arXiv:2302.01279v1 [math.AP] 2 Feb 2023

二维欧拉方程中靠近局域径向单调剖面的时间周期解

´CLAUDIA GARCIA、TAOUFIK HMIDI 和 JOAN MATEU

ABSTRACT. 本文研究二维欧拉方程中靠近如下类型定常径向涡旋的刚性时间周期解的存在性： $f_0(|x|)\mathbf{1}_{\mathbb{D}}(x)$，其中 $\mathbb{D}$ 为单位圆盘， f_0 是定号且严格单调的剖面。根据剖面的符号，我们区分两种情形： *defocusing and focusing.* 在第一种情形中，与低对称性相关的分岔曲线较为稀少；而在 *focusing case*，我们得到与大对称性相关的一列可数分岔解。本文所采用的方法新颖且灵活，不再像 [41] 那样要求径向剖面具有二次形式的显式表达式。取而代之的是，对相关谱问题进行精细研究；该谱问题基于带变势的斯图姆-刘维尔微分方程，变势的符号随剖面的形状和时间周期的位置而改变。我们还发现了某些中间积分算子正定性背后的深层结构，并在关键环节加以运用。值得注意的是，我们将基于Pr¨ufer变换和关于非振荡现象的 Kneser 定理，对与第一模态相关的线性问题进行专门研究。

CONTENTS

1. 引言 2 2. 刚性时间周期解 8 2.1. 边界方程 9 2.2. 密度方程的变换 9 2.3. 函数空间 11 2.4. 边界方程的求解及其推论 12 3. 线性化算子的一般结构 14 3.1. 傅里叶展开 15 3.2. Fredholm结构 16 4. 核的研究 16 4.1. 核描述 16 4.2. $\mathbb{L}_0^\Omega$ 18的核4.3. $\mathbb{L}_n^\Omega$, $n \geqslant 1$的核。24 4.4. 色散方程。26 4.5. 核生成元 36 5. 横截性 38 6. 定理 1.1 的证明 47 参考文献 48

Key words and phrases. 2D欧拉方程、周期解、分岔理论、特征值问题。C.G. 得到了 ERC-StG-852741 (CAPA)、MINECO–Feder（西班牙）研究资助项目 RTI2018–098850–B–I00、安达卢西亚自治区（西班牙）项目 FQM 954、Severo Ochoa研发卓越中心计划（CEX2019-000904-S）、PID2021-124195NB-C32、ERC高级研究资助834728，以及马德里自治区根据与马德里自治大学签订的多年期协议、在第五期PRICIT框架下为优秀大学科研人员提供的资助。T. H. 得到了 Tamkeen 通过纽约大学阿布扎比分校研究院提供的资助。J. M. 部分得到了 PID2020-112881GB-I00 以及面向中心的 Severo Ochoa与Maria de Maeztu计划 CEX2020-001084-MMTM2016–75390（MINECO，西班牙）的资助。

1. Introduction

二维理想均匀不可压缩流体的运动遵循二维欧拉方程，其涡量-速度形式为

$$\begin{cases} \partial_t \omega + (v \cdot \nabla)\omega = 0, & \text{in } [0,+\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ v = K * \omega, & \\ \omega(0,\cdot) = \omega_0, & \text{in } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1.1}$$

第二个方程被称为毕奥-萨伐尔定律，它将速度与涡量联系起来，其中$K(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{x^\perp}{|x|^2}$。在 [77], , Yudovich 证明了对于可积且有界的初始数据，解的整体存在性与唯一性。此外，已知这些解具有拉格朗日性质，并且可以由其初始数据和描述轨迹的流映射恢复。一个特殊的类别是涡斑，其中涡量在有界区域内均匀分布，即 $\omega(t) = \mathbf{1}_{D_t}$。在这种情况下，动力学归结为平面内一个或多个界面的运动，而界面的运动由自感应机制和相互作用机制驱动。其边界在 H¨older 空间中的正则性随时间整体保持不变的问题 $\mathscr{C}^{k,\,\alpha}$，其中 $k \geq 1$和 $\alpha \in (0,1)$，已在 [4, 18, 74]中得到解决。最近，Kiselev 和 Luo [65]在 $\mathscr{C}^2$ 中获得了一个适定性不良结果。关于奇异涡斑的适定性与适定性不良结果，请参阅 Elgindi 和 Jeong [31, 32]近期发表的论文。

二维欧拉方程可以视为一个哈密顿系统，因此从动力系统的角度来看，探究特定平衡态附近是否存在时间周期解是十分自然的。这是流体动力学中一个历史悠久的传统课题，过去几十年间，人们围绕涡旋运动的多个丰富方面开展了大量研究。文献中早已熟知斑块形式的显式稳态解：Rankine涡（圆形涡斑）保持静止，而基尔霍夫椭圆 [64] 则以恒定角速度绕其中心匀速旋转，该角速度与椭圆的长宽比有关。1978年，Deem 和 Zabusky [29] 通过数值计算发现，存在一些接近 Rankine涡的非平凡旋转斑块（也称为 V 态）。几年后，Burbea [6] 利用分岔理论 [63]和共形映射，从解析上证明了这一数值猜想。遗憾的是，Burbea 的工作长期未引起偏微分方程领域的关注，我们不得不等待约三十年，才迎来一系列深入而丰富的研究，致力于构造周期解，并分析与不同拓扑结构相关的分岔图的局部结构，例见 [14, 15, 27, 56, 57, 59, 60, 61] 及其中的参考文献。

Burbea涡斑以角速度 Ω 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内旋转，此后有许多研究探讨了该范围之外的情形。首先，Fraenkel [34] 证明，唯一的单连通定常涡斑（$\Omega = 0$）是 Rankine涡。后来，Hmidi [55] 证明，若 $\Omega < 0$（并附加凸性假设），且 $\Omega = \frac{1}{2}$，则唯一的单连通旋转涡斑必为圆盘。最后，G´omez-Serrano、Park、Shi 和 Yao [48] 解决了这个问题，并证明在 $[0, \frac{1}{2}]$ 之外不存在非平凡的旋转涡斑。此外，他们将 Fraenkel 的结果推广到非恒定涡量，并证明二维欧拉方程的任何具有固定符号、紧支撑且光滑的定常解，在平移意义下都必须是径向对称的（这里，他们的结果也适用于在有界区域内光滑、但在边界处可能发生跳跃的涡量）。他们的结果与 Bedrossian、Coti Zelati 和 Vicol [2] 关于涡旋轴对称化的研究相一致；后者分析了在光滑、径向对称且严格单调递减的涡量分布附近线性化的不可压缩二维欧拉方程。他们证明了无黏阻尼现象，并得出涡量在大时间下弱收敛到某个径向对称剖面。

文献中有若干研究探讨非平凡（非径向）定常解的存在性，这些解并非涡斑。这些研究基于对系统特征轨迹的考察，并与椭圆方程 $\Delta\psi = \omega = F(\psi)$ 有关。在这一背景下，Nadirashvilii [69] 研究了光滑解的流线曲率。Choffrut 和 Sver´ak 在 [19] 中探讨了非退化情形下定常解的局部结构。着眼于椭圆方程，Ru´ız [73] 证明了紧支撑稳态解的一些对称性结果

，推广了文献 [48] 中的工作。最近，G´omez-Serrano、Park 和 Shi[46] 运用微扰论证和 Nash-Moser 方案，构造了一族具有有限能量的非平凡紧支撑定常解。近期，Coti Zelati、Elgindi 和 Widmayer 研究了周期情形下接近 Kolmogorov 型和 Poiseuille 型剪切流的定常解 [22]。Constantin、Drivas 和 Ginsberg 最近在 [21] 中发现了定常流的 Liouville 型柔性与刚性定理。

请注意，前述所有关于 V 态的研究都针对连通涡斑。然而，当人们寻求稳态非连通涡斑时，情况便有所不同，因为分岔方法并不适用。值得注意的是，文献中已有少数几个例子，其中之一由 Lamb 在 [67] 报告：他发现了一个非平凡的相切反向旋转涡对，其定义域内的涡量并非常数，而是由一个与贝塞尔函数相关的光滑函数给出。分岔理论的另一种替代方法是对定常点涡系统进行去奇异化。Marchioro 和 Pulvirenti [68]在另一种背景下引入了这一技术，用点涡系统在弱意义下逼近欧拉方程解。支配点涡模型的方程是一组非线性常微分方程，其中的奇异势刻画了狄拉克质量的演化。这个有限维系统存在许多稳态。例如，两个点涡可以处于稳态：它们要么以恒定角速度旋转，要么以恒定速度平移。Turkington [76]利用变分方法构造了一对同向旋转涡斑。在不同背景下，也有人采用类似方法构造光滑剖面，见 [8, 7, 11, 24, 75]。变分方法似乎无法充分揭示涡斑的拓扑和几何特征。为弥补这一不足，Hmidi 和 Mateu [58] 从轮廓动力学方程出发，在无穷维函数空间中实施了一种专门的去奇异化过程，从而证明了由涡对产生的同向旋转和反向旋转的凸光滑涡斑的存在。他们的方法稳健且灵活，并被用于研究更多构型，例如 Thomson 多边形的去奇异化 [37], K´arm´an 涡街 [36], ，以及嵌套多边形等一般图案 [54]。该方法也成功用于构造非对称涡对 [50]，并为更一般的主动标量方程实现了类似的构造 [58]。

上述长寿命结构的共同特征在于，它们都是通过扰动稳态解构造出来的。一般而言，我们可以将这些解视为从稳态分岔而出的一条或多条局部分支。因此，通过追踪这些分支来探索整体行为是一个极具意义、但相当复杂的问题，由此引出了各种尚未解决的情形与问题。例如，数值实验 [71] 表明，除椭圆外，所有 Burbea 分支最终都会形成一个带有角度为 $\frac{\pi}{2}$.角点的奇异涡斑。最近，Hassainia、Masmoudi 和 Wheeler [52] 通过与 Buffoni 和 Toland 的工作 [5], 相关的全局分岔论证证明，在分支的末端，涡斑的角速度必定会在边界上的某一点处消失，这与角点的形成相符。关于这一主题的第二项成果是 Garc´ía 和 Haziot [38] 对 Hmidi 和 Mateu 在 [58]中发现的同向旋转涡对进行全局分岔研究。他们发现，在曲线末端，涡斑对会发生自交，且角速度会消失。点涡带来的奇异性使问题更加复杂，因此需要对 [5]中的经典全局解析定理进行适当调整。

在过去几年中，关于时间周期涡旋斑块的更多研究已拓展至其他二维主动标量方程，例如广义表面准地转方程或准地转浅水方程。在这些系统中，人们通过将等值线动力学方程与分岔理论或隐函数定理相结合，对稳态斑块进行了研究，参见 [13, 15, 16, 17, 26, 27, 28, 30, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 61, 72]。此外，还按照 Turkington 方法的思路，将变分工具应用于主动标量方程，如 [1, 12, 9, 10, 43, 44, 45] 所示。

最近，利用 KAM 技术和纳什–莫泽尔方案，在兰金涡旋附近时间拟周期解的存在性研究方面取得了一些进展，开辟了新的视角。事实上，Berti、Hassainia 和 Masmoudi 在 [3] 中证实了，对于任意基尔霍夫椭圆，只要其离心率属于一个类康托集，欧拉方程附近就存在这些结构。Hmidi、Hassainia 和 Masmoudi 在 [51] 中对广义 (SQG)$_\alpha$ 方程获得了类似结果，条件是分数阶拉普拉斯算子的指数属于一个大康托集。同一时期，Hmidi 和 Roulley 在 [62] 中探讨了准地转浅水方程中拟周期解的出现。关于边界效应对不变环面出现的影响，也在 [53]中讨论过类似结果。

至于三维情形，利用变分方法已获得许多重要结果，参见例如 [70, 33]。我们还应指出三维准地转系统，它与我们的讨论非常契合，因为最近在 [39, 40] 中已证明，能够从一般旋转体形状分岔出旋转的单连通和双连通体积。Gravilov [42] 以及 Constantin、La 和 Vicol [20], 还讨论了其他与紧支撑稳态解（不一定是斑块）相关的课题，其中他们为三维欧拉方程得到了光滑紧支撑定常解的一些有趣例子。关于跃蛙式涡环及相关主题，亦可参见 [25, 35] 。

本文的主要目标是探讨欧拉方程定常解附近相图的一些方面。由 [48], 我们知道，任何具有固定符号的平稳涡量都必为径向的。因此，一般性问题如下：

定号的定常径向涡旋附近，时间周期解是否依然存在?

由于涡量在其支撑集内并非常数，与涡斑问题相比，这会引出复杂的谱问题。文献中对这一主题的研究较少，目前已知的相关结果也不多。最近，Castro、C´ordoba 和 G´omez-Serrano [16], 取得了首个结果：他们成功地将旋转涡斑仔细地光滑化为涡量非恒定的旋转解。他们工作的关键在于利用涡量的等值集，以克服谱问题退化所带来的若干困难，后文将对此作出解释。第二项相关工作是 Garc´ıa、Hmidi 和 Soler [41] 对单位圆盘 $\mathbb{D}$内支撑于 a 的二次剖面所作的扰动研究： $\omega_0(x) = (A|x|^2 + B)\mathbf{1}_{\mathbb{D}}(x)$。该平衡态与兰金涡旋相去甚远；在此情形下，我们着重指出了与二次剖面参数相关的刚性时间周期解稀缺与丰盛这一新现象。

本文将探讨这一一般问题，并研究以下形式的定常解附近的周期解

$$\omega_0(x) = f_0(|x|)\mathbf{1}_{\mathbb{D}}(x), \tag{1.2}$$

其中， $\mathbb{D}$ 是单位圆盘， f_0 是圆盘内具有定号的单调光滑剖面。在陈述主要结果之前，我们需要先介绍一些内容。按照 [41],的思路，我们将同时用一个非径向函数扰动密度 f_0 ，并通过从圆盘到一般有界单连通区域 D的共形映射 Φ 扰动边界。更确切地说，我们将寻求满足以下形式的刚性周期解,

$$\omega_0 = (f \circ \Phi^{-1})\mathbf{1}_D, \quad \omega(t,x) = \omega_0(e^{-it\Omega}x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

其中，Ω为角速度， $\mathbf{1}_D$ 是光滑单连通定义域 D的示性函数。注意，根据这一形式，该解绕原点匀速旋转。实函数 $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ 表示密度剖面， $\Phi : \mathbb{D} \to D$ 表示共形映射；它们由对定常态 (1.2)中的相应对象进行扰动而得到，即,

$$f = f_0 + g, \quad \Phi = \mathrm{Id} + \phi,$$

其中 g 和 ϕ 在适当的函数空间中足够小。将这一设定代入欧拉方程，可得关于涡量 ω_0 （速度为 v_0）的等价稳态方程

$$(v_0(x) - \Omega x^\perp) \cdot \nabla\omega_0(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.4}$$

其中 $(x_1,x_2)^\perp=(-x_2,x_1)$。接着，假设 f 在 D 的边界上不为零（这一性质在扰动下得以保持），我们便可推出等价系统

$$(v_0(x)-\Omega x^\perp)\cdot\nabla(f\circ\Phi^{-1})(x)=0,\quad \text{in } D, \tag{1.5}$$

$$(v_0(x)-\Omega x^\perp)\cdot\vec{n}(x)=0,\quad \text{on } \partial D, \tag{1.6}$$

其中，$\vec{n}$ 是边界 ∂D的向上单位法向量。我们分别将 (1.5) 和 (1.6) 称为密度方程和边界方程。注意，当 f_0 为常数且 $g=0$时，边界方程与涡斑问题一致。

由于本文从谱研究到函数空间稳定性都需要满足若干约束，因此我们需要对初始剖面 f_0 施加以下关于其正则性和单调性的条件，

$$r\in[0,1]\mapsto f_0(r)=\tilde{f}_0(r^2)\text{ with }\tilde{f}_0\in\mathscr{C}^{2,\beta}([0,1]),\quad \beta\in(0,1). \tag{H1}$$

$$\inf_{r\in(0,1]}\frac{f_0'(r)}{r}>0. \tag{H2}$$

注意，最后一个假设特别意味着 f_0 严格递增。不过，我们也可以通过处理 $-f_0$来研究严格递减的剖面。根据假设为常数的 f_0 的符号，我们将区分两种情形，并可对周期解的产生给出完整结论。情形 $f_0>0$ 和 $f_0<0$ 对应两种不同的情景，这与 [41]中讨论的二次剖面类似。为陈述主要结论，我们需要将 f_0 的相对振幅定义为

$$A[f_0]:=\frac{f_0(1)}{f_0(0)},$$

根据单调性假设，该值大于 1。第 2.3 节将讨论接下来要用到的 Hölder 型函数空间。现在，我们可以陈述本文的主要结果了。

定理 1.1。设 $0<\alpha<\beta<1$ 和 f_0 满足 (H1)–(H2)。

i)（稀缺情形）假设 $\inf_{r\in[0,1]}f_0(r)>0$，存在 $a>0$ 和 $m_1\in\mathbb{N}$，使得

$$m_1\geqslant\frac{1}{10(A[f_0]-1)},$$

使得对任意 $m\in[3,m_1]\cap\mathbb{N}$，存在一条连续曲线 $\xi\in(-a,a)\mapsto(\Omega_\xi,f_\xi,\phi_\xi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{C}^1_{s\overset{\alpha}{m},}(\mathbb{D})\times\mathscr{HC}^2_{,m}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$，使得初始数据

$$\omega_0=(f\circ\Phi^{-1})\mathbf{1}_{\Phi(\mathbb{D})},\quad f=f_0+f_\xi,\quad \Phi=\mathrm{Id}+\phi_\xi,$$

在 $\xi\neq0$时产生欧拉方程的一个非径向 m 重对称解，该解以恒定角速度 Ω_ξ旋转。

ii)（丰盛情形）假设 $\sup_{r\in[0,1]}f_0(r)<0$，则存在 $m_2\in\mathbb{N}$、$a>0$，使得对任意 $m\geqslant m_2$，存在一条连续曲线 $\xi\in(-a,a)\mapsto(\Omega_\xi,f_\xi,\phi_\xi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{C}^1_{s\overset{\alpha}{m},}(\mathbb{D})\times\mathscr{HC}^2_{,m}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$，满足

$$\omega_0=(f\circ\Phi^{-1})\mathbf{1}_{\Phi(\mathbb{D})},\quad f=f_0+f_\xi,\quad \Phi=\mathrm{Id}+\phi_\xi,$$

对于 $\xi\neq0$，生成一个非径向 m 重对称的欧拉方程解，该解以恒定角速度 Ω_ξ旋转。

从这一陈述可以看出，与 f_0. 的符号相关的两种不同情形。当初始剖面非负时，我们处于稀缺情形，只能找到有限条分岔曲线。其数量取决于相对振幅 $A[f_0]\geqslant1$: 当该数值接近 1 时，分岔曲线会越来越多，这意味着剖面变化缓慢。另一方面，对于非正且单调递增的剖面，我们可以得到与大对称性相关联的无穷多个非平凡分岔曲线。

接下来，我们将简要概述定理 1.1 的证明思路。首先，我们通过坐标变换改写系统 (1.5)-(1.6)，然后应用隐函数

定理求解边界方程 (1.6)。只要将 Ω 排除在下述奇异集之外，即可实现这一点

$$\mathcal{S}^m_{\rm sing}=\Big\{\widehat{\Omega}_n:=\int_0^1 sf_0(s)ds-\frac{n+1}{n}\int_0^1 s^{2n+1}f_0(s)ds,\quad \forall n\in m\,\mathbb{N}^\star\cup\{\infty\}\Big\},$$

并且我们将 ϕ 找到为依赖于 $(\Omega\ g)$ 的隐函数，

$$\phi=\mathcal{N}(\Omega,g).$$

其次，我们需要处理密度方程。该方程的缺陷在于，当我们在平衡态处进行线性化时，它在径向方向上会退化。因此，我们失去了分岔技巧所需的 Fredholm 结构。接着，我们按照 [41] 中的方法，通过在求解非线性椭圆方程时施加某种刚性来修改方程 (1.5)。这一方案将在第2.2节中说明。因此，这一步的结果是能够将密度方程重新表述为

$$\widehat{G}(\Omega,g):=G(\Omega,g,\mathcal{N}(\Omega,g))=0, \tag{1.7}$$

其中

$$G(\Omega,g,\phi)(z):=\mathcal{M}(\Omega,f(z))+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\log|\Phi(z)-\Phi(y)|f(y)|\Phi'(y)|^2dA(y)-\frac{1}{2}\Omega|\Phi(z)|^2-\lambda,$$

并且 λ 是一个常数，使得

$$\lambda=\mathcal{M}(\Omega,f_0(r))-\int_r^1\frac{1}{\tau}\int_0^\tau sf_0(s)dsd\tau-\frac{1}{2}\Omega r^2.$$

函数 $\mathcal{M}$ 的作用是确保，对于属于某个适当开区间的任意 Ω，径向情形 $g=0=\phi$ 仍是该模型的一个平凡解（这也意味着 λ 是一个常数）。通过这种方式，我们找到了一个生成 $\mathcal{M}$ 的自然方案，如下所述，

$$\mathcal{M}(\Omega,t)=\int_a^t\frac{ds}{\mu(\Omega,s)},\quad \mu(\Omega,t)=\frac{2(\tilde{f}_0'\circ\tilde{f}_0^{-1})(t)}{\Omega-\frac{1}{2}\int_0^1\tilde{f}_0\big(s\tilde{f}_0^{-1}(t)\big)ds}.$$

注意，将 μ 应用于平凡解后，我们得到

$$\mu(\Omega,f_0(r))=\frac{f_0'(r)}{r\left(\Omega-\int_0^1 sf_0(sr)ds\right)}:=\mu^0_\Omega(r).$$

˜我们指出， $\mu(\Omega\ \cdot)$仅在区间 $[a,b]:=$ 值域（f_0）上有定义，因此需要在该区间之外进行延拓。更多细节见第2.2节。为了在分岔理论中应用 Crandall-Rabinowitz定理 [23, 63] ，并得到方程 (1.7) 的一个非平凡解，需要检验平衡态处线性化算子的相关谱性质。根据第3.1节，对于任意检验函数

$$re^{i\theta}\in\mathbb{D}\mapsto h(re^{i\theta})=\sum_{n\in\mathbb{N}}h_n(r)\cos(n\theta),$$

线性化算子具有如下结构，见 (3.3)，

$$D_g\widehat{G}(\Omega,0)[h](re^{i\theta})=\mathbb{L}^\Omega_0[h_0](r)+\sum_{n\geqslant1}\cos(n\theta)\mathbb{L}^\Omega_n[h_n](r).$$

其中算子 $\mathbb{L}^\Omega_n$ 为积分型。正如我们将在第4.3节看到的，核方程可归结为求解一组一维线性问题。对于 $n=0$,

$$\big(\mathrm{Id}-\sigma_\Omega\mathcal{L}^\Omega_0\big)[h_0](r)=0\quad\text{with}\quad K_0(r,s)=\nu_\Omega(r)\nu_\Omega(s)\left[\ln(\tfrac{1}{r})\mathbf{1}_{[0,r]}(s)+\ln(\tfrac{1}{s})\mathbf{1}_{[r,1]}(s)\right]$$

且对于 $n\geqslant1$,

$$\big(\mathrm{Id}-\sigma_\Omega\mathcal{L}^\Omega_n\big)[h_n](r)=-\sigma_\Omega\frac{\nu_\Omega(r)}{\nu_\Omega(1)}\frac{rG_n(r)}{G_n(1)}\mathcal{L}^\Omega_n(1),n\geqslant1 \tag{1.8}$$

with

$$\mathcal{L}_n^{\Omega}[h](r) = \int_0^1 K_n(r,s)h(s)d\lambda_\Omega(s), \quad d\lambda_\Omega(s) := \frac{s}{\nu_\Omega(s)}ds$$

其中所涉及的核是对称的，其形式为

$$K_n(r,s) = \frac{\nu_\Omega(r)\nu_\Omega(s)}{2n}\left[\left(\frac{r}{s}\right)^n \mathbf{1}_{\{r\leqslant s\leqslant 1\}} + \left(\frac{s}{r}\right)^n \mathbf{1}_{\{0\leqslant s\leqslant r\}}\right].$$

函数 G_n 在 (3.5) 中定义，且 ν_Ω 为正，满足

$$\nu_\Omega(r) := \sigma_\Omega\, \mu_\Omega^0(r) = |\mu_\Omega^0(r)|, \quad \text{with} \quad \sigma_\Omega := \begin{cases} -1, & \Omega \in (-\infty, \kappa_1), \\ 1, & \Omega \in (\kappa_2, +\infty). \end{cases}$$

在这一表述中，我们假设 $\Omega \notin [\kappa_1, \kappa_2]$ ，以保证 μ_Ω^0 在 $[0,1]$, 内部不为零，其中

$$\kappa_1 = \inf_{r\in[0,1]} \int_0^1 s f_0(sr)ds, \quad \kappa_2 = \sup_{r\in[0,1]} \int_0^1 s f_0(sr)ds.$$

由此可知， μ_Ω^0 的符号由 Ω 的位置决定，且为定号。当 $\Omega < \kappa_1$ 时，它为负，这一区间称为散焦区间。然而，当 $\Omega > \kappa_2$时，函数 μ_Ω^0 为正，这一区间称为聚焦区间。这个术语借自薛定谔方程，其合理性在于，多重积分方程的求解与以下奇异斯图姆–刘维尔问题有关，见 (4.53):

$$F''_{n,\Omega} + \frac{2n+1}{r}F'_{n,\Omega} + \mu_\Omega^0 F_{n,\Omega} = 0, \quad F_{n,\Omega}(0) = 1, \quad n \geqslant 1. \tag{1.9}$$

于是，当 $\Omega < \kappa_1$ 时，势函数 μ_Ω^0 具有排斥作用（散焦区间）；当 $\Omega > \kappa_2$. 时，则具有吸引作用（聚焦区间）。此时，我们需要求解这些方程，以确定参数 n和 Ω。对于水平 $n = 0$处的核方程，我们在命题 4.1 中证明，只要 $\Omega \in (-\infty, \kappa_1) \cup ((\kappa_2, \infty)\backslash\mathbb{S})$, 零就是唯一的解，其中集合 $\mathbb{S}$是有限集。散焦情形 ($\sigma_\Omega = -1$) 下的证明与以下优良性质有关：算子 $\mathcal{L}_0^\Omega$：$L^2(d\lambda_\Omega) \to L^2(d\lambda_\Omega)$ 是自伴正定紧算子，因此其全部谱都包含在正区间 $(0,\infty)$ 内。由此，算子 $\mathrm{Id} + \mathcal{L}_0^\Omega$可逆，故其核是平凡的。聚焦情形 ($\sigma_\Omega = 1$) 下的证明则更为棘手微妙。首先，我们将核方程转化为一个斯图姆–刘维尔型二阶微分方程

$$(rF')' + r\nu_\Omega(r)F = 0, \quad \text{with} \quad F(1) = 0.$$

由于零点附近的奇异结构，我们预期 $[0,1]$ 中的光滑解构成一个由 Ω 参数化的一维向量空间，并由一个非平凡元素生成，该元素记为 F_Ω ，并归一化为 $F_\Omega(0) = 1$。因此，我们需要找到集合 $\mathbb{S}$ ，它覆盖所有满足 F_Ω 与边界条件 $F_\Omega(1) = 0$ 相匹配的 $\Omega > \kappa_2$ 。由于这里存在奇异结构，我们无法使用射击法，因此采用另一种优雅的方法，结合 Pr¨ufer 变换与 Kneser 定理 [66] ，利用非振荡现象来解决这个控制问题。

