_S，

$$0=\langle\lambda_0,Y_S\rangle=(X_0\delta)\,(X_1\delta)\,c\,(X_1\delta)+(X_0\delta)\,(X_2\delta)\,c\,(X_2\delta)-\langle\lambda_0,X_0\rangle\,.$$

因此，由（16）可知 $\langle\lambda_0,X_0\rangle=c(X_0\delta)$。这意味着余向量 λ是的倍数 0

$$(X_1\delta)\,\omega^1+(X_2\delta)\,\omega^2+(X_0\delta)\,\omega\in T^*_{\gamma(0)}M.$$

最后，将哈密顿系统（13）写成坐标形式，可得

$$\dot x=\frac{\partial H}{\partial p},\quad\dot p=-\frac{\partial H}{\partial x}.$$

于是，我们推得

$$\dot\gamma(0)=\langle\lambda_0,X_1\rangle\,X_1+\langle\lambda_0,X_2\rangle\,X_2=c\,(X_1\delta)\,X_1+c\,(X_2\delta)\,X_2.$$

要求 γ 具有单位速度，(16) 意味着 $c=1$ 因此我们得出

$$\dot\gamma(0)=\nabla_H\delta(x),\quad\lambda_0=(X_1\delta)\,\omega^1+(X_2\delta)\,\omega^2+(X_0\delta)\,\omega.$$ □

注21. 给定 $x\in U$，存在唯一一条弧长参数化曲线 $\gamma_x:[0,T]\to M$，满足 $\gamma(0)=x$，并且实现了 $\gamma(T)$ 到 U 的距离。具体而言，$\gamma_x(t)=\pi\circ e^{tH}(\lambda_0)$，其中 $\lambda_0\in T^*_xM$由 (21) 给定。因此，定理15与命题20共同给出了 U_ε 的描述：它既是 U 的不交并，也是从 U 出发的弧长参数化极小化曲线的不交并。

最后，我们引入如下光滑映射 $\lambda_0:U\to T^*M$：

$$\lambda_0(x)=(X_1\delta)\,\omega^1+(X_2\delta)\,\omega^2+(X_0\delta)\,\omega\in T^*_xM. \tag{23}$$

我们已经证明了以下结论

命题 22. 定理 G 中的映射 *15* 可由以下条件唯一刻画

$$G(t,x)=\gamma_x(t)=\pi\circ e^{t\vec{H}}(\lambda_0(x)) \tag{24}$$

对每个 $t\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ 以及 $x\in U$，其中 λ_0 由 (23) 定义。

3.3. **平均次黎曼曲率**。给定 μ 上的光滑体积形式，一个向量场 X 关于测度 μ 的散度是记作 $\mathrm{div}_\mu X$ 的函数，满足 $\mathrm{L}_X\mu=(\mathrm{div}_\mu X)\mu$ （其中 L_X 是沿向量场 X的李导数）。

定义 23。对于嵌入三维接触流形且不包含特征点的曲面 U，其关于光滑测度 μ 的次黎曼平均曲率是光滑函数 $\mathrm{H}^\mu: U_\varepsilon\to\mathbb{R}$

$$\mathcal{H}_\mu=-\mathrm{div}_\mu\left(\nabla_H\delta\right).$$

此外，次黎曼平均曲率是定义为 $\mathrm{H}:\ U_\varepsilon\to\mathbb{R}$的光滑函数 $\mathrm{H}\ =\mathrm{H}_\nu$，其中 ν 是与 Popp 体积 $\omega\wedge\mathrm{d}\omega=\omega\wedge\omega^1\wedge\omega^2$相关联的 M 上的典范测度。

注记24。考虑 $f:\ U_\varepsilon\to\mathbb{R}$ 是 U 的光滑定义函数，即满足 $U\ =\ f^{-1}(0)$，且 d $f\ \neq\ 0$在 U 上。于是，在 U 上有 $\mathrm{k}\nabla_H f\mathrm{k}\ \neq\ 0$（因为 U 不含特征点），并且有

$$\mathcal{H}|_U=-\mathrm{div}_\nu\left(\frac{\nabla_H f}{\|\nabla_H f\|}\right). \tag{25}$$

实际上，恒等式（25）成立的条件是向量场 $\nabla_H f$ 的定向与 $\nabla_H\delta$一致，换言之，若 $\langle\nabla_H f,\ \nabla_H\delta\rangle>0$。否则等式右侧应取相反数。注意，通常（25）的右侧在 S 上定义良好，但在曲面之外，它仍取决于函数f的选取。此外，我们回顾一下，由于每个光滑测度 μ 都可解释为 Popp测度乘以一个光滑密度，即 $\mu=h\nu$ 其中 h: $M\to\mathbb{R}$ 不为零。根据散度算子的性质，我们有

$$\mathrm{div}_{h\nu}X=\mathrm{div}_\nu X+\frac{Xh}{h},$$

并得到公式

$$\mathcal{H}_\mu=-\mathrm{div}_{h\nu}(\nabla_H\delta)=\mathcal{H}-\frac{\nabla_H\delta(h)}{h}. \tag{26}$$

引理 25. 次黎曼平均曲率$\mathcal{H}:U_\varepsilon\to\mathbb{R}$ 相对于 *Popp* 测度 ν 的坐标表达式为:

$$\mathcal{H}=-X_1X_1\delta-X_2X_2\delta-c_{12}^2\left(X_1\delta\right)+c_{12}^1\left(X_2\delta\right). \tag{27}$$

特别地，根据 (9),

$$\mathrm{div}_\nu\left(X_1\right)=c_{12}^2\quad\ and\quad\ \mathrm{div}_\nu\left(X_2\right)=-c_{12}^1. \tag{28}$$

证明.应用散度的线性性以及莱布尼茨法则，其中 $\mathrm{div}(aX)\ =X(a)\ +a\mathrm{div}(X)$，对于 a 一个光滑函数和 X 一个光滑向量场，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}&=-\mathrm{div}_\nu\left(\left(X_1\delta\right)X_1+\left(X_2\delta\right)X_2\right)\\&=-X_1X_1\delta-\left(X_1\delta\right)\mathrm{div}_\nu\left(X_1\right)-X_2X_2\delta-\left(X_2\delta\right)\mathrm{div}_\nu\left(X_2\right)\end{aligned}$$

现在，考虑到对于每个 $i=0,\ 1,\ 2$

$$\mathcal{L}_X\omega^i=\sum_{j=0}^2\left\langle\mathcal{L}_X\omega^i,X_j\right\rangle\omega^j=\sum_{j=0}^2\left\langle\omega^i,\mathcal{L}_{-X}X_j\right\rangle\omega^j=\sum_{j=0}^2\left\langle\omega^i,[-X,X_j]\right\rangle\omega^j,$$

其中 L_X 是沿向量场 X 的李导数，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_\nu(X)\,\omega\wedge\omega^1\wedge\omega^2 &= (\mathcal{L}_X\omega)\wedge\omega^1\wedge\omega^2+\omega\wedge\left(\mathcal{L}_X\omega^1\right)\wedge\omega^2+\omega\wedge\omega^1\wedge\left(\mathcal{L}_X\omega^2\right)\\ &= \sum_{i=0}^{2}\left\langle\omega^i,[X_i,X]\right\rangle\omega\wedge\omega^1\wedge\omega^2.\end{aligned}$$

因此，$\operatorname{div}_\nu(X_1)=c_{12}^2$ 且 $\operatorname{div}_\nu(X_2)=-c_{12}^1$，这就证明了该结论。 □

注释 26. 按照引理 25 的证明，可以得到 H^μ 的显式表达式，其中 $\mu=h\nu$ 是一个光滑测度，h 是一个正光滑密度。更准确地说，设 X_θ 是一个横截于分布 D 的向量场，使得$\mu(X_1,X_2,X_\theta)=1$。记 $\{\omega^1,\omega^2,\omega^\theta\}$ 为 $\{X_1,X_2,X_\theta\}$ 的对偶基，则 $\mu=\omega^\theta\wedge\omega^1\wedge\omega^2$。此外，考虑与 X_1、X_2、X_θ 相关联的结构函数，其定义如式 (9)（注意，此处的 X_θ 是横截的，但不一定是 Reeb 向量场）。也就是说，令

$$c_{ij}^k=\langle\omega^k,[X_j,X_i]\rangle,\qquad i,j,k=1,2,\theta.$$

在引理 X_0 的证明中将 ω 替换为 X_θ 和 ω^θ，即可得到25,

$$\operatorname{div}_\mu(X_1)=c_{12}^2-c_{\theta1}^\theta,\qquad \operatorname{div}_\mu(X_2)=-c_{12}^1-c_{\theta2}^\theta.$$

因此

$$\mathcal{H}_\mu=-X_1X_1\delta-X_2X_2\delta-\left(c_{12}^2-c_{\theta1}^\theta\right)(X_1\delta)+\left(c_{12}^1+c_{\theta2}^\theta\right)(X_2\delta). \tag{29}$$

考虑 μ 上的光滑测度 M，它是相对于黎曼度量 g 的黎曼体积，而该黎曼度量扩张了次黎曼度量。因此，g 的标准正交标架具有如下形式：$\{X_1,\ X_2,\ X_\theta\}$ 如备注 26所示。

可以将接触次黎曼流形的相应黎曼近似定义为 $(M,\ g^\varepsilon)$，其中 g^ε 是使 $\{X_1,\ X_2,\ \varepsilon X_\theta\}$ 构成标准正交标架的黎曼度量。

下一个命题指出，相对于 μ 的次黎曼平均曲率，是相应加权黎曼平均曲率的极限。

命题 27。设 μ 是光滑测度，且为相对于度量 g 的黎曼体积，其中该度量扩张了次黎曼度量。正则曲面 S 在 M 中的平均次黎曼曲率 $\mathcal{H}_\mu$ 是相应黎曼逼近中 S 的平均曲率 H_μ^ε 的极限。

$$\mathcal{H}_\mu=\lim_{\varepsilon\to0}H_\mu^\varepsilon.$$

为方便读者，证明推迟至附录A。

3.4. 余面积公式。为了计算 U_ε 的体积，我们需要一个次黎曼余面积公式版本。我们将空间$U_\varepsilon=\bigcup_{t\in(0,\ \varepsilon)}U^t$分解，其中 $U^t=\delta^{-1}(t)$，并选择一个适应该分解的标架。

定义28。我们在 TU_ε 上定义正交移动标架：

$$\begin{aligned}F_1&=(X_2\delta)\,X_1-(X_1\delta)\,X_2,\\ F_2&=(X_0\delta)\,\nabla_H\delta-X_0,\\ N&=\nabla_H\delta.\end{aligned}$$

