arXiv:2302.01296v1 [quant-ph] 2 Feb 2023

带噪链路下纠错量子比特的容错连接

Joshua Ramette, [1] Josiah Sinclair, [1] Nikolas P. Breuckmann, [2] 以及 Vladan Vuleti´c[1]
[1]*Department of Physics, MIT-Harvard Center for Ultracold Atoms and Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139, USA* [2]*School of Mathematics, University of Bristol, Fry Building, Woodland Road, Bristol BS8 1UG, UK*（日期：2023年2月3日）

模块化方法是实现可扩展量子计算最有希望的途径之一。我们证明，即使连接界面上存在显著噪声，不同的表面码补丁也能以容错方式连接。我们通过解析和数值方法量化了接口与体区错误的综合影响。我们证明，与体区相比，系统能够容忍高出 14 倍的接口噪声，而对编码的阈值和阈下行为影响很小；当体错误率为 ∼ 1%、接口错误率为∼ 10%时，系统即可达到阈值。这表明，利用现有技术实现纠错模块化设备的容错扩展已指日可待。

由含噪组件构成的量子器件需要纠错 [1, 2] 才能扩展规模。构建经过纠错的器件，需要通过保真度足够高的量子门连接大量量子比特 [3]。然而，由于在单个物理单元中控制越来越多量子比特普遍存在困难，量子硬件平台在实际应用中会面临系统尺寸限制。例如，囚禁离子（由于运动模的频谱拥挤 [4]）、超导量子比特（由于低温恒温器尺寸和芯片制造 [5]）以及里德堡阵列（由于激光功率有限且显微镜视场有限 [6, 7]）的物理量子比特数量预计都将达到 10^2-10^4 的上限。受这些尺寸限制，单个量子处理器或许很快就能支持多个逻辑量子比特[8–13], 但仍无法成为真正可扩展的纠错器件。

为了突破这些限制，可以考虑将局部模块通过一种物理上彼此独立的机制连接起来的架构；这种机制通常噪声更大、速度更慢，例如通过纠缠光子连接囚禁离子链[14]。对于量子计算机而言，这种模块化方法将实现真正可扩展性的任务简化为：设计一个量子比特数量固定的单元模块，并为其配备
容错量子输入/输出接口，因此扩展规模只需连接更多相同的模块。对于量子通信，采用类似的模块化方法已经是必要的，借此在相距遥远的处理器之间传输量子信息 [2]。

纠错模块化架构面临的一项重大挑战，是以足够的速度和保真度在模块之间传输量子信息，以满足容错要求。由于模块间通信信道通常存在损耗，量子通信通过后选择纠缠分发来实现。两个模块之间以非定域贝尔对形式共享的纠缠，随后可作为资源，用于实现模块间操作的传态门 [15–17]。

即使是预示贝尔对，也可能仍然带有噪声

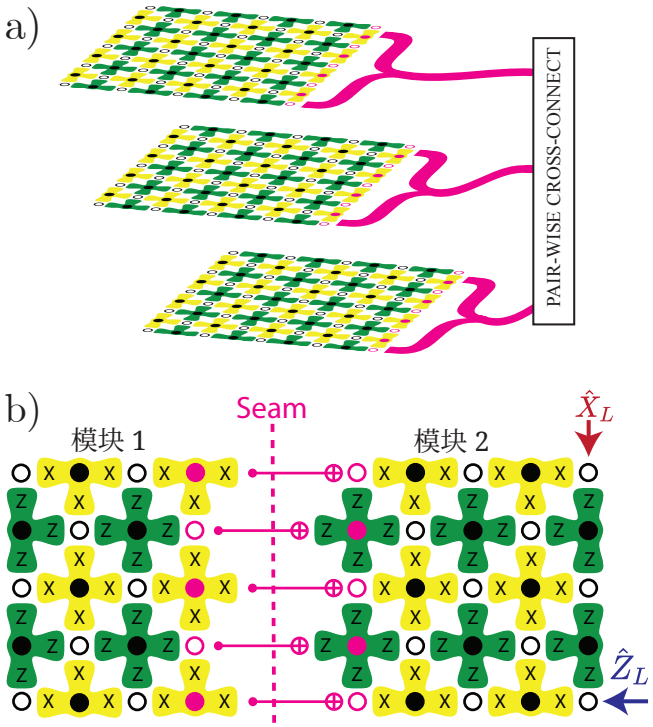


图 1. a）通过交叉连接交换机路由的噪声量子通信链路（粉色）连接不同模块中的表面码量子比特。b）分属不同模块的两个表面码“体区”补丁沿较低维度的“接缝”相连，从而实现逻辑门。稳定子检查跨越接缝，并通过粉色传态门执行。沿两个编码块接口分布的粉色数据量子比特（空心圆）和综合征量子比特（实心圆）会经历较高的噪声水平。 X_L, Z_L表示逻辑弦算符。

[17, 18], 有人提出通过纠缠蒸馏，将多个低保真度纠缠对转化为数量较少、但保真度较高的纠缠对 [19]。然而，简单的蒸馏协议只能将错误降低到约为局部门错误十倍的水平，因为这类协议涉及大量局部门 [20, 21]。更复杂的协议

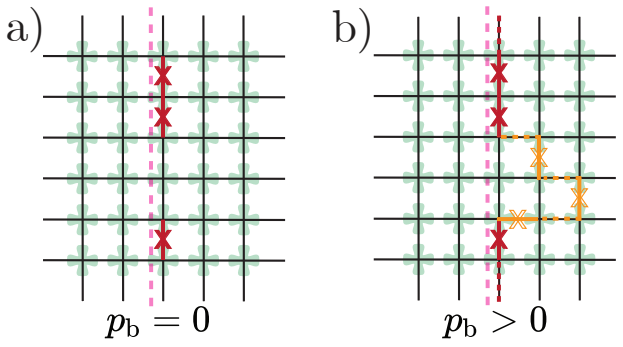


图 2. 接缝和体区的比特翻转错误会同时导致逻辑失效。边表示数据量子比特，顶点表示校验算符。a）仅沿接缝（粉色线右侧的竖直边）发生的一组可纠正比特翻转示例。b）在接缝处出现相同的比特翻转（红色）时，体错误 $p_b > 0$ 可形成一次“偏离”（橙色）。此时恢复过程失效，虚线边被填实。

是进一步降低噪声所必需的，但增加的复杂性会降低成功率，从而降低可实现的码循环速率，并增加每个码周期的存储错误 [18, 22–26]。

在这篇 Letter 中，我们展示了，编码在不同模块中表面码补丁里的逻辑量子比特，即使它们的共享接口处噪声显著升高，仍可通过容错方式连接（见图1a）。此前的研究指出，当体区局部噪声渐近地低于阈值时，含噪链路仍可实现编码块之间的容错量子通信 [27], ；而我们研究的是如图2所示，体区和接口均存在噪声时的编码。通过深入理解体区和接口噪声如何共同形成逻辑失效模式，我们给出了解析界和数值模拟，表明接口噪声的阈值可高达 $\sim 10\%$，即使体噪声接近通常的表面码阈值 $\sim 1\%$。这一宽松的通信误差阈值意味着，已经接近实现局部逻辑量子比特的硬件平台 [8–13], 只需使用含噪互连即可立即扩展规模，无需蒸馏、更好的局部量子门或其他时间或空间开销。

表面码 [28–31] 是一种 Calderbank-Shor-Steane（CSS）码，其电路级解码阈值高达 $p^*_{\text{bulk}} \approx 1\%$ [3]。在图 1所示的 $L \times L$ 表面码中，4 体奇偶校验算符 $Z^{\otimes 4}$ 和 $X^{\otimes 4}$ 分别由综合征量子比特与其附近四个数据量子比特之间的局部 CNOT门实现，并以与每个综合征量子比特相连的四个绿色或黄色叶片表示。逻辑泡利算符分别是沿表面码垂直和水平方向排列的 X 和 Z 泡利算符串。

有多种方法可以在彼此分离的表面码补丁之间实现容错双量子比特门模块。方法包括晶格手术 [32], 编织 [3]，甚至直接在模块之间移动逻辑量子比特，但最终都归结为维持一个横跨两个模块的表面码补丁。对于跨模块的逻辑计算，只需连接两个不同表面码补丁的边，并执行横跨模块的奇偶校验，将两个补丁合并为一个横跨这两个模块的更大表面码 [32]。如图1b所示，在两个编码块连接处的接口或“接缝”上，每项校验都有一个分支从一个表面码补丁延伸至另一个，表示在不同模块中的一个综合征量子比特与一个数据量子比特之间施加了一个（粉色）CNOT 门。

结合通过门隐形传态实现模块间量子门的方法（图1b 中以粉色标出），补充材料中的图 S1 [33] 展示了贝尔对的比特翻转和相位翻转噪声如何分别传播到传态门的目标量子比特和控制量子比特。观察图 1b 可见，噪声贝尔对中的比特翻转噪声会传播到粉色接缝右侧，而相位翻转噪声会传播到粉色接缝左侧。由于 X和 Z 错误会触发不同的校验算符，且可分别使用不同的最小权完美匹配（MWPM）解码器进行解码 [31], ，每个解码器只会在一条数据条带上检测到升高的噪声+，即粉色接缝右侧或左侧的综合征量子比特。