对于 $n \geqslant 1$ 的核方程 (1.8)，由于 r 中存在变系数，其求解更为复杂；相比之下，在涡斑问题中，算子只是在角变量上由傅里叶乘子给出，并且在 r 中为常数。第一步是从解析上刻画与非平凡核相对应的 Ω 集合，从而得到我们称为色散方程的方程。这将在第 4.4 节中借助由 (1.9) 定义的生成元 $F_{n,\ \Omega}$ 来完成。我们在那里发现（见引理 4.3），色散方程具有如下形式

$$\zeta_n(\Omega) = 0, \tag{1.10}$$

其中

$$\zeta_n(\Omega) = F_{n,\Omega}(1)\left(\Omega - \frac{n}{n+1}\int_0^1 s f_0(s)ds\right) + \int_0^1 F_{n,\Omega}(s)s^{2n+1}\big(f_0(s) - 2\Omega\big)ds,$$

ζ_n 的结构与剖面 f_0 有关，而探究这一高度非线性函数在 Ω 中的零点并非易事。注意，生成元 $F_{n,\Omega}$ 对 Ω 的依赖关系并未显式给出。这与 [41], 中分析的二次情形截然不同，在该情形下，$F_{n,}$ Ω通过高斯超几何函数得到了显式计算。在后一种情形中，对 ζ 零点的分析考虑了 $F_{n.\Omega}$.的若干特定代数性质和解析性质。而在当前情形下，应通过探究$F_{n,\Omega}$附近的定性性质来寻找显式形式的替代方案，见第4.4.1节。随后，方程 (1.10) 的求解取决于 Ω 所取的区域以及 f_0的符号。实际上，当 $f_0 > 0$ （稀缺情形）时，我们发现色散方程在 $(-\infty, \kappa_1)$ 中至多有有限个解，其数量取决于 f_0的相对振幅。然而，当 $f_0 < 0$ （丰盛情形）时，我们发现 (κ_2, ∞) 中存在可数族解。事实上，这些解位于先前介绍的奇异集 $\mathcal{S}^m_{\text{sing}}$ 附近。借助下图，可以更清楚地理解稀缺与丰盛之间过渡区间的直观含义。当 $f_0 > 0$时，奇异集中的元素构成一个递增数列，并收敛于 κ_{2}。因此，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$集合 $\{n \geqslant 1, \Omega_n \notin [\kappa_1, \kappa_2]\}$ 是有限的，且其对应值 Ω_n 必然位于 κ_1. 之下。在这些点中的大多数附近，我们都能找到色散方程的解。对于 $f_0 < 0$的情形，奇异数列变为递减，并位于区域 $(\kappa_2, \infty)\widehat{\ }$中；我们证明，对于大对称性，每个元素 Ω_n 都至少对应一个方程 (1.10) 的解 Ω_n。

另一个难点源于 Crandall-Rabinowitz 定理中的横截条件，在我们的情形下，这一条件并非显而易见。我们将在第 5 节讨论这一问题。我们的目标是利用核结构将其转化为解析形式，参见命题 4.6；同时，将值域刻画为某个线性形式的核，参见命题 5.1。随后，通过进行精细的估计，我们得以在两种不同的构型 $f_0 > 0$ 和 $f_0 < 0$ 下验证横截性。

本文安排如下。第 2 节回顾二维欧拉方程旋转解的表述以及密度方程 (1.7) 的推导，并介绍贯穿全文所用的函数空间。接着，在第 3 节中，$\widehat{\ }$我们利用傅里叶展开，计算 G 在平凡解 $(\Omega, 0)$ 附近的线性算子。随后，我们探究其 Fredholm 结构。第 4 节将重点研究核。首先，我们利用色散关系刻画核，随后针对不同情形 $f_0 > 0$ 和 $f_0 < 0$求解。该节最后给出核生成元并讨论其正则性。第 5 节致力于证明应用 Crandall-Rabinowitz 定理所需的横截条件。最后，在第 6 节中，我们汇总前面的分析，以证明定理 1.1。

2. Rigid time periodic solutions

本节将仔细地重新表述支配二维欧拉方程旋转解的方程。为准确说明这一术语，给定初始数据 ω_0 ，若 ω 是系统 (1.1) 的刚性时间周期解，或等价地（相差一个空间平移）是角速度为 $\Omega \in \mathbb{R}$ 的旋转解，则称之为

$$\omega(t, x) = \omega_0(e^{-i\Omega t}x).$$

然后，将这一 Ansatz 代入 (1.1)，得到关于剖面 ω_0的稳态方程

$$(v_0(x) - \Omega x^{\perp}) \cdot \nabla \omega_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$

其中 $(x_1, x_2)^{\perp} = (-x_2, x_1)$。现在的目标是从这一一般形式推导出与局域旋转解相关的方程。在这种情况下， $\omega_0(x) = \omega_0(x)\mathbf{1}_D$ 对于某个光滑有界区域 D。注意，我们将定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的涡量 ω_0 与其密度等同，后者仍记为 ω_0 ，且仅定义在闭集 $\overline{D}$上。我们假设密度函数在 $\overline{D}$中光滑。于是，通过直接推导，方程 (2.1) 可在弱意义下写成以下两个耦合方程

$$(v_0(x) - \Omega x^{\perp}) \cdot \nabla \omega_0(x) = 0, \quad x \in D, \tag{2.2}$$

$$\omega_0(x)\big[(v_0(x)-\Omega\, x^{\perp})\cdot n(x)\big]=0,\quad x\in\partial D, \tag{2.3}$$

其中 n是 ∂D的法向量。系统 (2.2)-(2.3) 的一类广义解由径向函数给出，这些函数对应于 $D=\mathbb{D}$ 单位圆盘，且密度 ω_0 是径向光滑函数。实际上，任何具有以下形式的函数

$$\omega_0^{\mathrm{trivial}}(x)=f_0(|x|)\mathbf{1}_{\mathbb{D}}, \tag{2.4}$$

其中 f_0 是一个光滑函数，对于任意给定的 Ω，都是方程 (2.2)–(2.3) 的解。 $\in\mathbb{R}$. 在 (2.4) 中，密度 f_0 是一个一般的径向函数，我们希望对其进行扰动。按照 [41], 中的方法，我们计划通过适当扰动平凡解 (2.4)，构造上述系统的非平凡解。为此，我们使用共形映射 $\Phi:\mathbb{D}\to D$ ，并寻找如下形式的旋转解

$$\omega_0=(f\circ\Phi^{-1})\mathbf{1}_D, \tag{2.5}$$

其中 $f=f_0+g$ 和 $g\colon\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ 在适当的范数下足够小。为避免边界方程 (2.3) 退化，我们必须假设 $f_0(1)\neq 0$ ，且对于 f 这一条件仍然成立。由于定义域 D 是对 $\mathbb{D}$ 的一个小的光滑扰动，因此只需通过共形映射施加如下条件即可将其编码为

$$\Phi=\mathrm{Id}+\phi,$$

其中 ϕ 在强拓扑意义下足够小。下文中，我们将分别把 (2.2) 或 (2.3) 称为密度方程或边界方程。

2.1. 边界方程。按照 [41, 第 2], 节，将 (2.5) 代入 (2.3)，并使用毕奥-萨伐尔定律、变量替换以及复数记号，可得到关于新未知量 (g,ϕ) 的边界方程,

$$F(\Omega,g,\phi)(w)=0,\quad w\in\mathbb{T}, \tag{2.6}$$

其中非线性泛函 F 定义为

$$F(\Omega,g,\phi)(w):=\mathrm{Im}\left[\left(\Omega\overline{\Phi(w)}-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{f(y)}{\Phi(w)-\Phi(y)}|\Phi'(y)|^2dA(y)\right)\Phi'(w)w\right].$$

根据 [41, 命题 B.5], , 容易验证，对于任意 $\Omega\in\mathbb{R}$，都有 $F(\Omega,0,0)=0$，这与稳态解 (2.4) 相符。我们指出，取 $g\equiv 0$ 和$f_0\equiv 1$时，上述边界方程便化为 [6]中提出、并在后来从多个方向得到深入研究的涡斑问题 [3, 13, 15, 16, 17, 26, 27, 28, 30, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 61, 62, 72], 及其中的参考文献。

2.2. 密度方程的变换。正如我们在 [41], 的引言中所讨论的，密度方程以 (2.3) 的形式呈现时存在一些棘手的问题，使得难以应用分岔工具。首先，这些困难与如下事实有关：任意径向扰动仍然是一个解，因此会使线性化算子的核变得很大。其次，平衡态处的线性化算子不是弗雷德霍姆型。更确切地说，注意到密度方程 (2.2) 可以写成

$$H(\Omega,\omega_0)(re^{i\theta}):=\left(\frac{v_\theta^0}{r}-\Omega\right)\partial_\theta\omega_0+v_r^0\partial_r\omega_0=0,$$

其中我们采用分解 $v_0(re^{i\theta})=v_\theta^0(r,\theta)x^{\perp}+v_r^0(r,\theta)x$ 和 $x=re^{i\theta}$。固定 $D=\mathbb{D}$ 后，问题便归结为寻找某个非径向密度 g ，使得

$$H(\Omega,f_0+g)\equiv 0.$$

然而，对于任意径向函数

$$H(\Omega,f_0+g_{\mathrm{radial}})\equiv 0,$$

，都有 g_{radial}。这意味着任意径向函数都属于D_gH(Ω,0)的核，因此其核是无限维的。此外，平凡解附近的线性化算子具有如下形式

$$D_gH(\Omega,0)h(re^{i\theta})=\left(\frac{v_\theta^0}{r}-\Omega\right)\partial_\theta h_0+K[h](r,\theta)f_0'(r),$$

其中 K 是一个紧积分算子。因此，该算子的主导输运部分仅依赖于角向导数 ∂_θ，这与非线性算子 H 形成对比，后者由两个导数共同构成。这意味着，采用用于稳定非线性泛函的函数空间时，线性化算子并非弗雷德霍姆型。 [16, 41]，对这些问题进行了分析，作者通过不同方式施加某些刚性条件，避免使用公式 (2.3)。在第一项工作 [16]，中，作者利用等值集重构，通过光滑剖面实现涡片的去奇异化。然而，在 [41] 中，作者采用了不同的方法：他们注意到密度沿相对流函数的等值集保持常数，并据此重新表述密度方程。请注意，在 [41] 中，作者采用了径向二次剖面 f_0 ，因为与一般情形相比，线性算子的谱分析在这一特殊情形下更易处理。

在本文中，为了从方程 (2.3) 中筛选出径向解，我们采用与 [41,第 4] 节相同的策略。

实际上，取任意标量函数 μ 并施加如下结构

$$\nabla(f\circ\Phi^{-1})(x)=\mu(\Omega,(f\circ\Phi^{-1})(x))(v_0(x)-\Omega x^\perp)^\perp, \tag{2.7}$$

由 (2.5) 可知，方程 (2.2) 自动成立。我们强调，这只是 (2.2) 成立的一个充分条件。由于 μ 是任意的，因此需要将其固定，使得对于某些非平凡子集 $\mathbb{R}$中的任意 Ω，径向剖面 f_0 都是 (2.7) 的一个解。根据 [41, 第 4 节，1], 通过显式计算可知，这一假设等价于约束条件

$$\mu(\Omega,f_0(r))=\frac{f_0'(r)}{r\left(\Omega-\int_0^1 sf_0(sr)ds\right)},\quad r\in(0,1]. \tag{2.8}$$

由 (H1) 可得

$$\mu(\Omega,f_0(r))=\mu(\Omega,\tilde{f}_0(r^2))=\frac{2\tilde{f}_0'(r^2)}{\Omega-\frac{1}{2}\int_0^1\tilde{f}_0(sr^2)ds}, \tag{2.9}$$

或者等价地

$$\mu(\Omega,\tilde{f}_0(r))=\frac{2\tilde{f}_0'(r)}{\Omega-\frac{1}{2}\int_0^1\tilde{f}_0(sr)ds},\quad r\in(0,1].$$

˜这对于严格单调剖面 f_0（如 (H2) 中所假设）是有意义的，并且当 Ω $\notin[\kappa_1,\kappa_2]$满足

$$\kappa_1:=\inf_{r\in[0,1]}\int_0^1 sf_0(rs)ds=\frac{1}{2}f_0(0), \tag{2.10}$$

$$\kappa_2:=\sup_{r\in[0,1]}\int_0^1 sf_0(rs)ds=\int_0^1 sf_0(s)ds. \tag{2.11}$$

我们注意到，由于 Ω $\notin[\kappa_1,\kappa_2]$ 以及单调性假设 (H2)，函数μ(Ω f_0)有定义且保持定号。事实上，当 Ω $>\kappa_2$ 时它为正，当 $\Omega<\kappa_1$. 时它为负。因此，我们应得到

$$\mu(\Omega,t)=\frac{2(\tilde{f}_0'\circ\tilde{f}_0^{-1})(t)}{\left(\Omega-\frac{1}{2}\int_0^1\tilde{f}_0(s\tilde{f}_0^{-1}(t))ds\right)}, \tag{2.12}$$

~ ~对于任意 $t \in$ 值域(f_0)。由 (H1)-(H2) 可知， f_0 的值域是一个区间 $[a,b]$。此外，由复合律可知， $\mu(\Omega\ \cdot)$属于,$^{\alpha}([a,b])$类。现在，我们将 (2.12) 右端在 $[a,b]$ 的一个小邻域 $[a-\epsilon, b+\epsilon]$ 内任意延拓为 ,$^{\alpha}([a-\epsilon,b+\epsilon])$ 类函数，从而构造出 $\mu(\Omega\ \cdot)$。这样，对于任意 $z \in \mathbb{D}$，我们可以定义 $\mu(\Omega\ f(z))$，且它是 f_0的一个小扰动f 。现在，我们定义

$$\mathcal{M}(\Omega, t) := \int_a^t \frac{ds}{\mu(\Omega, s)}, \quad \forall t \in [a-\epsilon, b+\epsilon] \tag{2.13}$$

并对 (2.7) 积分，得到

$$G(\Omega, g, \phi)(z) := \mathcal{M}(\Omega, f(z)) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \log|\Phi(z)-\Phi(y)| f(y)|\Phi'(y)|^2 dA(y) - \frac{1}{2}\Omega|\Phi(z)|^2 - \lambda = 0, \tag{2.14}$$

对于任意 $z \in \mathbb{D}$，且其中

$$\lambda := \mathcal{M}(\Omega, f_0(r)) - \int_r^1 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau s f_0(s) ds d\tau - \frac{1}{2}\Omega r^2.$$

需要指出的是，利用 μ 与 f_0 之间的关系，并结合 [41, 命题 B.5] 中给出的估计，可知 λ 与 r 无关。根据 λ 的选取，我们得到 $G(\Omega,0,0) \equiv 0$。关于 G 的表达式，更多细节请参见 [41, 第 4 节1]。本节最后给出以下结果，讨论函数 $\mathcal{M}(\Omega\ \cdot)$ 的正则性，后文将用到这一结果。

引理 2.1. 对于任意小的 $\epsilon > 0$，存在足够小的 $\delta > 0$ ，使得若 $\Omega \notin [\kappa_1-\delta, \kappa_2+\delta]$，则函数 $t \in [a-\epsilon, b+\epsilon] \mapsto \mathcal{M}(\Omega\ t)$ 在 $\mathscr{C}^{2,\alpha}$ 上属于类，且

$$\forall t \in [a,b], \quad \partial_t \mathcal{M}(\Omega, t) = \frac{\Omega - \frac{1}{2}\int_0^1 \tilde{f}_0(s\tilde{f}_0^{-1}(t))ds}{2(\tilde{f}_0' \circ \tilde{f}_0^{-1})(t)}.$$

证明。回到 (2.13)，我们看到 $\mathcal{M}(\Omega\ \cdot)$ 可微，且

$$\partial_t \mathcal{M}(\Omega, t) = \frac{1}{\mu(\Omega, t)}, \forall t \in [a-\epsilon, b+\epsilon].$$

要得到引理中给出的公式，只需使用 (2.12)。至于正则性，我们从前面的讨论中已经看到，$t \in [a-\epsilon, b+\epsilon] \mapsto \mu(\Omega\ t)$ 属于 $\mathscr{C}^{1}$类, $^{\alpha}$。由于该函数不为零，根据经典复合律可推知 $t \in [a-\epsilon, b+\epsilon] \mapsto \mu^{-1}(\Omega\ t)$ 属于 $\mathscr{C}^{1}$类, $^{\alpha}$。由此可知， $\mathcal{M}(\Omega\ \cdot)$ 属于 $\mathscr{C}^{2}$类, $^{\alpha}([a-\epsilon, b+\epsilon])$. □

2.3. 函数空间。这里，我们旨在确定用于进行分岔论证的函数空间。首先，对于 $\alpha \in (0,1)$，我们用 $\mathscr{C}^{0,\alpha}(\mathbb{D})$ 表示满足以下条件的连续函数集合

$$\|f\|_{\mathscr{C}^{0,\alpha}(\mathbb{D})} := \|f\|_{L^\infty(\mathbb{D})} + \sup_{z_1 \neq z_2 \in \mathbb{D}} \frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha} < \infty.$$

其次，对于 $k \in \mathbb{N}$空间 $\mathscr{C}^{k,\alpha}(\mathbb{D})$，它表示偏 k 阶导数属于 $\mathscr{C}^{0,\alpha}(\mathbb{D})$ 的 $\mathscr{C}^k$ 函数集合。需要指出的是，对于 $\alpha \in (0,1)$， $\mathscr{C}^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$ 与 $\mathscr{C}^{k,\alpha}(\mathbb{D})$ 重合；具体而言，后一个空间中的任意元素都存在唯一的连续延拓至边界，且该延拓属于 $\mathscr{C}^{k,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$。类似地，我们在单位圆 $\mathbb{T}$ 上定义 Hölder 空间 $\mathscr{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T})$。我们再为这些空间补充额外的对称结构。考虑$m \in \mathbb{N}$ 并定义

$$\mathscr{C}^{k,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}) := \left\{ g : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^{k,\alpha}(\mathbb{D}), \quad g(re^{i\theta}) = \sum_{n \in m\mathbb{N}} g_n(r)\cos(n\theta),\ g_n \in \mathbb{R},\ \forall\, r \in [0,1], \theta \in \mathbb{R} \right\} \tag{2.15}$$

and

$$\mathscr{C}^{k,\alpha}_{a,m}(\mathbb{T}) := \left\{ \rho : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}), \quad \rho(e^{i\theta}) = \sum_{n \in m\mathbb{N}^\star} \rho_n \sin(n\theta),\ \rho_n \in \mathbb{R},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.16}$$

这些空间配备通常的范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^{k,\alpha}}$。容易验证，若函数 $g \in \mathscr{C}^{k}_{,s\,m,}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$ 和 $\rho \in \mathscr{C}^{k}_{,a\,m,}{}^{\alpha}(\mathbb{T})$，则它们满足以下性质

$$g(\overline{z}) = g(z), \quad \rho(\overline{w}) = -\rho(w), \quad \forall z \in \mathbb{D}, \forall\, w \in \mathbb{T}\,. \tag{2.17}$$

此外，参数 m 表示解的 m 重对称性。需要指出的是，空间 $\mathscr{C}^{k}_{,\,s\,m,}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$ 将包含初始径向密度的扰动。关于 g 的条件意味着该扰动关于实轴反射不变。

第二类函数空间是 $\mathscr{HC}^{k}_{,\,m}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$，它由定义域 $\mathbb{D}$ 中属于 $\mathscr{C}^{k,\,\alpha}(\mathbb{D})$ 的全纯函数 ϕ 构成，并满足

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0 \quad \text{and} \quad \overline{\phi(z)} = \phi(\overline{z}), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

具有这些性质时，函数 ϕ 有如下泰勒展开

$$\phi(z) = z \sum_{n \in m\,\mathbb{N}^\star} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{R}\,. \tag{2.18}$$

接下来，我们定义

$$\mathscr{HC}^{k,\alpha}_{m}(\mathbb{T}) := \Big\{ \phi \in \mathscr{C}^{k,\alpha}(\mathbb{T}), \quad \phi(w) = w \sum_{n \in m\,\mathbb{N}^\star} a_n w^n,\, a_n \in \mathbb{R},\, \forall w \in \mathbb{T} \Big\}.$$

需要注意的是，我们将为旋转解构造的扰动定义域由共形映射 $\Phi = \mathrm{Id} + \phi$ 参数化，其形式为

$$\Phi(z) = z + z \sum_{n \in m\,\mathbb{N}^\star} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{R},$$

因此，通过施加这一结构，我们可以消除伸缩、旋转和平移不变性，从而在后续减小线性化算子的核的大小。最后，我们定义这些球

$$\begin{cases} B_{\mathscr{C}^{k,\alpha}_{s,m}}(g_0, \varepsilon) = & \Big\{ g \in \mathscr{C}^{k,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}) \quad \text{s.t.} \quad \|g - g_0\|_{k,\alpha} < \varepsilon \Big\}, \\ B_{\mathscr{HC}^{k,\alpha}_{m}}(\phi_0, \varepsilon) = & \Big\{ \phi \in \mathscr{HC}^{k,\alpha}_{m}(\mathbb{D}) \quad \text{s.t.} \quad \|\phi - \phi_0\|_{k,\alpha} < \varepsilon \Big\}, \end{cases} \tag{2.19}$$

对于 $\varepsilon > 0$, $k, m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, $g_0 \in \mathscr{C}^{k}_{,s\,m,}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$ 以及 $\phi_0 \in \mathscr{C}^{k}_{,}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$。一个经典事实是，如果 $\phi \in B_{\mathscr{HC}^{k,m}}{}^{\alpha}(0,\varepsilon)$ 且 $\varepsilon \in (0,1)$，那么 $\Phi = \mathrm{Id} + \phi$ 是一个双 Lipschitz 函数。

此外，从现在起，依据 (H1)，在全文中我们都假设 α 对函数空间和 $\beta > \alpha$ 是固定的。

2.4. 边界方程的求解及其结果。我们已经在前面的章节中看到，方程 (2.2)-(2.3) 可以转化为形式 (2.6)-(2.14)。因此，为了解出新的耦合系统，我们首先利用隐函数定理求解边界方程 (2.6)，从而得到边界扰动 ϕ 是 $(\Omega\ g)$ 上的一个光滑泛函。随后，我们将回到密度方程 (2.14)，并代入 ϕ 的这种依赖关系，从而得到一个仅控制变量 $(\Omega\ g)$ 的新方程。

现在，我们将重点求解边界方程 (2.6)，其中 Ω 和 g 视为参数。沿用 [41, 命题 3.1], 的相同证明，我们推得：对于满足 (H1) 的给定剖面 f_0，任意给定的 $m \in \mathbb{N}^\star$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$，我们可以找到如下泛函

$$F : \mathbb{R} \times B_{\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}}(0,\varepsilon) \times B_{\mathscr{HC}^{2,\alpha}_{m}}(0,\varepsilon) \to \mathscr{C}^{1,\alpha}_{a,m}(\mathbb{T}),$$

定义良好且属于 $\mathscr{C}^1$ 类。此外，根据 [41, 命题 3.3], ，偏盖托导数 $D_\phi F(\Omega, 0, 0)$ 的形式为

$$D_\phi F(\Omega, 0, 0)[k](w) = \sum_{n \in m\,\mathbb{N}^\star} n\, a_n \left\{ \Omega - \int_0^1 s f_0(s) ds + \frac{n+1}{n} \int_0^1 s^{2n+1} f_0(s) ds \right\} \sin(n\theta),$$

其中 $k(z) = \sum a_n z^{n+1}$，且 $a_n \in \mathbb{R}$. 引入以下奇异集$n\in m\,\mathbb{N}^\star$

$$\mathcal{S}^m_{\text{sing}} := \left\{ \widehat{\Omega}_n := \int_0^1 s f_0(s)ds - \frac{n+1}{n}\int_0^1 s^{2n+1} f_0(s)ds, \quad \forall n \in m\,\mathbb{N}^\star \cup \{\infty\} \right\}, \tag{2.20}$$

这对应于部分线性化算子 $D_\phi F(\Omega, 0, 0)$ 不是单射的点 Ω 所在的位置。因此，利用 [41, 命题 3.3]，当 $\Omega \notin \mathcal{S}^m_{\text{sing}}$时，我们可以在局部对非线性边界方程的零点进行参数化。更准确地说，我们有以下结果。

命题 2.1. 设 $m \geqslant 1$, f_0 满足 (H1)，且 I 是一个满足 $\overline{I} \subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}^m_{\text{sing}}$的开区间。则存在 $\varepsilon > 0$ 和一个 $\mathscr{C}^1$ 函数

$$\mathcal{N} : I \times B_{\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}}(0,\varepsilon) \longrightarrow B_{\mathscr{H}\mathscr{C}^{2,\alpha}_m}(0,\varepsilon),$$

具有以下性质，

$$F(\Omega, g, \phi) = 0 \Longleftrightarrow \phi = \mathcal{N}(\Omega, g),$$

f或任意 $(\Omega\ g, \phi) \in I \times B_{\mathscr{C}^{1,\ s\ m,}}(0,\varepsilon) \times B_{\mathscr{H}\mathscr{C}^{2,\ m}{}^{\alpha}}(0,\varepsilon)$。此外，我们得到恒等式

$$D_g\mathcal{N}(\Omega, 0)[h](z) = z \sum_{n\in m\,\mathbb{N}^\star} A_n[h_n] z^n,$$

对于任意 $h \in \mathscr{C}^{1,\ s\ m,}(\mathbb{D})$，其中 $h(re^{i\theta}) = \sum h_n(r)\cos(n\theta)$，
且

$$n\in m\,\mathbb{N}$$

$$A_n[h_n] := \frac{\displaystyle\int_0^1 s^{n+1} h_n(s)ds}{2n\big(\widehat{\Omega}_n - \Omega\big)}, \tag{2.21}$$

其中 Ω_n 在（2.20）中定义。此外，我们有

$$\|\mathcal{N}(\Omega, 0)[h]\|_{\mathscr{H}\mathscr{C}^{2,\alpha}_m(\mathbb{D})} \leq C\|h\|_{\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D})}. \tag{2.22}$$