我们注意到，对于固定的 $t\in(0,\ \varepsilon)$，向量 $F_1,\ F_2$构成 TU^t 的一组基，而N 是次黎曼法向量。此外，$F_1,\ F_2$ 扩展了定义在 U 上的 X_S 和 Y_S

分别由（17）和（18）给出。其在 T^*U_ε 上的相应对偶基为:

$$\begin{aligned}\phi^1 &= (X_2\delta)\,\omega^1 - (X_1\delta)\,\omega^2,\\ \phi^2 &= -\omega,\\ \eta &= (X_1\delta)\,\omega^1 + (X_2\delta)\,\omega^2 + (X_0\delta)\,\omega.\end{aligned}$$

现在回顾光滑函数的经典黎曼余面积公式（例如参见 [Cha06]）。

命题 29 (余面积公式)。 设 (M, g) 为一个配备光滑测度 μ 的黎曼流形。设 $\Phi: M \to \mathbb{R}$ 为满足 $\nabla\Phi \neq 0$ 的光滑函数，且 $f: M \to \mathbb{R}$ 为可测非负函数，则

$$\int_M f\,\|\nabla\Phi\|\,dV_\mu = \int_{\mathbb{R}}\int_{\Phi^{-1}(t)} f\,dA_t^R\,dt,$$

其中 dV_μ 和 dA_t^R分别是由 μ在 M 上诱导的体积元，以及在 $\Phi^{-1}(t)$上诱导的黎曼面积形式。

回忆一下，对于 $t \in \mathbb{R}$， $\Phi^{-1}(t)$ 上的诱导面积形式由体积形式 dV_μ 与曲面的黎曼法向量 $\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}$ 的内积给出，即

$$dA_t^R = \iota\left(\frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}\right) dV_\mu\,|_{T\Phi^{-1}(t)}\,.$$

现在，考虑一个配备光滑测度 μ 的三维接触流形（M，D g）。设 $\Phi: M \to \mathbb{R}$ 为满足 $\nabla_H\Phi \neq 0$ 的光滑函数，我们定义曲面 $\Phi^{-1}(t)$ 上的诱导次黎曼面积形式

$$dA_t = \iota\left(\frac{\nabla_H\Phi}{\|\nabla_H\Phi\|}\right) dV_{\mu|T\Phi^{-1}(t)}.$$

这是由测度 μ诱导的体积形式 dV_μ 在 M上，沿次黎曼法向量 $\frac{\nabla_H\Phi}{\|\nabla_H\Phi\|}$ 限制到曲面 $\Phi^{-1}(t)$上的结果。

我们可以将余面积公式改写如下。

命题 30 (次黎曼余面积公式)。 设$(M,\mathcal{D}\ g)$ 是一个配备光滑测度 μ的三维接触流形。给定 $\Phi: M \to \mathbb{R}$ 一个光滑函数，使得 $\|\nabla_H\Phi\| \neq 0$，以及 $f: M \to \mathbb{R}$ 一个可测的非负函数

$$\int_M f\,\|\nabla_H\Phi\|\,d\mu = \int_{\mathbb{R}}\int_{\Phi^{-1}(t)} f_{|\Phi^{-1}(t)}\,dA_t\,dt,$$

其中， dA_t 是 $\Phi^{-1}(t)$上的诱导次黎曼面积形式。

回到我们的问题，并考虑此前在 U_ε (定义 28)中定义的基，我们有体积形式 dV_μ 与$\eta \wedge \phi^1 \wedge \phi^2$ 相差一个光滑密度 $h: M \to \mathbb{R}$。于是，由 μ 在 U^t 上诱导的次黎曼面积形式为

$$dA_t = \iota(N)\,dV_\mu = h \cdot \iota(N)\,\eta \wedge \phi^1 \wedge \phi^2 = h \cdot \phi^1 \wedge \phi^2. \tag{30}$$

最后，应用次黎曼余面积公式，并由（16），

$$\mu(U_\varepsilon) = \int_{U_\varepsilon} \frac{\|\nabla_H\delta\|}{\|\nabla_H\delta\|} dV_\mu = \int_0^\varepsilon \int_{U^t} dA_t\,dt. \tag{31}$$

证明。为了得到该结果，我们需要阐明 $\Phi^{-1}(t)$ 上诱导的黎曼面积形式与亚黎曼面积形式之间的关系。如前所述，测度 μ 与 Popp 体积所对应的测度相差一个光滑密度因子；相应的测度、体积和面积形式之间也有同样的关系。因此，不失一般性，我们假设 dV_μ 是

Popp 体积 $\omega \wedge \omega^1 \wedge \omega^2$。首先，考虑以下向量场的活动标架，它在 28 的条件下与定义中的活动标架一致： $\Phi = \delta$:

$$F_1 = \|\nabla_H \Phi\|^{-2} \left[(X_2\Phi)\, X_1 - (X_1\Phi)\, X_2 \right],$$
$$F_2 = (X_0\Phi)\, \nabla_H \Phi - \|\nabla_H \Phi\|^2 X_0,$$
$$N = \|\nabla_H \Phi\|^{-2} \nabla_H \Phi.$$

相应的 1-形式对偶基如下所示:

$$\phi^1 = (X_2\Phi)\, \omega^1 - (X_1\Phi)\, \omega^2,$$
$$\phi^2 = -\|\nabla_H \Phi\|^{-2} \omega,$$
$$\eta = (X_1\Phi)\, \omega^1 + (X_2\Phi)\, \omega^2 + (X_0\Phi)\, \omega.$$

对于固定的 $t \in \mathbb{R}$，向量场 F_1 和 F_2 与等值集 $\Phi^{-1}(t)$相切，而 N 与其横截。1-形式 η 消去切空间，而 $\phi^1 \wedge \phi^2$ 是曲面上的面积形式。此外，我们有

$$\begin{aligned} \eta \wedge \phi^1 \wedge \phi^2 (X_0, X_1, X_2) &= \eta(X_1)\, \phi^1(X_2)\, \phi^2(X_0) - \eta(X_2)\, \phi^1(X_1)\, \phi^2(X_0) \\ &= \|\nabla_H \Phi\|^{-2} \left[(X_1\Phi)^2 + (X_2\Phi)^2 \right] = 1, \end{aligned}$$

这意味着体积形式 $\eta \wedge \phi^1 \wedge \phi^2$ 与$\omega \wedge \mathrm{d}\omega$ 这一体积形式重合，后者对应于 ν 测度。现在，考虑 $\Phi^{-1}(t)$上由黎曼度量和次黎曼度量诱导的面积形式:

$$dA_t^R = \iota\left(\frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}\right) d\mu, \quad \text{and} \quad dA_t = \iota\left(\frac{\nabla_H\Phi}{\|\nabla_H\Phi\|}\right) d\mu.$$

为计算这些面积形式，我们需要用新的基表示黎曼外法向量

$$\frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|} = \frac{\nabla_H\Phi + (X_0\Phi)X_0}{\|\nabla\Phi\|} = \rho N + AF_1 + BF_2.$$

我们得到 $A = 0$ ，因为 F_1 与 $\nabla\Phi$正交。此外，投影到 X_0上可得:

$$B = -\frac{1}{\|\nabla_H\Phi\|^2} \frac{X_0\Phi}{\|\nabla\Phi\|}.$$

然后，代入并计算与 N 的标量积，

$$\frac{1}{\|\nabla\Phi\|} = \frac{\rho}{\|\nabla_H\Phi\|^2} - \frac{(X_0\Phi)^2}{\|\nabla_H\Phi\|^2 \|\nabla\Phi\|}$$

从而我们得到

$$\rho = \frac{\|\nabla_H\Phi\|^2}{\|\nabla\Phi\|} + \frac{(X_0\Phi)^2}{\|\nabla\Phi\|} = \|\nabla\Phi\|.$$

由于我们考虑的是 $T\{\Phi^{-1}(t)\}$ 上的 2-形式，因此可推得

$$dA_t^R = \iota\left(\frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}\right) dV_\mu = \iota(\rho N)\, dV_\mu = \|\nabla\Phi\|\, \phi^1 \wedge \phi^2,$$
$$dA_t = \iota\left(\frac{\nabla_H\Phi}{\|\nabla_H\Phi\|}\right) dV_\mu = \iota(\|\nabla_H\Phi\|\, N)\, dV_\mu = \|\nabla_H\Phi\|\, \phi^1 \wedge \phi^2.$$

最后，在命题 29 中应用黎曼余面积公式，

$$\int_M f\, \|\nabla_H\Phi\|\, dV_\mu = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{\Phi=t\}} f \frac{\|\nabla_H\Phi\|}{\|\nabla\Phi\|} dA_t^R dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{\Phi=t\}} f\, dA_t dt. \qquad \square$$

4. 半管体积的局部公式

局部半管状邻域的测度 U_ε 由式（31）表示为

$$\mu\left(U_\varepsilon\right)=\int_0^\varepsilon\int_{U^t} dA_t dt,$$

其中，对于 $t\in(0,\varepsilon)$，dA_t 是由测度 μ 在曲面 $U^t=G(t,U)$ 上诱导的次黎曼面积形式（30）；其中 $G\colon(0,\varepsilon)\times U\to U_\varepsilon$ 是定理15中的微分同胚。进一步地，考虑固定时刻的微分同胚 G，可以变换上述公式。具体而言，次黎曼面积形式为

$$dA_t\mid_{(t,p)}=h(t,p)\cdot\phi^1\wedge\phi^2\mid_{(t,p)}=h(t,p)\cdot G_*\left(\phi^1\wedge\phi^2\mid_{(0,p)}\right),$$

而 U_ε 的测度表达式变为如下形式

$$\mu\left(U_\varepsilon\right)=\int_0^\varepsilon\int_U\left|\det\left(d_pG|_{(t,p)}\right)\right|\frac{h(t,p)}{h(0,p)}dA_\mu dt,$$