如果综合征量子比特没有噪声，那么连接界面就等价于嵌入二维表面码中的一维重复码（比特翻转和相位翻转噪声率 p_s；表面码的比特翻转和相位翻转噪声率为 p_b）。为处理综合征噪声，我们考虑一个通用的现象学噪声模型，其中体区综合征噪声设为与体区数据量子比特噪声相同 $q_b = p_b$ [31]；接缝综合征噪声也同样设为与接缝数据量子比特噪声相同 $q_s = p_s$，因为贝尔对噪声会传播到两者。通过进行 L 轮综合征提取来完成含噪综合征解码：匹配图沿综合征量子比特扩展到一个额外的时间维度[3, 31]。这样便得到一个大小为 $L \times L$ 的 $D_s = (1+1)$ 维晶格，错误以速率 p_s 发生；该晶格嵌入一个大小为 $L \times L \times L$、错误率为 p_b 的 $D_b = (2+1)$ 维晶格中。

现在我们来说明，由于接缝的维度低于体区，即使接缝处的噪声水平升高，也能承受噪声，而不会严重损害跨模块编码的完整性；即便编码体区内的噪声接近阈值 p^*_b。直观来说，表面码的阈值取决于量子比特的噪声水平（即沿特定边延伸一条链的概率）以及可用于延伸错误链的方向数量。在较低维度中，可用于延伸错误链的方向较少，因此噪声阈值更高。由于 $D_b > D_s$，体区阈值和接缝阈值 p^*_b，p^*_s因此满足 $p^*_s > p^*_b$。

接下来，我们考察图中额外的接缝噪声1b

ˆˆ对 X_L 和 Z_L 逻辑错误的概率有何影响。ˆ由于逻辑 X_L 错误既可能发生在体区，也可能沿接缝发生，因此要抑制这些错误，接缝噪声必须低于接缝阈值 $p_{\rm s} < p_{\rm s}^*$，且体噪声必须低于体阈值 $p_{\rm b} < p_{\rm b}^*$。这是限制最严格的情况，也是图 3 及本文其余部分所讨论的情况。相较之下，即使对于 $p_{\rm s} > p_{\rm s}^*$，Z_L 错误仍必须穿过体区的整个长度，因此只要体区低于阈值，就可以将其抑制。对于我们所考虑的相同数据量子比特噪声和综合征量子比特噪声（$q_{\rm b} = p_{\rm b}$ 和$q_{\rm s} = p_{\rm s}$），在 L 轮纠错中，位翻转和相位翻转解码器产生贯穿这些轮次的“类时间”错误链的概率，与 X_L相同。因此，图3 也展示了跨越 L 轮的类时间位翻转和相位翻转错误链的概率。不过，一旦达到图 3中的阈值判据，就可以通过沿时间方向进一步扩展编码，并在每个逻辑门操作中增加纠错轮数，轻松抑制这些错误链。

现在，要发生逻辑比特翻转错误，一轮错误与纠正的综合效应必须生成一条长度至少为 L 的非平凡比特翻转链 $\{\gamma\}$。首先考虑一个没有接缝的单个编码块，如 [31, 34–36] 所示，并在补充材料 [33], 中概述，逻辑失效概率 $P_{\rm fail}$ 的上界为此类可能链的数量 $n_{\rm nontrivial}(L)$ 乘以每条链发生的概率：

$$P_{\rm fail}/{\rm poly}(L) \le n_{\rm nontrivial}(L) \times (2^L p^{L/2}) \qquad (1)$$

这里，$2^L p^{L/2}$ 的概率上界源于：当 $L/2$ 个比特因环境噪声而翻转后，最小权完美匹配如何补全非平凡链的其余部分；此外，选择一半或更多 L 个比特发生翻转的方式共有 $\le 2^L$ 种。为表示 $n_{\rm nontrivial}(L)$ 的上界，考虑向 $\{\gamma\}$ 追加每条边时，可以沿晶格朝任意方向移动，但不能后退，因此在维度为 D 的情况下共有 $2D-1$ 个方向，从而得到 $n_{\rm nontrivial}(l) \le (2D-1)^l \equiv \mu_D^l$。于是我们可以改写为：

$$P_{\rm fail}/{\rm poly}(L) \le (4\mu_D^2 \times p)^{L/2} \equiv \left(\frac{p}{p^*}\right)^{L/2} \qquad (2)$$

当 $L \to \infty$ for$p < p^*$ 时，该值会被指数级地抑制至零。由于 μ_D 取决于维度，因此阈值界 $p^* \equiv 1/(4\mu_D^2)$ 也取决于维度。

在补充材料中 [33], 我们通过计算在接缝与体区之间跳转的错误链数量，推导出界（式3-6），以约束存在噪声接缝时阈值的变化。在这里，我们给出一种启发式论证，得到相同的结论，并阐明失效机制。我们可以将逻辑失效的表达式（式2）理解为：每向 $\{\gamma\}$ 追加一条边，便乘上因子 $\mu_D \times 2\sqrt{p}$（因此追加 L条边的概率为 $\mu_D \times 2\sqrt{p^L}$），共有 μ_D 种添加边的方式，而 $2\sqrt{p}$ 则是每条链路的有效“概率”（因子 2 和平方根的出现源于最小权完美匹配程序对缺失链路的补全方式）。

平方根的出现源于最小权完美匹配程序对缺失链路的补全方式）。如果错误仅沿接缝发生，且 $p_{\rm b} = 0$ 如图2a 所示，那么每追加一条边，因子就是 $\mu_{\rm s} \times 2\sqrt{p_{\rm s}}$。但令 $p_{\rm b} > 0$后，我们便突然允许在追加下一条接缝链路之前，先经过体区形成额外路径，如图2b 所示；这会增加一些对应于进入体区偏离、随后重新接回接缝的项。对于给定的一次偏离，除了翻转任意数量的可能体边 ℓ（每条边有 $\mu_{\rm b}$ 种追加方式，对应因子$\mu_{\rm b} \times 2\sqrt{p_{\rm b}}$）$^\ell$之外，这次偏离还涉及翻转两条与接缝方向垂直的体边，以及最后一条接缝链路，因而还会产生因子 $\mu_{\rm c} \times 2\sqrt{p_{\rm s}}(2\sqrt{p_{\rm b}})^2$。因子 $\mu_{\rm c} \equiv 4D_{\rm s}(D_{\rm b} - D_{\rm s})$ 计数的是选择从何处离开 2($D_{\rm s} - D_{\rm b}$) 并重新接回 $2D_{\rm s}$ 接缝的方式。仿照式2，我们将所有这些添加新接缝链路的方式求和，从而得到每追加一条接缝边时的修正因子：

$$\mu_{\rm s} \times 2\sqrt{p_{\rm s}} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\mu_{\rm c} \times 2\sqrt{p_{\rm s}}(2\sqrt{p_{\rm b}})^2\right)\left(\mu_{\rm b} \times 2\sqrt{p_{\rm b}}\right)^\ell = \sqrt{\frac{p_{\rm s}}{p_{\rm s}^*}}\left(1 + \alpha_{\rm c} p_{\rm b} \frac{\sqrt{p_{\rm s}^*}}{1 - \sqrt{p_{\rm b}/p_{\rm b}^*}}\right) \qquad (3)$$

这里我们对 ℓ 求几何级数之和，并定义了 $\alpha_{\rm c} \equiv 8\mu_{\rm c}$。

同理类比，我们可以预期失败概率上界为公式 3 的 γ_S次方，其中 $\{\gamma\}$ 是接缝上的边数。此外，注意到如果 $\gamma_S < L$，则 $L - \gamma_S$ 中至少必须有 $\{\gamma\}$ 条体区链路，因为 $\{\gamma\}$ 至少必须有 L 条链路才会失效，我们得到：

$$P_{\rm fail}/{\rm poly}(L) \le \left(\frac{p_{\rm s}}{p_{\rm s}^*}\right)^{\frac{L}{2}} + \left(\frac{p_{\rm b}}{p_{\rm b}^*}\right)^{\frac{L}{2}} + \sum_{\substack{\gamma_S \ge 1: \\ C \ne 0}}^{L} \left[\frac{p_{\rm s}}{p_{\rm s}^*}\left(1 + \alpha_{\rm c} p_{\rm b} \frac{\sqrt{p_{\rm s}^*}}{1 - \sqrt{p_{\rm b}/p_{\rm b}^*}}\right)^2\right]^{\frac{\gamma_S}{2}} \left[\frac{p_{\rm b}}{p_{\rm b}^*}\right]^{\frac{L-\gamma_S}{2}} \qquad (4)$$

前两项对应完全位于接缝或体区内的失效链，而额外的交叉项则适用于考虑含有偏离的链的情况（$C \ne 0$），此时阈值判据混合了关于$\frac{p_{\rm s}}{p_{\rm s}^*}$ 和 $\frac{p_{\rm b}}{p_{\rm b}^*}$的条件。当 $L \to \infty$ 满足括号中的量小于 1 时，所有这些项都会受到抑制。重新改写方程3，可以看出，这等价于接缝阈值上界略微向下“凹陷”：

$$p_{\rm s}^* \to p_{\rm 1s}^* \equiv p_{\rm s}^* \Big/ \left[1 + \alpha_{\rm c} p_{\rm b} \frac{\sqrt{p_{\rm s}^*}}{1 - \sqrt{p_{\rm b}/p_{\rm b}^*}}\right]^2 \qquad (5)$$