下一步是回到密度方程（2.14），并定义

$$\widehat{G}(\Omega, g) := G(\Omega, g, \mathcal{N}(\Omega, g)), \tag{2.23}$$

其中，$\mathcal{N}$ 由命题 2.1 定义。因此，主要目的是寻找泛函 G的非平凡根，事实证明这更加微妙，并且需要使用分岔工具。在接下来的命题中，我们讨论 G的正则性。

命题 2.2. 设 $m \geqslant 1$、f_0 满足（H1）-（H2），其中 $\beta > \alpha$，且 I 为满足$\overline{I} \subset \mathbb{R} \setminus (\mathcal{S}^m_{\text{sing}} \cup [\kappa_1, \kappa_2])$ 的开区间。则存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\widehat{G} : I \times B_{\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D})}(0,\varepsilon) \to \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}),$$

该式定义良好且属于 $\mathscr{C}^1$类。回顾一下，奇异集 $\mathcal{S}^m_{\text{sing}}$、$\kappa_1$ 和 κ_2 分别在（2.20）、（2.10）和（2.11）中定义。

证明。注意，就正则性而言，[41, 第 4 节2] 中研究的二次剖面的受限情形与此处讨论的一般单调剖面之间的新密度方程（2.23）的唯一差异在于 G的第一项，即

$$\mathcal{M}\big(\Omega, f(z)\big) = \mathcal{M}\big(\Omega, f_0(z) + g(z)\big).$$

根据引理 2.1，在假设 (H1)-(H2) 下，我们得到 $t \in [a-\epsilon, b+\epsilon] \mapsto \mathcal{M}(\Omega\ t)$ 在 $\mathscr{C}^{2,\ \alpha}$ 上属于某个类，特别是属于 $\mathscr{C}^2$ 类。因此，取 g 在 $\mathscr{C}^{1,\ s\ m,}(\mathbb{D})$ 中足够小，

并利用复合规则，我们推得 get that $z \mapsto \mathcal{M}\big(\Omega\ f_0(z) + g(z)\big) \in \mathscr{C}^{1,\ m^{\alpha}}(\mathbb{D})$。此外，关于 g 的 Fréchet 导数，结合 (2.13) 可写为

$$\partial_g \mathcal{M}\big(\Omega, f_0+g\big)[h](z) = \frac{h(z)}{\mu\big(\Omega, f_0(z)+g(z)\big)},$$

其中 $g \in \mathscr{C}^{1,s\ \alpha}_{m,}(\mathbb{D})$ 足够小，且 $h \in \mathscr{C}^{1,s\ \alpha}_{m,}(\mathbb{D})$。注意，由经典的复合与乘积法则可推知 $\partial_g \mathcal{M}\big(\Omega\ f_0+g\big)[h] \in \mathscr{C}^{1,s\ \alpha}_{m,}(\mathbb{D})$。现在讨论微分 $g \mapsto \partial_g \mathcal{M}\big(\Omega\ f_0+g\big)$ 的连续性。通过直接计算和乘积法则，对于$g_1, g_2 \in \mathscr{C}^{1,s\ \alpha}(\mathbb{D})$，并且在其足够小时，我们得到

$$\big\|\partial_g \mathcal{M}\big(\Omega, f_0+g_1\big)[h] - \partial_g \mathcal{M}\big(\Omega, f_0+g_2\big)[h]\big\|_{\mathscr{C}^{1,\alpha}(\mathbb{D})} \lesssim \|h\|_{\mathscr{C}^{1,\alpha}(\mathbb{D})} \big\|\tfrac{1}{\mu(\Omega, f_0+g_1)} - \tfrac{1}{\mu(\Omega, f_0+g_2)}\big\|_{\mathscr{C}^{1,\alpha}(\mathbb{D})}.$$

记 $\widehat{\mu}(t) = \frac{1}{\mu(\Omega,t)}$，则 $\widehat{\mu} \in \mathscr{C}^{1,\beta}([a-\epsilon, b+\epsilon])$。随后，直接计算可得

$$\begin{aligned}
\|\partial_x\big(\widehat{\mu}(f_0+g_1) - \widehat{\mu}(f_0+g_2)\big)\|_{\mathscr{C}^{\alpha}(\mathbb{D})} &\leqslant \|\widehat{\mu}'(f_0+g_1) - \widehat{\mu}'(f_0+g_2)\big)\|_{\mathscr{C}^{\alpha}(\mathbb{D})} \|f_0+g_1\|_{\mathscr{C}^{1,\alpha}(\mathbb{D})} \\
&\quad + \|\widehat{\mu}'(f_0+g_2)\|_{\mathscr{C}^{\alpha}(\mathbb{D})} \|g_1-g_2\|_{\mathscr{C}^{1,\alpha}(\mathbb{D})} \\
&\lesssim \|\widehat{\mu}'(f_0+g_1) - \widehat{\mu}'(f_0+g_2)\big)\|_{\mathscr{C}^{\alpha}(\mathbb{D})} + \|g_1-g_2\|_{\mathscr{C}^{1,\alpha}(\mathbb{D})}.
\end{aligned}$$

由插值不等式可推得

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\mu}'(f_0+g_1) - \widehat{\mu}'(f_0+g_2)\|_{\mathscr{C}^{\alpha}(\mathbb{D})} &\lesssim \|\widehat{\mu}'(f_0+g_1) - \widehat{\mu}'(f_0+g_2)\|_{L^{\infty}(\mathbb{D})}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} \\
&\quad \times \Big(\|\widehat{\mu}'(f_0+g_1)\|_{\mathscr{C}^{\beta}(\mathbb{D})}^{\frac{\alpha}{\beta}} + \|\widehat{\mu}'(f_0+g_2)\|_{\mathscr{C}^{\beta}(\mathbb{D})}^{\frac{\alpha}{\beta}}\Big) \\
&\lesssim \|\widehat{\mu}'(f_0+g_1) - \widehat{\mu}'(f_0+g_2)\|_{L^{\infty}(\mathbb{D})}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}.
\end{aligned}$$

利用 H¨older 范数的定义可得

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\mu}'(f_0+g_1) - \widehat{\mu}'(f_0+g_2)\|_{L^{\infty}(\mathbb{D})} &\lesssim \|\widehat{\mu}'\|_{\mathscr{C}^{\beta}(\mathbb{D})} \|g_1-g_2\|_{L^{\infty}(\mathbb{D})}^{\beta} \\
&\lesssim \|\widehat{\mu}'\|_{\mathscr{C}^{\beta}(\mathbb{D})} \|g_1-g_2\|_{\mathscr{C}^{1,\alpha}(\mathbb{D})}^{\beta}.
\end{aligned}$$

因此，映射 $g \in \mathscr{C}^{1,s\ \alpha}(\mathbb{D}) \mapsto \partial_g \mathcal{M}\big(\Omega\ f_0+g\big)$ 连续。由此可得，$g \in B_{\mathscr{C}^{1,s\ \alpha}_{m,}(\mathbb{D})}(0,\varepsilon) \mapsto \mathcal{M}\big(\Omega\ f_0+g\big) \in \mathscr{C}^{1,s\ \alpha}_{m,}(\mathbb{D})$ 属于 C^1. 类。这就完成了所需结果的证明。□

由将 μ 选为 (2.8)，我们得到

$$\widehat{G}(\Omega, 0) = 0, \quad \forall \Omega \notin [\kappa_1, \kappa_2].$$

因此，定理 1.1 的证明归结为求非线性泛函G的非平凡根。我们采用的方法基于分岔理论中的经典 Crandall-Rabinowitz定理，其陈述见 [23, 63]。为了应用该定理，我们需要研究 $D_g G(\Omega_0, 0)$ 在某些适当取值 Ω_0下的谱性质。特别是，我们应证明 $D_g G(\Omega_0, 0)$ 是一个零指标的 Fredholm算子，且其核为一维，同时满足所谓的横截条件。下文的主要任务是检验线性算子 $D_g G(\Omega_0, 0)$ 的谱性质，以便在第 6 节应用 Crandall-Rabinowitz定理。

3. General structure of the linearized operator

本节中，我们计划计算由 (2.23) 定义的泛函 G 在平凡解 (Ω,0) 处的 Gˆateaux 导数。我们将证明该算子是零指标 Fredholm 算子，因为它可以表示为一个同构的紧扰动。随后，我们将利用傅里叶级数展开给出线性算子 $D_g G(\Omega,0)$ 的表达式。我们特别证明，该算子可以通过一列由变系数构成的一维算子来描述。这将有助于我们在第 4 节开展核的研究，而这项研究颇为棘手且十分复杂。

3.1. 傅里叶展开。按照与 [41] 中相同的计算过程，可以直接求出泛函$\curlywedge G$ 在平凡解 (Ω,0) 处的 Gˆateaux 导数。然后，根据 (2.13) 以及在 [41, 第 5 节中进行的计算，1] 我们得到

$$\begin{aligned} D_g\widehat{G}(\Omega,0)[h](z) =&\frac{h(z)}{\mu(\Omega,f_0(r))}+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\log|z-y|h(y)dA(y)-\Omega\mathrm{Re}[\overline{z}k(z)]\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\mathrm{Re}\left[\frac{k(z)-k(y)}{z-y}\right]f_0(y)dA(y)\\ &+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\log|z-y|f_0(y)\mathrm{Re}[k'(y)]dA(y), \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中， μ 由相容条件 (2.8) 给出，而 $k(z) = D_g\mathcal{N}(\Omega, 0)[h]$ 的详细定义见命题 2.1。从现在起，我们将研究该线性算子，并记

$$\mu_\Omega^0(r) := \mu(\Omega, f_0(r)). \tag{3.2}$$

接下来，我们将利用傅里叶展开给出线性化算子的更明确形式。给定某个 $h \in \mathscr{C}^{k,\ s\ \alpha}(\mathbb{D})$，其中 $s \in \mathbb{R}$

$$re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mapsto h(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n(r)\cos(n\theta),$$

然后，结合 (3.1) 和 [41, 命题 B.5] ，我们得到

$$D_g\widehat{G}(\Omega,0)[h](re^{i\theta}) =\mathbb{L}_0^\Omega[h_0](r)+\sum_{n\geqslant 1}\cos(n\theta)\mathbb{L}_n^\Omega[h_n](r). \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned} \forall r\in(0,1),\quad \forall\, n\geqslant 1,\quad \mathbb{L}_n^\Omega[h](r) :=&\frac{h(r)}{\mu_\Omega^0(r)}-\frac{r}{n}\left(G_n(r)A_n[h]+\frac{1}{2r^{n+1}}H[h](r)\right)\\ \mathbb{L}_0^\Omega[h](r) :=&\frac{h(r)}{\mu_\Omega^0(r)}-\int_r^1\frac{1}{\tau}\int_0^\tau sh(s)dsd\tau, \end{aligned}$$

with

$$H_n[h](r) := r^{2n}\int_r^1 s^{1-n}h(s)ds+\int_0^r s^{n+1}h(s)ds, \tag{3.4}$$

and

$$\begin{aligned} G_n(r) :=&n\Omega r^{n+1}+r^{n-1}\int_0^1 sf_0(s)ds-(n+1)r^{n-1}\int_0^r sf_0(s)ds\\ &+\frac{n+1}{r^{n+1}}\int_0^r s^{2n+1}f_0(s)ds. \end{aligned} \tag{3.5}$$

$A_n[h]$ 的值由 (2.21) 给出，且与

$$A_n[h]=\frac{\displaystyle\int_0^1 s^{n+1}h(s)ds}{2n\big(\widehat{\Omega}_n-\Omega\big)}.$$

此外，利用 $G_n(1)$ 的值，还可以得到 $A_n[h]$ 的另一种有用表达式

$$G_n(1)=n\left[\Omega-\int_0^1 sf_0(s)ds+\frac{n+1}{n}\int_0^1 s^{2n+1}f_0(s)ds\right]=n\left(\Omega-\widehat{\Omega}_n\right). \tag{3.6}$$

于是我们得到

$$A_n[h]=-\frac{H_n[h](1)}{2G_n(1)},\quad \forall n\geqslant 1. \tag{3.7}$$

3.2. Fredholm结构。这里，我们旨在探究式（3.1）所描述的线性化算子的Fredholm结构。

命题 3.1. 设 $m \geqslant 1$、f_0 满足 (H1)-(H2)，且 $\alpha \in (0,1)$。那么，对于 $\Omega \notin [\kappa_1, \kappa_2] \cup \mathcal{S}Pm_{\text{sing}}$，线性化算子 $D_g\widehat{G}(\Omega, 0) : \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}) \to \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D})$ 是一个指标为零的 Fredholm算子。

证明。我们完全沿用 [41, 命题 5.1] 中的思路。需要强调的是，与该文献相比，唯一的区别在于 (3.1) 右端的第一项。因此，要得到所需结果，只需验证

$$\frac{1}{\mu^0_\Omega}\mathrm{Id} : \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}) \to \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}),$$

是一个同构，其中 μ^0_Ω 由 (3.2) 和 (2.8) 定义。首先，由于 $\frac{1}{\mu^0_\Omega}$ 对任意 $\Omega \notin [\kappa_1, \kappa_2]$ 在 $[0, 1]$ 中均不为零，且它及其逆都属于空间 $\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D})$，因此这一点很容易保证。其次，我们利用 Hölder 空间中的乘积法则 $\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D})$。□

4. Kernel study

本节主要关注如何找到一些 Ω 值（有时称为特征值），使得 $D_gG(\Omega, 0)$ 的核为一维，这是 Crandall-Rabinowitz 定理所要求的。正如我们将要探讨的，依照式 (3.3) 中给出的傅里叶展开，核结构与研究一族由参数 m 和 Ω 索引的可数个一维斯图姆-刘维尔问题 $\mathbb{L}^\Omega_m$ 有关。由此，我们将研究归结为考察一个优美的积分色散方程，该方程取决于稳态剖面 f_0 的结构。值得注意的是，令人惊讶的是，我们能够将色散方程转化为一种易于处理的形式，与此前在 [41, 第 6] 节分析的特殊二次情形颇为相似。其研究相当复杂，并揭示了两种主要机制；根据剖面的符号，我们可以对其进行完整研究。实际上，我们证明，对于 $f_0 > 0$，位于区域 $(-\infty, \kappa_1)$ 内且对应低对称性 $m \leqslant \frac{\kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}$ 的特征值十分稀少，如命题 4.4-(4) 所述。然而，$f_0 < 0$ 情形则更为丰富，对应于丰盛机制，其中存在一族与大对称性 $m \geqslant m_0$ 相关的无限可数特征值。这些特征值位于区域 (κ_2, ∞) 内，并递减趋于 κ_2。更多细节请见命题 4.5。值得指出的是，在这一一般性研究中，我们重新得到了一般机制的主要特征；它们与此前在 [41] 分析的特定二次形状情形中的机制相似。

4.1. 核描述。接下来，我们将写出线性化算子 $D_gG(\Omega, 0)$ 的核元素所满足的约束，并在后续章节中尝试通过所谓的色散方程对这些约束进行解析刻画。回到 (3.3)，我们推得核由下式描述

$$\mathrm{Ker} D_g\widehat{G}(\Omega, 0) = \left\{ h = \sum_{n \in m\mathbb{N}} h_n(r)\cos(n\theta) \in \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}), \quad \exists n \in m\mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \mathbb{L}_n[h_n] = 0 \right\}. \quad (4.1)$$

因此，核的研究归结为分析分层一维算子 $\mathbb{L}_n$ 的核。该算子的系数并非常数，而是通过剖面 f_0. 依赖于变量 r。与涡斑问题相比，这使得研究更加棘手；在涡斑问题中，所涉及的算子由角变量上的傅里叶乘子描述。

根据 (3.3) 后给出的 $\mathbb{L}^\Omega_n$ 定义，我们得到

$$\mathbb{L}^\Omega_n[h_n] = 0$$

等价于

$$h_n(r) - \frac{\mu^0_\Omega(r)}{2nr^n} H_n[h_n](r) = -\frac{H_n[h_n](1)}{2nG_n(1)}\mu^0_\Omega(r) r G_n(r), \quad (4.2)$$

对于任意 $n \in m\,\mathbb{N}^\star$，以及从 $n = 0$ 到

$$\mathbb{L}_0^{\Omega}[h](r) = \frac{h(r)}{\mu_\Omega^0(r)} - \int_r^1 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau s h(s) ds d\tau = 0. \tag{4.3}$$

回顾一下，根据 (3.2) 和 (2.8) 定义的函数 μ_Ω^0，其符号取决于 $\Omega \notin [\kappa_1, \kappa_2]$ 所在的位置，且保持定号。因此，我们将由此构造一个新的正函数 ν_Ω，以便构建一个具有正测度的希尔伯特空间。令，

$$\nu_\Omega(r) := \sigma_\Omega\, \mu_\Omega^0(r) = |\mu_\Omega^0(r)|, \quad \text{with} \quad \sigma_\Omega := \begin{cases} -1, & \Omega \in (-\infty, \kappa_1), \\ 1, & \Omega \in (\kappa_2, +\infty). \end{cases} \tag{4.4}$$

于是，由 (H1)-(H2) 可知，对于任意 $r \in [0,1]$ 和 $\Omega \notin [\kappa_1, \kappa_2].$，有 $\nu_\Omega(r) > 0$。考虑正博雷尔测度

$$d\lambda_\Omega(s) := \frac{s}{\nu_\Omega(s)} ds, \tag{4.5}$$

并定义　希尔伯特空间 $L^2(\lambda_\Omega)$ 为满足以下条件的可测函数 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$　　t

$$\|f\|_\Omega^2 = \int_0^1 |f(s)|^2 d\lambda_\Omega(s) < \infty, \tag{4.6}$$

其配备标准内积:

$$\langle f, g\rangle_\Omega = \int_0^1 f(r) g(r) d\lambda_\Omega(r). \tag{4.7}$$

为简化记号，我们用 L^2_Ω 代替 $L^2(\lambda_\Omega)$。
在下面的结果中，我们给出函数 ν_Ω 的上下界估计，这在后文中将非常有用。

引理 4.1. 设 f_0 满足 (H1)-(H2)。存在一个仅依赖于 f_0 的 $C_0 > 0$，使得对于任意 $\Omega \in (\kappa_2, \infty)$ 以及任意 $\theta \in [0,1]$，结论成立。

$$\forall\, r \in [0,1], \quad \frac{\frac{f_0'(r)}{r}}{\Omega - \kappa_1} \leqslant \nu_\Omega(r) \leqslant \frac{C_0}{(\Omega - \kappa_2)^\theta} \frac{\frac{f_0'(r)}{r}}{(1-r)^{1-\theta}}.$$

证明. 根据 (2.10) 中引入的 κ_1 的定义以及 $\Omega > \kappa_2$这一事实，下界显然成立。对于上界，由 (4.4) 和 (2.8) 可知，当 $\Omega > \kappa_2$时，

$$\nu_\Omega(r) = \frac{\frac{f_0'(r)}{r}}{\Omega - \int_0^1 s f_0(rs) ds}, \quad \forall\, r \in (0,1].$$

一方面，由于 f_0 是递增的，根据 (2.11) 可得

$$\frac{1}{\Omega - \int_0^1 s f_0(rs) ds} \leqslant \frac{1}{\Omega - \int_0^1 s f_0(s) ds} \leqslant \frac{1}{\Omega - \kappa_2}. \tag{4.8}$$

另一方面，显然

$$\frac{1}{\Omega - \int_0^1 s f_0(rs) ds} \leqslant \frac{1}{\kappa_2 - \int_0^1 s f_0(rs) ds}.$$

此外,

$$\kappa_2 - \int_0^1 s f_0(rs) ds = \int_0^1 s\big[f_0(s) - f_0(rs)\big] ds.$$

因此，利用 f_0 的单调性，我们得到 $r \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\kappa_2 - \int_0^1 s f_0(rs) ds \geqslant \int_0^1 s\big[f_0(s) - f_0(\tfrac{1}{2}s)\big] ds := C_1.$$

对于 $r\in[\frac{1}{2},1)$ 这种情形，我们可以使用泰勒公式，得到

$$\begin{aligned}\kappa_2-\int_0^1 sf_0(rs)ds&=\int_0^1 s\big[f_0(s)-f_0(rs)\big]ds\\&=(1-r)\int_0^1\int_0^1 s^2f_0'\big(\tau s+(1-\tau)rs\big)d\tau ds.\end{aligned}$$

由双重积分项的连续性以及 f_0' 的正性可知，存在 $\overline{r}\in[\frac{1}{2},1]$，使得对任意 $r\in[\frac{1}{2},1]$,

$$\int_0^1\int_0^1 s^2f_0'\big(\tau s+(1-\tau)rs\big)d\tau ds\geqslant\int_0^1\int_0^1 s^2f_0'\big(\tau s+(1-\tau)\overline{r}s\big)d\tau ds:=C_2>0.$$

由此可得

$$\kappa_2-\int_0^1 sf_0(rs)ds\geqslant C_2(1-r).$$

因此，存在一个常数 $C_3>0$，使得对任意 $r\in[0,1]$

$$\kappa_2-\int_0^1 sf_0(rs)ds\geqslant C_3(1-r).$$

将此不等式与（4.8）插值可得，对任意 $\theta\in[0,1]$

$$\frac{1}{\Omega-\int_0^1 sf_0(rs)ds}\leqslant\frac{C_0}{(\Omega-\kappa_2)^\theta}\frac{1}{(1-r)^{1-\theta}},\tag{4.9}$$

从而得到了该引理的结论。 □

4.2. $\mathbb{L}_0^\Omega$的核。在本节中，我们打算求解方程（4.3）。其难度似乎取决于 μ_Ω^0 的符号，或者等价地，取决于 Ω 相对于区间 $[\kappa_1,\kappa_2]$的位置。$\Omega\in(-\infty,\kappa_1)$的情形对应于 μ_Ω^0 为正，考虑到算子 $\mathbb{L}_0^\Omega$ 的正性，这种情形比较容易处理，因为这进而意味着其核是平凡的。然而，$\Omega\in(\kappa_2,+\infty)$ 的情形则更为复杂；只有当 Ω 属于有限集 $\mathbb{S}$. 时，才能证明其核是平凡的。证明这一点需要对支配核方程的斯图姆-刘维尔方程进行细致分析，其中一个关键要素是 Kneser 发现的非振荡定理 [66]，以及 Pr¨ufer 变换。回到（4.3），并令

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{L}}_0^\Omega[h](r)&:=\mu_\Omega^0(r)\mathbb{L}_0^\Omega[h](r)\\&=h(r)-\sigma_\Omega\nu_\Omega(r)\int_r^1\frac{1}{\tau}\int_0^\tau sh(s)dsd\tau\\&:=h(r)-\sigma_\Omega\mathcal{L}_0^\Omega[h](r).\end{aligned}\tag{4.10}$$

由于 μ_Ω^0 在 $[0,1]$ 中不为零，算子 $\widehat{\mathbb{L}}_0^\Omega$ 和 $\mathbb{L}_0^\Omega$ 具有相同的核。本节的主要结果如下。

命题 4.1. 设 f_0 满足 (H1)-(H2)。则以下结果成立。

(1) 对任意 $\Omega\notin[\kappa_1,\kappa_2]$，算子 $\mathcal{L}_0^\Omega:\ L^2_\Omega\to L^2_\Omega$ 是自伴正定紧算子。(2) 若 $\Omega\in(-\infty,\kappa_1)$，则

$$Ker\,\mathbb{L}_0^\Omega=\{0\}.$$

(3) 存在一个有限集 $\mathbb{S}\subset(\kappa_2,\infty)$，使得

$$\forall\Omega\in(\kappa_2,\infty)\backslash\mathbb{S},\quad Ker\,\mathbb{L}_0^\Omega=\{0\}.$$

证明。(1) 首先，根据 (4.10)，结合分部积分和定义 (4.5)，我们写出

$$\mathcal{L}_0^{\Omega}[h](r) = \int_0^1 K_0(r,s)h(s)d\lambda_{\Omega}(s),$$

with

$$K_0(r,s) := \nu_{\Omega}(r)\nu_{\Omega}(s)\left[\ln(\tfrac{1}{r})\mathbf{1}_{[0,r]}(s) + \ln(\tfrac{1}{s})\mathbf{1}_{[r,1]}(s)\right].$$

显然，这个核是正的且对称的，由直接计算可得

$$\int_0^1\int_0^1 K_0^2(r,s)h(s)d\lambda_{\Omega}(r)d\lambda_{\Omega}(s) < \infty,$$

这意味着 $\mathcal{L}_0^{\Omega}: L_{\Omega}^2 \to L_{\Omega}^2$ 是一个希尔伯特–施密特积分算子。因此， $\mathcal{L}_0^{\Omega}$ 是一个自伴紧算子。接下来需要验证该算子是正定的，这等价于证明

$$\langle \mathcal{L}_0^{\Omega}[h], h\rangle_{\Omega} > 0,$$

对任意不恒为零的 $h \in L_{\Omega}^2$。为此，根据 (4.7)，我们写出

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_0^{\Omega}[h], h\rangle_{\Omega} &= \int_0^1\int_0^r \ln(\tfrac{1}{r})h(s)h(r)srdsdr + \int_0^1\int_r^1 \ln(\tfrac{1}{s})h(s)h(r)rsdsdr \\ &= \int_0^1 \ln(\tfrac{1}{r})h(r)r\int_0^r sh(s)dsdr + \int_0^1 rh(r)\int_r^1 \ln(\tfrac{1}{s})h(s)sdsdr.\end{aligned}$$

注意

$$\int_r^1 \ln(s)h(s)sds = -\ln(r)\int_0^r sh(s)ds - \int_r^1 \frac{1}{s}\int_0^s \tau h(\tau)d\tau ds,$$

因此，通过分部积分可得

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_0^{\Omega}[h], h\rangle_{\Omega} &= \int_0^1 rh(r)\int_r^1 \frac{1}{s}\int_0^s \tau h(\tau)d\tau dsdr \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^r sh(s)ds\right)^2 \frac{dr}{r} > 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

这确保了所宣告的结果。

(2) 核方程 (4.10) 化为以下积分问题，

$$\sigma_{\Omega}\mathcal{L}_0^{\Omega}[h](r) = h(r). \tag{4.12}$$

根据 (4.4)，若 $\Omega \in (-\infty, \kappa_1)$，则 $\sigma_{\Omega} = -1$，因此 (4.12) 变为

$$\mathcal{L}_0^{\Omega}[h](r) + h(r) = 0. \tag{4.13}$$

将 (4.13) 中的函数与 h 在 L_{Ω}^2 （指 $L^2(\lambda_{\Omega})$）中取标量积，并结合 (4.11)，得到

$$\int_0^1 \left(\int_0^r sh(s)ds\right)^2 \frac{dr}{r} + \|h\|_{\Omega}^2 = 0.$$