其中，用 dA_μ 表示 dA_0，即由式（30）中的测度 μ 在U 上诱导的次黎曼面积形式。由此可得，$\mu(U_\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 处是光滑的；为了得到定理1中给出的渐近展开，我们需要计算函数在 $t=0$ 附近的泰勒展开

$$t\mapsto\left|\det\left(d_pG|_{(t,p)}\right)\right|h(t,p),$$

对于固定的 $p\in U$。为此，我们将表示 $d_pG|_{(t,p)}$ 的矩阵：$T_pU\to T_{G(t,p)}U^t$ 相对于某些基表示如下：在 $T_{G(t,p)}U^t$ 上，我们选取$\{F_1,\ F_2\}|_{U^t}$，即定义28中的活动标架；在 T_pU 上，我们考虑$\{X_S(p)\ Y_S(p)\}$，它们在（17）和（18）中引入。此外，我们在 U_ε上定义以下向量场：

$$V_1(t,p)=dG\left(X_S(p)\right),\quad V_2(t,p)=dG\left(Y_S(p)\right),$$

其中，左侧的（t，p）是记号简写，表示在$G(t,\ p)\in U_\varepsilon$处计算向量场。

命题31。设$(t,p)\in(0,\varepsilon)\times U$，表示线性算子$d_pG|_{(t,p)}$：$T_pU\to T_{G(t,p)}U^t$的矩阵，其相对于基 X_S,Y_S（对应于 T_pU）以及基 F_1,F_2（对应于$T_{G(t,p)}U^t$）表示为

$$d_pG|_{(t,p)}=\begin{pmatrix}-\langle V_1,JN\rangle & -\langle V_2,JN\rangle\\ -\langle V_1,X_0\rangle & -\langle V_2,X_0\rangle\end{pmatrix}(t,p),\tag{34}$$

其中 $N=\nabla_H\delta$，J 是定义 9 中的线性映射，而 X_0 是该接触流形的**Reeb**向量场。特别地，有

$$\mu(U_\varepsilon)=\int_U\int_0^\varepsilon\left|\langle V_1,JN\rangle\langle V_2,X_0\rangle-\langle V_2,JN\rangle\langle V_1,X_0\rangle\right|(t,p)\frac{h(t,p)}{h(0,t)}dtdA_\mu.\tag{35}$$

在给出证明之前，我们先比较向量场 V_1，V_2，F_1，F_2，并介绍一个对接下来的计算也有用的性质。

根据构造，对于每个 $(t,\ p)\in U_\varepsilon$，向量场 V_1,V_2 都与 U^t相切。如前所述，F_1，F_2也具有相同性质；然而，正如下一个引理所述，它们与刚才引入的这一对 V_1,V_2 有所不同。

引理32。考虑向量场 F_1，N，它们在定义 28中给出；以及V_1，V_2，它们在 (33)中引入。对于每个 $(t,\ p)\in U_\varepsilon$，有 $[F_1,N]\neq0$ 且

$$[V_1,N]=[V_2,N]=0.\tag{36}$$

证明。 由于 F_1 和 N 是三维接触次黎曼流形上的线性无关水平向量场，根据赫尔曼德条件，李括号 $[F_1, N]$ 处处非零。

现在，让我们在 U 中选取一些坐标（u_1, u_2），以及相应的坐标向量场$\{\partial_{u_1}, \partial_{u_2}\}$。向量场 X_S, Y_S 与 U 相切，并可写为

$$X_S = a_X^1 \partial_{u_1} + a_X^2 \partial_{u_2}, \quad Y_S = a_Y^1 \partial_{u_1} + a_Y^2 \partial_{u_2}.$$

其中 $a_X^1, a_X^2, a_Y^1, a_Y^2$是 U上的光滑函数。此外，由于 $G\colon (0,\varepsilon) \times U \to U_\varepsilon$是一个微分同胚，因此对于 $i = 1,2$，有

$$[dG(\partial_t), dG(\partial_{u_1})] = dG[\partial_t, \partial_{u_1}] = 0.$$

最后，由定理15可知，次黎曼距离的水平梯度$N = \nabla_H \delta$ 为 $dG(\partial_t)$。因此，有

$$[V_1, N] = dG\left[a_X^1 \partial_{u_1} + a_X^2 \partial_{u_2}, \partial_t\right] = -\partial_t(a_X^1)\partial_{u_1} - \partial_t(a_X^2)\partial_{u_2} = 0.$$

类似的计算可证明 $[V_2, N] = 0$。 □

命题31的证明。为了写出表示 $d_pG|_{(t,p)}$的矩阵，我们需要将向量场 $V_1(t,p)$和 $V_2(t,p)$投影到 $T_{G(t,p)}U^t$中的标准正交基 $\frac{F_1}{\|F_1\|}, \frac{F_2}{\|F_2\|}$上。于是，我们要找的线性~~组合如下~~

$$V_i = \frac{\langle V_i, F_1\rangle}{\|F_1\|^2} F_1 + \frac{\langle V_i, F_2\rangle}{\|F_2\|^2} F_2, \qquad i = 1, 2,$$

而我们关注的矩阵为

$$d_pG|_{(t,p)} = \begin{pmatrix} \frac{\langle V_1, F_1\rangle}{\|F_1\|^2} & \frac{\langle V_2, F_1\rangle}{\|F_1\|^2} \\ \frac{\langle V_1, F_2\rangle}{\|F_2\|^2} & \frac{\langle V_2, F_2\rangle}{\|F_2\|^2} \end{pmatrix} (t,p).$$

现在，回忆一下， N 是水平且酉的，因此，再考虑 JN和 X_0 ，我们得到 TU_ε的一个标准正交标架。因此，根据定义28中的公式，在新基下有

$$F_1 = -JN \quad \text{and} \quad F_2 = (X_0\delta)N - X_0.$$

因此 $\|F_1\|^2 = 1$ 和 $\|F_2\|^2 = 1 + (X_0)^2$。此外，由于 δ的黎曼梯度，即 $\nabla\delta = N + (X_0\delta)X_0$，与每个曲面$U^t = \delta^{-1}(t)$正交，因此，对于 $i = 1, 2$，$\langle V_i, N\rangle = -(X_0\delta)\langle V_i, X_0\rangle$。因此，

$$\langle V_i, F_2\rangle = (X_0\delta)\langle V_i, N\rangle - \langle V_i, X_0\rangle = -\left(1 + (X_0\delta)^2\right)\langle V_i, X_0\rangle.$$

最后，代入后即可完成证明。 □

5. 泰勒展开。定理1的证明

设 S 是一个光滑曲面，它围成三维次黎曼接触流形中的一个闭区域，且该流形配备了光滑测度 μ。考虑$U \subset S$ 一个开且相对紧的集合，其闭包不含任何特征点。回忆一下，命题31中的（35）给出了局部半管状邻域 U_ε 相对于 μ的体积：

$$\mu(U_\varepsilon) = \int_U \int_0^\varepsilon \left|\langle V_1, JN\rangle\langle V_2, X_0\rangle - \langle V_2, JN\rangle\langle V_1, X_0\rangle\right|(t,p)\frac{h(t,p)}{h(0,t)} dt dA_\mu,$$

其中 $h\colon U_\varepsilon \to \mathbb{R}$ 是相对于 Popp测度 μ 的光滑密度 ν （即$\mu = h\nu$）， dA_μ 是由 U 通过 μ 诱导的次黎曼面积形式（即， dA_0 在（30）中），

V_1，V_2是在（33）中定义的向量场，而 $N = \nabla_H \delta$是从曲面出发的次黎曼距离的次黎曼梯度。

为证明定理1中的结论，我们固定 $p \in U$，并计算以 $t = 0$ 为中心的光滑函数的泰勒展开

$$C(t,p) = |\langle V_1, JN\rangle \langle V_2, X_0\rangle - \langle V_2, JN\rangle \langle V_1, X_0\rangle|(t,p), \tag{39}$$

因此，对于 $k = 1$，2，3，展开式（5）的系数为

$$a_k = \int_U \sum_{\substack{i,j=0,\dots,k-1 \\ i+j=k-1}} \binom{k-1}{i} \partial_t^i C \cdot \frac{\partial_t^j h}{h}(0,p) dA_\mu,$$

由此，结合（26），可得（6）中的表达式。

证明首先从观察（39）中各项之间一个有用的关系开始。根据定理 $N = \partial_t$，有15。

引理 33。考虑向量场 V_i，其定义见(33)，其中 $i = 1$，2。在集合 U_ε 上，有

$$\partial_t \langle V_i, X_0\rangle = N \langle V_i, X_0\rangle = \langle V_i, JN\rangle .$$

证明。我们运用定义11中引入的 Tanno联络的性质。回顾性质（36），并注意到 $\nabla_X N$平行于 JN对每个向量场 X 成立，因为 N 是酉且水平的，我们推得

$$N \langle V_i, X_0\rangle = \langle \nabla_N V_i, X_0\rangle = \langle \nabla_{V_i} N + [N, V_i] + \mathrm{Tor}(N, V_i), X_0\rangle = \langle \mathrm{Tor}(N, V_i), X_0\rangle .$$

我们将 V_i 分解为水平分量和 Reeb 分量，以利用挠率的性质：

$$\begin{aligned} N \langle V_i, X_0\rangle &= \langle \mathrm{Tor}(N, V_i - \langle V_i, X_0\rangle X_0) + \mathrm{Tor}(N, \langle V_i, X_0\rangle X_0), X_0\rangle \\ &= -\langle N, JV_i - \langle V_i, X_0\rangle JX_0\rangle \end{aligned}$$

又因为 $JX_0 = 0$，故得出结论。 □

令 $c_i(t, p) = \langle V_i, X_0\rangle$。根据引理 33，公式（39）可改写为

$$C(t,p) = |\dot{c_1} c_2 - c_1 \dot{c_2}|(t,p),$$

我们回顾一下，$C(t, p)$源自矩阵（34）的行列式，对于每个 ry $p \in U$ 在 $t = 0$ 处有如下表达式：

$$\begin{pmatrix} -\dot{c_1}(0) & -\dot{c_2}(0) \\ -c_1(0) & -c_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\langle V_1, JN\rangle & -\langle V_2, JN\rangle \\ -\langle V_1, X_0\rangle & -\langle V_2, X_0\rangle \end{pmatrix}(0,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

由于 $C(0,p) = |\dot{c_1} c_2 - c_1 \dot{c_2}|(0,p) = 1$，我们推得定理 a_1**1** 中展开式（5）的第一项。即

$$a_1 = \int_U C(0,p) dA_\mu = \int_U dA_\mu.$$

再次考虑到（40）中的恒等式，我们得到 C 在 $t = 0$中的导数的以下表达式：

$$\partial_t C(0,p) = (\ddot{c_1} c_2 - c_1 \ddot{c_2})(0,p) = -\ddot{c_1}(0,p); \tag{41}$$

$$\partial_t^2 C(0,p) = \left(c_1^{(3)} c_2 + \ddot{c_1}\dot{c_2} - \dot{c_1}\ddot{c_2} - c_1 c_2^{(3)}\right)(0,p) = -c_1^{(3)}(0,p) + \ddot{c_2}(0,p). \tag{42}$$