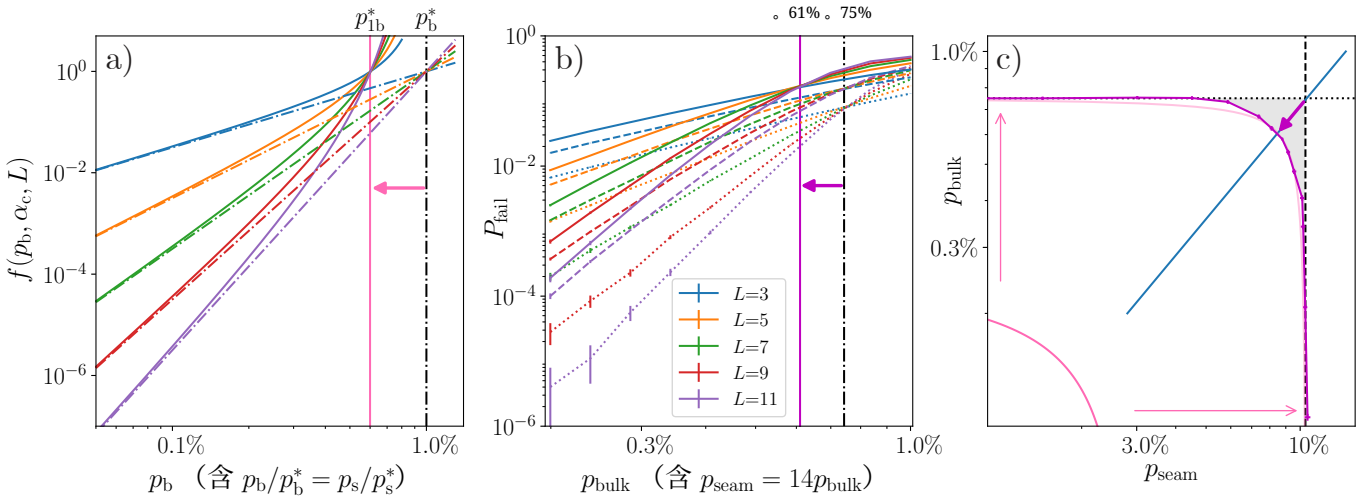


图3. 对 $D_b = 3$ 和 $D_s = 2$ 情况的分析。a）针对 $p_b/p^*_b = p_s/p^*_s$（实线）的解析界；在这种情况下，将曲线绘制为关于 p_b时，接缝曲线与体区曲线（点划线）现在重合。接缝-体区相互作用使阈值界略微降低至 p^*_{1b}，如粉色箭头所示。当体区错误比 p^*_b低数倍后，逻辑失败率会收敛到不存在接缝-体区相互作用时的数值，因为进入体区的偏离会“冻结”。b）与 a）相同，但采用 $p_{seam} = 14p_{bulk}$进行精确数值模拟，约为 $p_{bulk}/p^*_{bulk} = p_{seam}/p^*_{seam}$，使体区曲线（点线）与仅接缝曲线（虚线）的阈值对齐。包含接缝-体区相互作用的完整模拟（实线）也会略微下凹，随后随着 p_{bulk}/p^*_{bulk} 变小而趋近于仅接缝曲线。c）以 p_{seam}为单位绘制的数值提取的阈值，p_{bulk} （紫色）。粉色表示阈值界（式 5）；箭头指向浅粉色线，展示了通过代入 p^*_{seam} 和 p^*_{bulk} 的数值以及 $\alpha_c \to 1.4$的有效值来减少路径重复计数时，界公式如何放宽；该有效值是仍能界定所有数值数据点的最小值。

Fixing $\frac{p_s}{p^*_s} = \frac{p_b}{p^*_b}$, Eq. 4 reduces to:

$$P_{\text{fail}}/\text{多项式}(L) \leq \left[\frac{p_b}{p^*_b}\left(1 + \alpha_c p_b \frac{\sqrt{p^*_s}}{1 - \sqrt{p_b/p^*_b}}\right)^2\right]^{\frac{L}{2}} \equiv f(p_b, \alpha_c, L) \quad (6)$$

我们在图3a 中绘制了该结果。

在图 3中，我们将这些解析界与数值蒙特卡洛模拟进行比较 [37, 38]，以量化错误链同时延伸穿过体区和接缝的影响。接缝作为体区内一个子晶格，还带来另一项影响：每个码周期中，体区量子比特由四个局部门寻址，而每个接缝量子比特仅与一个用于通信的贝尔对相互作用。令 p_{bulk} 表示体区局部门导致体区量子比特发生比特翻转的概率，我们通过直接代入 $4p_{bulk} = p_b$（得出合理的 $p^*_{bulk} = 0.75\%$），同时保持 $p_{seam} = p_s$不变，因为接缝量子比特噪声主要由贝尔对决定。从图 3可见，数值结果呈现出与解析公式相同的定性行为：阈值略有下降，且在阈值以下，逻辑失效收敛到与不存在偏离时相同的值。通过调整参数 μ_s 和 μ_b，使其符合 $D_s = 2$ 和 $D_b = 3$ [31] 对应的已知表面码阈值，并将 α_c 从严格界放宽至较小的有效值，界公式也能相当准确地给出解析阈值行为模型。值得注意的是，除图 3c 中灰色区域所表示的小幅修正外，P_{fail} 的表现近似于体区与接缝彼此解耦，且不包含公式 4中的交叉项：

$$P_{\text{fail}}(p_{bulk}, p_{seam}) \approx \left(\frac{p_{bulk}}{p^*_{bulk}}\right)^{L/2} + \left(\frac{p_{seam}}{p^*_{seam}}\right)^{L/2} \quad (7)$$

分别为 $p^*_{bulk} \approx 1\%$ 和 $p^*_{seam} \approx 10\%$。只要 $\frac{p_{seam}}{p^*_{seam}} \approx \frac{p_{bulk}}{p^*_{bulk}}$，则 $p_{seam} \approx 10p_{bulk}$，接缝噪声几乎没有影响。

我们进一步说明，我们的形式体系如何能够推广到以多种配置连接表面码区块，例如横向门或由较小补丁组成的网格。尽管在图1b 中，我们对齐了两个编码块的物理边界，使得接缝在空间和时间上均延伸，但图3中的结果可适用于任何2D 晶格的子空间。 3D 因此，位于不同模块中的逻辑量子比特之间由贝尔对介导的横向门，并在每个逻辑量子比特上随后进行多轮局域纠错，也会同样对贝尔对噪声具有鲁棒性，因为横向门发生在单个码周期上，并在一个 2D 子晶格上引入噪声；与之前在一个空间方向和一个时间方向上延伸不同，该子晶格现在在两个空间方向上延伸。

通过沿空间和/或时间方向添加多条接缝，并统计在不同接缝之间跳跃的路径，我们的形式体系可用于理解包括重复横向门和编码

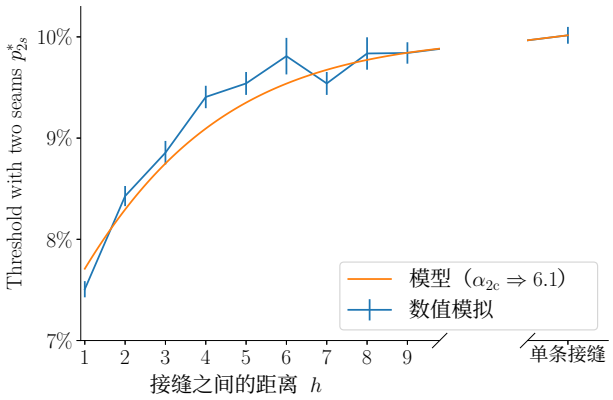


图 4. 固定 $p_b/p^*_b = \frac{1}{2}$ 时，两个相邻平行接缝对阈值的影响。蓝色：数值模拟。黄色:¯方程 9 ，拟合值为 $\alpha_{2c} = 6.1$。接缝越近（h 越小），接缝间跳跃就越容易，从而使阈值降低。当 h 较大时，进入体区的长距离偏离受到指数抑制，阈值便回升至仅有单条接缝时的值。

跨越多个模块的补丁。作为示例，我们对嵌入同一 $D_s = 2$ 体区中的两条平行噪声接缝 $D_b = 3$ 进行建模，并通过在式3 中添加以下项，来描述在两条接缝之间跳跃这一额外过程：

$$\mu_{2c}\sqrt{4p_s}\sqrt{4p_b}^2 \sum_{\ell=h-2}^{\infty} \left(\mu_b\sqrt{4p_b}\right)^{\ell} \tag{8}$$

其中包含由 ℓ 条体边构成、在接缝间跳跃的链。 μ_{2c} 表示一个有效因子，用于计算离开并重新连接到不同接缝的方式数； h 是两个嵌入接缝之间的距离（求和从 $h-2$ 开始，因为除了两条角边外，这次跳跃还必须穿过 $h-2$ 条体边）。对于固定的比值 p_b/p^*_b，我们得到一个关于 p^*_{1s} 的表达式：

$$\sqrt{\frac{p_s}{p^*_{1s}}} + \mu_{2c}\sqrt{4p_s}\sqrt{4p_b}^2 \sum_{\ell=h-2}^{\infty} \left(\mu_b\sqrt{4p_b}\right)^{\ell}$$
$$= \sqrt{\frac{p_s}{p^*_{1s}}}\left[1 + \alpha_{2c}\sqrt{p^*_{1s}}\sqrt{p_b}^2\left(\frac{p_b}{p^*_b}\right)^{(h-2)/2}\frac{1}{1-\sqrt{p_b/p^*_b}}\right]$$