这意味着 h 恒等于零，因此 $\mathbb{L}_0^{\Omega}$ 的核是平凡的。

(3) 根据 (4.4)，若 $\Omega \in (\kappa_2, \infty)$，则 $\sigma_{\Omega} = 1$，因此 (4.10) 变为

$$h(r) = \nu_{\Omega}(r)\int_r^1 \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} sh(s)dsd\tau,$$

其中 $h \in L_{\Omega}^2$。现在假设该 Volterra积分方程存在一个非零光滑解h，并定义 $F := \frac{h}{\nu_{\Omega}}$。那么这个非零函数满足

$$\forall r \in [0,1], \quad \int_r^1 \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} s\nu_{\Omega}(s)F(s)dsd\tau = F(r), \tag{4.14}$$

with

$$\int_0^1 F^2(r) r \nu_\Omega(r) dr < \infty. \tag{4.15}$$

我们将 证明 F 实际上在 $[0,1]$上连续。将引理 4.1 应用于 $\theta = 1$ ，得到

$$0 \leqslant r\,\nu_\Omega(r) \leqslant \frac{\|f_0'\|_{L^\infty}}{\Omega - \kappa_2}, \quad \forall\, r \in (0,1]. \tag{4.16}$$

将 (4.16) 与柯西-施瓦茨不等式及 (4.15) 结合，可得

$$\left(\int_0^\tau |F(s)|\, s\nu_\Omega(s) ds\right)^2 \leqslant \int_0^\tau |F(s)|^2 s\nu_\Omega(s) ds \int_0^\tau s\nu_\Omega(s) ds \leqslant C_0 \tau.$$

因此，(4.14) 左端关于 $r \in [0,1]$ 一致良定义，故由此恒等式可推出 F 在 $[0,1]$. 上连续。利用这一性质以及 ν_Ω 的连续性，可推出 (4.14) 左端在 $[0,1]$ 上为 $\mathscr{C}^1$。事实上，我们得到 F 在 $[0,1]$, 上属于 $\mathscr{C}^2$ 类。注意，在 (4.14) 中作变量代换，可得

$$F''(r) = \int_0^1 s\nu_\Omega(sr) F(sr) ds - \nu_\Omega(r) F(r).$$

现在，对 (4.14) 求导，可得到斯图姆-刘维尔方程

$$(rF')' + r\nu_\Omega(r) F = 0,$$

并附加条件（该条件可由 (4.14) 得出）

$$F(1) = 0. \tag{4.17}$$

通过 $[1,\infty) \to \mathbb{R}$ 引入辅助函数 G_Ω：

$$\forall r \in [0,1) \quad F(r) = G_\Omega(\tfrac{1}{1-r}).$$

注意到， G_Ω 在 $[1,\infty)$ 上属于 $\mathscr{C}^2$ 类。于是，通过直接计算并利用记号

$$y = \frac{1}{1-r}, \quad \mu_\Omega(y) := \nu_\Omega(1 - \tfrac{1}{y}),$$

我们推得

$$\big((y^2 - y) G_\Omega'(y)\big)' + \tfrac{y-1}{y^3} \mu_\Omega(y) G_\Omega(y) = 0, y \in (1,\infty). \tag{4.18}$$

此外，边界条件 (4.17) 可写为

$$\lim_{y\to\infty} G_\Omega(y) = 0. \tag{4.19}$$

若 $G_\Omega(1) = 0$ ，则由方程 (4.18) 得到 $G_\Omega'(1) = 0$ ；通过稍加调整带奇异系数的柯西问题的唯一性结果，我们应能得到 G_Ω恒等于零。这与 F 是一个非零函数这一事实矛盾。注意，这一论证表明，该奇异常微分方程在 $[1,\infty)$ 上的光滑解集是一维的，由一个非零元素生成，仍记为 G_Ω ，且满足归一化条件

$$G_\Omega(1) = 1. \tag{4.20}$$

由此，我们唯一地构造出映射 $\Omega \in (\kappa_2, \infty) \mapsto G_\Omega$ ，且每个元素 G_Ω 在 $[1,\infty)$ 上属于 $\mathscr{C}^2$ 类，并满足 (4.18)。接下来的任务是考察哪些 Ω 值使得 G_Ω 满足边界条件 (4.19)。首先，我们将证明，对于任意 $\Omega \geqslant \kappa_2$， G_Ω 在 ∞附近不振荡。为此，我们引入辅助函数

$$v(y) = \sqrt{y^2 - y}\, G_\Omega(y).$$

经过直接计算，我们得到

$$v''(y) + V_\Omega(y) v(y) = 0, \tag{4.21}$$

with

$$V_\Omega(y) = \frac{1}{4} \frac{1}{(y^2 - y)^2} + \frac{1}{y^4} \mu_\Omega(y).$$

Kneser 定理 [66, pp. 414 − 418] 指出，对于 (4.21) 或 (4.18)，在无穷远处满足某个$y_0 > 1$)时，任意非零解在区域 $[y_0, \infty$ 中只有有限个零点（即满足非振荡）的充分条件是

$$\limsup_{y\to\infty} y^2 V_\Omega(y) < \frac{1}{4}. \tag{4.22}$$

利用引理 4.1 和 $\theta = 0$，我们得到一个常数 C_0，使得对于任意 $\Omega \geqslant \kappa_2$,

$$0 \leqslant V_\Omega(y) \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{(y^2-y)^2} + \frac{C_0}{y^3}.$$

Thus

$$\limsup_{y\to\infty} y^2 V_\Omega(y) = 0 < \frac{1}{4}.$$

因此，对于任意 $\Omega \geqslant \kappa_2$，在 ∞ 处都不会发生振荡。这意味着对于 $\Omega \geqslant \kappa_2$，存在一个实数 $y_\Omega > 1$，使得

$$\forall y \geqslant y_\Omega, \quad |G_\Omega(y)| > 0. \tag{4.23}$$

接下来，我们回到 (4.18)，并通过以下关系使用 Prüfer 变换

$$G_\Omega(y) = \rho(y)\sin(\theta_\Omega(y)), \quad (y^2-y)G'_\Omega(y) = \rho(y)\cos(\theta_\Omega(y)), \forall y \geqslant 1. \tag{4.24}$$

然后，我们得到弱耦合常微分方程组

$$\theta'_\Omega(y) = \frac{1}{y^2-y}\cos^2(\theta_\Omega(y)) + \frac{y-1}{y^3}\mu_\Omega(y)\sin^2(\theta_\Omega(y)) \tag{4.25}$$

and

$$\rho'_\Omega(y) = \left(\frac{1}{y^2-y} - \frac{y-1}{y^3}\mu_\Omega(y)\right)\rho_\Omega(y)\sin(\theta_\Omega(y))\cos(\theta_\Omega(y)). \tag{4.26}$$

b 边界条件 (4.20) 与之匹配（注意，$\theta_\Omega(1)$ 并非唯一确定）

$$\rho_\Omega(1) = 1, \quad \theta_\Omega(1) = \tfrac{\pi}{2}. \tag{4.27}$$

对于任意 $y \in [1, \infty$，系统 (4.25) 和 (4.26) 都是全局良定的。注意，由于 (4.26) 的柯西问题解的唯一性，我们应有

$$\rho_\Omega(y) > 0, \forall y \in [1, \infty).$$

因此，对于任意 $\Omega \geqslant \kappa_2$,

$$\mathcal{Z}(G_\Omega) := \Big\{y > 1, G_\Omega(y) = 0\Big\} = \Big\{y > 1, \theta_\Omega(y) \in \pi\mathbb{Z}\Big\}.$$

由 (4.25) 可知，$y \mapsto \theta_\Omega(y)$ 严格递增。由于该常微分方程不振荡，因此集合 $\mathcal{Z}(G_\Omega)$ 是有限的，这意味着对每个 $\Omega \geqslant \kappa_2$，$\theta_\Omega$ 有界。因此，$\lim_{y\to\infty}\theta_\Omega(y)$ 存在且有限。记为

$$\overline{\theta}(\Omega) = \lim_{y\to\infty}\theta_\Omega(y), \tag{4.28}$$

那么对于任意 $\Omega \geqslant \kappa_2$,

$$\forall\, y > 1, \quad \tfrac{\pi}{2} < \theta_\Omega(y) < \overline{\theta}(\Omega). \tag{4.29}$$

我们打算证明 $\Omega \in [\kappa_2, \infty) \mapsto \overline{\theta}(\Omega)$ 严格递减。在此之前，我们将证明对于任意 $y > 1$，$\Omega \in [\kappa_2, \infty) \mapsto \theta_\Omega(y)$ 严格递减。令 $\theta_\Omega(y) = \partial_\Omega\theta_\Omega(y)$，对 (4.25) 求导可得

$$\begin{aligned}\dot{\theta}'_\Omega(y) &= \left(-\frac{1}{y^2-y} + \frac{y-1}{y^3}\mu_\Omega(y)\right)\sin(2\theta_\Omega(y))\,\dot{\theta}_\Omega(y) - \frac{(y-1)\mu_\Omega(y)}{y^3(\Omega - \int_0^1 s f_0(ys)ds)}\sin^2(\theta_\Omega(y)) \\ &:= A_\Omega(y)\dot{\theta}_\Omega(y) - B_\Omega(y).\end{aligned} \tag{4.30}$$

注意，由 (4.27) 可得 $\theta_\Omega(1) = 0$。注意， A_Ω 在 $[1,\infty)$ 上连续，因为

$$\lim_{y\to 1^-} A_\Omega = 2\theta'_\Omega(1) = 0,$$

这里，我们利用微分方程 (4.25) 和 (4.27) 得到 $\theta'_\Omega(1) = 0$。此外，$B_\Omega \geqslant 0$，且在 $(1,\infty)$ 中的任何开集上都不恒为零。由杜哈梅尔公式可得

$$\dot\theta_\Omega(y) = -\int_1^y e^{\int_s^y A_\Omega(s)ds} B_\Omega(s)ds. \tag{4.31}$$

因此

$$\forall\, y > 1, \quad \dot\theta_\Omega(y) < 0.$$

这表明 $\Omega \in [\kappa_2,\infty) \mapsto \theta_\Omega(y)$ 严格递减，进而说明

$$\forall y > 1, \forall\, \Omega > \kappa_2, \quad \tfrac{\pi}{2} < \theta_\Omega(y) < \theta_{\kappa_2}(y).$$

令 $y \to \infty$ 趋于极限，并利用 (4.28)，我们推得

$$\frac{\pi}{2} < \overline{\theta}_\Omega \leqslant \overline{\theta}_{\kappa_2}. \tag{4.32}$$

回到 (4.31)，由 B_Ω 的正性可推得，对于 $y \geqslant 2$,

$$\dot\theta_\Omega(y) \leqslant -\int_2^y e^{\int_s^y A_\Omega(\tau)d\tau} B_\Omega(s)ds. \tag{4.33}$$

另一方面，利用引理 4.1 和 $\theta = 1$，我们得到

$$A_\Omega(y) \geqslant -\frac{1}{y^2-y} - \frac{C_0}{y^2(\Omega-\kappa_2)}, \tag{4.34}$$

这意味着对任意 $2 \leqslant s \leqslant y$

$$\int_s^y A_\Omega(\tau)d\tau \geqslant -\int_2^\infty \left(\frac{1}{\tau^2-\tau} + \frac{C_0}{\tau^2(\Omega-\kappa_2)}\right) d\tau \geqslant -\ln(2) - \frac{C_0}{\Omega-\kappa_2}.$$

常数 C_0 可能逐行变化。此外,

$$e^{\int_s^y A_\Omega(\tau)d\tau} \geqslant \tfrac{1}{2} e^{-\frac{C_0}{\Omega-\kappa_2}}, \tag{4.35}$$

因此，由 (4.33) 可得

$$\forall\, y \geqslant 2, \quad \dot\theta_\Omega(y) \leqslant -\tfrac{1}{2} e^{-\frac{C_0}{\Omega-\kappa_2}} \int_2^y B_\Omega(s)ds. \tag{4.36}$$

考虑 $\kappa_2 < \Omega_1 < \Omega_2$,，则由泰勒公式可知

$$\begin{aligned}\overline{\theta}_{\Omega_2} - \overline{\theta}_{\Omega_1} =& \big(\overline{\theta}_{\Omega_2} - \theta_{\Omega_2}(y)\big) + \big(\theta_{\Omega_1}(y) - \overline{\theta}_{\Omega_1}\big) + \big(\theta_{\Omega_2}(y) - \theta_{\Omega_1}(y)\big)\\ =& \big(\overline{\theta}_{\Omega_2} - \theta_{\Omega_2}(y)\big) + \big(\theta_{\Omega_1}(y) - \overline{\theta}_{\Omega_1}\big) + (\Omega_2-\Omega_1)\int_0^1 \dot\theta_{\tau\Omega_2+(1-\tau)\Omega_1}(y)d\tau. \end{aligned}\tag{4.37}$$

结合 (4.36)，可得

$$\begin{aligned}\forall y \geqslant 2, \quad \overline{\theta}_{\Omega_2} - \overline{\theta}_{\Omega_1} \leqslant& \big(\overline{\theta}_{\Omega_2} - \theta_{\Omega_2}(y)\big) + \big(\theta_{\Omega_1}(y) - \overline{\theta}_{\Omega_1}\big)\\ &- \frac{1}{2} e^{-\frac{C_0}{\Omega_1-\kappa_2}} (\Omega_2-\Omega_1)\int_0^1\int_2^y B_{\tau\Omega_2+(1-\tau)\Omega_1}(s)dsd\tau. \end{aligned}\tag{4.38}$$

根据单调收敛定理

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^1\int_2^y B_{\tau\Omega_2+(1-\tau)\Omega_1}(s)dsd\tau = \int_0^1\int_2^\infty B_{\tau\Omega_2+(1-\tau)\Omega_1}(s)dsd\tau.$$

在 (4.38) 中令 $y \to \infty$ 趋于极限，并利用 (4.28)，我们得到

$$\overline{\theta}_{\Omega_2} - \overline{\theta}_{\Omega_1} \leqslant -\frac{1}{2} e^{-\frac{C_0}{\Omega_1-\kappa_2}} (\Omega_2-\Omega_1)\int_0^1\int_2^\infty B_{\tau\Omega_2+(1-\tau)\Omega_1}(s)dsd\tau.$$

由于 B_Ω 为正，且在任何开集上都不恒为零，因此

$$\overline{\theta}_{\Omega_2} - \overline{\theta}_{\Omega_1} < 0. \tag{4.39}$$

这表明映射 $\Omega \in (\kappa_2,\infty) \mapsto \overline{\theta}_\Omega$ 严格递减。稍作修改前面的论证，我们即可证明该映射局部利普希茨连续。事实上，由 (4.27)、(4.30) 和引理 4.1 可知

$$\begin{aligned}|A_\Omega(y)| &\leqslant \frac{|\sin(2\theta_\Omega(y))-\sin(2\theta_\Omega(1))|}{y^2-y}+\frac{C_0}{y^2(\Omega-\kappa_2)}\\ &\leqslant \frac{C_1}{y^2}+\frac{C_0}{y^2(\Omega-\kappa_2)}.\end{aligned}$$

同理可得

$$0\leqslant B_\Omega(y)=\frac{(y-1)\mu_\Omega(y)}{y^3(\Omega-\int_0^1 sf_0(rs)ds)}\sin^2(\theta_\Omega)\leqslant\frac{C_0}{y^2(\Omega-\kappa_2)^2}.$$

将这些估计代入 (4.31)，可得对于任意 $y\geqslant 1$

$$\begin{aligned}|\dot\theta_\Omega(y)| &\leqslant e^{\int_1^\infty A_\Omega(s)ds}\int_1^\infty B_\Omega(s)ds\\ &\leqslant C_0 e^{\frac{C_0}{(\Omega-\kappa_2)^2}}.\end{aligned}$$

结合此估计与 (4.37)，可推得

$$\begin{aligned}|\overline{\theta}_{\Omega_2}-\overline{\theta}_{\Omega_1}| &\leqslant \left|\overline{\theta}_{\Omega_2}-\theta_{\Omega_2}(y)\right|+\left|\theta_{\Omega_1}(y)-\overline{\theta}_{\Omega_1}\right|+(\Omega_2-\Omega_1)\int_0^1\left|\dot\theta_{\tau\Omega_2+(1-\tau)\Omega_1}(y)\right|d\tau\\ &\leqslant \left|\overline{\theta}_{\Omega_2}-\theta_{\Omega_2}(y)\right|+\left|\theta_{\Omega_1}(y)-\overline{\theta}_{\Omega_1}\right|+C_0(\Omega_2-\Omega_1)e^{\frac{C_0}{(\Omega_1-\kappa_2)^2}}.\end{aligned}$$

取 $y\to\infty$，可得

$$|\overline{\theta}_{\Omega_2}-\overline{\theta}_{\Omega_1}|\leqslant C_0(\Omega_2-\Omega_1)e^{\frac{C_0}{(\Omega_1-\kappa_2)^2}}.$$

这表明 $\Omega\in(\kappa_2,\infty)\mapsto\overline{\theta}_\Omega$ 是局部利普希茨连续的，因而在 (κ_2,∞) 上连续。最后，根据 (4.32)，我们证明了 $\Omega\in(\kappa_2,\infty)\mapsto\overline{\theta}_\Omega$ 连续、严格递减且有界。因此集合

$$\mathbb{S}:=\left\{\Omega>\kappa_2,\overline{\theta}_\Omega\in\pi\mathbb{Z}\right\},\tag{4.40}$$

是有限的。现在，根据（4.26）、（4.27）和（4.30），利用格朗沃尔等式及（4.35）（在含有 $-A_\Omega$ 的情况下仍然成立），我们可得

$$\forall\, y\geqslant 1,\quad \rho_\Omega(y)=e^{-\frac12\int_1^y A_\Omega(s)ds}\geqslant\tfrac12 e^{-\frac{C_0}{\Omega-\kappa_2}}.$$

因此，由（4.24）可知，对于任意 $\Omega>\kappa_2$

$$\forall\, y\geqslant 1,\quad |G_\Omega(y)|\geqslant\tfrac12 e^{-\frac{C_0}{\Omega-\kappa_2}}|\sin(\theta_\Omega(y))|,$$

结合（4.19）和（4.28），可推出

$$0=|\lim_{y\to\infty}G_\Omega(y)|\geqslant\tfrac12 e^{-\frac{C_0}{\Omega-\kappa_2}}|\sin(\overline{\theta}_\Omega)|.$$

因此我们推知，必然有

$$\overline{\theta}_\Omega\in\pi\,\mathbb{Z}\,.$$

因此，如果方程 (4.14) 在 $[0,1]$ 中对某个 $\Omega>\kappa_2$存在光滑非零解，那么必然有 $\Omega\in\mathbb{S}$，其中 $\Omega\in\mathbb{S}$ 由 (4.40) 定义，且已证明其有限。因此，若 $\Omega\in(\kappa_2,\infty)\backslash\mathbb{S}$，则方程 (4.14) 在光滑函数类中仅有平凡解。至此，所需结果的证明完成。□

4.3. $\mathbb{L}_n^\Omega$, $n \geqslant 1$的核。本节的主要目标是探讨核方程 (4.2) 的一些定性性质，这些性质将在后文用于推导色散方程。其中一项性质与一个中间 Volterra积分算子的正定结构有关。令 $n \geqslant 1$，并定义算子

$$\mathcal{L}_n^\Omega[h](r) := \frac{\nu_\Omega(r)}{2nr^n} H_n[h](r), \tag{4.41}$$

其中， H_n 由（3.4）给出。于是，方程（4.2）等价于

$$\big(\mathrm{Id} - \sigma_\Omega \mathcal{L}_n^\Omega\big)[h_n](r) = -\frac{H_n[h_n](1)}{2nG_n(1)} \mu_\Omega^0(r) r G_n(r), \tag{4.42}$$

其中我们采用（4.4）中的记号。接下来，我们旨在分析算子 $\mathcal{L}_n^\Omega$ 的一些谱性质。为此，根据（4.5）中引入的正测度 λ_Ω，将其写成如下依赖于该测度的积分形式，

$$\mathcal{L}_n^\Omega[h](r) = \int_0^1 K_n(r,s) h(s) d\lambda_\Omega(s),$$

其中，其核是对称的，并具有如下表达式

$$K_n(r,s) := \frac{\nu_\Omega(r)\nu_\Omega(s)}{2n} \left[\left(\frac{r}{s}\right)^n \mathbf{1}_{\{r \leqslant s \leqslant 1\}} + \left(\frac{s}{r}\right)^n \mathbf{1}_{\{0 \leqslant s \leqslant r\}} \right].$$

本节的第一个主要结果如下。

命题 4.2。设 f_0 满足（H1）-（H2），且 $\Omega \notin [\kappa_1, \kappa_2]$，并采用（2.10）和（2.11）中的记号。则，算子 $\mathcal{L}_n^\Omega$： $L^2_\Omega \to L^2_\Omega$ 是一个自伴希尔伯特-施密特算子。此外，它是正定的，且其所有特征值均严格为正。

证明。该算子是对称的，这可由 $K_n(r,s) = K_n(s,r)$ 得出。此外，我们可以利用 (4.16) 轻易验证

$$\begin{aligned} \|K_n\|_\Omega^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \nu_\Omega(r)\nu_\Omega(s) rs \left\{ \left(\frac{r}{s}\right)^{2n} \mathbf{1}_{\{r \leqslant s \leqslant 1\}} + \left(\frac{s}{r}\right)^{2n} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant s \leqslant r\}} \right\} dr ds \\ &\leqslant C \int_0^1 \int_r^1 \left(\frac{r}{s}\right)^{2n} ds dr + C \int_0^1 \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{2n} ds dr \leqslant C(\Omega, f_0), \end{aligned}$$

因此，该算子是自伴希尔伯特-施密特算子。需要强调的是，希尔伯特-施密特算子 $\mathcal{L}_n^\Omega$ 的范数取决于 Ω 和 f_0。

现在我们来讨论 $\mathcal{L}_n^\Omega$ 的正性。取一个非零元素 $h \in L^2_\Omega$，并根据 4.7 计算 $\langle \mathcal{L}_n^\Omega[h],\ h\rangle_\Omega$。根据定义，有

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_n^\Omega[h], h\rangle_\Omega =& \frac{1}{2n} \int_0^1 \int_0^1 h(s)h(r) sr \left\{ \left(\frac{r}{s}\right)^n \mathbf{1}_{[r,1]}(s) + \left(\frac{s}{r}\right)^n \mathbf{1}_{[0,r]}(s) \right\} ds dr \\ =& \frac{1}{2n} \int_0^1 h(r) r^{1+n} \int_r^1 h(s) s^{1-n} ds dr + \frac{1}{2n} \int_0^1 r^{1-n} h(r) \int_0^r h(s) s^{1+n} ds dr. \end{aligned}$$

分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_r^1 h(s) s^{1-n} ds =& \int_r^1 h(s) s^{n+1} s^{-2n} ds \\ =& \int_0^1 h(\tau)\tau^{n+1} d\tau - r^{-2n} \int_0^r h(\tau)\tau^{n+1} d\tau \\ &+ 2n \int_r^1 s^{-1-2n} \int_0^s h(\tau)\tau^{n+1} d\tau ds. \end{aligned}$$

因此，经过简单计算可得

$$\langle \mathcal{L}_n^\Omega[h], h\rangle_\Omega = \frac{1}{2n} \int_0^1 h(r) r^{1+n} \left[\int_0^1 h(\tau)\tau^{n+1} d\tau - r^{-2n} \int_0^r h(\tau)\tau^{n+1} d\tau \right] dr$$

$$+\int_0^1 h(r)r^{1+n}\left[\int_r^1 s^{-1-2n}\int_0^s h(\tau)\tau^{n+1}d\tau ds\right]dr$$
$$+\frac{1}{2n}\int_0^1 r^{1-n}h(r)\int_0^r h(s)s^{1+n}dsdr.$$

利用分部积分可得

$$\int_0^1 h(r)r^{1+n}\int_r^1 s^{-1-2n}\int_0^s h(\tau)\tau^{n+1}d\tau ds=\int_0^1 r^{-2n-1}\left(\int_0^r s^{n+1}h(s)ds\right)^2 dr.$$

因此，我们得到约化形式

$$\langle\mathcal{L}_n^\Omega[h],h\rangle_\Omega=\frac{1}{2n}\left(\int_0^1 h(r)r^{1+n}dr\right)^2+\int_0^1 r^{-2n-1}\left(\int_0^r s^{n+1}h(s)ds\right)^2 dr>0. \tag{4.43}$$

这表明 $\mathcal{L}_n^\Omega$ 是正定的。因此，我们得到所有特征值都严格为正。□

接下来，我们将讨论线性算子 $(\mathrm{Id}-\sigma_\Omega\mathcal{L}_n^\Omega)$ 的可逆性，该可逆性取决于 Ω 的选择。

命题 4.3. 设 f_0 满足 (H1)-(H2)，且 $n\geqslant 1$。以下断言成立 .