接下来，我们将明确这些关于次黎曼曲率算子的公式。为此，在考虑曲面 N 和 JN 的关键向量场时，我们展示李括号与典范 Tanno 联络之间的关系。

引理34。 我们有，在 U_ε 的每一点

$$[JN, N] = -\mathcal{H}JN - (X_0\delta)\, N + X_0,$$

其中 $\mathcal{H}$： $U_\varepsilon \to \mathbb{R}$ 是定义 ν 中的 *23*相对于 ***Popp*** 测度的曲面次黎曼平均曲率。此外，

$$\nabla_{JN} N = -\mathcal{H}JN \quad and \quad \nabla_N N = -(X_0\delta)JN.$$

证明。 利用（16），我们可以将向量场 N 和 JN 表示为 X_1的旋转， X_2:

$$\begin{pmatrix} N \\ JN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1\delta & X_2\delta \\ -X_2\delta & X_1\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

因此，由引理 10,

$$\begin{aligned} \langle [JN, N], JN\rangle &= \langle [X_2, X_1] - X_1(\theta) X_1 - X_2(\theta) X_2, \sin\theta X_1 + \cos\theta X_2\rangle \\ &= \sin\theta c_{12}^1 + \cos\theta c_{12}^2 - \sin\theta X_1(\theta) - \cos\theta X_2(\theta) \\ &= -(X_2\delta) c_{12}^1 + (X_1\delta) c_{12}^2 + X_1X_1\delta + X_2X_2\delta, \end{aligned}$$

这正是 $-\mathcal{H}$ 在坐标中的表达式，见引理 25。通过类似的计算，我们得到

$$\begin{aligned} \langle [JN, N], N\rangle &= \langle [X_2, X_1] - X_1(\theta) X_1 - X_2(\theta) X_2, \cos\theta X_1 - \sin\theta X_2\rangle \\ &= (X_1\delta) c_{12}^1 + (X_2\delta) c_{12}^2 + X_1X_2\delta - X_2X_1\delta \\ &= (X_1\delta) c_{12}^1 + (X_2\delta) c_{12}^2 - [X_2, X_1]\delta = -(X_0\delta). \end{aligned}$$

最后，由于 $\mathrm{Tor}\,(JN, N) = -X_0$，我们有

$$[JN, N] = \nabla_{JN} N - \nabla_N JN + X_0,$$

因此，由于 N 和 JN 是酉的，我们得出结论。特别是，

$$\nabla_{JN} N = -\mathcal{H}JN, \qquad -\nabla_N JN = -J\nabla_N N = -(X_0\delta)N. \qquad \square$$

接下来的两个命题涉及计算相应元素，以得到定理 1 的泰勒展开式中的第二项和第三项。

命题 35. 对于每个 $p \in U$，都有

$$\partial_t C(0, p) = \langle [JN, N], JN\rangle (0, p) = -\mathcal{H}(p)$$

其中 $\mathcal{H} : U_\varepsilon \to \mathbb{R}$ 是关于 ***Popp*** 测度的曲面的平均次黎曼曲率 ν，其定义见定义 *23*。

证明。 考虑方程（41），并回忆 Tanno 联络是度量联络，可得

$$\partial_t C(t, p) = -\partial_t \langle V_1, JN\rangle = -\langle \nabla_N V_1, JN\rangle - \langle V_1, \nabla_N JN\rangle.$$

在 $t = 0$处求值时，第二项因其为 $V_1(0, p) = -JN(0, p)$而消失。至于第一项，我们的思路是应用挠率算子的定义和性质（ V_1 36）来消去。因此有

$$\begin{aligned} -\langle \nabla_N V_1, JN\rangle (0, p) &= -\langle \nabla_{V_1} N + [N, V_1] + \mathrm{Tor}\,(N, V_1), JN\rangle (0, p) \\ &= \langle \nabla_{JN} N + \mathrm{Tor}\,(N, JN), JN\rangle (0, p). \end{aligned}$$

根据引理 34 以及以下事实，我们得出结论：$\mathrm{Tor}\,(N,\ JN) = X_0$。 $\square$

命题 36。 给定 $p \in U$，有

$$\partial_t^2 C(0,p) = \left[X_S(X_0\delta) - (X_0\delta)^2 - \langle R(JN,N)N, JN\rangle - \langle \nabla_{X_0} N, JN\rangle\right](0,p). \tag{44}$$

此外，考虑定义 $\mathcal{H}$： $U_\varepsilon \to \mathbb{R}$ *23* 中的平均曲率 *23*，前面的公式变为

$$\partial_t^2 C(0,p) = \mathcal{H}^2 - N(\mathcal{H}). \tag{45}$$

证明。 为得到（44），我们分别计算 $c_1^{(3)}(0,\ p)$ 和 $\ddot{c}_2(0,\ p)$，因为 $\ddot{C}(0,\ p)$在（42）中表示为它们的差。

步骤 *1*。 我们计算 $c_1^{(3)}(0,\ p)$。注意， $\dot{c}_1(t,\ p) = \mathrm{h}V_1,\ JN\mathrm{i}\,(t,\ p)$，因此：

$$c_1^{(3)}(t,p) = N^2\langle V_1, JN\rangle = \langle \nabla_N\nabla_N V_1, JN\rangle + 2\langle \nabla_N V_1, \nabla_N JN\rangle + \langle V_1, \nabla_N\nabla_N JN\rangle.$$

分别计算 $t=0$ 中的第二项和第三项，得到：

$$\begin{aligned}\langle \nabla_N V_1, \nabla_N JN\rangle &= \langle \nabla_{V_1} N + [N,V_1] + \mathrm{Tor}\,(N,V_1), \nabla_N JN\rangle\\ &= \langle -\nabla_{JN} N + \mathrm{Tor}\,(N,-JN), \nabla_N JN\rangle\\ &= \langle -\nabla_{JN} N - X_0, \nabla_N JN\rangle = 0,\end{aligned}$$

因为 $\nabla_{JN}N$， $\nabla_N JN$彼此正交，故

$$\begin{aligned}\langle V_1, \nabla_N\nabla_N JN\rangle &= -\langle JN, \nabla_N\nabla_N JN\rangle\\ &= -N\langle JN, \nabla_N JN\rangle + \langle \nabla_N JN, \nabla_N JN\rangle\\ &= \langle \nabla_N N, \nabla_N N\rangle\\ &= (X_0\delta)^2.\end{aligned}$$

因此， $c_1^{(3)}(0,\ p) = \left[\mathrm{h}\nabla_N\nabla_N V_1,\ JN\mathrm{i} + (X_0\delta)^2\right](0,\ p)$。

步骤 *2*. 我们计算 $\ddot{c}_2(t,\ p)$。由于 $\dot{c}_2(t,\ p) = \mathrm{h}V_2,\ JN\mathrm{i}\,(t,\ p)$，因此有

$$\ddot{c}_2(t,p) = N\langle V_2, JN\rangle = \langle \nabla_N V_2, JN\rangle + \langle V_2, \nabla_N JN\rangle.$$

计算 $t=0$ 中的每一项，其中 $V_2(0,\ p) = (X_0\delta)\ N - X_0$，应用（36）和引理34，我们推得

$$\begin{aligned}\langle \nabla_N V_2, JN\rangle &= \langle \nabla_{V_2} N + [N,V_2] + \mathrm{Tor}\,(N,V_2), JN\rangle\\ &= \left\langle \nabla_{(X_0\delta)N - X_0} N + \mathrm{Tor}\,(N,(X_0\delta)\,N - X_0), JN\right\rangle\\ &= (X_0\delta)\langle \nabla_N N, JN\rangle - \langle \nabla_{X_0} N + \mathrm{Tor}\,(N,X_0), JN\rangle\\ &= -(X_0\delta)^2 + \langle [N,X_0], JN\rangle\end{aligned}$$

and

$$\langle V_2, \nabla_N JN\rangle = \langle (X_0\delta)\,N - X_0, \nabla_N JN\rangle = (X_0\delta)^2.$$

综上可得， $\ddot{c}_2(0,\ p) = \mathrm{h}[N,X_0],\ JN\mathrm{i}\,(0,\ p)$。

步骤 *3*. 此时，我们得到 $\partial_t^2 C(0,\ p)$ 的以下中间表达式：

$$\partial_t^2 C(0,p) = \left[-\langle \nabla_N\nabla_N V_1, JN\rangle - (X_0\delta)^2 + \langle [N,X_0], JN\rangle\right](0,p).$$

我们来关注仍依赖于雅可比场 V_1的项。为了消去 V_1，我们需要使用与联络 ∇相关联的曲率算子，即$R(X;\ Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$。然后，应用（36）和引理34，

我们有:

$$\begin{aligned}-\langle\nabla_N\nabla_N V_1, JN\rangle &= -\langle\nabla_N\nabla_{V_1}N+\nabla_N\mathrm{Tor}\left(N,V_1\right),JN\rangle\\ &= -\left\langle\nabla_{V_1}\nabla_N N+R(N,V_1)N+\nabla_{[N,V_1]}N+\nabla_N\mathrm{Tor}\left(N,V_1\right),JN\right\rangle\\ &= \langle V_1(X_0\delta)JN+R(V_1,N)N,JN\rangle-\langle\nabla_N\mathrm{Tor}\left(N,V_1\right),JN\rangle.\end{aligned}$$

由于第一个标量积对于 V_1 出现的参数具有张量性 s,
在 $t=0$ 处求值，得到:

$$-\langle\nabla_N\nabla_N V_1, JN\rangle = -JN(X_0\delta)-\langle R(JN,N)N,JN\rangle-\langle\nabla_N\mathrm{Tor}\left(N,V_1\right),JN\rangle.$$

此时，考察含有挠率项的标量积，我们将 V_1 沿标准正交标架 N、 JN、 X_0分解，即

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}\left(N,V_1\right) &= \mathrm{Tor}\left(N,\langle V_1,N\rangle N+\langle V_1,JN\rangle JN+\langle V_1,X_0\rangle X_0\right)\\ &= \langle V_1,JN\rangle X_0+\langle V_1,X_0\rangle\mathrm{Tor}(N,X_0).\end{aligned}$$

在 $t=0$处求值，得到 $\mathbf{h}V_1,X_0\mathbf{i}=0$ ，因此可得

$$\begin{aligned}-\langle\nabla_N\mathrm{Tor}\left(N,V_1\right),JN\rangle &= -\langle N\langle V_1,JN\rangle X_0+N\langle V_1,X_0\rangle\mathrm{Tor}\left(N,X_0\right),JN\rangle\\ &= -\langle\left(V_1,JN\right)\mathrm{Tor}\left(N,X_0\right),JN\rangle\\ &= \langle\mathrm{Tor}\left(N,X_0\right),JN\rangle.\end{aligned}$$