其中 $\alpha_{2c} \equiv 8\mu_{2c}$ 由此我们观察到，如果两个接缝彼此靠近，接缝阈值会进一步降至 p^*_{2s} ：

$$p^*_{1s} \to p^*_{2s} \equiv p^*_{1s} \Big/ \left[1 + \alpha_{2c}\frac{\sqrt{p^*_{1s}}p_b}{1-\sqrt{p_b/p^*_b}}\left(\frac{p_b}{p^*_b}\right)^{(h-2)/2}\right]^2 \tag{9}$$

我们将其绘制在图4中，结果表明，较大的 h 会抑制接缝之间的跃迁，从而使阈值更低。图4 中的模拟呈现出类似的行为，并且在有效值为 $\alpha_{2c} \to 6.1$时与之定量吻合。

我们的主要结果表明，接口可以容忍噪声水平 $p_{seam} \approx 10p_{bulk}$ （方程7），这降低了当前构建模块化架构的实验工作对容错所要求的通信保真度。这类工作包括离子 [17],原子 [39], 或超导量子比特 [40–44], 直接超导微波链路 [45–48], 或在不同子单元之间穿梭离子 [49]或原子 [13] ，其中一些实验已将通信误差降至 $p^*_{seam} \approx 10\%$ [17, 46, 48]以下。随着多个量子计算平台 [8–13]迅速朝着数千量子比特的模块规模和 $\sim 0.1\%$ 的局域门噪声目标迈进，目标噪声水平相应为 $\sim 1\%$ 的互连将直接实现容错模块化可扩展性。对于噪声更大的网络，仍可使用蒸馏；最简单、最高效的协议便足以将错误率降至 $\sim 10p_{bulk}$ [21]，从而实现可扩展性。

致谢

本项目部分经费由DARPA通过ONISQ项目（资助编号 # 134371-5113608）、MIT-哈佛超冷原子中心（美国国家科学基金会资助编号 #PHY-1734011）、美国能源部通过量子系统加速器中心（合同编号 # 7571809）以及AWS提供。

作者感谢Dolev Bluvstein提供的宝贵讨论意见。

J.R. 最初提出了这项工作，建立了理论形式体系，并推导出界的结果。J.R. 和 J.S. 从概念上发展了这项工作，进行了数值模拟并对其进行了解释，同时起草了手稿。N.B. 协助形式化界的证明，并提供了有益的讨论。V.V. 负责监督该项目。所有作者都讨论了研究结果，并参与了手稿的撰写。

[1] P. W. Shor，降低量子计算机存储器退相干的方案，《物理评论A》**52**，R2493（1995）。[2] S. Muralidharan、L. Li、J. Kim、N. L¨utkenhaus、M. D. Lukin和L. Jiang，长距离量子通信的最优架构，《Scientific Reports》**6**，20463（2016）。[3] A. G. Fowler、M. Mariantoni、J. M. Martinis和A. N. Cleland，表面码：迈向实用的大规模量子计算，《物理评论A》**86**，032324（2012）。[4] M. Cetina、L. N. Egan、C. A. Noel、M. L. Goldman、A. R. Risinger、D. Zhu、D. Biswas和C. Monroe，受有噪横向运动影响的单独寻址原子量子比特上的量子门（2020），arXiv:2007.06768 [quant- ph]。

[5] J. Ang、G. Carini、Y. Chen、I. Chuang、M. A. DeMarco、S. E. Economou、A. Eickbusch、A. Faraon、K.-M. Fu、S. M. Girvin、M. Hatridge、A. Houck、P. Hilaire、K. Kr- sulich、A. Li、C. Liu、Y. Liu、M. Martonosi、D. C. McKay、J. Misewich、M. Ritter、R. J. Schoelkopf、S. A. Stein、S. Sussman、H. X. Tang、W. Tang、T. Tomesh、N. M. Tubman、C. Wang、N. Wiebe、Y.-X. Yao、D. C. Yost 和 Y. Zhou，《多节点超导量子计算机的架构》，arXiv 10.48550/ARXIV.2212.06167（2022年）。[6] M. Saffman，《使用原子量子比特和里德堡相互作用进行量子计算：进展与挑战》，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》49，202001 2016( )。[7] M. Saffman，《使用中性原子进行量子计算》，《国家科学评论》6，24（2019年）。[8] IonQ，IonQ Aria（2023年）。[9] IBM，《量子领域的下一步是以量子为中心的超级计算》（2023年）。[10] IBM，《IBM发布400量子比特以上的量子处理器及下一代IBM Quantum System Two》（2023年）。[11] Google，《Bristlecone预览：Google的新型量子处理器》（2023年）。[12] Google，《量子计算机数据表》（2021年）。[13] D. Bluvstein、H. Levine、G. Semeghini、T. T. Wang、S. Ebadi、M. Kalinowski、A. Keesling、N. Maskara、H. Pichler、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin，《基于纠缠原子阵列相干传输的量子处理器》，《自然》604，451（2022年）。[14] C. Monroe、R. Raussendorf、A. Ruthven、K. R. Brown、P. Maunz、L.-M. Duan 和 J. Kim，《具有原子存储器和光子互连的大规模模块化量子计算机架构》，《物理评论A》89，022317（2014年）。[15] D. Gottesman 和 I. L. Chuang，《利用隐形传态和单量子比特操作展示通用量子计算的可行性》，《自然》402，390（1999年）。[16] D. L. Moehring、P. Maunz、S. Olmschenk、K. C. Younge、D. N. Matsukevich、L.-M. Duan 和 C. Monroe，《远距离单原子量子比特的纠缠》，《自然》449，68（2007年）。[17] L. J. Stephenson、D. P. Nadlinger、B. C. Nichol、S. An、P. Drmota、T. G. Ballance、K. Thirumalai、J. F. Good- win、D. M. Lucas 和 C. J. Ballance，《基本量子网络中量子比特的高速率、高保真度纠缠》，《物理评论快报》124，110501（2020年）。[18] R. Nigmatullin、C. J. Ballance、N. de Beaudrap 和 S. C. Benjamin，《作为量子通信和量子计算模块的最简复杂度离子阱》，《新物理学杂志》18，103028（2016年）。[19] W. D¨ur 和 H.-J. Briegel，《用于量子计算的纠缠纯化》，《物理评论快报》90，067901（2003年）。[20] E. T. Campbell，《利用最少本地资源进行分布式量子信息处理》，《物理评论A》76，040302 2007( )。[21] S. Krastanov、V. V. Albert 和 L. Jiang，《优化纠缠纯化》，《Quantum》3，123（2019年）。[22] L. Jiang、J. M. Taylor、A. S. Sørensen 和 M. D. Lukin，《基于小型量子寄存器的分布式量子计算》，《物理评论A》76，062323（2007年）。[23] Y. Li 和 S. C. Benjamin，《具有三量子比特节点的高阈值分布式量子计算》，《新物理学杂志》14，093008（2012年）。[24] K. Fujii、T. Yamamoto、M. Koashi 和 N. Imoto，《采用现实噪声设备实现可扩展量子计算的分布式架构》（2012年）。[25] N. H. Nickerson、Y. Li 和 S. C. Benjamin，《利用噪声极大的网络进行拓扑量子计算，局部错误率接近百分之一》，《自然·通讯》4，1756（2013年）。[26] N. H. Nickerson、J. F. Fitzsimons 和 S. C. Benjamin，《利用由5至50个量子比特组成的单元，在光子链路损耗极大且噪声极强的情况下实现可自由扩展的量子技术》，《物理评论X》4，041041（2014年）。[27] A. G. Fowler、D. S. Wang、C. D. Hill、T. D. Ladd、R. Van Meter 和 L. C. L. Hollenberg，《表面码量子通信》，《物理评论快报》104，180503（2010年）。[28] A. Kitaev，《利用任意子实现容错量子计算》，《物理学年鉴》303，2（2003年）。[29] S. B. Bravyi 和 A. Y. Kitaev，《具有边界的晶格量子码》，arXiv 预印本 quant-ph/9811052（1998年）。[30] M. H. Freedman 和 D. A. Meyer，《射影平面与平面量子码》，《计算数学基础》1，325（2001年）。[31] E. Dennis、A. Kitaev、A. Landahl 和 J. Preskill，《拓扑量子存储器》，《数学物理学杂志》43，4452（2002年）。[32] C. Horsman、A. G. Fowler、S. Devitt 和 R. Van Meter，《通过晶格手术实现表面码量子计算》，《新物理学杂志》14，123011（2012年）。[33] 关于传态门中的噪声传播以及解析阈值界证明的详细信息，请参阅补充材料。[34] N. P. Breuckmann，博士论文：《环面码之外的同调量子码》（2018年）。[35] I. Dumer、A. A. Kovalev 和 L. P. Pryadko，《简并量子码中纠正错误、擦除错误及有故障综合征测量的阈值》，《物理评论快报》115，050502（2015年）。[36] A. Strikis、S. C. Benjamin 和 B. J. Brown，《存在制造缺陷的平面量子比特阵列仍可实现可扩展量子计算》（2021年）。[37] D. K. Tuckett，*Tailoring surface codes: Improvements in quantum error correction with biased noise*，博士论文，悉尼大学（2020年），（qecsim：https://github.com/qecsim/qecsim）。[38] O. Higgott，《Pymatching：用于通过最小权完美匹配解码量子码的 Python 软件包》（2021年）。[39] A. Reiserer 和 G. Rempe，《基于腔的单原子与光学光子量子网络》，《现代物理学评论》87，1379（2015年）。[40] R. Sahu、W. Hease、A. Rueda、G. Arnold、L. Qiu 和 J. M. Fink，《微波—光学接口的量子赋能运行》，《自然·通讯》13，1276（2022年）。[41] H.-T. Tu、K.-Y. Liao、Z.-X. Zhang、X.-H. Liu、S.-Y. Zheng、S.-Z. Yang、X.-D. Zhang、H. Yan 和 S.-L. Zhu，《通过非共振散射实现高效率相干微波到光学转换》，《自然·光子学》16，291（2022年）。[42] R. D. Delaney、M. D. Urmey、S. Mittal、B. M. Brubaker、J. M. Kindem、P. S. Burns、C. A. Regal 和 K. W. Lehnert，《通过低反作用电光转换实现超导量子比特读出》，《自然》**606**，489 (2022年)。