(1) 若 $\Omega\in(-\infty,\kappa_1)$，则 $\mathrm{Id}+\mathcal{L}_n^\Omega\colon L^2_\Omega\to L^2_\Omega$ 可逆。(2) 设 $\Omega\in(\kappa_2,\infty)$。存在一个仅依赖于 f_0 的 $C_0>0$，使得若对某个 $\theta\in(0,1]$

$$\frac{C_0}{n\theta(\Omega-\kappa_2)^\theta}<1,$$

则 $\mathrm{Id}-\mathcal{L}_n^\Omega$ 可逆。

证明。(1) 由于 $\mathcal{L}_n^\Omega$ 是紧的，因此 Id+ $\mathcal{L}_n^\Omega$ 是 Fredholm 零指标算子。要证明它可逆，只需验证其核是平凡的。假设存在一个非平凡函数 h，使得

$$h+\mathcal{L}_n^\Omega[h]=0$$

则这意味着 -1 是 $\mathcal{L}_n^\Omega$ 的一个负特征值，这与命题 4.2 中所见该算子是正定的这一事实相矛盾，并且它的所有特征值均为正。

(2) 要证明 $\mathrm{Id}-\mathcal{L}_n^\Omega$ 在空间 L^2_Ω 中的可逆性，只需验证

$$\|\mathcal{L}_n^\Omega\|=\sup_{\|h\|_\Omega=1}\langle\mathcal{L}_n^\Omega[h],h\rangle_\Omega<1.$$

结合 (4.43) 和柯西-施瓦茨不等式，我们得到，对于 $\|h\|_\Omega=1$

$$\langle\mathcal{L}_n^\Omega[h],h\rangle_\Omega\leqslant\frac{1}{2n}\int_0^1\nu_\Omega(r)r^{1+2n}dr+\int_0^1 r^{-2n-1}\int_0^r s^{2n+1}\nu_\Omega(s)dsdr. \tag{4.44}$$

因此，应用引理 4.1，我们可推出，对于任意 $\theta\in(0,1]$

$$\int_0^1\nu_\Omega(r)r^{1+2n}dr\leqslant\frac{C_0}{(\Omega-\kappa_2)^\theta}\int_0^1\frac{r^{1+2n}}{(1-r)^{1-\theta}}dr\leqslant\frac{C_0}{\theta(\Omega-\kappa_2)^\theta}.$$

类似地，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 r^{-2n-1}\int_0^r s^{2n+1}\nu_\Omega(s)dsdr&\leqslant\frac{C_0}{(\Omega-\kappa_2)^\theta}\int_0^1 r^{-2n-1}\int_0^r\frac{s^{2n+1}}{(1-s)^{1-\theta}}dsdr\\&\leqslant\frac{C_0}{(\Omega-\kappa_2)^\theta}\int_0^1\frac{r^{-2n-1}}{(1-r)^{1-\theta}}\int_0^r s^{2n+1}dsdr\\&\leqslant\frac{C_0}{(\Omega-\kappa_2)^\theta(2n+2)}\int_0^1\frac{1}{(1-r)^{1-\theta}}dr,\end{aligned}$$

这意味着

$$\int_0^1 r^{-2n-1}\int_0^r s^{2n+1}\nu_\Omega(s)dsdr \leqslant \frac{C_0}{n\theta(\Omega-\kappa_2)^\theta}.$$

将这些估计代入 (4.44)，即可得到

$$\langle \mathcal{L}_n^\Omega[h], h\rangle_\Omega \leqslant \frac{C_0}{n\theta(\Omega-\kappa_2)^\theta}.$$

因此，在以下假设下

$$\frac{C_0}{n\theta(\Omega-\kappa_2)^\theta} < 1,$$

我们推得 $\|\mathcal{L}_n^\Omega\|_\Omega < 1$，进而 $\mathrm{Id} - \mathcal{L}_n^\Omega\colon L^2_\Omega \to L^2_\Omega$ 可逆。证明至此结束。 □

请注意，命题 4.3-(2) 表明，为了使 $\mathrm{Id} - \mathcal{L}_n^\Omega$ 对 $\Omega \in (\kappa_2,\infty)$ 可逆，我们需要 n 足够大。

4.4. 色散方程。回顾一下，我们的主要目标是在 n 和 Ω 中找到一个合适的子集，使得核方程 (4.2) 存在一个非零光滑解。正如我们将看到的，这一条件可由 Ω 和 n 中一个解析方程的零点刻画，该方程称为色散方程。这种联系将通过构造斯图姆-刘维尔微分方程的合适生成元来建立，其性质与剖面 f_0 的结构密切相关。根据 Ω 的位置和函数 f_0 的符号，我们将区分色散方程可解性的两种情形：

- 特征值稀少（散焦情形）：$f_0 > 0$ 且 $\Omega \in (-\infty,\kappa_1)$。在此范围内，我们将看到，色散方程仅对较低模态 n 有解，并且 Ω 中至多有有限个解。
- 特征值丰富（聚焦情形）：$f_0 < 0$ 且 $\Omega \in (\kappa_2,+\infty)$。在此范围内，我们证明，对于任意足够大的 n，色散方程都有解，并且 Ω 中有无穷多个解，它们聚集于 κ_2.

4.4.1. 斯图姆-刘维尔方程。这里，我们将分析以下二阶微分方程的一些性质，该方程稍后会出现在色散方程中：

$$F'' + \tfrac{2n+1}{r}F' + \sigma_\Omega\nu_\Omega(r)F = 0, \tag{4.45}$$

其中，势函数 $\nu_\Omega\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ 由 (2.8) 和 (4.4) 定义，并且始终严格为正。这个自由斯图姆-刘维尔方程的行为与势函数 ν_Ω. 前的符号 σ_Ω 密切相关。若 $\sigma_\Omega = -1$，我们称方程 (4.45) 为散焦方程，对应于 $\Omega < \kappa_1$。然而，若 $\sigma_\Omega = 1$，则称该方程为聚焦方程，对应于 $\Omega > \kappa_2$. 。出于非常相似的原因，我们借用了非线性薛定谔方程中的这一术语。我们的目标是讨论 (4.45) 的解的一些定性性质，以供后文使用。

引理 4.2. 设 f_0 满足 (H1)-(H2)，$n \geqslant 1$ 且 $\Omega \notin [\kappa_1,\kappa_2]$。存在两个函数$y_\pm\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，它们属于 $\mathscr{C}^2$ 类，且满足 $y_\pm(0) = 1$，使得 (4.45) 在 (0, 1) 上的任意解都具有如下形式

$$\forall r\in(0,1),\quad F(r) = \alpha r^{-2n}y_-(r) + \beta y_+(r),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

此外，以下断言成立。

(1) 散焦情形：对于任意 $\Omega < \kappa_1$，函数 y_+ 严格递增，且

$$\forall r\in[0,1],\quad 1 \leqslant y_+(r) \leqslant e^{\frac{1}{2n}\int_0^r s\nu_\Omega(s)ds}.$$

（2）聚焦情形：对于任意 $\Omega > \kappa_2$，如果存在某个 $\theta\in(0,1]$ 使得

$$\frac{C_0}{n\theta(\Omega-\kappa_2)^\theta} < 1, \tag{4.46}$$

那么函数 y_+ 严格递减，且

$$\forall\, r \in [0,1], \quad \tfrac{1}{2} \leqslant y_+(r) \leqslant 1.$$

此外，

$$\forall r \in [0,1], \quad |y_+(r) - 1| \leqslant \frac{C_0}{\theta n(\Omega - \kappa_2)^\theta}.$$

证明。根据富克斯定理，解的结构是正则奇点处一般常微分方程的结果。指标方程为

$$x(x-1) + (2n+1)x = 0,$$

这等价于

$$x^2 + 2nx = 0.$$

它有两个不同的解

$$x_- = -2n, \quad x_+ = 0,$$

因此，根据弗罗贝尼乌斯方法，我们知道所有解的形式为

$$F(r) = \alpha r^{-2n} y_-(r) + \beta y_+(r), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

其中 $y_\pm$ 在 $[0,1]$ 上是解析的，且 $y_\pm(0) = 1$。

(1) 令 $\Omega < \kappa_1$，则根据 (4.4)，方程 (4.45) 写为

$$F'' + \tfrac{2n+1}{r} F' - \nu_\Omega(r) F = 0, \tag{4.47}$$

其中 ν_Ω 是一个正的连续函数。我们将证明 y_+ 严格递增。对该微分方程积分得到

$$y_+'(r) = \frac{1}{r^{2n+1}} \int_0^r s^{2n+1} \nu_\Omega(s) y_+(s) ds. \tag{4.48}$$

我们来验证 y_+ 为正，这反过来又根据 (4.48) 蕴含 y_+' 为正。为此，定义集合

$$I := \big\{ r \in [0,1], \forall s \in [0,r], \quad y_+(s) > 0 \big\}.$$

注意到 $y_+(0) = 1$，因此根据构造以及 y_+ 的连续性，集合 I 是 $[0,1]$ 中的一个非空开区间，形式为 $[0, \overline{r}]$。我们将证明 $\overline{r} = 1$。我们采用反证法，假设 $\overline{r} < 1$。考虑一个由 I 构成、递增且收敛于 $\overline{r}$ 的数列 (r_m)。记

$$y_+'(\overline{r}) = \lim_{m\to\infty} y_+'(r_m) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{r_m^{2n+1}} \int_0^{r_m} s^{2n+1} \nu_\Omega(s) y_+(s) ds = \frac{1}{\overline{r}^{2n+1}} \int_0^{\overline{r}} s^{2n+1} \nu_\Omega(s) y_+(s) ds,$$

其满足以下性质

$$\forall s \in [0, \overline{r}), \quad y_+(s) > 0.$$

Then

$$y_+'(\overline{r}) > 0,$$

这意味着

$$y_+(\overline{r}) > 0.$$

因此，由连续性可知，我们可以找到 $r_\star > \overline{r}$ 使得

$$\forall s \in [0, r_\star], \quad y_+(r_\star) > 0,$$

由此可得 $r_\star \in I$，这与 $\overline{r}$ 是最大值相矛盾。因此，我们得到

$$\forall r \in [0,1], \quad y_+(r) > 0.$$

结合 (4.48)，我们推得 y_+ 严格递增，进而

$$\forall r \in [0,1], \quad y_+(r) \geqslant y_+(0) = 1.$$

对（4.48）进行积分，并使用分部积分

$$y_+(r) = 1 + \int_0^r \frac{1}{s^{2n+1}} \int_0^s \tau^{2n+1} \nu_\Omega(\tau) y_+(\tau) d\tau ds \tag{4.49}$$

$$= 1 + \int_0^r \int_s^r \frac{1}{\tau^{2n+1}} d\tau s^{2n+1} \nu_\Omega(s) y_+(s) ds$$
$$= 1 + \frac{1}{2n} \int_0^r \big[1 - (\tfrac{s}{r})^{2n}\big] s \nu_\Omega(s) y_+(s) ds.$$

特别地，我们得到

$$1 \leqslant y_+(r) \leqslant 1 + \frac{1}{2n} \int_0^r s \nu_\Omega(s) y_+(s) ds.$$

现在，应用格朗沃尔不等式，我们得到

$$\forall\, r \in [0,1], \quad 1 \leqslant y_+(r) \leqslant e^{\frac{1}{2n}\int_0^r s\nu_\Omega(s)ds}.$$

(2) 由于 $\mu_\Omega^0 \geq 0$ ，并且与 (4.49) 类似，我们可以写成

$$y_+(r) = 1 - \frac{1}{2n} \int_0^r \big[1 - (\tfrac{s}{r})^{2n}\big] s \nu_\Omega(s) y_+(s) ds.$$

Set

$$y_+ = 1 - z_+, \tag{4.50}$$

then

$$\begin{aligned} z_+(r) &= \frac{1}{2n} \int_0^r \big[1 - (\tfrac{s}{r})^{2n}\big] s \nu_\Omega(s) ds - \frac{1}{2n} \int_0^r \big[1 - (\tfrac{s}{r})^{2n}\big] s \nu_\Omega z_+(s) ds \\ &:= f_n(r) - \mathcal{T}_n[z_+](r). \end{aligned} \tag{4.51}$$

应用引理 4.1，我们推得

$$0 \leqslant f_n(r) \leqslant \frac{C_0}{(\Omega - \kappa_2)^\theta} \frac{1}{2n} \int_0^r \frac{ds}{(1-s)^{1-\theta}} \leqslant \frac{C_0}{2\theta n (\Omega - \kappa_2)^\theta}.$$

类似地，我们得到

$$|\mathcal{T}_n[z_+](r)| \leqslant \frac{C_0}{2n\theta(\Omega - \kappa_2)^\theta} \|z_+\|_{L^\infty} \leqslant \frac{C_0}{2\theta n(\Omega - \kappa_2)^\theta} \|z_+\|_{L^\infty}.$$

因此，如果我们假设

$$\frac{C_0}{2\theta n(\Omega - \kappa_2)^\theta} \leqslant \frac{1}{4},$$

于是 $\mathcal{T}_n : \ L^\infty([0,1]) \to L^\infty([0,1])$ 是一个压缩映射，因此方程 (4.51) 只有一个满足条件的解 z_+

$$\forall r \in [0,1], \quad |z_+(r)| \leqslant \frac{2C_0}{3\theta n(\Omega - \kappa_2)^\theta} \leqslant \frac{1}{3}.$$

回到 (4.50)，我们推得

$$\frac{2}{3} \leqslant y_+(r) \leqslant \frac{4}{3}. \tag{4.52}$$

现在，与 (4.48) 类似，我们有

$$y_+'(r) = -\frac{1}{r^{2n+1}} \int_0^r s^{2n+1} \nu_\Omega(s)(s) y_+(s) ds.$$

因此，由 (4.52) 可知， y_+ 在 $[0,1]$, 上递减；又由于 $y_+(0) = 1$，可得

$$\forall\, r \in [0,1], \quad \frac{2}{3} \leqslant y_+(r) \leqslant 1.$$

至此，引理的证明完成。 □

4.4.2. 色散关系。上一节引入了自由聚焦-散焦斯图姆-刘维尔方程 (4.45)，本节旨在建立它与色散方程之间的联系，从而解析刻画 (4.2) 中引入的任意层级 n 的核方程。我们能够用同一套形式统一散焦区间和聚焦区间，分别对应于 $\Omega < \kappa_1$ 和 $\Omega > \kappa_2$。

设 $\Omega \notin [\kappa_1, \kappa_2]$ 和 $F_{n,\Omega}$ 是定义在 $[0,1]$ 上、属于 $\mathscr{C}^2$ 类的唯一解，它们满足（4.45）中引入的归一化自由斯图姆-刘维尔方程，即

$$F''_{n,\Omega} + \tfrac{2n+1}{r} F'_{n,\Omega} + \sigma_\Omega \nu_\Omega F_{n,\Omega} = 0, \quad F_{n,\Omega}(0) = 1. \tag{4.53}$$

其中，势函数 ν_Ω 已在（4.4）中定义。引理 4.2 保证了解的存在唯一性，其中 $y_+ = F_{n,\Omega}$。现在，定义以下函数，它受到剖面 f_0 的强烈影响

$$\zeta_n(\Omega) := F_{n,\Omega}(1)\left(\Omega - \frac{n}{n+1}\int_0^1 s f_0(s) ds\right) + \int_0^1 F_{n,\Omega}(s) s^{2n+1}\big(f_0(s) - 2\Omega\big) ds. \tag{4.54}$$

该函数（色散方程）的零点与核方程（4.2）之间的关系，将在以下关键结果中阐明。

引理 4.3. 设 $n \geqslant 1$，并假定 $\Omega \notin [\kappa_1, \kappa_2]$，在聚焦情形下还需满足条件（4.46）。那么，方程（4.2）在 $[0,1]$ 上存在非平凡连续解，当且仅当 Ω 满足色散方程

$$\zeta_n(\Omega) = 0.$$

证明。根据核方程 (4.2)–(4.4)，我们得到以下等价条件 n

$$h_n(r) = -\frac{\sigma_\Omega H_n[h_n](1)}{2nG_n(1)} (\mathrm{Id} - \sigma_\Omega \mathcal{L}_n^\Omega)^{-1}[\nu_\Omega r G_n], \tag{4.55}$$

注意到，$(\mathrm{Id} - \sigma_\Omega \mathcal{L}_n^\Omega)^{-1}$ follows 的存在性由命题 (4.3) 得出。因此，核是一个至多一维的向量子空间；当且仅当方程 (4.55) 至少有一个满足 $H_n[h_n](1) \neq 0$ 的解时，其维数才为一。现在，在这一假设下，根据 $H_n[h](1)$ 的定义（该定义由 (3.4) 得出），我们得到

$$\left[1 + \frac{\sigma_\Omega}{2nG_n(1)} \int_0^1 s^{n+1} (\mathrm{Id} - \sigma_\Omega \mathcal{L}_n^\Omega)^{-1}[\nu_\Omega r G_n](s) ds\right] H_n[h_n](1) = 0,$$

这意味着

$$1 + \frac{\sigma_\Omega}{2nG_n(1)} \int_0^1 s^{n+1} (\mathrm{Id} - \sigma_\Omega \mathcal{L}_n^\Omega)^{-1}[\nu_\Omega r G_n](s) ds = 0. \tag{4.56}$$

因此，当且仅当 (4.56) 连同条件一起成立时，核方程生成一个一维子空间，其生成元为 $\mathrm{h}_n := (\mathrm{Id} - \sigma_\Omega \mathcal{L}_n^\Omega)^{-1}[\nu_\Omega r G_n]$

$$\int_0^1 s^{n+1} \mathrm{h}_n(s) ds \neq 0.$$

但鉴于 (4.56)，后一个条件自动满足。下面引入以下实值函数

$$T(n,\Omega) := \frac{-\sigma_\Omega}{2nG_n(1)} \int_0^1 s^{n+1} (\mathrm{Id} - \sigma_\Omega \mathcal{L}_n^\Omega)^{-1}[\nu_\Omega r G_n](s) ds. \tag{4.57}$$

Usi由命题 4.2 所述， $\mathcal{L}_n^\Omega$是自伴的，因此我们可以将 $T(n,\Omega)$ 写成如下形式 s

$$T(n,\Omega) = \frac{-\sigma_\Omega}{2nG_n^\Omega(1)} \int_0^1 \big([(\mathrm{Id} - \sigma_\Omega \mathcal{L}_n^\Omega)^{-1}\big)[s^n \nu_\Omega](s) G_n^\Omega(s) s^2 ds.$$

因此，通过设定

$$h := -\sigma_\Omega (\mathrm{Id} - \sigma_\Omega \mathcal{L}_n^\Omega)^{-1}[s^n \nu_\Omega], \quad \text{and} \quad F := \frac{h}{r^n \nu_\Omega}, \tag{4.58}$$

我们推知

$$T(n,\Omega)=\frac{1}{2nG_n^\Omega(1)}\int_0^1 h(s)G_n^\Omega(s)s^2ds. \tag{4.59}$$

由 (3.5) 和 (4.41) 可得

$$-\sigma_\Omega\frac{h}{r^n\nu_\Omega}+\frac{1}{2n}\int_r^1\frac{1}{s^{n-1}}h(s)ds+\frac{1}{2nr^{2n}}\int_0^r s^{n+1}h(s)ds=1, \tag{4.60}$$

从而得到

$$-\sigma_\Omega F+\frac{1}{2n}\int_r^1 F(s)\,s\nu_\Omega(s)ds+\frac{1}{2nr^{2n}}\int_0^r F(s)\,s^{2n+1}\nu_\Omega(s)ds=1. \tag{4.61}$$

对该方程求两次导数，得到斯图姆-刘维尔方程 (4.45)

$$F''+\tfrac{2n+1}{r}F'+\sigma_\Omega\nu_\Omega F=0.$$

根据引理 4.2，我们知道所有解都具有如下形式

$$F(r)=\alpha r^{-2n}y_-(r)+\beta y_+(r),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

其中 $y_\pm$ 在 $[0,1]$ 上属于 $\mathscr{C}^2$ 类，且 $y_\pm(0)=1$。因此，根据 (4.58) 的第二点，我们推得，

$$h(r)=\nu_\Omega(r)\Big(\alpha r^{-n}y_-(r)+\beta r^n y_+(r)\Big).$$

由这一一般结构可轻易看出，与 α 相关的函数在零点处是奇异的，且不属于与范数 (4.6) 相关的空间 L^2_Ω，这意味着必然有

$$h(r)=\beta\nu_\Omega(r)\ r^n y_+(r), \tag{4.62}$$

由此，结合 (4.58) 可得

$$F(r)=\beta y_+(r),$$

其中 $y_+(0)=1$。注意，函数 y_+ 与在 (4.53) 中引入的 $F_{n,\ \Omega}$ 相同。由这一事实以及 (4.59) 和 (4.58) 可得

$$T(n,\Omega)=\frac{\beta}{2nG_n^\Omega(1)}\int_0^1\left[G_n^\Omega(r)r^{-n+1}\right]\left[F_{n,\Omega}(r)\nu_\Omega(r)r^{2n+1}\right]dr. \tag{4.63}$$

此外，回到 (4.60)，我们可以写成

$$\forall r\in[0,1],\quad -\sigma_\Omega\beta F_{n,\Omega}(r)+\frac{\beta}{2n}\int_r^1 F_{n,\Omega}(s)s\nu_\Omega(s)ds+\frac{\beta}{2nr^{2n}}\int_0^r F_{n,\Omega}(s)s^{2n+1}\nu_\Omega(s)ds=1. \tag{4.64}$$

现在，我们可以将方程 (4.45) 写成

$$\left(r^{2n+1}F'_{n,\Omega}\right)'=-\sigma_\Omega F_{n,\Omega}(r)\nu_\Omega(r)r^{2n+1}. \tag{4.65}$$

然后，经过两次分部积分可得

$$\begin{aligned}-\sigma_\Omega T(n,\Omega)=&\frac{\beta}{2nG_n^\Omega(1)}\Big(G_n^\Omega(1)F'_{n,\Omega}(1)-F_{n,\Omega}(1)\mathcal{H}'_n(1)\Big)\\&+\frac{\beta}{2nG_n^\Omega(1)}\int_0^1\left[r^{2n+1}\mathcal{H}'_n(r)\right]'F_{n,\Omega}(r)dr,\end{aligned} \tag{4.66}$$

with

$$\mathcal{H}_n(r):=G_n^\Omega(r)r^{-n+1}.$$

应用 (3.5) 可得

$$\mathcal{H}_n(r)=n\Omega r^2+\int_0^1 sf_0(s)ds-(n+1)\int_0^r sf_0(s)ds+\frac{n+1}{r^{2n}}\int_0^r s^{2n+1}f_0(s)ds.$$

对该恒等式求导并消去相应项后，得到

$$\mathcal{H}'_n(r)=2n\Omega r-2n\frac{n+1}{r^{2n+1}}\int_0^r s^{2n+1}f_0(s)ds, \tag{4.67}$$

进而得到

$$\mathcal{H}_n'(1) = 2n\left(\Omega - (n+1)\int_0^1 r^{2n+1} f_0(r)dr\right), \tag{4.68}$$

and

$$\big(r^{2n+1}\mathcal{H}_n'(r)\big)' = 2n(n+1)r^{2n+1}\big(2\Omega - f_0(r)\big). \tag{4.69}$$

另一方面，对 (4.65) 积分可得

$$F_{n,\Omega}'(1) = -\sigma_\Omega \int_0^1 F_{n,\Omega}(r)\nu_\Omega(r)r^{2n+1}dr.$$

因此，将该恒等式与用 $r=1$ 测试的 (4.64) 结合起来，可得

$$\tfrac{\beta}{2n}F_{n,\Omega}'(1) = -\sigma_\Omega - \beta F_{n,\Omega}(1). \tag{4.70}$$

综合 (4.66)、(4.69) 和 (4.70)，可得 $T(n,\Omega)=1$ 等价于

$$F_{n,\Omega}(1)\big(G_n(1) + \tfrac{1}{2n}\mathcal{H}_n'(1)\big) + (n+1)\int_0^1 F_{n,\Omega}(r)r^{2n+1}\big(f_0(r) - 2\Omega\big)dr = 0.$$

此外，利用 (3.6) 和 (4.68)，可得

$$G_n(1) + \tfrac{1}{2n}\mathcal{H}_n'(1) = (n+1)\Omega - n\int_0^1 r f_0(r)dr.$$

综合最后两个恒等式，可得

$$F_{n,\Omega}(1)\left(\Omega - \frac{n}{n+1}\int_0^1 r f_0(r)dr\right) + \int_0^1 F_{n,\Omega}(r)r^{2n+1}\big(f_0(r) - 2\Omega\big)dr = 0.$$

由此完成引理的证明。 □

4.4.3. 零点的稀缺性（散焦情形）。本小节中，我们假设 f_0 是满足 (H1)-(H2) 的正函数。我们将在下文的命题 4.4 中看到，对于低对称性，命题 4.4 中引理 4.3 所述的色散方程存在属于区间 $(-\infty,\kappa_1)$ 的实解 Ω，其中 n。特征值的稀缺性可以形式化地解释如下。当 $f_0>0$ 时，定义于 (2.20) 中的数列 $(\Omega_n)_n$ 严格递增并收敛于 κ_2。因此，该数列与定义域 $\mathbb{R}\setminus[\kappa_1,\kappa_2]$ 的交集是嵌入在 $(-\infty,\kappa_1)$ 中的有限集，而我们能够构造的解与这些有限个奇异点相对应。更确切地说，我们得到以下结果。

命题 4.4. 设 $f_0>0$ 满足 (H1)-(H2)，并考虑 n、$m\geqslant 1$。那么，以下断言成立。

(1) 在 (2.20) 中定义的数列 $(\Omega_n)_{n\geqslant 1}$ 严格递增，并收敛于 κ_2.(2) 函数 ζ_n 满足

$$\forall\,\Omega\leqslant\min(\kappa_1,\widehat{\Omega}_n),\quad \zeta_n\big(\Omega\big)<0.$$

(3) 若 $n\leqslant\frac{\kappa_1}{\kappa_2-\kappa_1}$，则 $\Omega_n<\frac{n\kappa_2}{n+1}\leqslant\kappa_1$ 且

$$\zeta_n\big(\tfrac{n\kappa_2}{n+1}\big)>0.$$

(4) 若 $3\leqslant m\leqslant\frac{f_0(0)-f_0(1)-f_0(0)}{}$，则 $\zeta_m(\Omega)=0$ 至少有一个解 $\Omega_m\in(\widehat{\Omega}_m,\frac{m\kappa_2}{m+1})$。此外，

$$\forall\,n\geqslant 2,\quad \zeta_{nm}(\Omega_m)<0.$$

证明。(1) 根据 (2.20) 和定义 (2.11)，我们得到

$$\widehat{\Omega}_n = \kappa_2 - \frac{n+1}{n}\int_0^1 s^{2n+1}f_0(s)ds.$$

那么，该数列的单调性由剖面的正性得出 f_0. 很容易验证其收敛到 κ_2。

(2) 由于 $\Omega \leqslant \kappa_1 = \frac{f_0(0)}{2}$，因此由 f 的单调性可得

$$f_0(r) - 2\Omega \geqslant f_0(r) - f_0(0) \geqslant 0. \tag{4.71}$$

结合由引理 4.2-(1) 得出的 $F_{n,\Omega}$ 单调递增这一事实，可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 F_{n,\Omega}(r) r^{2n+1}\big(f_0(r) - 2\Omega\big)dr &< F_{n,\Omega}(1)\int_0^1 r^{2n+1}\big(f_0(r) - 2\Omega\big)dr \\ &= F_{n,\Omega}(1)\left(\int_0^1 r^{2n+1} f_0(r)dr - \frac{\Omega}{n+1}\right).\end{aligned}$$

因此，由 (4.54) 以及 (2.20) 中 Ω_n 的定义，我们得到以下不等式

$$\begin{aligned}\zeta_n(\Omega) &< F_{n,\Omega}(1)\left(\frac{n}{n+1}\Omega - \frac{n}{n+1}\int_0^1 r f_0(r)dr + \int_0^1 r^{2n+1} f_0(r)dr\right) \\ &= F_{n,\Omega}(1)\frac{n}{n+1}\left(\Omega - \widehat{\Omega}_n\right).\end{aligned}$$

这尤其意味着

$$\forall \Omega \leqslant \widehat{\Omega}_n, \quad \zeta_n(\Omega) < 0.$$

(3) 首先注意，假设 $n \leqslant \frac{\kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}$ 等价于 $\frac{n\kappa_2}{m+1} = \frac{n}{n+1}\int_0^1 s f_0(s)ds \leqslant \kappa_1$。由 (4.54) 可知，在 $\Omega = \frac{n\kappa_2}{n+1}$ 的特殊情形下

$$\zeta_n\big(\tfrac{n\kappa_2}{n+1}\big) = \int_0^1 F_{n,\Omega}(r) r^{2n+1}\big(f_0(r) - 2\tfrac{n\kappa_2}{n+1}\big)dr > 0,$$