由于在 U上，特征向量场 $X_S=-JN$，因此得到

$$-\langle\nabla_N\nabla_N V_1,JN\rangle(0,p)=\left[X_S\left(X_0\delta\right)+\langle-R(JN,N)N+\mathrm{Tor}\left(N,X_0\right),JN\rangle\right](0,p).$$

最后:

$$\begin{aligned}\partial_t^2 C(0,p) &= -\langle\nabla_N\nabla_N V_1,JN\rangle-\left(X_0\delta\right)^2+\langle[N,X_0],JN\rangle\\ &= X_S(X_0\delta)-\left(X_0\delta\right)^2+\langle-R(JN,N)N+\mathrm{Tor}\left(N,X_0\right)+[N,X_0],JN\rangle\\ &= X_S(X_0\delta)-\left(X_0\delta\right)^2-\langle R(JN,N)N,JN\rangle-\langle\nabla_{X_0}N,JN\rangle.\end{aligned}$$

步骤 *4*。 证明的最后一部分是得到（45）。利用引理 34，我们推出

$$\begin{aligned}-\langle R\left(JN,N\right)N,JN\rangle &= \left\langle-\nabla_{JN}\nabla_N N+\nabla_N\nabla_{JN}N+\nabla_{[JN,N]}N,JN\right\rangle\\ &= JN(X_0\delta)-N(\mathcal{H})+\left\langle\nabla_{-\mathcal{H}JN-(X_0\delta)N+X_0}N,JN\right\rangle\\ &= -X_S\left(X_0\delta\right)-N\left(\mathcal{H}\right)+\mathcal{H}^2+\left(X_0\delta\right)^2+\langle\nabla_{X_0}N,JN\rangle.\end{aligned}$$

代入（44），即可得到结论。 □

6. 一个实用公式。命题 5 的证明

本节证明命题 5，其中 $\mu=\nu$ 是 Popp 测度。换言之，我们证明，定理 1中展开式（5）的系数仅需根据局部定义曲面 f 的光滑函数 $S=f^{-1}(0)$计算，而无须明确知道次黎曼距离函数 δ。

这一性质对于展开式（5）中出现的系数 a_1 和 a_2 成立，这从它们的显式表达式显而易见。事实上，正如注释 24 中所指出的，平均次黎曼曲率$\mathcal{H}$由（25）在曲面上定义良好。对于系数 a_3，这一点并非先验地显然，因为它取决于沿 $\mathcal{H}$ 的导数，而 N是横截于曲面的向量场。因此，它可能取决于曲面 S之外的 H。

在证明命题 5之前，我们先回顾两个局部度量不变量 χ和 κ。它们是定义在 M 上的光滑函数，用于刻画三维接触流形。

这些量与 Tanno 联络 ∇ 所对应的曲率算子密切相关。

三维次黎曼接触流形的第一个度量不变量 κ 是分布的 Tanno截面曲率，即定义如下的光滑函数

$$\kappa = \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle,$$

其中 X_1，X_2 是 D 的局部标准正交标架。记 $\tau\colon \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ 为线性映射 $\tau(X) = \mathrm{Tor}(X_0, X)$，我们将第二个度量不变量 χ 定义为函数

$$\chi = \sqrt{-\det \tau}.$$

根据（9），度量不变量 χ 和 κ 可表示为:

$$\chi^2 = -c^1_{01}c^2_{02} + \frac{\left(c^2_{01} + c^1_{02}\right)^2}{4},$$

$$\kappa = X_2\left(c^1_{12}\right) - X_1\left(c^2_{12}\right) - \left(c^1_{12}\right)^2 - \left(c^2_{12}\right)^2 + \frac{c^2_{01} - c^1_{02}}{2}.$$

更多详情请参见 [ABB19，第 17.2、17.6] 节（另见 [Bar13]）。

命题 5 的证明。如前所述，只需证明 a_3 的情形。由于 f 和 δ 都在局部定义该曲面，它们的零水平集为$\langle \nabla_H f,\ \nabla_H \delta\rangle|_U > 0$，因此存在一个光滑函数 h 使得 $f = e^h\delta$。利用（16），对于 $i = 0,\ 1,\ 2$

$$\left(\frac{X_i f}{\|\nabla_H f\|}\right)\Big|_U = \left(\frac{X_i\delta + \delta X_i h}{\|\nabla_H \delta + \delta\nabla_H h\|}\right)\Big|_U = X_i\delta|_U. \tag{46}$$

因此，当前陈述中 X_S 的定义与.....的等价性 at 的（17）得证。

回顾（44），可得系数 a_3 的如下表达式:

$$a_3 = \int_U \left[X_S(X_0\delta) - (X_0\delta)^2 - \langle R(JN, N)N, JN\rangle - \langle \nabla_{X_0}N, JN\rangle\right] dA.$$

我们来考察积分中的第一项。注意到

$$\begin{aligned}\nabla_H\left(\frac{X_0 f}{\|\nabla_H f\|}\right) &= \nabla_H\left(\frac{X_0\delta + \delta X_0 h}{\|\nabla_H\delta + \delta\nabla_H h\|}\right)\\ &= \frac{\nabla_H(X_0\delta) + (X_0 h)\nabla_H\delta}{\|\nabla_H\delta + \delta\nabla_H h\|} + (X_0\delta)\nabla_H\left(\frac{1}{\|\nabla_H\delta + \delta\nabla_H h\|}\right).\end{aligned}$$

并在 $U \subset S$ 处求值

$$\begin{aligned}\nabla_H\left(\frac{X_0 f}{\|\nabla_H f\|}\right) &= \nabla_H(X_0\delta) + (X_0 h)N - (X_0\delta)\frac{1}{2}\nabla_H(1 + 2\delta Nh + \delta^2\|\nabla_H h\|^2)\\ &= \nabla_H(X_0\delta) + (X_0 h - (X_0\delta)Nh)N.\end{aligned}$$

由于 X_S 与 N 正交，我们推得在 U 上

$$X_S(X_0\delta) = \langle -JN, \nabla_H(X_0\delta)\rangle = X_S\left(\frac{X_0 f}{\|\nabla_H f\|}\right).$$

此外，由于 N，JN是该次黎曼结构的局部标准正交标架，且 X_1，X_2也是如此，直接计算可得

$$\langle R(JN, N)N, JN\rangle = \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle = \kappa.$$

因此，由（46）可推得，在 U

$$-(X_0\delta)^2 - \langle R(JN, N)N, JN\rangle = -\left(\frac{X_0 f}{\|\nabla_H f\|}\right)^2 - \kappa.$$

最后，我们观察到

$$-\langle \nabla_{X_0} N, JN\rangle = \langle \mathrm{Tor}(N, X_0) + [N, X_0], JN\rangle .$$

接着，对第二个附加项进行计算，我们得到

$$\begin{aligned}\langle [N, X_0], JN\rangle &= \langle [(X_1\delta)X_1 + (X_2\delta)X_2, X_0], -(X_2\delta)X_1 + (X_1\delta)X_2\rangle \\ &= (X_2\delta)(X_0X_1\delta) - (X_1\delta)(X_0X_2\delta) \\ &\quad + \langle (X_1\delta)[X_1, X_0] + (X_2\delta)[X_2, X_0], -(X_2\delta)X_1 + (X_1\delta)X_2\rangle \\ &= (X_2\delta)(X_1X_0\delta) - (X_1\delta)(X_2X_0\delta) - c_{01}^2(X_2\delta)^2 + c_{02}^1(X_1\delta)^2 \\ &\quad + 2(c_{02}^2 - c_{01}^1)(X_1\delta)(X_2\delta).\end{aligned}$$

回顾（11），我们推得 $\langle [N, X_0],\ JN\rangle = -JN\ (X_0\delta)\ + 2\langle \mathrm{Tor}(X_0,\ N)\ JN\rangle$，因此

$$-\langle \nabla_{X_0} N, JN\rangle = X_S(X_0\delta) - \langle \mathrm{Tor}(X_0, N), X_S\rangle .$$

挠率算子关于其自变量具有张量性，由（46）可得结论。 □

注 37. 将定理 1 应用于三维海森堡群 $\mathbb{H}$，得到的结果与 [Rit21] 相符。事实上，选取一个标准正交标架 $X_1,\ X_2$ 作为该分布的标架，我们有以下关系：

$$[X_2, X_1] = X_0 \quad \text{and} \quad [X_1, X_0] = [X_2, X_0] = 0.$$

几何不变量 κ 消失，因此利用命题 5，我们计算关于 ν 的展开式（5）：

$$\nu(U_\varepsilon) = \varepsilon \int_U dA - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_U \mathcal{H} dA + \frac{\varepsilon^3}{6}\int_U 2X_S\,(X_0\delta) - (X_0\delta)^2\, dA + o(\varepsilon^3).$$

提醒读者，在 [Rit21] 中，作者为黎曼延拓选取了标准正交基X, Y, T，用我们的记号表示即为 $X = X_1, Y = X_2$ 和 $X_0 = 2T$。此外，向量场 $-e_1$ 在我们的记号中对应于 X_S，dP对应于 dA，而 ${}^N\mathbf{k}_{N_h}\mathbf{k}$ 对应于黎曼梯度 $\nabla\delta = \nabla_H\delta + (X_0\delta)X_0$。特别地，$2^{\langle N,T\rangle}\mathbf{i}\,\mathbf{k}_{N_h}\mathbf{k} = X_0\delta$。[Rit21]中给出的展开式的第三项

$$-\frac{2\varepsilon^3}{3}\int_U e_1\frac{\langle N, T\rangle}{\|N_h\|} + \frac{\langle N, T\rangle^2}{\|N_h\|^2} dP,$$

与本文得到的结果一致。

注 38。一般而言，为了计算阶数大于或等于四的展开式（5），需要明确知道曲面的次黎曼距离函数。事实上，对于 S Heisenberg 群中的曲面 $\mathbb{H}$，根据 [BFF+15]中的结果，这一点已经成立。设 $U \subset S$ 相对紧，且其闭包不包含任何特征点。我们有$\nu(U_\varepsilon) = \sum_{k=1}^4 \frac{\varepsilon^k}{k!}a_k + o(\varepsilon^4)$，其中

$$a_4 = \int_U (X_0\delta)^2\mathcal{H} + 2X_0X_0\delta\, dA, \tag{48}$$

其中 $\mathcal{H} = -X_1X_1\delta - X_2X_2\delta$ 是定义 23中针对 $\mathbb{H}$ 所规定的平均次黎曼曲率。