[43] N. Zhu、X. Zhang、X. Han、C.-L. Zou、C. Zhong、C.-H. Wang、L. Jiang 和 H. X. Tang，利用波导腔光磁学实现微波到光学转换，《Optica》**7**，1291（2020年）。[44] P. Imany、Z. Wang、R. A. DeCrescent、R. C. Boutelle、C. A. McDonald、T. Autry、S. Berweger、P. Kabos、S. W. Nam、R. P. Mirin 和 K. L. Silverman，利用声学腔和量子点进行量子相位调制，《Optica》**9**，501（2022年）。[45] P. Magnard、S. Storz、P. Kurpiers、J. Sch¨ar、F. Marxer、J. L¨utolf、T. Walter、J.-C. Besse、M. Gabureac、K. Reuer、A. Akin、B. Royer、A. Blais 和 A. Wallraff，位于空间分离的低温系统中的超导电路之间的微波量子链路，《物理评论快报》**125**，260502（2020年）。[46] L. D. Burkhart、J. D. Teoh、Y. Zhang、C. J. Ax-line、L. Frunzio、M. Devoret、L. Jiang、S. Girvin 和 R. Schoelkopf，错误检测态传输与纠缠

在超导量子网络中的纠缠，《PRX Quantum》**2**，030321（2021年）。[47] H. Yan、Y. Zhong、H.-S. Chang、A. Bienfait、M.-H. Chou、C. R. Conner、E. Dumur、J. Grebel、R. G. Povey 和 A. N. Cleland，《超导量子网络中的纠缠纯化与保护》，《物理评论快报》**128**，080504（2022年）。[48] Y. Zhong、H.-S. Chang、A. Bienfait，´E. Dumur、M.-H. Chou、C. R. Conner、J. Grebel、R. G. Povey、H. Yan、D. I. Schuster 和 A. N. Cleland，《量子网络中的确定性多量子比特纠缠》，《自然》**590**，571（2021年）。[49] J. M. Pino、J. M. Dreiling、C. Figgatt、J. P. Gaebler、S. A. Moses、M. S. Allman、C. H. Baldwin、M. Foss-Feig、D. Hayes、K. Mayer、C. Ryan-Anderson 和 B. Neyenhuis，《囚禁离子量子CCD计算机架构的演示》，《自然》**592**，209（2021年）。

arXiv:2302.01296v1 [quant-ph] 2 Feb 2023

补充材料：带噪链路下纠错量子比特的容错连接

Joshua Ramette、Josiah Sinclair、Nikolas P. Breuckmann 和 Vladan Vuleti´c（日期：2023年2月3日）

传态门的网络噪声传播

当接口通过分布式纠缠实现时，这种纠缠便成为一种资源，用于在不同模块中的量子比特之间施行非局域传态门。图 S1展示了分布式贝尔对上的比特翻转和相位翻转噪声如何传播到不同模块中的控制量子比特和目标量子比特上，粉色传态门作用于这些量子比特。对于发生在贝尔对任一量子比特上的错误，传播方式都相同；这是必然的，因为贝尔对在施加 XX 和 ZZ后保持不变。

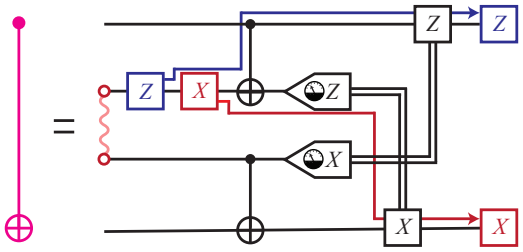


图 S1. X, Z 用于传态门的贝尔对上的噪声（红色波浪线）会传播到该门作用的两个量子比特上。相位翻转只传播到控制量子比特，比特翻转则传播到目标量子比特。

界

可以通过统计对应于同调非平凡错误链的游走，得出表面码唯象阈值的下界。对于具有无噪声综合征的表面码，可以通过在 $2D$ 上配对缺陷来解码；若要纳入有噪声综合征，只需将问题扩展为配对缺陷，这些缺陷还会随时间传播，从而形成一个 $3D$ 匹配问题。 $2D$ 和 $3D$ [1]中的先前界限虽然不够紧，但与真实阈值相差约 3 倍。

为阐释本文关于“体区”匹配图格点（维度 D_b）中包含“接缝”子空间格点（维度$D_\mathrm{s} < D_\mathrm{b}$）里的错误链的主要概念，我们统计游走的数量及其概率，包括那些跨越体区和接缝的游走。对于我们感兴趣的情形（$D_\mathrm{b} = 2$, $D_\mathrm{s} = 1$对应无噪声综合征，以及 $D_\mathrm{b} = 2$+1, $D_\mathrm{s} = 1 + 1$ 对应有噪声综合征），在匹配图上配对缺陷，即可对相应维度的表面码进行解码。当体区的工作状态略低于其自身阈值时，我们可以量化远离接缝的长距离“偏离”受到的强烈抑制。我们针对最受关注的情形（$D_\mathrm{b} = 3$, $D_\mathrm{s} = 2$）评估结果，表明可以提高接缝上的噪声，以换取体区噪声的小幅降低。尽管这些界并不紧致，且用于追踪接缝与体区之间跳转的组合学会重复计算游走，从而得到不如精确数值模拟所揭示结果那么显著的效果，但这一推导阐释了许多有助于理解我们结果的核心概念，也揭示了更复杂情形中的问题，例如在同一体区内运行多个不同接缝时，编码性能会受到怎样的影响。

匹配图与最小权完美匹配解码器

如正文图 2 所示，匹配格点中的边集 $\{M\}$ 对应数据量子比特，其顶点对应综合征，因此，构成 ∂ 上错误集边界的顶点，恰好对应被违反的校验。

$\{M\}$	匹配图中所有边的集合
$\{E\}$	因噪声而发生比特翻转的所有边的集合
$\{R\}$	因最小权完美匹配恢复而翻转的所有边的集合
$\{S\}$	接缝上的所有边的集合
$\{B\}$	体区中的所有边的集合
$\{\gamma\}$	闭合路径上的连通边集合
$\{\gamma_S\}$	$\{\gamma\} \cap \{S\}$，$\{\gamma\}$ 中及接缝上的边集合
$\{\gamma_B\}$	$\{\gamma\} \cap \{B\}$，$\{\gamma\}$ 中及体区中的边集合
$\{\gamma_{SE}\}$	$\{\gamma_S\} \cap \{E\}$，$\{\gamma\}$中的接缝噪声比特翻转集合
$\{\gamma_{SR}\}$	$\{\gamma_S\} \cap \{R\}$，$\{\gamma\}$中的接缝恢复比特翻转集合

表 S1. 术语便览。

我们首先定义一些术语。“边”指匹配图中量子比特所在的位置。花括号中的量 {} 表示匹配图的子集，不带花括号的量表示此类子集的大小。$\{E\}$ 是在某一轮纠错中发生比特翻转错误的一组边（可能不连通）；$\{R\}$ 是通过最小权完美匹配（MWPM）选出的一组边，这些边会发生比特翻转，以尝试纠正 $\{E\}$。错误步骤与恢复步骤之和$\{E + R\} \equiv (\{E\} \backslash \{R\}) \cup (\{R\} \backslash \{E\})$（对称差）是噪声作用后再进行纠正的一轮操作结束时，残留比特翻转的一组边。使用对称差是因为，同时被错误翻转、又被纠正操作翻转回来的边，在该轮纠错结束后并未处于翻转状态。