利用 (4.71) 可得。要证明 $\Omega_n < \frac{n\kappa_2}{n+1}$，可以根据 (2.20) 中 Ω_n 的定义进行直接计算，也可以直接引用命题 4.4 的第二点以及估计 $\zeta_n\big(\frac{n\kappa_2}{n+1}\big) > 0$

(4) 取 $3 \leqslant m \leqslant \frac{f_0(0)}{f_0(1) - f_0(0)}$，由单调性可知 $m \leqslant \frac{f_0(0)}{f_0(1) - f_0(0)} \leqslant \frac{\kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}$。然后结合 (2) 和 (3) 两点，并利用介值定理，可推得存在一个实数 $\Omega_m \in (\Omega_m, \frac{m\kappa_2}{m+1})$，使得

$$\zeta_m(\Omega_m) = 0.$$

由于 $m \leqslant \frac{\kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}$，这意味着 $\frac{m}{m+1}\int_0^1 s f_0(s)ds \leqslant \kappa_1$，因此

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}_{2m} &= \int_0^1 s f_0(s)ds - \frac{2m+1}{2m}\int_0^1 s^{4m+1} f_0(s)ds \\ &\geqslant \int_0^1 s f_0(s)ds - \frac{1}{4m} f_0(1) \\ &\geqslant \frac{m}{m+1}\int_0^1 s f_0(s)ds.\end{aligned}$$

因此，要得到该不等式

$$\int_0^1 s f_0(s)ds - \frac{1}{4m} f_0(1) \geqslant \frac{m}{m+1}\int_0^1 s f_0(s)ds \Longleftrightarrow \int_0^1 s f_0(s)ds \geqslant \frac{m+1}{4m} f_0(1).$$

当满足以下条件时，该不等式成立

$$f_0(0) \geqslant \frac{m+1}{2m} f_0(1). \tag{4.72}$$

由我们对 m ($3 \leqslant m \leqslant \frac{f_0(0)}{f_0(1) - f_0(0)}$) 的假设以及 f_0 的正性可得

$$f_0(0) \geqslant \frac{m}{m+1} f_0(1) \geqslant \frac{m+1}{2m} f_0(1),$$

这意味着 (4.72)。因此,

$$\widehat{\Omega}_{2m} \geqslant \frac{m}{m+1}\int_0^1 s f_0(s)ds > \Omega_m,$$

根据第 (2) 点可得

$$\zeta_{2m}(\Omega_m) < 0.$$

由第 (1) 点所建立的数列 $(\widehat{\Omega}_n)_{n\geqslant 1}$ 的单调性，我们得到

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \widehat{\Omega}_{nm} > \widehat{\Omega}_{2m} > \Omega_m.$$

因此，由第 (2) 点可推得

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \zeta_{nm}(\Omega_m) < 0,$$

由此证明完毕。 □

4.4.4. 零点的丰富性（聚焦情形）。在本小节中，剖面 f_0 为负，并满足 (H1)-(H2)。我们旨在证明，在此情形下，色散方程在大对称性条件下有无穷多个解，且特征值位于区域 (κ_2,∞)，对应于散焦区间。与前文分析的稀缺情形一样，特征值的丰富性可以作如下形式化解释。当 $f_0 < 0$时，在 (2.20) 中定义的奇异数列 $(\widehat{\Omega}_n)_n$ 严格递减并收敛于 κ_2。因此，该数列将与定义域 $\mathbb{R}\setminus[\kappa_1,\kappa_2]$ 相交于嵌入 (κ_2,∞) 中的有限集，而我们能够构造的解与位于 (κ_2,∞) 中的奇异点配对。事实上，我们证明以下结果。

命题 4.5. 设 $m \in \mathbb{N}^*, \alpha \in (1,2)$，且 $f_0 < 0$ 满足 (H1)-(H2)。存在一个足够大的 m_0，其取值依赖于 f_0，使得以下断言成立。对于任意 $m \geqslant m_0$,

(1) 存在 $\Omega_m \in (\Omega_m - m^{-\alpha}, \Omega_m)$，使得

$$\zeta_m(\Omega_m) = 0.$$

(2) 对于任意 $n \geqslant 1$，我们有

$$\Omega_m \neq \widehat{\Omega}_{nm}.$$

(3) 对于任意 $n \geqslant 2$

$$\zeta_{nm}(\Omega_m) \neq 0.$$

证明. (1) 将 (4.53) 的解 $F_{n,\Omega}$ 分解如下

$$F_{n,\Omega}(r) =: F_{n,\Omega}(1) + \rho_{n,\Omega}(r).$$

然后，基于 (4.54) 进行直接计算可得

$$\begin{aligned}\zeta_n(\Omega) &= \frac{n}{n+1}F_{n,\Omega}(1)\left(\Omega - \widehat{\Omega}_n\right) + \int_0^1 \rho_{n,\Omega}(s)s^{2n+1}\big(f_0(s) - 2\Omega\big)ds \\ &=: \zeta_{n,1}(\Omega) + \zeta_{n,2}(\Omega),\end{aligned} \tag{4.73}$$

其中 $\zeta_{n,2}$ 表示最后一个积分项。第一步是证明

$$\zeta_n(\widehat{\Omega}_n) > 0. \tag{4.74}$$

由 (4.73) 可容易得到

$$\zeta_n(\widehat{\Omega}_n) = \int_0^1 \rho_{n,\widehat{\Omega}_n}(s)s^{2n+1}\big(f_0(s) - 2\widehat{\Omega}_n\big)ds.$$

接下来，我们 他们将证明以下界：存在 $C_0 > 0$，使得对于任意 $\theta \in (0,1)$

$$\frac{C_0^{-1}(1-r)}{n(\Omega-\kappa_1)} \leqslant \rho_{n,\Omega}(r) \leqslant \frac{C_0(1-r)^\theta}{\theta\, n(\Omega-\kappa_2)^\theta}. \tag{4.75}$$

为此，我们首先应用泰勒公式，其中 $\rho_{n,\Omega}(1) = 0$

$$\rho_{n,\Omega}(r) = -\int_r^1 \rho'_{n,\Omega}(s)ds = -\int_r^1 F'_{n,\Omega}(s)ds.$$

类似于（4.48），我们得到

$$F'_{n,\Omega}(r) = -\frac{1}{r^{2n+1}}\int_0^r s^{2n+1}\nu_\Omega(s)F_{n,\Omega}(s)ds,$$

即

$$\rho_{n,\Omega}(r) = \int_r^1 \frac{1}{s^{2n+1}}\int_0^s \tau^{2n+1}\nu_\Omega(\tau)F_{n,\Omega}(\tau)d\tau.$$

结合引理 4.1 和引理 4.2-(2)，可知对于任意 $\theta \in (0,1]$

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \rho_{n,\Omega}(r) &\leqslant \frac{C_0}{(\Omega-\kappa_2)^\theta}\int_r^1 \frac{1}{s^{2n+1}}\int_0^s \frac{\tau^{2n+1}}{(1-\tau)^{1-\theta}}d\tau \\
&\leqslant \frac{C_0}{(\Omega-\kappa_2)^\theta}\int_r^1 \frac{1}{s^{2n+1}}\int_0^s \frac{\tau^{2n+1}}{(1-s)^{1-\theta}}d\tau \\
&\leqslant \frac{C_0(1-r)^\theta}{\theta\, n(\Omega-\kappa_2)^\theta}.
\end{aligned}$$

对于下界，我们再次使用引理 4.1 和引理 4.2，以及下面的估计，该估计由 (H1)-(H2) 推出，

$$\forall r \in (0,1], \quad \frac{f_0'(r)}{r} \geqslant C_1 > 0$$

对于某个 $C_1 > 0$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\rho_{n,\Omega}(r) &\geqslant \frac{1}{2(\Omega-\kappa_1)}\int_r^1 \frac{1}{s^{2n+1}}\int_0^s \tau^{2n+1}\frac{f_0'(\tau)}{\tau}d\tau ds \\
&\geqslant \frac{C_1(1-r)}{8(n+1)(\Omega-\kappa_1)}
\end{aligned}$$

因此，取足够大的 C_0，我们得到

$$\frac{C_1}{8(n+1)} \geqslant C_0^{-1}n,$$

由此完成了对 (4.75) 的证明。现在，由这个不等式可推得

$$\frac{C_0^{-1}(1-r)}{(\widehat{\Omega}_n-\kappa_1)n} \leqslant \rho_{n,\widehat{\Omega}_n}(r) \leqslant \frac{C_0(1-r)^\theta}{\theta\, n(\widehat{\Omega}_n-\kappa_2)^\theta}. \tag{4.76}$$

由 (2.20)，由于 $f_0(1) < 0$，可得渐近行为

$$\widehat{\Omega}_n = \kappa_2 - \frac{f_0(1)}{2n} + O(n^{-2}), \tag{4.77}$$

并且结合 (4.76) 以及 $\Omega_n - \kappa_1 > 0$、$\Omega_n - \kappa_2 > 0$ 这一事实，我们发现取足够大的 C_0 后，可得

$$\forall\, n \geqslant 1, \forall r \in (0,1), \quad \frac{C_0^{-1}(1-r)}{n} \leqslant \rho_{n,\widehat{\Omega}_n}(r) \leqslant \frac{C_0(1-r)^\theta}{\theta\, n^{1-\theta}}, \tag{4.78}$$

and

$$f_0(s) - 2\widehat{\Omega}_n = f_0(s) - 2\kappa_2 + O(n^{-1}) := f_1(s) + O(n^{-1}).$$

注意，由于 f_0 的单调性

$$f_1(0) < 0, \quad \text{and} \quad f_1(1) > 0.$$

于是，由连续性和一致收敛性可知，我们可以找到与 n 无关的 $\delta,\varepsilon\in(0,1)$，使得

$$\forall\, s\in[\delta,1],\quad f_0(s)-2\widehat{\Omega}_n\geqslant\varepsilon. \tag{4.79}$$

进行分解

$$\begin{aligned}\zeta_n(\widehat{\Omega}_n)&=\int_0^{\delta}\rho_{n,\widehat{\Omega}_n}(s)s^{2n+1}\big(f_0(s)-2\widehat{\Omega}_n\big)ds+\int_{\delta}^{1}\rho_{n,\widehat{\Omega}_n}(s)s^{2n+1}\big(f_0(s)-2\widehat{\Omega}_n\big)ds\\&:=I_{n,1}+I_{n,2}.\end{aligned} \tag{4.80}$$

对 $\theta=1$ 应用 (4.78)

$$|I_{n,1}|\leqslant C_0\delta^{2n+2}. \tag{4.81}$$

对于 $I_{n,\ 2}$，我们使用 (4.78) 和 (4.79)，当 n较大时得到

$$\begin{aligned}I_{n,2}&\geqslant\frac{C_0^{-1}\varepsilon}{n}\int_{\delta}^{1}(1-s)s^{2n+1}ds\\&\geqslant\frac{C_0^{-1}\varepsilon}{n}\left(\int_0^{1}(1-s)s^{2n+1}ds+O(\delta^{2n+1})\right).\end{aligned} \tag{4.82}$$

另一方面，我们得到

$$\int_0^{1}(1-s)s^{2n+1}ds=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

将此不等式代入 (4.82) 得到

$$I_{n,2}\geqslant\frac{C_0^{-1}\varepsilon}{n^3}\left(1+O(\delta^{2n+1})\right). \tag{4.83}$$

综合(4.80)、(4.81)和(4.83)，当 n足够大时，有

$$\zeta_n(\widehat{\Omega}_n)\geqslant\frac{C_0^{-1}\varepsilon}{n^3}-C_0\delta^{2n+1}\geqslant\frac{C_1(\varepsilon,\delta)}{n^3},$$

对于某个常数 $C_1(\varepsilon,\delta)\ >0$. 这就保证了(4.74)。
回到(4.73)，并利用(4.75)与 $\theta=1$ ，可得

$$|\zeta_{n,2}(\Omega)|\leqslant\frac{C_0}{n(\Omega-\kappa_2)}\int_0^{1}(1-s)s^{2n+1}ds\leqslant\frac{C_0}{n^3(\Omega-\kappa_2)}.$$

令 $\alpha>1$ ，并取$\Omega\ \geqslant\Omega_n-n^{-\alpha}$，则利用(4.77)可推出，当 n足够大时

$$|\zeta_{n,2}(\Omega)|\leqslant\frac{C_0}{n^2}. \tag{4.84}$$

另一方面，根据(4.73)和引理 4.2，当 n足够大时，我们得到

$$\zeta_{n,1}(\widehat{\Omega}_n-n^{-\alpha})\leq-\tfrac{1}{2}n^{-\alpha}\frac{n}{n+1}\leqslant-\tfrac{1}{3}n^{-\alpha}, \tag{4.85}$$

综合(4.84)和(4.85)，我们得到，当 $\alpha\in(1,2)$且 n 足够大时

$$\zeta_n(\widehat{\Omega}_n-n^{-\alpha})\leqslant-\tfrac{1}{4}n^{-\alpha}.$$

由此可知，当 n 足够大时

$$\zeta_n(\widehat{\Omega}_n-n^{-\alpha})<0,$$

应用介值定理即可得到该结论，这表明至少存在一个解

$$\Omega_m\in(\widehat{\Omega}_m-m^{-\alpha},\widehat{\Omega}_m),\quad\zeta_m(\Omega_m)=0. \tag{4.86}$$

(2) 由 (2.20) 以及 f_0 为负这一事实可知， $m\mapsto\Omega_m$ 严格递减。因此，利用 (4.77)，我们得到

$$\forall n\geqslant2,\quad|\widehat{\Omega}_{nm}-\widehat{\Omega}_m|\geqslant|\widehat{\Omega}_{2m}-\widehat{\Omega}_m|\geqslant c\,m^{-1},$$

其中某个常数为 $c>0$。另一方面，利用 (4.86)，取 $\alpha=\frac{3}{2}$，可得

$$|\Omega_m-\widehat{\Omega}_m|\leqslant cm^{-\frac{3}{2}}.$$

因此，当 m 足够大时，我们可推得

$$\forall n\geqslant 2,\quad |\widehat{\Omega}_{nm}-\Omega_m|\geqslant cm^{-1}. \tag{4.87}$$

(3) 由 (4.73) 可得

$$\begin{aligned}\zeta_{nm}(\Omega_m)&=\frac{nm}{nm+1}F_{nm,\Omega}(1)\left(\Omega_m-\widehat{\Omega}_{nm}\right)+\int_0^1\rho_{nm,\Omega_m}(s)s^{2nm+1}\big(f_0(s)-2\Omega_m\big)ds\\&=\zeta_{nm,1}(\Omega_m)+\zeta_{nm,2}(\Omega_m).\end{aligned} \tag{4.88}$$

然后，根据 (4.87) 和引理 4.2，我们写出

$$\zeta_{nm,1}(\Omega_m)\geqslant cm^{-1}.$$

对于第二部分，我们使用 (4.84) 和 $\Omega_m\geqslant\Omega_{nm}-(nm)^{-\alpha}$ 得到

$$|\zeta_{nm,2}(\Omega_m)|\leqslant\frac{C_0}{n^2m^2}\leqslant C_0m^{-2}.$$

结合前述估计和 (4.88)，我们可推得，当 m 和 $n\geqslant 2$ 足够大时

$$\zeta_{nm,2}(\Omega_m)\geqslant cm^{-1}.$$

这尤其表明，ζ_{nm} 在 Ω_m 处并不为零，如前所述。 □

4.5. 核生成元。本节将给出线性算子 $D_g\widehat{G}(\Omega_m,0):\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m,}(\mathbb{D})\to\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m,}(\mathbb{D})$ 的核生成元，其中 Ω_m 是前两节中构造的特征值。我们设

$$\mathcal{A}_{\Omega,m}:=\Big\{n\in m\,\mathbb{N}^\star,\quad \zeta_n(\Omega)=0\Big\}. \tag{4.89}$$

然后，由 (3.3) 和命题 4.1 可推得，对于 $\Omega\notin([\kappa_1,\kappa_2]\cup\mathbb{S}\cup\mathcal{S}^m_{\rm sing})$

$$\dim\,\mathrm{Ker}D_g\widehat{G}(\Omega,0)=\mathrm{Card}\,\mathcal{A}_{\Omega,m}. \tag{4.90}$$

由命题 4.4 和命题 4.5，我们可以总结如下。

- 情形 1：$f_0>0$（散焦情形）。对于 $3\leqslant m\leqslant\frac{f_0(0)-f_0(1)}{f_0(0)-f_0(1)-f_0(0)}$，至少存在一个 $\Omega_m\in(-\infty,\kappa_1)\backslash\mathcal{S}^m{}_{\rm sing}$，满足 $\zeta_m(\Omega_m)=0$ 且 $\zeta_{nm}(\Omega_m)\neq 0$，对任意 $n\geqslant 2$. 这意味着

$$\dim\,\mathrm{Ker}D_g\widehat{G}(\Omega_m,0)=1.$$

- 情形 2：$f_0<0$（聚焦情形）。存在足够大的 $m_0\geqslant 1$，使得对于任意 $m\geqslant m_0$，都存在 $\Omega_m\in(\Omega_m-m^{-\alpha},\Omega_m)$，满足 $\alpha\in(0,1)$，使得 $\zeta_m(\Omega_m)=0$ 且 $\zeta_{nm}(\Omega_m)\neq 0$，对任意 $n\geqslant 2.$，可得

$$\dim\,\mathrm{Ker}D_g\widehat{G}(\Omega_m,0)=1.$$

注意，在散焦情形下，为推导色散方程，许多步骤都要求满足假设 (4.46)。根据先前的界以及 (4.77)，我们对 Ω_m 的选取满足该假设，因此对任意给定的 $\theta\in(0,1)$，有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{C_0}{m\theta(\Omega_m-\kappa_2)^\theta}=0<1,$$

另一个需要强调的问题涉及命题 4.1 中引入的集合 $\mathbb{S}$，它是嵌入在 (κ_2,∞) 中的有限集。由于数列 $(\Omega_m)_{m\geqslant m_0}$ 收敛到 κ_2，因此当 m_0足够大时，它不会与集合 $\mathbb{S}$ 相交

接下来，我们将验证 $\mathrm{Ker}D_g\widehat{G}(\Omega_m,0)$ 实际上足够光滑，而这一性质在推导 (4.90) 时被隐含地使用了。

命题 4.6. 设 f_0 满足 (H1)–(H2)，其中 $\beta \in (0,1)$。令 $\alpha \in (0,\beta)$ $m \geqslant 1$，且 Ω_m 与上述情形 1 和 2 中的 $\widehat{\ }$ 一样。那么，$D_g G(\Omega_m,0)$ 的核是一维的，由以下元素生成：

$$z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mapsto h^\star(z) = h_m^\star(r)\cos(m\theta) \in \mathscr{C}_{s,m}^{1,\alpha}(\mathbb{D}), \tag{4.91}$$

with

$$h_m^\star(r) = r^m F_{n,\Omega_m}(r)\mu_{\Omega_m}^0(r)\int_1^r \frac{1}{F_{m,\Omega_m}^2(s)s^{2m+1}}\int_0^s F_{m,\Omega_m}(\tau)\tau^{2m+1}\left(\Omega_m - \tfrac{f_0(\tau)}{2}\right)d\tau ds,$$

和 $-\frac{H_m[h_m^\star](1)}{G_m(1)} = \frac{1}{2(m+1)}$.

证明。由 (4.2) 可知， h 是核中的一个元素，当且仅当

$$h_m(r) - \frac{\mu_{\Omega_m}^0(r)}{2mr^m}H_m[h_m](r) = \tilde{V}(r), \quad \text{with} \quad \tilde{V}(r) := -\frac{H_m[h_m](1)}{2nG_n(1)}\mu_{\Omega_m}^0(r)rG_n(r).$$

根据上文的讨论，只要核中的元素属于空间 $\mathscr{C}_{s,m}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$，则在两种情况下核都是一维的。通过伸缩，我们可以假设

$$-\tfrac{H_m[h_m](1)}{G_m(1)} = \tfrac{1}{2(m+1)} \tag{4.92}$$

并且核方程变为

$$h_m(r) - \frac{\mu_{\Omega_m}^0(r)}{2mr^m}H_m[h_m](r) = \tilde{V}(r), \quad \text{with} \quad \tilde{V}(r) = \tfrac{\mu_{\Omega_m}^0(r)}{4m(m+1)}rG_m(r).$$

对于 $r = 1$，我们应从归一化条件得到

$$h_m(1) = 0. \tag{4.93}$$

根据定义 (3.4)，并引入 $F_m(r) := \frac{h_m(r)}{r^m\mu_{\Omega_m}^0(r)}$，我们得到

$$F_m(r) - \frac{1}{2m}\int_r^1 s\mu_{\Omega_m}^0(s)F_m(s)ds - \frac{1}{2mr^{2m}}\int_0^r s^{2m+1}\mu_\Omega^0(s)F_m(s)ds = \tfrac{G_m(r)}{4m(m+1)r^{m-1}},$$

其中 $F_m(1) = 0.$。因此

$$F_m''(r) + \tfrac{2m+1}{r}F_m'(r) + \mu_{\Omega_m}^0(r)F_m(r) = \tfrac{1}{4m(m+1)}r^{-2m-1}\left(r^{2m+1}\left(\tfrac{G_m(r)}{r^{m-1}}\right)'\right)'.$$

利用 (3.5) 进行直接计算并经过若干次约化后，得到

$$F_m''(r) + \tfrac{2m+1}{r}F_m'(r) + \mu_{\Omega_m}^0(r)F_m(r) = \Omega_m - \tfrac{f_0(r)}{2}.$$

利用 (4.53) 和常数变易法，我们得到两个常数 c_1、c_2，使得

$$\begin{aligned} F_m(r) =& c_1F_{m,\Omega_m}(r) + c_2F_{m,\Omega_m}(r)\int_1^r \frac{ds}{F_{m,\Omega_m}^2(s)s^{2m+1}} \\ &+ F_{m,\Omega_m}(r)\int_1^r \frac{1}{F_{m,\Omega_m}^2(s)s^{2m+1}}\int_0^s F_{m,\Omega_m}(\tau)\tau^{2m+1}\left(\Omega_m - \tfrac{f_0(\tau)}{2}\right)d\tau ds. \end{aligned}$$

由于 $F_m(1) = 0$，于是 $c_1 = 0$，因此

$$\begin{aligned} F_m(r) =& F_{m,\Omega_m}(r)\int_1^r \frac{1}{F_{m,\Omega_m}^2(s)s^{2m+1}}\int_0^s F_{m,\Omega_m}(\tau)\tau^{2m+1}\left(\Omega_m - \tfrac{f_0(\tau)}{2}\right)d\tau ds \\ &+ c_2F_{m,\Omega_m}(r)\int_1^r \frac{ds}{F_{m,\Omega_m}^2(s)s^{2m+1}}. \end{aligned}$$

回到 h_m，与 c_2 相关的积分项在零点处是奇异的，因此连续解的形式为

$$h_m^\star(r) = r^m F_{m,\Omega_m}(r)\mu_{\Omega_m}^0(r)\int_1^r \frac{1}{F_{m,\Omega_m}^2(s)s^{2m+1}}\int_0^s F_{m,\Omega_m}(\tau)\tau^{2m+1}\left(\Omega_m - \tfrac{f_0(\tau)}{2}\right)d\tau ds.$$

重整化 (4.92) 可写成如下形式

$$-\frac{H_m[h_m^\star](1)}{G_m(1)} = \frac{1}{2(m+1)}. \tag{4.94}$$

现在，我们将证明核 $h^\star(z) := h_m^\star(r)\cos(m\theta)$ 的生成元属于 $\mathscr{C}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$。令 $F_{m,\Omega_m}(r) = \tilde{F}_{m,\Omega_m}(r^2)$ 且 $\mu_\Omega^0(r) = \tilde{\mu}_\Omega^0(r^2)$，并定义

$$\mathcal{G}_m(x) := \frac{1}{4}\tilde{F}_{m,\Omega}(x)\tilde{\mu}_{\Omega_m}^0(x)\int_1^x \frac{1}{\tilde{F}_{m,\Omega_m}^2(s)s^{m+1}}\int_0^s \tilde{F}_{m,\Omega_m}(\tau)\tau^m\left(\Omega_m - \frac{\tilde{f}_0(\tau)}{2}\right)d\tau ds.$$

我们注意到， $h^\star$ 可以写成

$$h^\star(z) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{G}_m(|z|^2)z^m\right].$$

若 $\tilde{F}_{m,\Omega_m}$ 是 $\mathscr{C}^2$，则可得 $\mathcal{G}_m$ 是 $\mathscr{C}^{1,\alpha}([0,1])$，从而得到 $h^\star \in \mathscr{C}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$。我们来验证 $\tilde{F}_{m,\Omega_m}$ 是 $\mathscr{C}^2$。注意，由于 F_{m,Ω_m} 是 $\mathscr{C}^2$，$\tilde{F}_{m,\Omega_m}$ 正则性的唯一问题点是 0。首先，注意到 $F_{m,\Omega_m}(0) = 1$。其次，

$$\lim_{x\to 0}\tilde{F}'_{m,\Omega_m}(x) = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0}\frac{F_{m,\Omega_m}(r)}{r} = -\frac{\sigma_{\Omega_m}}{2(2m+2)}\nu_{\Omega_m}(0),$$

其中，最后一个不等式用到了常微分方程 (4.48)。第三，我们来计算 $\lim_{x\to 0}\tilde{F}''_{m,\Omega_m}(x)$。为此，我们注意到，通过标准计算，函数 F_{m,Ω_m} 满足微分方程

$$x\tilde{F}''_{m,\Omega_m}(x) + \tilde{F}'_{m,\Omega_m}(x)(m+1) + \frac{\sigma_{\Omega_m}}{4}\tilde{\nu}_{\Omega_m}(x)\tilde{F}_{m,\Omega_m}(x) = 0,$$

进而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\tilde{F}''_{m,\Omega_m}(x) &= -\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{F}'_{m,\Omega_m}(x)(m+1) + \frac{\sigma_{\Omega_m}}{4}\tilde{\nu}_{\Omega_m}(x)\tilde{F}_{m,\Omega_m}(x)}{x}\\ &= -\lim_{x\to 0}\left\{\tilde{F}''_{m,\Omega_m}(x)(m+1) + \frac{\sigma_{\Omega_m}}{4}[\tilde{\nu}_{\Omega_m}(x)\tilde{F}_{m,\Omega_m}(x)]'\right\},\end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{x\to 0}\tilde{F}''_{m,\Omega_m}(x) = \frac{-\sigma_{\Omega_m}}{4(m+2)}\left[\tilde{\nu}'_{\Omega_m}(0) - \frac{\tilde{\nu}_{\Omega_m}(0)^2\sigma_{\Omega_m}}{2(2m+1)}\right].$$

这意味着 $\tilde{F}_{m,\Omega_m}$ 属于 $\mathscr{C}^2([0,1])$ 类。至此，所需结果得证。 □

5. Transversality

在命题 4.6 中，根据剖面 f_0 的单调性和符号，我们找到了某些 m 和 Ω_m 的合适取值，使得 $D_gG(\Omega_m,0)$ 的核为一维。此外，由命题 3.1 可知，该线性算子是 Fredholm 算子且指标为零，这尤其意味着其值域的余维数为 1。为了应用 Crandall-Rabinowitz定理 [23]，我们需要验证横截条件，即

$$D_\Omega D_g\widehat{G}(\Omega_m,0)h^\star \notin \text{Range } D_g\widehat{G}(\Omega_m,0),$$

其中， $h^\star$ 是由（4.91）定义的核的生成元。为此，我们首先刻画值域，随后证明两种情形 $f_0 > 0$ 和 $f_0 < 0$下的横截条件。给定 $\alpha \in (0,1)$ 和 $m \geqslant 1$，根据命题 2.2，我们已经看到，由（2.23）定义的泛函 G 满足

$$\widehat{G} : \mathbb{R}\times B_{\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D})} \to \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}).$$

The 第一个主要结果将 $D_gG(\Omega_m,0)$ 的值域刻画为一个线性形式的核 .