考虑一个光滑局部定义函数 $f\colon\ \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ 使得 $U = f^{-1}(0)$且 $f = e^h\delta$ 在 U_ε上。(48)中的第一项也可以等价地写成：

$$(X_0\delta)^2\mathcal{H}|_U = -\left(\frac{X_0 f}{\|\nabla_H f\|}\right)^2 \mathrm{div}\left(\frac{\nabla_H f}{\|\nabla_H f\|}\right).$$

此外，由于

$$X_0X_0f = e^h\left(\delta X_0X_0h + \delta(X_0h)^2 + 2(X_0h)(X_0\delta) + X_0X_0\delta\right),$$

且 $\mathbf{k}\nabla_H f\mathbf{k}|_U = e^h\mathbf{k}\nabla_H\delta + \delta\nabla_H h\mathbf{k}|_U = e^h$，我们得到在曲面上

$$X_0X_0\delta = \frac{X_0X_0f}{\|\nabla_H f\|} - 2(X_0h)\frac{X_0f}{\|\nabla_H f\|}.$$

最后一个恒等式表明，为了计算 a_4，需要明确知道距离函数 δ （即无法摆脱 h）。

接下来，我们将把结果应用于一些特定的三维次黎曼接触流形。首先，考虑具有 $\chi = 0$ 的三维接触流形类。我们回顾一下，对于这类空间，存在一个局部标准正交标架，使得

$$[X_1, X_0] = \kappa X_2, \quad [X_2, X_0] = -\kappa X_1, \quad [X_2, X_1] = X_0. \tag{49}$$

此外，当接触流形的结构在具有 $\chi \neq 0$ 的李群上左不变时，我们可以选取分布的典范标架 X_1, X_2，该标架在相差一个符号的意义下唯一，并满足：

$$[X_1, X_0] = c_{01}^2X_2, \quad [X_2, X_0] = c_{02}^1X_1, \quad [X_2, X_1] = X_0 + c_{12}^1X_1 + c_{12}^2X_2, \tag{50}$$

且满足（参见 [ABB19，命题 17。14]）

$$\chi = \frac{c_{01}^2 + c_{02}^1}{2},$$

考虑这些空间并利用命题 5，我们得到定理 a_3 中的项 a_3 的如下表达式 1。

推论 39。 设三维接触流形配备有 $\chi = 0$,

$$a_3 = \int_U 2X_S(X_0\delta) - (X_0\delta)^2 - \kappa\, dA. \tag{51}$$

对于配备有 $\chi \neq 0$ 的三维李群上的左不变次黎曼接触结构，我们有

$$a_3 = \int_U 2X_S(X_0\delta) - (X_0\delta)^2 - \kappa + \chi\left[(X_1\delta)^2 - (X_2\delta)^2\right] dA$$

其中 X_1, X_2 为满足(50) 的唯一（相差一个符号）典范基。

注 40。 定理 a_1、a_2、a_3 中的展开式（5）的系数是1对 δ进行迭代水平散度后得到的积分。更准确地说，

$$a_k = \int_U \mathrm{div}_\mu^{k-1}(\nabla_H\delta)\, dA_\mu \qquad k = 1, 2, 3. \tag{52}$$

相对于光滑测度 μ，向量场 X 在 M 上的迭代散度定义为

$$\mathrm{div}_\mu^0(X) = 1, \quad \mathrm{div}_\mu^{k+1}(X) = \mathrm{div}_\mu(\mathrm{div}_\mu^k(X)X).$$

特别地，恒等式 (52) 对 a_1 依据定义 23 对 a_2成立。至于系数 a_3，我们有：

$$\mathrm{div}_\mu^2(\nabla_H\delta) = \mathrm{div}_\mu(\mathrm{div}_\mu(\nabla_H\delta)\nabla_H\delta) = -\mathrm{div}(\mathcal{H}_\mu N) = -N\left(\mathcal{H}_\mu\right) + \mathcal{H}_\mu^2,$$

其中 $N = \nabla_H\delta$ 根据定理 15 并利用散度的如下性质：$\mathrm{div}(aX) = X(a) + a\mathrm{div}(X)$ 对任意光滑函数 a均成立。这一事实可以推广

文献 [BFF+15] 中关于赋予 Popp 测度的海森堡群内曲面的结果。事实上， $\nu(U_\varepsilon)$ 在 ε 上是解析的

$$\nu(U_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \int_{\partial\Omega} \operatorname{div}^{k-1}(\nabla_H \delta)\, d\mathcal{H}^3_{d_{cc}},$$

其中， $d\mathrm{H}^3_{d_{cc}}$ 是曲面上由卡诺–卡拉泰奥多里距离 d_{cc} 诱导的度量的三维豪斯多夫测度。此外，作者证明，迭代散度是距离函数某些二阶导数的多项式，并给出了这些多项式的精确递归公式。

7. 模型空间中的曲面

我们计算定理1中的展开式（5），适用于模型次黎曼空间中的一类曲面，其中 μ 等于 Popp 测度 ν。我们利用命题 5，从而避免显式计算曲面到点的次黎曼距离。

首先，我们考虑海森堡群 $\mathbb{H}$中的旋转曲面类。随后，按照 [BBCH21第 5], 节所介绍的构造，我们考察模型空间 SU（2）和 SL（2）中的两个特定曲面。我们证明，对于这些曲面，展开式（5）中的系数 a_2 和 a_3 总是为零。这推广了 $\mathbb{H}$ 中水平平面的情形，见 [BFF+15]。

7.1. 中的旋转曲面 $\mathbb{H}$。考虑海森堡群 $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^3, \omega)$，其接触形式为

$$\omega = dz - \frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy,$$

分布 $\mathsf{D} = \ker\omega$ 由以下向量场张成

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{and} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z},$$

Reeb向量场为 $X_0 = \frac{\partial}{\partial z}$。此外，令 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x, y, z) = z - g(r)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $g'(0) = 0$的光滑函数。等值集 $S = f^{-1}(0)$ 是一个光滑曲面，在 $(0, 0, g(0))$ 处有唯一的特征点。事实上，若考察曲面上的其他点，则向量场$-y\partial_x + x\partial_y$ 在这些点与曲面相切，但不属于分布 D；而在 $(0, 0, g(0))$ 处，分布与曲面的切平面重合，因为在该点 $\partial_x f = \partial_y f = 0$。

令 $U \subset S$ 为一个开且相对紧的集合，其闭包不包含特征点 $(0, 0, g(0))$。为求得系数a_2，我们利用（25）计算曲面上的平均曲率 $\mathcal{H}$。根据引理 25 中的（28），相对于 Popp测度 ν， X_1 和 X_2 在 $\mathbb{H}$ 中的散度均为零，因此我们需要计算的量如下

$$-\mathcal{H}|_S = \frac{X_1X_1f + X_2X_2f}{\|\nabla_H f\|} + \nabla_H f\left(\frac{1}{\|\nabla_H f\|}\right). \tag{55}$$

我们分别计算组成上述公式的各个元素：

$$X_1 f = \frac{y}{2} - g'(r)\frac{x}{r}, \qquad X_2 f = -\frac{x}{2} - g'(r)\frac{y}{r};$$

$$X_1X_1f + X_2X_2f = -g''(r) - \frac{g'(r)}{r};$$

$$\frac{1}{\|\nabla_H f\|} = \frac{1}{\sqrt{(X_1 f)^2 + (X_2 f)^2}} = \frac{2}{\sqrt{r^2 + 4g'(r)^2}}.$$

因此我们可以计算

$$\nabla_H f = \left(\frac{y}{2} - g'(r)\frac{x}{r}\right)\partial_x - \left(\frac{x}{2} + g'(r)\frac{y}{r}\right)\partial_y + \frac{r^2}{4}\partial_z;$$
$$\nabla_H f\left(\frac{1}{\|\nabla_H f\|}\right) = -2\frac{r + 4g'(r)g''(r)}{(r^2 + 4g'(r)^2)^{\frac{3}{2}}}\nabla_H f(r) = 2g'(r)\frac{r + 4g'(r)g''(r)}{(r^2 + 4g'(r)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

代入（55），可得

$$-\mathcal{H} = -2\frac{g''(r) + \frac{g'(r)}{r}}{\sqrt{r^2 + 4g'(r)^2}} + 2g'(r)\frac{r + 4g'(r)g''(r)}{(r^2 + 4g'(r)^2)^{\frac{3}{2}}} = -2\frac{4g'(r)^3 + r^3 g''(r)}{r(r^2 + 4g'(r)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

最后，我们计算所需的元素，以便 a_3 利用命题5：

$$\begin{aligned} X_S &= \frac{X_2 f}{\|\nabla_H f\|}X_1 - \frac{X_1 f}{\|\nabla_H f\|}X_2 \\ &= \frac{1}{\|\nabla_H f\|}\left[-\left(\frac{x}{2} + g'(r)\frac{y}{r}\right)\partial_x - \left(\frac{y}{2} - g'(r)\frac{x}{r}\right)\partial_y - \frac{r}{2}g'(r)\partial_z\right] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} 2X_S\left(\frac{X_0 f}{\|\nabla_H f\|}\right) - \left(\frac{X_0 f}{\|\nabla_H f\|}\right)^2 &= -\frac{2}{\|\nabla_H f\|^3}\left(r + 4g'(r)g''(r)\right)X_S(r) - \frac{1}{\|\nabla_H f\|^2} \\ &= 4g'(r)\frac{rg''(r) - g'(r)}{\|\nabla_H f\|^4}. \end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned} \nu(U_\varepsilon) = \varepsilon\int_U dA - \varepsilon^2\int_U \frac{4g'(r)^3 + r^3 g''(r)}{r(r^2 + 4g'(r)^2)^{\frac{3}{2}}}dA \\ + \frac{\varepsilon^3}{6}\int_U 4g'(r)\frac{rg''(r) - g'(r)}{(r^2 + 4g'(r)^2)^2}dA + o(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

7.2. **模型空间中的例子**。考虑海森堡群中的 $\mathbb{H}$ 平面 $S = f^{-1}(0)$ 满足 $f(x,\ y,\ z) = z$。曲面 S围成$\Omega = \{z \le 0\}$，且在原点有唯一的特征点。设 $U \subset S$ 为开集且相对紧，并满足$(0,\ 0,\ 0) \notin \overline{U}$。考虑与上一小节相同的设定，可以计算定理5的展开式（1），得到

$$\nu(U_\varepsilon) = \varepsilon\int_U dA + o(\varepsilon^3). \tag{56}$$

这一结果与[BFF+15]中给出的例子一致。下文关注的空间是李群 $SU(2)$ 和 $SL(2)$，它们配备了标准的次黎曼结构。这些空间与海森堡群一起，构成三维接触次黎曼流形的模型空间。