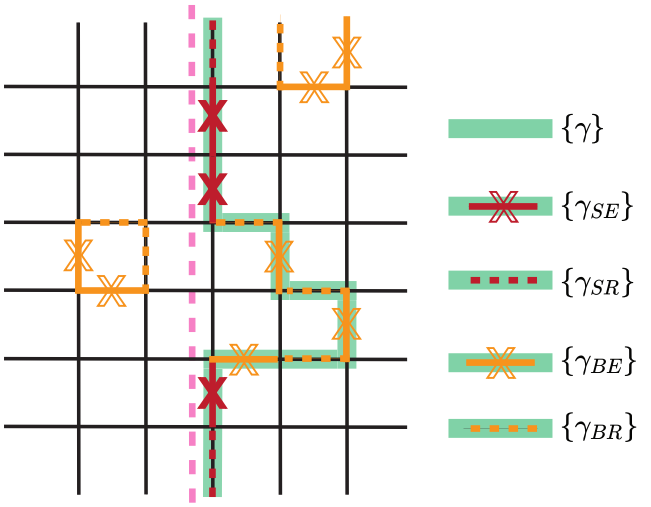


图 S2. 如果在一轮纠错中，环境噪声与尝试进行的纠正共同翻转了足够多的比特，形成某条跨越编码的非平凡链 $\{\gamma\}$，就会发生逻辑失效。每一轮中，错误会引入一组随机的比特翻转 $\{E\}$，它们分别发生在接缝边和体边上，如红色和橙色的 X 所示。最小权完美匹配恢复还会翻转接缝和体区中虚线标出的边 $\{R\}$，使状态返回编码空间。随后，剩余的 X 和虚线合在一起构成集合 $\{E+R\}$。在此示例中，$\{E+R\}$ 包含非平凡链 $\{\gamma\}$。

是连接表面编码相对两侧边缘的一条路径，不含额外的环或不连通分量。我们将边 $\{M\}$ 分为两个子集：$\{S\}$ 和 $\{B\}$，分别表示接缝和体区中发生错误的边，其发生概率为 p_{s} 和 p_{b}。γ_S、γ_B 表示这些类别的边中，与给定 γ的支撑集相交的边数：$\gamma_S \equiv |\{\gamma\}\cap\{S\}|$。我们还将分别提及 $\{\gamma\}$和 $\{E\}$、$\gamma_{SE} \equiv |\{\gamma_S\}\cap\{E\}|$中包含的接缝边数量，以及 $\{\gamma\}$ 和 $\{R\}$、$\gamma_{SR} \equiv |\{\gamma_S\}\cap\{R\}|$中包含的接缝边数量。

给定错误集合 $\{E\}$，测得的综合征为 $\partial\{E\}$，也就是与 $\{E\}$ 相邻的顶点集合。给定的 $\{E\}$ 发生的概率为

$$\mathrm{Prob}(\{E\}) = \prod_{i\in\{E\}} p_i \prod_{i\in\{M\}\setminus\{E\}} (1-p_i) \propto \prod_{i\in\{E\}} \frac{p_i}{1-p_i} \quad (1)$$

最小权完美匹配随后解码 $\partial\{E\}$ 并返回 $\{R\}$，即最可能导致测得结果的边集合 $\partial\{E\}$，方法是最大化式 1，同时满足约束 $\partial\{R\}=\partial\{E\}$。最小权完美匹配是一种高效的经典算法，在使 $\{E+R\}$ 同调平凡 [2]这项任务中已知其表现近乎最优。具体做法是为 $\{M\}$中的每条边赋予权重 $\log\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right)$，然后找出权重最小的 $\{R\}$，使得 $\partial\{R\}=\partial\{E\}$:

$$\mathrm{wt}(\{R\}) \equiv \sum_{i\in\{R\}} \log\left(\frac{1-p_i}{p_i}\right) \quad (2)$$

经由特定 $\{\gamma\}$ 失效的概率

我们的首要目标是给出一个上界，限制一轮错误之后再经过最小权完美匹配的纠正翻转，产生包含特定 $\{\gamma\}$ 的比特翻转集合的概率；该对象包含 γ_S 条接缝边和 γ_B 条体边，因而会导致逻辑失效。这相当于对这样一种情况发生的概率求界：在一轮纠错期间出现物理错误，使得 $\{E+R\}\supseteq\{\gamma\}$（即错误链 $\{\gamma\}$ 包含在最终产生的比特翻转集合 $\{E+R\}$中）。

根据定义，最小权完美匹配保证 $\mathrm{wt}(\{R\}) \le \mathrm{wt}(\{E\})$。对于 $\{E+R\}\supseteq\{\gamma\}$，由于 $\{\gamma\}$ 是闭合的（$\partial\{\gamma\}=\emptyset$），因此 $\{\gamma\}\cap\{R\}$ 和 $\{\gamma\}\cap\{E\}$ 必定在 $\{\gamma\}$内共享一条边界。于是 $\mathrm{wt}(\{\gamma\}\cap\{R\}) \le \mathrm{wt}(\{\gamma\}\cap\{E\})$；否则，用 $\{\gamma\}\cap\{E\}$ 的边替换边 $\{\gamma\}\cap\{R\}$，就能进一步降低 $\{R\}$的权重，这与定义矛盾，因为最小权完美匹配已经使 $\mathrm{wt}(\{R\})$ 最小。

因此，$\{E+R\}\supseteq\{\gamma\}$ 意味着以下两个条件：

$$\mathrm{wt}(\{\gamma\}) = \mathrm{wt}(\{E\}\cap\{\gamma\}) + \mathrm{wt}(\{R\}\cap\{\gamma\}) \quad (3)$$
$$\mathrm{wt}(\{R\}\cap\{\gamma\}) \le \mathrm{wt}(\{E\}\cap\{\gamma\}) \quad (4)$$

结合以上结果可得 $\mathrm{wt}(\{E\}\cap\{\gamma\}) \ge \mathrm{wt}(\{\gamma\})/2$。根据权重的定义式2，可得总体推论：

$$\{E+R\}\supseteq\{\gamma\} \implies \left(\frac{p_{\mathrm{s}}}{1-p_{\mathrm{s}}}\right)^{\gamma_{SE}}\left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{1-p_{\mathrm{b}}}\right)^{\gamma_{BE}} \le \left(\frac{p_{\mathrm{s}}}{1-p_{\mathrm{s}}}\right)^{\gamma_S/2}\left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{1-p_{\mathrm{b}}}\right)^{\gamma_B/2} \quad (5)$$

现在我们将界定 $\mathrm{Prob}(\gamma_{SE},\ \gamma_{BE})$，即生成一个 $\{E\}$ 且恰好有 γ_{SE}，γ_{BE} 个比特翻转与 $\{\gamma\}$ 重叠的概率。这个 $\mathrm{Prob}(\gamma_{SE},\ \gamma_{BE})$ 等于从 γ_S 中选取 γ_{SE} 并从 γ_B 中选取 γ_{BE} 的方式数。由于 $\binom{\gamma_S}{\gamma_{SE}} \times \binom{\gamma_B}{\gamma_{BE}} \le 2^{\gamma_S}\times 2^{\gamma_B}$，我们可以对其取界，再乘以在这些特定选取位置实际发生比特翻转的概率 $p_{\mathrm{s}}^{\gamma_{SE}}(1-p_{\mathrm{s}})^{\gamma_S-\gamma_{SE}}p_{\mathrm{b}}^{\gamma_{BE}}(1-p_{\mathrm{b}})^{\gamma_B-\gamma_{BE}}$:

$$\begin{aligned}&\text{概率}(\gamma_{SE},\ \gamma_{BE})\\ &\le 2^{\gamma_S+\gamma_B}p_{\mathrm{s}}^{\gamma_{SE}}(1-p_{\mathrm{s}})^{\gamma_S-\gamma_{SE}}p_{\mathrm{b}}^{\gamma_{BE}}(1-p_{\mathrm{b}})^{\gamma_B-\gamma_{BE}}\\ &= 2^{\gamma_S+\gamma_B}\left(\frac{p_{\mathrm{s}}}{1-p_{\mathrm{s}}}\right)^{\gamma_{SE}}(1-p_{\mathrm{s}})^{\gamma_S}\left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{1-p_{\mathrm{b}}}\right)^{\gamma_{BE}}(1-p_{\mathrm{b}})^{\gamma_B}\end{aligned} \quad (6)$$

现在我们界定 Prob($\{E+R\}\supseteq\{\gamma\}$)，即 $\{E\}$ 发生且满足 $\{E+R\}\supseteq\{\gamma\}$ 的概率，这样我们还可以加入式 5 中的条件，并将其代入式 6 ，得到：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}(\{E+R\}\supseteq\{\gamma\})\le\\&2^{\gamma_S+\gamma_B}\Big(\frac{p_\mathrm{s}}{1-p_\mathrm{s}}\Big)^{\gamma_S/2}(1-p_\mathrm{s})^{\gamma_S}\Big(\frac{p_\mathrm{b}}{1-p_\mathrm{b}}\Big)^{\gamma_B/2}(1-p_\mathrm{b})^{\gamma_B}\\&\le 2^{\gamma_S+\gamma_B}p_\mathrm{s}^{\gamma_S/2}p_\mathrm{b}^{\gamma_B/2}\end{aligned}\tag{7}$$