命题 5.1。设 $m \geqslant 1$、$\beta \in (0,1)$ $\alpha \in (0,\beta)$ 以及 f_0 满足（H1）-（H2）。设 Ω_m 如命题 4.6 中所示。则

$$\text{Range } D_g\widehat{G}(\Omega_m,0) = \left\{d \in \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}), \quad \int_{\mathbb{D}} d(z)\mathscr{K}_m(z)dz = 0\right\},$$

其中

$$\mathscr{K}_m(z) := \mathrm{Re}\left[\nu_{\Omega_m}(|z|)F_{m,\Omega_m}(|z|)z^m\right].$$

证明。为了确定线性化算子的值域，我们需要研究方程

$$D_g\widehat{G}(\Omega,0)h=d,\quad h(re^{i\theta})=\sum_{n\in m\,\mathbb{N}}h_n(r)\cos(n\theta),\quad d(re^{i\theta})=\sum_{n\in m\,\mathbb{N}}d_n(r)\cos(n\theta).$$

由 (3.3) 可知，这等于

$$\frac{h_n(r)}{\mu_\Omega^0(r)}-\frac{r}{n}\left(A_n[h_n]G_n(r)+\frac{1}{2r^{n+1}}H_n[h_n](r)\right)=d_n(r),\quad n\in m\,\mathbb{N}^\star,$$
$$\frac{h_0(r)}{\mu_\Omega^0(r)}-\int_r^1\frac{1}{\tau}\int_0^\tau sh_0(s)dsd\tau=d_0(r).$$

对于关于 $n=0$ 的方程，注意到 $\mathbb{L}_0^\Omega$ 是同构的紧扰动，因此它是零指标的 Fredholm 算子。此外，由命题 4.1 可知，由于 $\Omega_m\notin\mathbb{S}$，核是平凡的，因此关于 $n=0$ 的方程有唯一解。我们来关注关于 $n\geqslant 1$ 的方程，并按照前面对核的研究进行处理。与 (4.42) 类似，我们写出

$$(\mathrm{Id}-\sigma_\Omega\mathcal{L}_n^{\Omega_m})[h_n](r)=-\tfrac{H_n[h_n](1)}{2nG_n(1)}\mu_{\Omega_m}^0(r)rG_n(r)+\mu_{\Omega_m}^0(r)d_n(r).$$

由命题 4.3 以及关于 Ω_m 的假设可知，对于任意 $n\geqslant 1$，$(\mathrm{Id}-\sigma_{\Omega_m}\mathcal{L}_n^{\Omega_m})$ 都是可逆的（注意这里需要用到 $n\in m\,\mathbb{N}^\star$），从而得到

$$h_n(r)=-\tfrac{H_n[h_n](1)}{2nG_n(1)}(\mathrm{Id}-\sigma_{\Omega_m}\mathcal{L}_n^{\Omega_m})^{-1}[\mu_{\Omega_m}^0(r)rG_n(r)]+(\mathrm{Id}-\sigma_{\Omega_m}\mathcal{L}_n^{\Omega_m})^{-1}[\mu_{\Omega_m}^0d_n](r).$$

然而，为了确定 h_n 是一个解，我们需要检验与 $H_n[h_n](1)$ 相关的相容条件。将前面的恒等式乘以 r^{n+1} 并在 $[0,1]$, 上积分即可完成检验

$$H_n[h_n](1)=-\tfrac{H_n[h_n](1)}{2nG_n(1)}\int_0^1 r^{n+1}(\mathrm{Id}-\sigma_{\Omega_m}\mathcal{L}_n^{\Omega_m})^{-1}[\mu_{\Omega_m}^0(r)rG_n(r)]dr$$
$$+\int_0^1 r^{n+1}(\mathrm{Id}-\sigma_{\Omega_m}\mathcal{L}_n^{\Omega_m})^{-1}[\mu_{\Omega_m}^0d_n](r)dr.$$

利用式 (4.57) 中定义的函数 $T(n,\Omega)$，由引理 4.3 可得

$$\big(1-T(n,\Omega_m)\big)H_n[h_n](1)=\int_0^1 r^{n+1}(\mathrm{Id}-\sigma_\Omega\mathcal{L}_n^{\Omega})^{-1}[d_n\mu_\Omega^0](r)dr.$$

由于核是一维的，因此

$$n\in m\,\mathbb{N}^\star,\quad 1-T(n,\Omega_m)=0\Longleftrightarrow n=m$$

因此，相容条件意味着

$$\int_0^1 r^{m+1}(\mathrm{Id}-\sigma_{\Omega_m}\mathcal{L}_m^{\Omega})^{-1}[\mu_{\Omega_m}^0d_m](r)dr=0,$$

然后，利用命题 4.2 中所述的 $\mathcal{L}_m^{\Omega_m}$ 是自伴的这一性质，前面的恒等式与下式一致

$$\int_0^1\big((\mathrm{Id}-\sigma_{\Omega_m}\mathcal{L}_m^{\Omega_m})^{-1}[\nu_{\Omega_m}r^m]\big)d_m(r)rdr=0.$$

令 $h=(\mathrm{Id}-\sigma_{\Omega_m}\mathcal{L}_m^{\Omega_m})^{-1}[\nu_{\Omega_m}r^m]$，则由式 (4.58) 和 (4.62) 可知，存在常数 $c\neq 0$ 使得

$$h(r)=c\nu_{\Omega_m}(r)r^mF_{m,\Omega_m}(r),$$

因此我们应当得到

$$\int_0^1\nu_{\Omega_m}(r)F_{m,\Omega_m}(r)r^md_m(r)rdr=0.$$

引入函数

$$z\in\mathbb{D},\quad \mathscr{K}_m(z)=\mathrm{Re}\left[\nu_{\Omega_m}(|z|)F_{m,\Omega_m}(|z|)z^m\right].$$

然后，基于极坐标和傅里叶展开进行直接计算，可将相容条件写成如下形式

$$\int_{\mathbb{D}} d(z)\mathscr{K}_m(z)dz = 0.$$

由此可得

$$\text{Range } D_g\widehat{G}(\Omega_m,0) \subset \left\{ d \in \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}), \quad \int_{\mathbb{D}} d(z)\mathscr{K}_m(z)dz = 0 \right\} := \mathcal{E}.$$

由于 $\mathscr{K}_m \in \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D})$（该结果只需较弱的正则性），因此映射

$$d \in \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}) \mapsto \int_{\mathbb{D}} d(z)\mathscr{K}_m(z)dz \in \mathbb{R}$$

是连续的，因此其核 $\mathcal{E}$ 定义了一个超平面（一个余维数为一的闭空间）。结合值域 $D_g\widehat{G}(\Omega_m, 0)$ 是 $\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D})$ 的一个余维数为一的闭子空间这一事实，可得这两个子空间相等。证明至此完成。□

接下来的目标是为 Crandall-Rabinowitz 定理 [23]中的横截性假设写出一个解析方程。为此，我们需要引入以下函数

$$d^\star_m(r) := h^\star_m(r)\tfrac{r}{f_0'(r)} + \tfrac{A_m[h^\star_m]}{G_m(1)} rG_m(r) - A_m[h^\star_m]r^{m+2},$$

其中 $h^\star_m$ 由命题 4.6 定义， $A_m[h]$ 由 (3.7) 定义。因此，由 (4.94) 可得，

$$d^\star_m(r) = h^\star_m(r)\tfrac{r}{f_0'(r)} + \tfrac{1}{4(m+1)G_m(1)} rG_m(r) - \tfrac{1}{4(m+1)} r^{m+2}, \tag{5.1}$$

我们打算证明以下结果。

命题 5.2. 设 $m \geqslant 1, \beta \in (0,1)$ $\alpha \in (0,\beta)$ 和 f_0 满足 (H1)-(H2)。设 Ω_m 如命题 4.6 中所述。则，横截条件与

$$\int_0^1 \nu_{\Omega_m}(r) r^m F_{m,\Omega_m}(r) d^\star_m(r) r dr \neq 0.$$

证明。注意，根据 (3.3) 所描述的 $D_gG(\Omega, 0)$ 的表达式，可得

$$\begin{aligned} D_\Omega D_g\widehat{G}(\Omega,0)h(r,\theta) = &\sum_{n\in m\mathbb{N}^\star} \cos(n\theta)\left\{ h_n(r)\tfrac{r}{f_0'(r)} + \tfrac{A_n[h_n]}{G_n(1)} rG_n(r) - A_n[h_n]r^{n+2} \right\} \\ &+ h_0(r)\tfrac{r}{f_0'(r)}. \end{aligned}$$

Then，结合 $d^\star_m$ 的定义可得，其简化形式由 (5.1) 给出 ，

$$D_\Omega D_g\widehat{G}(\Omega_m,0)h^\star(r,\theta) = d^\star_m(r)\cos(m\theta).$$

为检验横截条件，我们需要证明

$$d^\star_m(r)\cos(m\theta) \notin \text{Range}(D_g\widehat{G}(\Omega,0)).$$

应用命题 5.1，可得

$$\mathbb{I}_m := \int_0^1 \nu_{\Omega_m}(r) r^m F_{m,\Omega_m}(r) d^\star_m(r) r dr \neq 0, \tag{5.2}$$

由此即完成所需结果的证明。 □

回到 (5.1)，并利用命题 4.6 中 $h^\star_m$ 的表达式

$$\begin{aligned} 4(m+1)d^\star_m(r) = &r^m \Big[\tfrac{4(m+1)r}{f_0'(r)} F_{m,\Omega_m}(r)\mu^0_{\Omega_m}(r) \\ &\times \int_1^r \tfrac{1}{F^2_{m,\Omega_m}(s)s^{2m+1}} \int_0^s F_{m,\Omega_m}(\tau)\tau^{2n+1}\left\{ \Omega_m - \tfrac{f_0(\tau)}{2} \right\} d\tau ds \\ &- r^2 + \tfrac{r^{1-m}G_m(r)}{G_m(1)} \Big] \end{aligned}$$

$$=:r^m\Big[\mathcal{H}_{m,1}(r)+\mathcal{H}_{m,2}(r)+\mathcal{H}_{m,3}(r)\Big],$$

with

$$\mathcal{H}_{m,1}(r)=-\frac{4(m+1)r\mu^0_{\Omega_m}(r)}{f_0'(r)}F_{m,\Omega_m}(r)\int_r^1\frac{1}{F^2_{m,\Omega_m}(s)s^{2m+1}}\int_0^s F_{m,\Omega_m}(\tau)\tau^{2n+1}\Big\{\Omega_m-\frac{f_0(\tau)}{2}\Big\}d\tau ds,$$

$$\mathcal{H}_{m,2}(r)=-r^2,\quad \mathcal{H}_{m,3}(r)=\frac{r^{1-m}G_m(r)}{G_m(1)}. \tag{5.3}$$

则 (5.2) 等价于

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_m&=\int_0^1\nu_{\Omega_m}(r)r^{2m+1}F_{m,\Omega_m}(r)\big(\mathcal{H}_{m,1}(r)+\mathcal{H}_{m,2}(r)+\mathcal{H}_{m,3}(r)\big)dr\\&=:\mathbb{I}_{m,1}+\mathbb{I}_{m,2}+\mathbb{I}_{m,3}\neq 0.\end{aligned} \tag{5.4}$$

我们先考虑与 m 较小取值相关的情形 $f_0>0$ 。

命题 5.3. 设 $f_0>0$ 满足 (H1)–(H2)。固定 m ，使得

$$3\leqslant m\leqslant\tfrac{1}{10}\tfrac{f_0(0)}{f_0(1)-f_0(0)},$$

并令 Ω_m 如命题 4.4 中所示，则 $\mathbb{I}_m\neq 0$。

证明。由于 $\Omega_m\in(-\infty,\kappa_1)$，由 (4.4) 可得 $\Omega_m-\frac{f_0(\tau)}{2}<0$，且 $\mu^0_{\Omega_m}(r)\leqslant 0$，从而得到 $\mathcal{H}_{m,1}\leqslant 0$。我们来考察 $\mathcal{H}_{m,2}+\mathcal{H}_{m,3}$ 的符号；根据 (3.6)，它具有如下形式

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{m,2}(r)+\mathcal{H}_{m,3}(r)=&\tfrac{r^{1-m}G_m(r)-r^2G_m(1)}{G_m(1)}\\=&\tfrac{r^{1-m}G_m(r)-r^2G_m(1)}{m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)}.\end{aligned}$$

根据定义 (3.5)，我们推得

$$\begin{aligned}r^{1-m}G_m(r)-r^2G_m(1)=&(1-r^2)\int_0^1 sf_0(s)ds-(m+1)\int_0^r sf_0(s)ds+\frac{m+1}{r^{2m}}\int_0^r s^{2m+1}f_0(s)ds\\&+(m+1)r^2\int_0^1 sf_0(s)ds-(m+1)r^2\int_0^1 s^{2m+1}f_0(s)ds.\end{aligned}$$

因此，进行变量代换 $s=r\tau$ 后可得

$$\begin{aligned}r^{1-m}G_m(r)-r^2G_m(1)=&(1-r^2)\int_0^1 sf_0(s)ds\\&+(m+1)\Big\{-r^2\int_0^1 sf_0(sr)ds+r^2\int_0^1 s^{2m+1}f_0(sr)ds+r^2\int_0^1 sf_0(s)ds\\&-r^2\int_0^1 s^{2m+1}f_0(s)ds\Big\}\\=&(1-r^2)\int_0^1 sf_0(s)ds+(m+1)r^2\int_0^1 s(1-s^{2m})(f_0(s)-f_0(sr))ds.\end{aligned}$$

随着 f_0 增大，我们得到

$$\forall r\in[0,1),\quad r^{1-m}G_m(r)-r^2G_m(1)>0,$$

应用命题 4.4-(4)，我们发现 $\Omega_m-\widehat{\Omega}_m>0$ ，于是

$$\forall r\in[0,1),\quad \mathcal{H}_{m,2}(r)+\mathcal{H}_{m,3}(r)>0.$$

这表明 $\mathcal{H}_{m,1}$ 与 $\mathcal{H}_{m,2}+\mathcal{H}_{m,3}$ 的符号相反，我们将验证它们的和为正。事实上，我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{m,1}+\mathcal{H}_{m,2}+\mathcal{H}_{m,3}=&\frac{(1-r^2)\int_0^1 sf_0(s)ds+(m+1)r^2\int_0^1 s(1-s^{2m})(f_0(s)-f_0(sr))ds}{m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)}\\&+\frac{2(m+1)r\mu^0_{\Omega}(r)}{f_0'(r)}F_{m,\Omega_m}(r)\int_r^1\frac{1}{F^2_{m,\Omega_m}(s)s^{2m+1}}\int_0^s F_{m,\Omega_m}(\tau)\tau^{2m+1}\left\{f_0(\tau)-2\Omega_m\right\}d\tau ds.\end{aligned}$$

根据引理 4.2-(1) 和 (4.53)，我们推得 F_{m,Ω_m} 是递增的。然后结合 $f_{0(\tau)\,2}\quad -\Omega_m>0$，利用 f_0 的单调性，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_r^1 \frac{1}{F^2_{m,\Omega_m}(s)s^{2m+1}}\int_0^s F_{m,\Omega_m}(\tau)\tau^{2m+1}\big(f_0(\tau)-2\Omega_m\big)d\tau ds\\ &\leqslant \int_r^1 \frac{1}{s^{2m+1}}\int_0^s \tau^{2m+1}\left\{f_0(\tau)-2\Omega_m\right\}d\tau ds\\ &\leqslant \frac{1-r^2}{4(m+1)}\big(f_0(1)-2\Omega_m\big).\end{aligned}$$

利用 $\mu^0_{\Omega_m}(r)\leqslant 0$，结合

$$\frac{r\mu^0_\Omega(r)}{f_0'(r)}=\frac{1}{\Omega-\int_0^1 sf_0(rs)ds}\geqslant\frac{1}{\Omega-\kappa_1},\quad\forall\, r\in(0,1],$$

give

$$\begin{aligned}&\tfrac{2(m+1)r\mu^0_\Omega(r)}{f_0'(r)}F_{m,\Omega_m}(r)\int_r^1 \tfrac{1}{F^2_{m,\Omega_m}(s)s^{2m+1}}\int_0^s F_{m,\Omega_m}(\tau)\tau^{2m+1}\big(f_0(\tau)-2\Omega_m\big)d\tau ds\\ &\geqslant\frac{1-r^2}{2(\Omega-\kappa_1)}\big(f_0(1)-2\Omega_m\big).\end{aligned}$$

因此，对于任意 $r\in(0,1)$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{m,1}+\mathcal{H}_{m,2}+\mathcal{H}_{m,3}>&\frac{(1-r^2)\int_0^1 sf_0(s)ds}{m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)}-\frac{1-r^2}{2(\kappa_1-\Omega)}\big(f_0(1)-2\Omega_m\big)\\ >&(1-r^2)\left(\frac{\kappa_2}{m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)}-\frac{f_0(1)-2\Omega_m}{2(\kappa_1-\Omega_m)}\right)=:(1-r^2)D_m.\end{aligned}$$

由此可得

$$D_m>0\Longleftrightarrow 2(\kappa_1-\Omega_m)\kappa_2>m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)\big(f_0(1)-2\Omega_m\big).\tag{5.5}$$

由 (2.20) 以及 f_0 的单调性，我们推得

$$\widehat{\Omega}_m\geqslant\kappa_2-\frac{f_0(1)}{2m},$$

利用命题 4.4-(4)，这意味着

$$\begin{aligned}\Omega_m-\widehat{\Omega}_m&\leqslant\frac{m\kappa_2}{m+1}-\kappa_2+\frac{f_0(1)}{2m}\\ &\leqslant\frac{f_0(1)}{2m}-\frac{\kappa_2}{m+1}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}0\leqslant f_0(1)-2\Omega_m&\leqslant f_0(1)-2\widehat{\Omega}_m\\ &\leqslant\tfrac{m+1}{m}f_0(1)-2\kappa_2.\end{aligned}$$

Thus

$$m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)\big(f_0(1)-2\Omega_m\big)\leqslant\tfrac{m+1}{2m}\big(f_0(1)-\tfrac{2m}{m+1}\kappa_2\big)^2.\tag{5.6}$$

另一方面

$$(\kappa_1-\Omega_m)\geqslant\kappa_1-\tfrac{m}{m+1}\kappa_2,$$

因此

$$2(\kappa_1-\Omega_m)\kappa_2\geqslant 2\big(\kappa_1-\tfrac{m}{m+1}\kappa_2\big)\kappa_2.\tag{5.7}$$

此外，在假设

$$2 \leqslant 2m \leqslant \frac{\kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}, \tag{5.8}$$

我们得到

$$\big(\kappa_1 - \tfrac{m}{m+1}\kappa_2\big) \geqslant \big(\tfrac{2m}{2m+1} - \tfrac{m}{m+1}\big)\kappa_2 \geqslant \frac{m\kappa_2}{(m+1)(2m+1)}.$$

将此不等式代入 (5.7)，得到

$$2(\kappa_1 - \Omega_m)\kappa_2 \geqslant \tfrac{2m}{(m+1)(2m+1)}\kappa_2^2. \tag{5.9}$$

因此，结合 (5.6) 和 (5.7)，我们推得当.....时，(5.5) 成立

$$\tfrac{2m}{(m+1)(2m+1)}\kappa_2^2 > \tfrac{m+1}{2m}\big(f_0(1) - \tfrac{2m}{m+1}\kappa_2\big)^2.$$

现在，定义 $\delta := f_0(1) - 2\kappa_2 > 0$，则前述不等式等价于

$$\kappa_2^2 > \tfrac{(m+1)^2(2m+1)}{4m^2}\big(\delta + \tfrac{2}{m+1}\kappa_2\big)^2,$$

or

$$\big(1 - \tfrac{\sqrt{2m+1}}{m}\big)\kappa_2 > \tfrac{(m+1)\sqrt{2m+1}}{2m}\delta. \tag{5.10}$$

由于

$$1 - \tfrac{\sqrt{2m+1}}{m} = \tfrac{m^2-2m-1}{m(m+\sqrt{2m+1})}$$

且函数 $x \in (0,\infty) \mapsto \frac{x^2-2x-1}{x\,x+\sqrt{2x+1}}$) 严格递增，因此我们可以推得

$$\forall\, m \geqslant 3, \quad \tfrac{m^2-2m-1}{m(m+\sqrt{2m+1})} \geqslant \tfrac{2}{3(3+\sqrt{7})}.$$

类似地，函数 $x \in (0,\infty) \mapsto (x+1)_{2x^2}^{\sqrt{2x+1}}$ 严格递减，因此

$$\forall\, m \geqslant 3, \quad \tfrac{(m+1)\sqrt{2m+1}}{2m^2} \leqslant \tfrac{2\sqrt{7}}{9}.$$

由此可知，当满足以下条件时，(5.10) 成立

$$m\delta < \tfrac{3}{\sqrt{7}(3+\sqrt{7})}\kappa_2,$$

并且由于 $\frac{3}{\sqrt{7}(3+\sqrt{7})} > \frac{1}{5}$，前述不等式在以下条件下成立

$$3 \leqslant m \leqslant \frac{\kappa_2}{5\delta}.$$

回到 (5.8)，可知在满足以下条件时，(5.5) 成立

$$3 \leqslant m \leqslant \min\left(\frac{\kappa_2}{5\delta}, \frac{\kappa_1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)}\right).$$

由于 $\frac{f_0(0)}{2} = \kappa_1 \leqslant \kappa_2$，因此前述不等式在以下条件下成立

$$3 \leqslant m \leqslant \tfrac{1}{5}\kappa_1 \min\left(\tfrac{1}{f_0(1)-2\kappa_2}, \tfrac{1}{2\kappa_2 - f_0(0)}\right). \tag{5.11}$$

注意，由于 f_0 的单调性，我们得到

$$f_0(1) - 2\kappa_2 = 2\int_0^1 s(f_0(1) - f_0(s))ds \leqslant f_0(1) - f_0(0),$$

and

$$2\kappa_2 - f_0(0) = 2\int_0^1 s(f_0(s) - f_0(0))ds \leqslant f_0(1) - f_0(0).$$

因此，要得到 (5.11)，只需施加

$$3 \leqslant m \leqslant \frac{1}{10}\frac{f_0(0)}{f_0(1) - f_0(0)}.$$

至此，命题 5.3 的证明结束。 □

现在我们转而讨论 $f_0<0$ 时的横截条件。

命题 5.4. 设 f_0 满足 (H1)–(H2)，其中 $f_0<0$，并取命题 4.5 中的 m 和 Ω_m。存在 $m_0\geqslant 1$，使得对任意 $m\geqslant m_0$，均有 $\mathbb{I}_m\neq 0$.