7.2.1. 特殊酉群 $SU(2)$。特殊酉群是由行列式为 1 的 2×2 酉矩阵构成的李群，其群运算为矩阵乘法，

$$SU(2) = \left\{\begin{pmatrix} z + iw & y + ix \\ -y + ix & z - iw \end{pmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{R} \text{ such that } x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\right\}.$$

李代数 $su(2)$ 是迹为零的 2×2 斜厄米矩阵代数。我们将 $SU(2)$ 与酉球面 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ 等同，并给定

$k>0$，我们定义李群上的左不变向量场:

$$X_1 = k\left(z\frac{\partial}{\partial x} - w\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial w}\right),$$
$$X_2 = k\left(w\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial w}\right),$$
$$X_0 = 2k^2\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

这些向量场之间由李括号给出的关系与（49）中的关系相对应，其中 $\kappa = 4k^2$。现在，考虑光滑函数 $f(x,\ y,\ z,\ w) = w$，它定义了曲面 $S = \{w = 0\} \simeq S^2$。我们有

$$X_1 f = ky,\quad X_2 f = -kx,\quad X_0 f = 2k^2 z.$$

有两个特征点（0，0，± 1，0），它们是球面上两个相对的极点，对应于 $\pm\mathbb{I}$，其中 $\mathbb{I}$ 是恒等矩阵 2×2。我们选取$U \subset S$ 相对紧，使其闭包不含任何特征点。用坐标表示，

$$\|\nabla_H f\| = k\sqrt{x^2+y^2},\qquad \nabla_H f|_U = k^2 yz\frac{\partial}{\partial x} - k^2 xz\frac{\partial}{\partial y} + k^2(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial w}.$$

由引理 25中的（28），可得 $\mathrm{div} X_1 = \mathrm{div} X_2 = 0$，因此我们按照前述方法，利用（55）计算平均次黎曼曲率。

$$-\mathcal{H}|_U = \frac{X_1(y) - X_2(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x\nabla_H f(x) + y\nabla_H f(y)}{k(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

对于 a_3，我们利用命题 5 （更准确地说，利用推论 39中的（51））：

$$\frac{X_0 f}{\|\nabla_H f\|} = \frac{2kz}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad X_S = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-xz\frac{\partial}{\partial x} - yz\frac{\partial}{\partial y} + (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

因此，我们有以下公式，它证明了（56）

$$\begin{aligned} a_3 &= \int_U \left[\frac{4k}{\sqrt{x^2+y^2}}X_S(z) - \frac{4kz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(xX_S(x) + yX_S(y)) - \frac{4k^2z^2}{x^2+y^2} - 4k^2\right] dA \\ &= \int_U \left[4k^2 + \frac{4k^2z^2}{x^2+y^2} - \frac{4k^2z^2}{x^2+y^2} - 4k^2\right] dA = 0. \end{aligned}$$

7.2.2. 特殊线性群 $SL(2,\ \mathbb{R})$。 特殊线性群 $SL(2,\ \mathbb{R})$ 是由行列式为 1 的 2×2 矩阵在矩阵乘法下构成的李群，

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : xw - yz = 1\right\}.$$

相应的李代数 $sl(2,\ \mathbb{R})$ 是迹为零的 2×2 实矩阵构成的向量空间。对于 $k>0$，我们定义左不变向量场

$$X_1 = k\left(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial w}\right),$$
$$X_2 = k\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - w\frac{\partial}{\partial w}\right),$$
$$X_0 = 2k^2\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

这些向量场的对易关系属于（55）中的类型，其中 $\kappa = -4k^2$。我们考虑 $f(x,\ y,\ z,\ w) = y - z$定义的平面 $S = f^{-1}(0)$。我们得到

$$X_1 f = k(x-w),\qquad X_2 f = -k(y+z),\qquad X_0 f = 2k^2(x+w).$$

特征点为（± 1，0，0，± 1），对应于 $\pm\mathbb{I}$，其中 $\mathbb{I}$ 是恒等式 2×2 矩阵。我们选取 $U\subset S$ 相对紧，使得其闭包不包含任何特征点。于是有

$$\|\nabla_H f\| = k\sqrt{(x-w)^2+(y+z)^2}$$

并且，考虑到在 S 上关系式 $xw = 1+y^2$ 成立，

$$\nabla_H f_{|S} = k^2 y(w+x)\left(\frac{\partial}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\right)+k^2(x^2+y^2-1)\frac{\partial}{\partial y}+k^2(1-y^2-w^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

由引理 25中的（28），我们有 $\mathrm{div}X_1 = \mathrm{div}X_2 = 0$，因此，我们像之前利用（55）那样计算平均次黎曼曲率。

$$\begin{aligned}-\mathcal{H}|_U &= \frac{X_1(x-w)-X_2(y+z)}{\sqrt{(x-w)^2+(y+z)^2}} - \frac{(x-w)\nabla_H f(x-w)+(y+z)\nabla_H f(y+z)}{k((x-w)^2+(y+z)^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= 2k\frac{y-z}{\sqrt{(x-w)^2+(y+z)^2}} - k\frac{-(x-w)2y(x+w)+(y+z)(x^2-w^2)}{(x^2+2y^2+w^2-2)^{\frac{3}{2}}} = 0.\end{aligned}$$

对于系数 a_3，我们在 U 上计算特征向量场 X_S

$$X_S|_U = \frac{-k^2}{\|\nabla_H f\|}\left[(x^2+y^2-1)\frac{\partial}{\partial x}+y(w+x)\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)+(y^2+w^2-1)\frac{\partial}{\partial w}\right].$$

因此，由命题 5 （更确切地说，由推论 39中的（51））

$$\begin{aligned}a_3 &= \int_U\left[2X_S\left(\frac{2k(x+w)}{\sqrt{(x-w)^2+(y+z)^2}}\right)-\left(\frac{2k(x+w)}{\sqrt{(x-w)^2+(y+z)^2}}\right)^2+4k^2\right]dA\\ &= \int_U\left[\frac{4kX_S(x+w)}{\sqrt{(x-w)^2+(y+z)^2}}-4k(x+w)\frac{(x-w)X_S(x-w)+2yX_S(y+z)}{((x-w)^2+(y+z)^2)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{4k^2(x+w)^2}{(x-w)^2+(y+z)^2}+4k^2\right]dA\\ &= \int_U\left[-4k^2\frac{x^2+2y^2+w^2-2}{(x-w)^2+(y+z)^2}-4k^2(x+w)\frac{(x-w)(x^2-w^2)+4y^2(x+w)}{((x-w)^2+(y+z)^2)^2}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{4k^2(x+w)^2}{(x-w)^2+(y+z)^2}+4k^2\right]dA = 0\end{aligned}$$

经过一些化简后，我们再次得出（56）成立。

附录 A. 命题 27 的证明

我们用 $\mathsf{h}\cdot,\cdot\mathsf{i}_\varepsilon$ 表示由 g^ε诱导的标量积。此外，设 ∇^ε 为与 g^ε相关联的列维-奇维塔联络。为了计算 S 相对于 g^ε的平均曲率H^ε，我们考虑 TS上的标准正交标架

$$X_S = (X_2\delta)X_1-(X_1\delta)X_2 \qquad Y^\varepsilon = \frac{\varepsilon(X_\theta\delta)(X_1\delta)X_1+\varepsilon(X_\theta\delta)(X_2\delta)X_2-\varepsilon X_\theta}{\sqrt{1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2}}.$$

注意到 X_S 是（17）中的特征向量场，它是水平的，且不依赖于 ε。此外，若 X_θ 是 Reeb向量场 X_0，则 Y^ε 是 Y_S （18）中相对于 g^ε归一化的。平均曲率 H^ε 是相对于标架 X_S、Y计算的第二基本形式的迹。更准确地说，

$$H^\varepsilon = \langle\nabla^\varepsilon_{X_S}X_S, N^\varepsilon\rangle_\varepsilon+\langle\nabla^\varepsilon_{Y^\varepsilon}Y^\varepsilon, N^\varepsilon\rangle_\varepsilon \tag{58}$$

其中 N^ε 是关于 g^ε 的 S的黎曼梯度

$$N^\varepsilon = \frac{(X_1\delta)X_1 + (X_2\delta)X_2 + \varepsilon^2(X_\theta\delta)X_\theta}{\sqrt{1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2}}.$$

计算的关键工具是Koszul公式，即对于 U, V, Z向量场，我们有

$$\langle \nabla^\varepsilon_U V, Z\rangle_\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\langle [U,V],Z\rangle_\varepsilon - \langle [V,Z],U\rangle + \langle [Z,U],V\rangle_\varepsilon\right). \tag{59}$$

此外，回忆

$$[X_j, X_i] = c_{ij}^1 X_1 + c_{ij}^2 X_2 + c_{ij}^\theta X_\theta \quad \text{for } i,j = 1,2,\theta. \tag{60}$$

注意， c_{ij}^k 不依赖于 ε。我们来计算（58）中的第一项

$$\begin{aligned}
\nabla^\varepsilon_{X_S} X_S &= \nabla^\varepsilon_{(X_2\delta)X_1 - (X_1\delta)X_2}(X_2\delta)X_1 - (X_1\delta)X_2 \\
&= \left((X_2\delta)X_1X_2\delta - (X_1\delta)X_2X_2\delta\right)X_1 \\
&\quad + \left(-(X_2\delta)X_1X_1\delta + (X_1\delta)X_2X_1\delta\right)X_2 \\
&\quad + (X_2\delta)^2\nabla^\varepsilon_{X_1}X_1 + (X_1\delta)^2\nabla^\varepsilon_{X_2}X_2 \\
&\quad - (X_1\delta)(X_2\delta)(\nabla^\varepsilon_{X_1}X_2 + \nabla^\varepsilon_{X_2}X_1).
\end{aligned}$$

对（16）分别关于 X_1 、 X_2 和 X_θ 求导，得到

$$\begin{aligned}
(X_1\delta)X_1X_1\delta + (X_2\delta)X_1X_2\delta = 0,\\
(X_1\delta)X_2X_1\delta + (X_2\delta)X_2X_2\delta = 0,\\
(X_1\delta)X_\theta X_1\delta + (X_2\delta)X_\theta X_2\delta = 0.
\end{aligned}$$