此时，我们已成功消除了对错误集 $\{E\}$ 的任何显式引用，并且仅用取决于所选 $\{\gamma\}$的量 γ_S，γ_B 给出了失败概率的界。

只有当一轮噪声及随后的最小权完美匹配校正生成的比特翻转集包含某个 $\{\gamma\}$ 连接表面码相对两侧的时，才会发生逻辑失效。因此，接下来我们可以对所有此类连接表面码两侧的 $\{\gamma\}$ 求和，从而给出逻辑失效总概率 P_fail 的界，即对式7中的失败概率求和：

$$\begin{aligned}P_\mathrm{fail}&\le\sum_{\{\gamma\}}\mathrm{Prob}(\{E+R\}\supseteq\{\gamma\})\\&\le\sum_{\{\gamma\}}2^{\gamma_S+\gamma_B}p_\mathrm{s}^{\gamma_S/2}p_\mathrm{b}^{\gamma_B/2}\end{aligned}\tag{8}$$

非平凡错误链的计数

式（8）给出的 P_fail 上界仍取决于所有可能的 $\{\gamma\}$。为了得到更易于计算的表达式，我们将改为对长度为 $\ell\ge L$的自避免游走（SAW）这一更大的集合求和。由于所有 $\{\gamma\}$ 都是此类自避免游走，因此我们可以进而得到一个更宽松的 P_fail上界。为了赋予正确的概率，我们将首先讨论自避免游走的一种参数化方式，该方式计入其中包含的体区边和接缝边的数量。

通常，我们用 n_SAW 表示长度固定为 ℓ的自避免游走数量。为了理解 n_SAW 如何随 ℓ增长，先考虑在方格晶格上沿某个维度 D逐步延伸游走，即不断添加边。 D 越大，每次添加边时可选的方向就越多，因此游走数量呈指数增长的速度也越快。对于长度为 ℓ的游走，一个上界为：

$$n_\mathrm{SAW}(\ell)\le(2D-1)^\ell\tag{9}$$

因为每条新边都可以沿任一可用方向接上，但不能接回游走本身。因此，维度会直接影响阈值：随着$n_\mathrm{SAW}(\ell)$增长得越快，要控制错误链的增长并抑制 p 随系统尺寸增大（如式13所示）的幅度，错误概率 P_fail 的临界值就必须越小。

在我们的情形中，需要统计游走的数量随 γ_S 的变化，以及插入体区偏离段（从接缝离开再返回）的方式数。对于具有 γ_S 条接缝边的游走，我们有 $\binom{\gamma_S}{C}$ 种方式可选择沿游走长度方向的 C 个位置（由 k索引），插入长度为 ℓ_k的“偏离段”；在这些段中，游走会离开接缝进入体区，然后重新接回接缝。偏离段 ℓ_k（从 $k=1$ 到 C索引），连同长度为 ℓ_0 和 ℓ_{C+1} 的体区段（若游走起点或终点位于体区而非接缝上，则分别位于游走的开头和末尾），构成集合 $\{\ell_k\}_{k=0}^{C+1}$，我们将其简记为 $\{\ell_k\}$。确定游走长度方向上的角点位置后，这些角点会将游走划分为若干段，分别在体区（维度 D_b）或接缝（维度 D_s）中移动。我们将每个偏离段开头和末尾处从接缝正交伸出的两条“角点”体边单独计数，因此，由 C 个偏离段产生的体边总数为 $\gamma_B\equiv 2C+\sum_{k=0}^{C+1}\ell_k$。

现在，固定将游走划分为接缝段和体区段，并令 γ_S、C、 $\{\ell_k\}$。沿着游走逐步计数，统计在接缝或体区中延伸游走时，以及遇到角点时，可用于添加边的方向数量。在仅限于接缝的情况下添加边，或在体区游程期间添加边时，我们有 $\mu_\mathrm{s}\equiv 2D_\mathrm{s}-1$ 或 $\mu_\mathrm{b}\equiv 2D_\mathrm{b}-1$种选择。每当链离开接缝时（共 C 次），都有$2(D_\mathrm{b}-D_\mathrm{s})$条角边可供选择；每当链从角点返回接缝时（共 C 次），都有 $2D_\mathrm{s}$ 种选择来确定每个接缝段的第一条接缝边（这些边不再计入 μ_s ），因此每次偏离都会产生$2(D_\mathrm{b}-D_\mathrm{s})\times(2D_\mathrm{s}/\mu_\mathrm{s})$种选择。当 $C\ge 1$且接缝边和体边均存在时，整体上界为：

$$n_\mathrm{SAW}(\gamma_S,\{\ell_k\},C\ge1)\le\binom{\gamma_S}{C}a^C\mu_\mathrm{s}^{\gamma_S}\mu_\mathrm{b}^{\sum_k\ell_k}\tag{10}$$

其中 $a\equiv\mu_\mathrm{c}/\mu_\mathrm{s}$ and $\mu_\mathrm{c}\equiv 4D_\mathrm{s}(D_\mathrm{b}-D_\mathrm{s})$ 统计了为每次偏离选择起始和结束处两个角边的方式数。对于 $D_\mathrm{s}=2$, D_b =3，我们有 $\mu_\mathrm{s}=3$, $\mu_\mathrm{b}=5$ and $a=\frac{8}{3}$。对于$\mu_\mathrm{s},\mu_\mathrm{b}$ ，已知的结果仅略小于这一简单计数论证 [1, 3]。

如果 $C=0$，则不存在同时包含接缝边和体边的自避游走，该游走只会位于体区或接缝中，因此 $S=0$or $B=0$:

$$\begin{aligned}n_\mathrm{SAW}(\gamma_S,|\{\ell_k\}|=0,C=0)&\le\mu_\mathrm{s}^{\gamma_S}\\n_\mathrm{SAW}(\gamma_S=0,\{\ell_k\},C=0)&\le\mu_\mathrm{b}^{\gamma_B}\end{aligned}\tag{11}$$

逻辑失效概率的界

令 $\mathrm{Prob}_\mathrm{SAW}(\gamma_S,\ \{\ell_k\},\ C)$ 表示生成错误集 $\{E\}$ 的总概率，其中任意包含 $\{\gamma\}$ 条边、编号为 γ_S、$\{\ell_k\}$ 和 C 的游走都包含于 $\{E+R\}$ 中。

由于所有 $\{\gamma\}$ 具有相同的 γ_S、$\{\ell_k\}$、C，其发生概率界均由公式 7给出，因此我们可以将 $\mathrm{Prob}_{\mathrm{SAW}}(\gamma_S,\ \{\ell_k\},\ C)$ 表示为公式 7 中的概率乘以此类游走的数量 $n_{\mathrm{SAW}}(\gamma_S,\ \{\ell_k\},\ C)$。由于匹配图中有 $\mathrm{poly}(L)$ 条可能的边可用于开始游走，因此有

$$\mathrm{Prob}_{\mathrm{SAW}}(\gamma_S,\{\ell_k\},C)/\mathrm{poly}(L) \le n_{\mathrm{SAW}}(\gamma_S,\{\ell_k\},C)\times 2^{\gamma_S+[2C+\sum_k \ell_k]} p_{\mathrm{s}}^{\gamma_S/2} p_{\mathrm{b}}^{[2C+\sum_k \ell_k]/2} \tag{12}$$

因此，我们可以给出逻辑失效概率 P_{fail} 的界，因为形成同调非平凡环需要错误链游走沿接缝在空间或时间方向上至少延伸 L 条边，使接缝与体区偏离边的总数足够大：$\gamma_S+\sum_{k=0}^{C+1}\ell_k \ge L$。角边本身不会对生成失效所必需的定向游走有所贡献。对所有可能导致逻辑失效且取值为 γ_S，$\{\ell_k\}$，C的游走求和，得到：

$$\begin{aligned} &P_{\mathrm{fail}}/\mathrm{poly}(L) \\ &\le \sum_{\gamma_S\ge 0}\sum_{C=0}^{\gamma_S} \sum_{\substack{\{\ell_k\ge 1\}:\\ \gamma_S+\sum_k \ell_k\ge L}} \mathrm{Prob}_{\mathrm{SAW}}(\gamma_S,C,\{\ell_k\}) \\ &\le \sum_{\gamma_S\ge 0}\sum_{C=0}^{\gamma_S} \sum_{\substack{\{\ell_k\ge 1\}:\\ \gamma_S+\sum_k \ell_k\ge L}} n_{\mathrm{SAW}}(\gamma_S,C,\{\ell_k\}) \\ &\qquad \times (4p_{\mathrm{s}})^{\gamma_S/2}(4p_{\mathrm{b}})^{\frac{1}{2}\sum_k \ell_k}(4p_{\mathrm{b}})^C \end{aligned} \tag{13}$$

将我们的表达式代入式 10 和11 中的 n_{SAW}，再代入式 13，可得到分别对应纯体区链（$S=0$）和纯接缝链（$B=0$）的各项；此外，当至少存在一次偏离时，还需对跨越接缝与体区的游走求和 C：

$$P_{\mathrm{fail}}/\mathrm{poly}(L) \le \sum_{\gamma_S\ge L}\left(\frac{p_{\mathrm{s}}}{p_{\mathrm{s}}^*}\right)^{\frac{\gamma_S}{2}} + \sum_{\gamma_B\ge L}\left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{\gamma_B}{2}} + \sum_{\gamma_S\ge 1}\left(\frac{p_{\mathrm{s}}}{p_{\mathrm{s}}^*}\right)^{\frac{\gamma_S}{2}} \sum_{C=1}^{\gamma_S}\binom{\gamma_S}{C}(4ap_{\mathrm{b}})^C \sum_{\substack{\{\ell_k\ge 1\}:\\ \gamma_S+\sum_k \ell_k\ge L}} \left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{1}{2}\sum_k \ell_k} \tag{14}$$