证明. 应用命题 4.5，并取 $\alpha=\frac{3}{2}$，可得

$$\Omega_m=\widehat{\Omega}_m+O\left(m^{-\frac{3}{2}}\right), \tag{5.12}$$

and

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}_m&=\int_0^1 sf_0(s)ds-\frac{m+1}{m}\int_0^1 s^{2m+1}f_0(s)ds\\&=\int_0^1 sf_0(s)ds-\frac{1}{2m}f_0(1)+\frac{m+1}{m}\int_0^1 s^{2m+1}\big[f_0(1)-f_0(s)\big]ds\\&=\int_0^1 sf_0(s)ds-\frac{1}{2m}f_0(1)+O(m^{-2}).\end{aligned}$$

由此可得

$$\Omega_m-\kappa_2=-\frac{1}{2m}f_0(1)+O(m^{-\frac{3}{2}}). \tag{5.13}$$

我们先估计 (5.4) 中的第一项 $\mathbb{I}_{m,\,1}$，这基于对 $\mathcal{H}_{m,\,1}$ 的控制。由 (5.3)、(2.8) 和引理 4.2-(2) 可知

$$|\mathcal{H}_{m,1}(r)|\leqslant\frac{Cm}{(\Omega_m-\int_0^1 sf_0(rs)ds)}\int_r^1\frac{1}{s^{2m+1}}\int_0^s\tau^{2m+1}d\tau ds.$$

将 (4.9) 应用于 $\theta=0$，可得

$$|\mathcal{H}_{m,1}(r)|\leqslant\frac{m}{(1-r)}\int_1^r s^{-2m-1}\int_0^s\tau^{2m+1}d\tau dr\leqslant C.$$

因此，结合 (5.13)，应用引理 4.1 于 $\theta=1$，我们得到

$$|\mathbb{I}_{m,1}|\leqslant\left|\int_0^1\nu_{\Omega_m}(r)r^{2m+1}|\mathcal{H}_{m,1}(r)|dr\right|\leqslant\frac{C}{m(\Omega_m-\kappa_2)}\leqslant C,$$

从而

$$\limsup_{m\to\infty}\mathbb{I}_{m,1}=C<+\infty. \tag{5.14}$$

现在我们转而估计 $\mathbb{I}_{m,\,2}$，其方法与 $\mathbb{I}_{m,\,1}$ 十分相似。随后，基于引理 4.1 的类似论证给出估计

$$|\mathbb{I}_{m,2}|\leqslant\left|\int_0^1\nu_{\Omega_m}(r)r^{2m+3}dr\right|\leqslant\frac{C}{(\Omega_m-\kappa_2)^\theta}\int_0^1\frac{r^{2m+3}}{(1-r)^{1-\theta}}drdr.$$

令 $\epsilon\in(0,1)$，则将积分拆分后可得

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{r^{2m+3}}{(1-r)^{1-\theta}}dr&\leqslant\epsilon^{\theta-1}\int_0^{1-\epsilon}r^{2m+3}dr+\int_{1-\epsilon}^1(1-r)^{\theta-1}dr\\&\leqslant\frac{\epsilon^{\theta-1}}{2m+4}+\frac{\epsilon^\theta}{\theta}.\end{aligned}$$

取 $\epsilon\approx m^{-1}$，得到

$$\int_0^1\frac{r^{2m+3}}{(1-r)^{1-\theta}}dr\leqslant\frac{C}{\theta m^\theta}.$$

因此，我们推得对于任意 $\theta\in(0,1)$

$$|\mathbb{I}_{m,2}|\leqslant\frac{C}{\theta m^\theta(\Omega_m-\kappa_2)^\theta}.$$

固定 $\theta=\frac{1}{2}$ 并利用 (5.13)，我们可以找到一个常数 $C>0$，使得

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad |\mathbb{I}_{m,2}|\leqslant\frac{C}{m}\leqslant C. \tag{5.15}$$

L现在我们来关注项 $\mathbb{I}_{m,\ 3}$，它的处理更加复杂。首先由（5.4）可得

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{m,3}=&\int_0^1\nu_{\Omega_m}(r)r^{2m+1}\mathcal{H}_{m,3}(r)dr+\int_0^1\nu_{\Omega_m}(r)r^{2m+1}\big(F_{m,\Omega_m}(r)-1\big)\mathcal{H}_{m,3}(r)dr\\ =:&\ \mathbb{I}^1_{m,3}+\mathbb{I}^2_{m,3}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

由（5.3）显然可知

$$\mathbb{I}^1_{m,3}=\frac{1}{G_m(1)}\int_0^1\nu_{\Omega_m}(r)r^{m+2}G_m(r)dr.$$

接下来，我们将如下写出由（3.5）定义的 G_m

$$G_m(r)=mr^{m-1}P_m(r),$$

with

$$\begin{aligned}P_m(r)=&r^2\Omega_m+\frac{1}{m}\int_0^1 sf_0(s)ds-\frac{m+1}{m}\int_0^r sf_0(s)ds+\frac{m+1}{mr^{2m}}\int_0^r s^{2m+1}f_0(s)ds\\ =&r^2\left[\Omega_m-\int_0^1 f_0(sr)ds\right]+\frac{1}{m}\int_r^1 sf_0(s)ds+\frac{m+1}{mr^{2m}}\int_0^r s^{2m+1}f_0(s)ds.\end{aligned}$$

因此，由（2.8）和（3.6）可得

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^1_{m,3}=&\frac{1}{\Omega_m-\widehat{\Omega}_m}\int_0^1\frac{f_0'(r)r^{2m}P_m(r)}{(\Omega_m-\int_0^1 sf_0(sr)ds)}dr\\ =&\frac{1}{\Omega_m-\widehat{\Omega}_m}\int_0^1 f_0'(r)r^{2m+2}dr+\frac{1}{(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)m}\int_0^1\frac{f_0'(r)r^{2m}\int_r^1 sf_0(s)ds}{(\Omega_m-\int_0^1 sf_0(sr)ds)}dr\\ &+\frac{m+1}{m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)}\int_0^1\frac{f_0'(r)\int_0^r s^{2m+1}f_0(s)ds}{(\Omega_m-\int_0^1 sf_0(sr)ds)}dr\\ =:&\frac{1}{m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)}\left(\mathbb{J}_{m,1}+\mathbb{J}_{m,2}+\mathbb{J}_{m,3}\right).\end{aligned} \tag{5.17}$$

我们来验证，当 m 较大时，$\mathbb{J}_{m,\ 2}$ 趋于 0。应用（4.9）并结合 $\theta=0$ 可得

$$|\mathbb{J}_{m,2}|\leqslant C\int_0^1\frac{r^{2m}}{(1-r)}(1-r)dr\leqslant\frac{C}{m}.$$

因此

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{J}_{m,2}=0.$$

现在我们来处理 $\mathbb{J}_{m,\ 1}$。首先回顾一个基本结果

$$\lim_{m\to\infty}m\int_0^1 f_0'(r)r^{m+2}dr=f_0'(1)\neq 0,$$

then

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{J}_{m,1}=f_0'(1).$$

为处理最后一项 $\mathbb{J}_{m,\ 3}$，我们首先使用

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}mr^{-2m-2}\int_0^r f_0(s)s^{2m+1}ds=&\lim_{m\to\infty}m\int_0^1 f_0(rs)s^{2m+1}ds\\ =&\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}\int_0^1 f_0(rs^{\frac{1}{m+1}})sds\\ =&\tfrac{1}{2}f_0(r),\end{aligned}$$

变量替换后得到的首项 $\tau = r^{2m+3}$ 为

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\mathbb{J}_{m,3} &= \lim_{m\to+\infty}\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{f_0'(r)f_0(r)r^{2m+2}}{\Omega_m-\kappa_2+\int_0^1 s[f_0(s)-f_0(sr)]ds}dr\\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{2m+3}\int_0^1 \frac{f_0'(\tau^{\frac{1}{2m+3}})f_0(\tau^{\frac{1}{2m+3}})}{\Omega_m-\kappa_2+\int_0^1 s[f_0(s)-f_0(s\tau^{\frac{1}{2m+3}})]ds}d\tau.\end{aligned}$$

再次利用 (5.13)，可得

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}(2m+3)[f_0(s)-f_0(s\tau^{\frac{1}{2m+3}})] &= \lim_{m\to+\infty}(2m+3)s(1-\tau^{1/(2m+3)})\int_0^1 f_0'\big(s+\tau_1 s(\tau^{1/(2m+3)}-1)\big)d\tau_1\\ &= -\ln(r)sf_0'(s).\end{aligned}$$

综合前述结果，我们得到

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{J}_{m,3} = -\tfrac{1}{2}f_0'(1)f_0(1)\int_0^1 \frac{dr}{\ln(r)\int_0^1 s^2 f_0'(s)ds+f_0(1)}.$$

Then

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{J}_{m,1}+\mathbb{J}_{m,2}+\mathbb{J}_{m,3} = f_0'(1)\left\{1-\tfrac{1}{2}f_0(1)\int_0^1 \frac{dr}{\ln(r)\int_0^1 s^2 f_0'(s)ds+f_0(1)}\right\}.$$

暂且假设

$$\kappa := 1-\tfrac{1}{2}f_0(1)\int_0^1 \frac{dr}{\ln(r)\int_0^1 s^2 f_0'(s)ds+f_0(1)} \neq 0, \tag{5.18}$$

将其代入 (5.17)，当 m 足够大时可得

$$\mathbb{I}^1_{m,3} \approx \frac{\kappa}{m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)}. \tag{5.19}$$

回到 (5.17) 和 (5.16)，我们得到如下分解

$$\mathbb{I}^2_{m,3} =: \frac{1}{m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)}\left(\widehat{\mathbb{J}}_{m,1}+\widehat{\mathbb{J}}_{m,2}+\widehat{\mathbb{J}}_{m,3}\right),$$

with

$$\forall i\in\{1,2,3\},\quad |\widehat{\mathbb{J}}_{m,i}\leqslant|\mathbb{J}_{m,i}|\sup_{r\in[0,1]}|F_{m,\Omega_m}(r)-1|.$$

由引理 4.2-(2)可得

$$\forall r\in[0,1],\quad |F_{m,\Omega_m}(r)-1|\leqslant\frac{C_0}{\theta m(\Omega_m-\kappa_2)^\theta}.$$

再次利用(5.13)和命题 4.5-(1)可得

$$\forall r\in[0,1],\quad |F_{m,\Omega_m}(r)-1|\leqslant\frac{C_0}{\theta m^{1-\theta}}.$$

由此可知

$$\forall i\in\{1,2,3\},\quad |\widehat{\mathbb{J}}_{m,i}|\leqslant C_0\frac{|\mathbb{J}_{m,i}|}{\theta m^{1-\theta}},$$

这意味着

$$\lim_{m\to\infty}\widehat{\mathbb{J}}_{m,i}=0$$

因此，由(5.16)和(5.19)可得

$$\mathbb{I}_{m,3}\approx\mathbb{I}^1_{m,3}\approx\frac{\kappa}{m(\Omega_m-\widehat{\Omega}_m)}. \tag{5.20}$$

根据 (5.12)，这意味着

$$|\mathbb{I}_{m,3}|\geqslant Cm^{\frac{1}{2}}.$$

因此，将 (5.14)、(5.15)、(5.20) 代入 (5.4)，当 m 足够大时可得

$$\mathbb{I}_m \approx \mathbb{I}_{m,3},$$

进而可得

$$\lim_{m\to\infty} |\mathbb{I}_m| = \infty.$$

最后，我们来检验 (5.18)。通过变量替换 $-\ln x = \mu\tau$，可得

$$\int_0^1 \frac{dx}{\mu - \ln x} = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\tau}}{1+\tau} d\tau, \quad \forall \mu > 0.$$

令 $\mu = \frac{-f_0(1)}{\int_0^1 s^2 f_0'(s) ds}$，则

$$1 - \tfrac{1}{2} f_0(1) \int_0^1 \frac{dx}{\ln(x) \int_0^1 s^2 f_0'(s) ds + f_0(1)} = 1 - \tfrac{1}{2}\mu \int_0^1 \frac{dx}{\mu - \ln x} = 1 - \tfrac{1}{2}\mu \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\tau}}{1+\tau} d\tau.$$

分部积分可得

$$1 - \mu \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\tau}}{1+\tau} d\tau = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\tau}}{(1+\tau)^2} d\tau,$$

因此

$$1 - \tfrac{1}{2} f_0(1) \int_0^1 \frac{dr}{\ln(r) \int_0^1 s^2 f_0'(s) ds + f_0(1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}}{(1+\tau)^2} d\tau > 0.$$

由此得证（5.18），横截条件的证明也就完成了。 □

6. Proof of Theorem 1.1

本节将汇总前面所有结果，以证明本文的主要结论：定理 1.1。证明基于 Crandall-Rabinowitz定理 [23]，且该定理所要求的所有条件均已在前几节中验证。下面总结前面采用的证明步骤。我们仅分析散焦情形 i)，另一种情形的证明类似。

首先，由命题 4.4 可知，存在 $m_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $m_1 \geq 10^{1}_{(A[f_0]=1)}$，并且对于任意 $m \in [2, m_1] \cap \mathbb{N}$，存在 Ω_m 解满足 $\zeta_m(\Omega) = 0$。以下固定 m 和 Ω_m，并使其满足上述命题。

然后，由第 2 节可知，在一般平衡态附近，二维欧拉方程存在非平凡旋转解，当且仅当泛函存在非平凡根

$$\widehat{G} : I \times B_{\mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D})}(0,\varepsilon) \to \mathscr{C}^{1,\alpha}_{s,m}(\mathbb{D}),$$

该定义良好，并且 $\mathscr{C}^1$ 得益于命题 2.2。证明随后依赖于求出 $\widehat{G}$ 的根，从而应用 Crandall-Rabinowitz定理（见 [23, 63]）。

为此，需要考察 $D_g\widehat{G}(\Omega_m,0)$。该算子在式（3.3）中表示为傅里叶级数：

$$D_g\widehat{G}(\Omega_m,0)[h](re^{i\theta}) = \mathbb{L}_0^{\Omega}[h_0](r) + \sum_{n\in m\mathbb{N}^\star} \cos(n\theta)\mathbb{L}_n^{\Omega_m}[h_n](r).$$

根据命题 3.1，我们知道$D_g\widehat{G}(\Omega_m, 0)$是零指标的 Fredholm 算子，因此

$$\dim \operatorname{Ker} D_g\widehat{G}(\Omega_m,0) = \dim \operatorname{Rang} Y \backslash D_g\widehat{G}(\Omega_m,0),$$

接下来只需验证核是一维的。研究核时，可以针对每个傅里叶模态分别进行。注意，情形 $n=0$ 已在命题 4.1 中研究，并得到了该算子的可逆性。现在，固定 $n=m$ 并研究

$$\mathbb{L}_m^{\Omega_m}[h_m](r) = 0.$$

注意，$m \leq \frac{1}{10(A[f_0]-1)}$ 意味着

$$m \leq \frac{\kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}.$$

由于我们选择 Ω_m 使其满足 $\zeta_m(\Omega_m) = 0$，因此利用命题 4.6 可得到 $D_g G(\Omega_m,0)$ 的核中的一个元素$\widehat{\ }$。注意，这里处理的是第 4.5 节所述的情形 1。最后，借助命题 5.3，横截条件得以满足。因此可以应用 Crandall-Rabinowitz定理 [23]，从而得到我们的结论。

References

[1] Weiwei Ao、Juan D´avila、Manuel del Pino、Monica Musso 和 Juncheng Wei。广义无黏表面准地转方程的行进解与旋转解。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，374(9):6665–6689，2021。[2] Jacob Bedrossian、Michele Coti Zelati 和 Vlad Vicol。二维线性化欧拉方程中的涡旋轴对称化、无黏阻尼与涡量耗散。 *Ann. PDE*，5(1):论文编号 4，192，2019。[3] Massimiliano Berti、Zineb Hassainia 和 Nader Masmoudi。时间拟周期涡斑。 *arXiv preprint arXiv:2202.06215* 2022，。

[4] A. L. Bertozzi 和 P. Constantin。涡斑的整体正则性。 *Comm. Math. Phys.*，152 28，1993 1 19( ): – 。[5] Boris Buffoni 和 John Toland。 *Analytic theory of global bifurcation*。应用数学普林斯顿丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2003。导论。[6] Jacob Burbea。涡斑运动。 *Lett. Math. Phys.*，6(1):1–16，1982。[7] Daomin Cao、Shanfa Lai 和 Weicheng Zhan。二维不可压缩欧拉方程的行进涡对。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*，60(5):论文编号 190，16，2021。[8] Daomin Cao、Zhongyuan Liu 和 Juncheng Wei。二维欧拉方程中点涡对的正则化。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，212(1):179–217，2014。[9] Daomin Cao、Guolin Qin、Weicheng Zhan 和 Changjun Zou。广义 SQG 方程的共旋与行波涡旋解的存在性和正则性。 *J. Differential Equations*，299 462，2021 429: – 。[10] Daomin Cao、Guolin Qin、Weicheng Zhan 和 Changjun Zou。关于广义 SQG 方程的整体经典解。 *J. Funct. Anal.*，283(2):论文编号 109503，37，2022。[11] Daomin Cao 和 Jie Wan。 *SIAM J. Math. Anal.* 54 2 1488 1514, 2022 维不可压缩欧拉方程的多尺度稳态涡斑。，( ): – 。[12] Daomin Cao、Jie Wan、Guodong Wang 和 Weicheng Zhan。圆盘内平面欧拉方程的旋转涡斑。 *J. Differential Equations*，275:509–532，2021。[13] Angel Castro、Diego C´ordoba 和 Javier G´omez-Serrano。广义表面准地转方程的旋转整体解的存在性与正则性。 *Duke Math. J.*，165(5):935–984，2016。[14] Angel Castro、Diego C´ordoba 和 Javier G´omez-Serrano。活性标量的均匀旋转解析整体斑块解。 *Ann. PDE*，2(1):文章 1，34，2016。[15] Angel Castro、Diego C´ordoba 和 Javier G´omez-Serrano。活性标量的均匀旋转解析整体斑块解。 *Ann. PDE*，2(1):文章 1，34，2016。[16] Angel Castro、Diego C´ordoba 和 Javier G´omez-Serrano。二维不可压缩欧拉方程的均匀旋转光滑解。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，231(2):719–785，2019。[17] Angel Castro、Diego C´ordoba 和 Javier G´omez-Serrano。无黏 SQG 方程的整体光滑解。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，266(1292):v+89，2020。[18] Jean-Yves Chemin。不可压缩二维流体中几何结构的持续性。*Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*，26(4):517–542，1993。[19] Antoine Choffrut 和 Vladim´ır ˇSver´ak。二维不可压缩欧拉方程稳态解集合的局部结构。 *Geom. Funct. Anal.*，22(1):136–201，2012。[20] Peter Constantin、Joonhyun La 和 Vlad Vicol。关于 Gavrilov 论文的评述：Grad-Shafranov 方程、具有紧支撑速度场的三维不可压缩欧拉方程稳态解及其应用。 *Geom. Funct. Anal.*，29(6):1773–1793，2019。[21] Peter Constantin、Drivas Theodore R. 和 Ginsberg Daniel。稳态流体运动中的柔性与刚性。*Communications in Mathematical Physics*，385(6):P521–563，2021。[22] Michele Coti Zelati、Tarek M. Elgindi 和 Widmayer Klaus。二维欧拉方程中 Kolmogorov 流和 Poiseuille 流附近的定常结构。 *Archive for Rational Mechanics and Analysis volume*，2020。[23] Michael G. Crandall 和 Paul H. Rabinowitz。从简单特征值分岔。 *J. Functional Analysis*，8 321: –340，1971。[24] Juan Davila、Manuel Del Pino、Monica Musso 和 Juncheng Wei。欧拉流涡旋动力学的拼接方法。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，235(3):1467–1530，2020。

[25] Juan Davila、Manuel del Pino、Monica Musso 和 Juncheng Wei。三维不可压缩欧拉方程的跃蛙式涡环。 *arXiv preprint arXiv:2207.03263*，2022。[26] Francisco de la Hoz、Zineb Hassainia 和 Taoufik Hmidi。广义表面准地转方程的双连通 V 态。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，220(3):1209–1281，2016。[27] Francisco de la Hoz、Zineb Hassainia、Taoufik Hmidi 和 Joan Mateu。圆盘内稳态斑块的解析与数值研究。 *Anal. PDE*，9(7):1609–1670，2016。[28] Francisco de la Hoz、Taoufik Hmidi、Joan Mateu 和 Joan Verdera。平面欧拉方程的双连通 V态。 *SIAM J. Math. Anal.*，48(3):1892–1928，2016。[29] Gary S. Deem 和 Norman J. Zabusky。涡波：稳态“V态”、相互作用、复现与破裂。 *Phys. Rev. Lett.*，40:859–862，1978年3月。[30] David Gerard Dritschel、Taoufik Hmidi 和 Coralie Renault。准地转浅水方程的不完全分岔。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，231(3):1853–1915，2019。[31] Tarek Elgindi 和 In-Jee Jeong。关于奇异涡斑 I：适定性问题。

Mem. Amer. Math.，( ): – 。

Soc. 283 1400 1 102, 2023

[32] Tarek M. Elgindi 和 In-Jee Jeong。关于奇异涡斑 II：长时间动力学。

Trans. Amer. Math.，( ): – 。

Soc. 373 9 6757 6775, 2020

[33] A. S. Fraenkel 和 U. Tassa。一类具有动态平局的博弈策略。 *Comput. Math. Appl.*，1(2):237–254，1975。[34] L. E. Fraenkel。 *An introduction to maximum principles and symmetry in elliptic problems*，第 *Cambridge Tracts in Mathematics*卷第128册。剑桥大学出版社，剑桥，2000。[35] Thierry Gallay 和 Vladimir Sverak。轴对称涡环的消失黏性极限。 *arXiv preprint arXiv:2301.01092* 2023，。[36] Claudia Garc´ıa。不可压流体模型中的卡门涡街。 *Nonlinearity*，33(4):1625–1676，2020。[37] Claudia Garc´ıa。活性标量方程的涡斑编舞。 *J. Nonlinear Sci.*，31(5):论文编号 75，31，2021。[38] Claudia Garc´ıa 和 Susanna V. Haziot。共旋与反向旋转涡对的全局分岔。*arXiv preprint arXiv:2204.11327*，2022。[39] Claudia Garc´ıa、Taoufik Hmidi 和 Joan Mateu。三维准地转模型的时间周期双连通解。 *arXiv preprint arXiv:2206.10197*，2022。[40] Claudia Garc´ıa、Taoufik Hmidi 和 Joan Mateu。三维准地转模型的时间周期解。*Comm. Math. Phys.*，390(2):617–756，2022。[41] Claudia Garc´ıa、Taoufik Hmidi 和 Juan Soler。二维欧拉方程的非均匀旋转涡与周期轨道。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，238(2):929–1085，2020。[42] A. V. Gavrilov。具有紧支撑的稳态欧拉流。 *Geom. Funct. Anal.*，29(1):190–197，2019。[43] Ludovic Godard-Cadillac。无黏表面准地转方程的光滑行波解。 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*，359:85–98，2021。[44] Ludovic Godard-Cadillac。无黏表面准地转方程的光滑行波解。 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*，359:85–98，2021。[45] Ludovic Godard-Cadillac。欧拉与准地转模型中的涡塌缩。

Discrete Contin. Dyn.，( ): – 。

Syst. 42 7 3143 3168, 2022

[46] Javier G´omez-Serrano、Jaemin Park 和 Jia Shi。具有有限能量的二维欧拉方程非平凡、非集中紧支撑定常解的存在性。 *arXiv preprint arXiv:2112.03821*，2021。[47] Javier G´omez Serrano、Jaemin Park、Jia Shi 和 Yao Yao。关于定常与均匀旋转涡片的评述：柔性结果。 *arXiv preprint arXiv:2012.08709*，2020。[48] Javier G´omez-Serrano、Jaemin Park、Jia Shi 和 Yao Yao。活性标量方程定常解与均匀旋转解的对称性。 *Duke Math. J.*，170(13):2957–3038，2021。[49] Zineb Hassainia 和 Taoufik Hmidi。关于广义准地转方程的 V 态。

Comm.，( ): – 。

Math. Phys. 337 1 321 377, 2015

[50] Zineb Hassainia 和 Taoufik Hmidi。欧拉方程的稳态非对称涡对。

Discrete Contin.，( ): – 。

Dyn. Syst. 41 4 1939 1969, 2021

[51] Zineb Hassainia、Taoufik Hmidi 和 Nader Masmoudi。活性标量方程的 KAM 理论。 *arXiv preprint arXiv:2110.08615* 2021，。[52] Zineb Hassainia、Nader Masmoudi 和 Miles H. Wheeler。旋转涡斑的全局分岔。*Comm. Pure Appl. Math.*，73(9):1933–1980，2020。[53] Zineb Hassainia 和 Emeric Roulley。边界效应对欧拉方程拟周期解出现的影响。 *arXiv preprint arXiv:2202.10053*，2022。[54] Zineb Hassainia 和 Miles H. Wheeler。活性标量方程的多极涡斑平衡态。*arXiv preprint arXiv:2103.06839* 2021，。[55] Taoufik Hmidi。关于旋转涡斑模型的平凡解。 *J. Evol. Equ.*，15(4):801–816，2015。[56] Taoufik Hmidi 和 Joan Mateu。基尔霍夫涡的旋转涡斑分岔。

Discrete Contin.，( ): – 。

Dyn. Syst. 36 10 5401 5422, 2016

[57] Taoufik Hmidi 和 Joan Mateu。旋转涡斑的退化分岔。 *Adv. Math.*，302 850，2016 799：–。[58] Taoufik Hmidi 和 Joan Mateu。主动标量方程的共转与反向旋转涡对的存在性。 *Comm. Math. Phys.*，350(2):699–747，2017。[59] Taoufik Hmidi、Joan Mateu 和 Joan Verdera。旋转涡斑的边界正则性。

Arch. Ration. , ( ): – 。[60]

Mech. Anal. 209 1 171 208, 2013
Taoufik Hmidi、Joan Mateu 和 Joan Verdera。关于旋转双连通涡旋。

J. Differential Equa- , ( ): – 。[61]

tions 258 4 1395 1429, 2015
Taoufik Hmidi、Joan Mateu 和 Joan Verdera。关于旋转双连通涡旋。

J. Differential Equa- , ( ): – 。[62]

tions 258 4 1395 1429, 2015
Taoufik Hmidi 和 Emeric Roulley。准地转浅水方程的时间拟周期涡斑。 *arXiv preprint arXiv:2110.13751*，2021。[63] Hansj¨org Kielh¨ofer。 *Bifurcation theory*，第 156 卷，丛书名为 *Applied Mathematical Sciences*。Springer-Verlag，纽约，2004。一本结合偏微分方程应用的入门著作。[64] G. R. Kirchhoff。 *Vorlesungen uber mathematische Physik. Mechanik.* Teubner，莱比锡，1876。[65] Alexander Kiselev 和 Xiaoyutao Luo。 c^2 涡斑适定性问题。 *arXiv preprint arXiv:2204.06416*，2022。[66] Adolf Kneser。关于线性微分方程积分的实零点的研究。 , ( ): – 。[67] Horace Lamb。 *Hydrodynamics*。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，第六版，1993。附有 R. A. Caflisch [Russel E. Caflisch] 撰写的序言。[68] C. Marchioro 和 M. Pulvirenti。奇异初始数据下的欧拉演化与涡旋理论。

Comm. Math. , ( ): – 。[69]

Phys. 91 4 563 572, 1983
Nikolai Nadirashvili。二维欧拉方程的稳态解。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，209 3 729 745，2013 ( ): – 。[70] J. Norbury。接近 Hill 球形涡的定常涡环。 *Proc. Cambridge Philos. Soc.*，72 284，1972 253：–。[71] Edward A. Overman, II。二维欧拉方程的稳态解 II：极限 V态的局部分析。 *SIAM J. Appl. Math.*，46(5):765–800，1986。[72] Emeric Roulley。准地转浅水方程中的涡旋刚体运动。

arXiv preprint , 。[73] David

arXiv:2202.00404 2022

Ru ´ 2 *arXiv* ız。d 维欧拉

preprint arXiv:2201.09762 2022
方程紧支撑稳态解的对称性结果。 , 。[74] Philippe Serfati。直接证明涡斑的整体存在性

2 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.* D。 , ( ): – 。

I Math. 318 6 515 518, 1994
[75] Didier Smets 和 Jean Van Schaftingen。欧拉方程中涡旋的去奇异化。

Arch. Ration. , ( ): – 。[76]

Mech. Anal. 198 3 869 925, 2010
Bruce Turkington。具有 n 重对称性的共转定常涡流。 *Nonlinear Anal., Appl.* 9 351 369, 1985

Theory Methods , : – 。[77] V. I

Yudovich。理想不可压液体的非定常流。

USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 1963

, 。

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Ciudad Universitaria de Cantoblanco, 28049, Madrid, Spain & Research Unit “Modeling Nature” (MNat), Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain*Email address*: claudia.garcial@uam.es

NYUAD Research Institute, New York University Abu Dhabi, PO BOX 129188, Abu Dhabi, United Arab Emirates. Univ Rennes CNRS IRMAR-UMR 6625 F-35000 Rennes France ,, , ,*Email address*: thmidi@univ-rennes1.fr

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra; Barcelona,Catalonia*Email address*: mateu@mat.uab.cat