考虑到（60），我们有

$$\begin{aligned}
\nabla^\varepsilon_{X_1}X_1 &= c_{12}^1X_2 - \varepsilon^2 c_{\theta 1}^1 X_\theta;\\
\nabla^\varepsilon_{X_1}X_2 &= -c_{12}^1X_1 + \frac{1}{2}(-c_{12}^\theta - \varepsilon^2 c_{\theta 2}^1 - \varepsilon^2 c_{\theta 1}^2)X_\theta\\
\nabla^\varepsilon_{X_2}X_1 &= c_{12}^2X_2 + \frac{1}{2}(c_{12}^\theta - \varepsilon^2 c_{\theta 2}^1 - \varepsilon^2 c_{\theta 1}^2)X_\theta\\
\nabla^\varepsilon_{X_2}X_2 &= -c_{12}^2X_2 - \varepsilon^2 c_{\theta 2}^2 X_\theta.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\nabla^\varepsilon_{X_S}X_S &= \left(-(X_1\delta)X_1X_1\delta - (X_1\delta)X_2X_2\delta\right)X_1\\
&\quad + \left(-(X_2\delta)X_1X_1\delta - (X_2\delta)X_2X_2\delta\right)X_2\\
&\quad + (X_2\delta)^2(c_{12}^1X_2 - \varepsilon^2 c_{\theta 1}^1X_\theta) + (X_1\delta)^2(-c_{12}^2X_2 - \varepsilon^2 c_{\theta 2}^2X_\theta)\\
&\quad - (X_1\delta)(X_2\delta)\left(-c_{12}^1X_1 + c_{12}^2X_2 + -(c_{\theta 2}^1 + c_{\theta 1}^2)X_\theta\right)\\
&= -\left(X_1X_1\delta + X_2X_2\delta - c_{12}^1(X_2\delta) + c_{12}^2(X_1\delta)\right)\left((X_1\delta)X_1 + (X_2\delta)X_2\right)\\
&\quad - \varepsilon^2((X_2\delta)^2c_{\theta 1}^1 + (X_1\delta)^2c_{\theta 2}^2 - (X_1\delta)(X_2\delta)(c_{\theta 2}^1 + c_{\theta 1}^2))X_\theta.
\end{aligned}$$

简化计算后，我们得到

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^\varepsilon_{X_S}X_S, N^\varepsilon\rangle_\varepsilon &= \frac{-X_1X_1\delta - X_2X_2\delta + c_{12}^1(X_2\delta) - c_{12}^2(X_1\delta)}{\sqrt{1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2}}\\
&\quad - \varepsilon^2(X_\theta\delta)\frac{(X_2\delta)^2c_{\theta 1}^1 + (X_1\delta)^2c_{\theta 2}^2 - (X_1\delta)(X_2\delta)(c_{\theta 2}^1 + c_{\theta 1}^2)}{\sqrt{1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2}}.
\end{aligned}$$

最后，回顾（27），我们得出

$$\langle \nabla^\varepsilon_{X_S} X_S, N^\varepsilon\rangle_\varepsilon = \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2}} + O(\varepsilon^2). \tag{64}$$

接下来，我们计算（58）中的第二项。令 $N = (X_1\delta)X_1 + (X_2\delta)X_2$ 如定义 28所示，从而可以将 Y^ε 和 N^ε 改写如下

$$Y^\varepsilon = \frac{\varepsilon(X_\theta\delta)N - \varepsilon X_\theta}{\sqrt{1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2}}, \qquad N^\varepsilon = \frac{N + \varepsilon^2(X_\theta\delta)X_\theta}{\sqrt{1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2}}.$$

由于 Y^ε 和 N^ε 正交，

$$\langle \nabla^\varepsilon_{Y^\varepsilon} Y^\varepsilon, N^\varepsilon\rangle_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \langle \nabla^\varepsilon_{(X_\theta\delta)N - X_\theta}((X_\theta\delta)N - X_\theta), N + \varepsilon^2(X_\theta\delta)X_\theta\rangle_\varepsilon.$$

特别地，

$$\begin{aligned}\nabla^\varepsilon_{(X_\theta\delta)N - X_\theta}((X_\theta\delta)N - X_\theta) &= (X_\theta\delta)^2\nabla^\varepsilon_N N - (X_\theta\delta)\nabla^\varepsilon_N X_\theta + \nabla^\varepsilon_{X_\theta}X_\theta \\ &\quad + ((X_\theta\delta)NX_\theta\delta - X_\theta X_\theta\delta)N.\end{aligned}$$

由于 ∇^ε 是度量联络，因此对于任意一对向量场 U，V，$\nabla^\varepsilon_U V$ 都与 V 正交。于是

$$\begin{aligned}\langle \nabla^\varepsilon_{Y^\varepsilon} Y^\varepsilon, N^\varepsilon\rangle_\varepsilon = -\varepsilon^2 &\frac{\varepsilon^2(X_\theta\delta)^3\langle_\varepsilon \nabla^\varepsilon_N N, X_\theta\rangle_\varepsilon - \langle (X_\theta\delta)\nabla^\varepsilon_N X_\theta - \nabla^\varepsilon_{X_\theta}X_\theta, N\rangle_\varepsilon}{(1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &- \varepsilon^2\frac{(X_\theta\delta)NX_\theta\delta - X_\theta X_\theta\delta}{(1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned} \tag{65}$$

再次利用（59）和（61）中的 Koszul公式，可得

$$\begin{aligned}\langle \nabla^\varepsilon_N N, X_\theta\rangle_\varepsilon &= -\langle \nabla^\varepsilon_N X_\theta, N\rangle_\varepsilon \\ &= -\langle [N, X_\theta], N\rangle_\varepsilon \\ &= -(X_1\delta)^2 c^1_{\theta 1} - (X_1\delta)(X_2\delta)(c^1_{\theta 2} + c^2_{\theta 1}) - (X_2\delta)^2 c^2_{\theta 2},\end{aligned} \tag{66}$$

其不依赖于 ε。另一方面，

$$\langle \nabla^\varepsilon_{X_\theta} X_\theta, N\rangle_\varepsilon = \langle [N, X_\theta], X_\theta\rangle_\varepsilon = \frac{(X_1\delta)c^\theta_{\theta 1} + (X_2\delta)c^\theta_{\theta 2}}{\varepsilon^2}. \tag{67}$$

将 (66) 和 (67) 代入 (65)，得到

$$\langle \nabla^\varepsilon_{Y^\varepsilon} Y^\varepsilon, N^\varepsilon\rangle_\varepsilon = O(\varepsilon^2) - \frac{(X_1\delta)c^\theta_{\theta 1} + (X_2\delta)c^\theta_{\theta 2}}{(1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{68}$$

在 ($\varepsilon \to 0$ 处取 (64) 和 (68) 的极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathcal{H} + (X_1\delta)c^\theta_{\theta 1} + (X_2\delta)c^\theta_{\theta 2}}{(1+\varepsilon^2(X_\theta\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} + O(\varepsilon^2)$$

即可恢复 (29)。

参考文献

[ABB19] A. Agrachev、D. Barilari 和 U. Boscain，《次黎曼几何全面导论》，剑桥大学出版社，2019年。[ABR17] A. Agrachev、D. Barilari 和 L. Rizzi，《接触几何中的次黎曼曲率》，《几何分析杂志》**27** 2017 1, 366 408 3606555 ( )，第 – 期。 MR AS A. A. Agrachev [04]
和 Y. L. Sachkov，《几何视角下的控制理论》，数学科学百科全书，第87卷，施普林格出版社，柏林，2004年。控制理论与优化，II。MR[03] 2002547 Bal Z. M.

Balogh，《特征集的大小与具有指定梯度的函数》，《纯粹与应用数学杂志》**564** (2003年)，63–83。MR2021034

[Bar13] D. Barilari, 《三维接触次黎曼几何中的热核迹渐近展开》, 《数学科学杂志》195 (2013年), 第3期, 391–411。[BBCH21] D. Barilari、U. Boscain、D. Cannarsa 和 K. Habermann, 《三维接触次黎曼流形曲面上的随机过程》, 《亨利·庞加莱研究所概率与统计年鉴》57 (2021年), 第3期。[BFF+15] Z. M. Balogh、F. Ferrari、B. Franchi、E. Vecchi 和 K. Wildrick, 《海森堡群中的施泰纳公式》, 《非线性分析》 **126** 2015 201 217 3388879 ( ), –。[22] MR BH D. Barilari 和 K. Habermann, 《接触次黎曼流形超曲面的内禀次拉普拉斯算子》, arXiv, 2022年。[BR13] D. Barilari 和 L. Rizzi, 《次黎曼几何中 Popp 体积的一个公式》, 《分析、几何与度量空间》 **1** 2013 42 57 3108867 ( ), –。MR BTV Z. M. Balogh、[17] J. T. Tyson 和 E. Vecchi, 《海森堡群中曲线与曲面的内禀曲率及高斯–博内定理》, 《数学杂志》287 (2017年), 第1–2期, 1–38。MR3694666[BTV20] ———, 《勘误: 海森堡群中曲线与曲面的内禀曲率及高斯–博内定理》, 《数学杂志》

296 2020 1 2, 875 876 4140768 ( ), 第 - – [06] 期。MR Cha I. Chavel, 《黎曼几何》, 第二版, 剑桥高等数学研究丛书, 第 98 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2006年。现代导论。MR2229062[FPR20] V. Franceschi、D. Prandi 和 L. Rizzi, 《奇异次拉普拉斯算子本质自伴性的研究》, 《势分析》

53 2020 1, 89 112 4117982 ( ), 第 – 期。MR Gra [04] A. Gray, 《管状邻域》, 第二版, 数学进展丛书, 施普林格出版社, 巴塞尔, 221, 2004 2024928 年。附有 Vicente Miquel 撰写的序言。[21] MR Rit M. Ritoré, 《次黎曼海森堡群中的管状邻域》, 《高级微积分与变分》

14 2021 1, 1 36 4193432 ( ), 第 – 期。MR Ros T. Rossi, 《次黎曼几何中子流形 [22] 的相对热含量》, arXiv, 2022年。[Ste40] J. Steiner, 《平行曲面论》, 《普鲁士科学院月报》(1840年), 114–118。[Tan89] S. Tanno, 《接触黎曼流形上的变分问题》, 《美国数学会汇刊》

314 1989 1, 349 379 1000553 ( ), 第 – 期。MR Wey H. Weyl, 《关于管的体积》, [39] 《美国数学杂志》61 2, 461 1939 472 ( ), 第 – 期。