其中，$p_{\mathrm{s}}^* \equiv \frac{1}{4\mu_{\mathrm{s}}^2}$，$p_{\mathrm{b}}^* \equiv \frac{1}{4\mu_{\mathrm{b}}^2}$ 分别对应于如图 S3a 所示，将接缝与体区分别独立处理时阈值的界。对于我们关注的情况 $D_{\mathrm{s}}=2$，$D_{\mathrm{b}}=3$，取值为 $p_{\mathrm{s}}^* \equiv \frac{1}{4\mu_{\mathrm{s}}^2} = \frac{1}{4\times 3^2} = 0.028$，$p_{\mathrm{b}}^* \equiv \frac{1}{4\mu_{\mathrm{b}}^2} = \frac{1}{4\times 5^2} = 0.010$（见图 S3a）。

现在我们可以利用约束 $\sum \ell_k \ge L-\gamma_S$ 认识到，当$\gamma_S < L$时，这些几何级数不可能都从 $l_k=1$开始。我们用某个 d_k 表示它们的起始位置，使得 $\sum_k d_k \equiv L-\gamma_S$ 对于 $L-\gamma_S>0$，而 $\sum_k d_k \equiv 0$ 对于$L-\gamma_S \not> 0$（我们将其记作 $\sum_k d_k \equiv L-\gamma_S|_{>0}$），然后代入 $l_k=\ell'_k+d_k$，这样 l'_k 现在就表示链中每次偏离处“松弛量”的长度：

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\{\ell_k\ge 1\}:\\ \gamma_S+\sum_k \ell_k\ge L}} \left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{1}{2}\sum_k \ell_k} &= \sum_{\{\ell'_k\ge 0\}} \left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{1}{2}\sum_k d_k+\ell'_k} \\ &= \left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{L-\gamma_S}{2}\big|_{>0}} \sum_{\{\ell'_k\ge 0\}} \left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{1}{2}\sum_k \ell'_k} \end{aligned} \tag{15}$$

其中，相同的代换将约束 $\gamma_S+\sum_k \ell_k \ge L \to \gamma_S+\sum_k \ell'_k+\sum_k d_k \ge L \implies \sum_k \ell'_k \ge 0$（使用 $\sum_k d_k = L-\gamma_S|_{>0}$）转换为平凡约束，因此我们将其省略。为简单起见，现在我们将 l'_k 重新记为 l_k。

当偏离填满体区体积时，求和的真正上限由此确定，因此约束最多为 $\sum_k \ell_k \le \mathrm{poly}(L)$。这样，我们也可以将求和上限扩展至每个 ℓ_k 对应的约束 $l_k \le \mathrm{poly}(L)$，同时仍保持一个界。回想一下我们如何定义记号 $\{\ell_k\} = \{\ell_k\}_{k=0}^{C+1}$。接着，我们可以分别对 ℓ_0 和 ℓ_{C+1}的链段长度求和；对于 $\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}<1$，由于求和中的所有项都小于 1，因此有 $\sum_{\ell_0\ge 0}^{\mathrm{poly}(L)}\left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\ell_0/2} \le \mathrm{poly}(L)$ 和 $\sum_{\ell_{C+1}\ge 0}^{\mathrm{poly}(L)}\left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\ell_{C+1}/2} \le \mathrm{poly}(L)$，这可以吸收到$P_{\mathrm{fail}}/\mathrm{poly}(L)$中。现在，剩余的区段集合 $\{\ell_k\}$从 $k=1$ 延伸至 C。直观地说，由于错误链开头和末尾长度为 ℓ_0 和 ℓ_{C+1} 的体区段都只出现一次，因此不会影响阈值界；而错误链中间可能的接缝偏离数量 C 则可能随系统尺寸增长，从而影响阈值。

为处理这些偏离，我们可以简化问题，并通过扩展上限来继续维持一个界，允许每个 l_k 独立运行至多 ∞：

$$\sum_{\{\ell_k\ge 0\}_{k=1}^C}^{\mathrm{poly}(L)} \left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{1}{2}\sum_k \ell_k} \le \sum_{\{\ell_k\ge 0\}_{k=1}^C}^{\infty} \left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{1}{2}\sum_k \ell_k} \tag{16}$$

接下来，我们可以将对这些值 $\{\ell_k\}_{k=1}^C$ 求和的部分提取出来，写成乘积，并利用几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$，假设 $\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}<1$：

$$\sum_{\{\ell_k\ge 0\}_{k=1}^C}^{\infty} \left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{1}{2}\sum_k \ell_k} = \prod_{k=1}^{C}\left[\sum_{\ell_k=0}^{\infty}\left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{1}{2}\ell_k}\right] = \left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{p_{\mathrm{b}}}{p_{\mathrm{b}}^*}\right)^{\frac{1}{2}\ell}\right]^C = \left[\frac{1}{1-\sqrt{p_{\mathrm{b}}/p_{\mathrm{b}}^*}}\right]^C \tag{17}$$

将其代入14 可得:

$$P_{\text{fail}}/\text{poly}(L) \le \sum_{\gamma_S \ge L} \left(\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*}\right)^{\frac{\gamma_S}{2}} + \sum_{\gamma_B \ge L} \left(\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*}\right)^{\frac{\gamma_B}{2}} + \sum_{\gamma_S \ge 1} \left(\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*}\right)^{\gamma_S/2} \left(\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*}\right)^{\frac{L-\gamma_S}{2}\big|_{>0}} \times \sum_{C=1}^{\gamma_S} \binom{\gamma_S}{C} (4ap_\text{b})^C \left[\frac{1}{1-\sqrt{p_\text{b}/p_\text{b}^*}}\right]^C \tag{18}$$

现在我们可以使用恒等式 $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$:

$$P_{\text{fail}}/\text{poly}(L) \le \sum_{\gamma_S \ge L} \left(\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*}\right)^{\frac{\gamma_S}{2}} + \sum_{\gamma_B \ge L} \left(\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*}\right)^{\frac{\gamma_B}{2}} + \sum_{\substack{\gamma_S \ge 1: \\ C \ne 0}} \left(\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*}\right)^{\frac{\gamma_S}{2}} \left(\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*}\right)^{\frac{L-\gamma_S}{2}\big|_{>0}} \left[1 + \alpha_\text{c} p_\text{b} \frac{\sqrt{p_\text{s}^*}}{1-\sqrt{p_\text{b}/p_\text{b}^*}}\right]^{\gamma_S} \tag{19}$$

其中 $4a = \alpha_c\sqrt{p_s^*}$, 这里我们现在将 α_c 视为有效地统计在某次偏离中离开接缝并返回接缝的方式数。

现在，若不存在偏离 $C = 0$:

$$P_{\text{fail}}(C=0)/\text{poly}(L) \le \sum_{\gamma_S \ge L} \left(\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*}\right)^{\frac{\gamma_S}{2}} + \sum_{\gamma_B \ge L} \left(\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*}\right)^{\frac{\gamma_B}{2}} \tag{20}$$

现在，对于 $\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*} \ll 1$, $\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*} < 1$, γ_S, γ_B 求和中的最大项将是满足 $\gamma_S = L$ 和 $\gamma_B = L$的项；由于求和项数至多等于晶格大小，即某个 poly(L)，因此有:

$$P_{\text{fail}}(C=0)/\text{poly}(L) \le \left(\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*}\right)^{\frac{L}{2}} + \left(\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*}\right)^{\frac{L}{2}} \tag{21}$$

交叉项也适用类似的论证:

$$P_{\text{fail}}/\text{poly}(L) \le \left(\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*}\right)^{\frac{L}{2}} + \left(\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*}\right)^{\frac{L}{2}} + \sum_{\substack{\gamma_S \ge 1: \\ C \ne 0}}^{L} \left[\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*}\left(1 + \alpha_\text{c} p_\text{b} \frac{\sqrt{p_\text{s}^*}}{1-\sqrt{p_\text{b}/p_\text{b}^*}}\right)^2\right]^{\frac{\gamma_S}{2}} \left(\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*}\right)^{\frac{L-\gamma_S}{2}} \tag{22}$$

它们都会受到抑制，条件是 $L \to \infty$

$$\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*}\left[1 + \alpha_\text{c} p_\text{b} \frac{\sqrt{p_\text{s}^*}}{1-\sqrt{p_\text{b}/p_\text{b}^*}}\right]^2 < 1 \tag{23}$$

$$\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*} < 1 \tag{24}$$

重新表述方程23，可以看出，这等价于阈值界略微向下“下垂”:

$$p_\text{s}^* \to p_{1\text{s}}^* \equiv p_\text{s}^* \Big/ \left[1 + \alpha_\text{c} p_\text{b} \frac{\sqrt{p_\text{s}^*}}{1-\sqrt{p_\text{b}/p_\text{b}^*}}\right]^2 \tag{25}$$

这表明，当接缝错误和体错误同时发生时，接缝和体阈值中不同程度的“下垂”之间存在权衡（见图 S3c）。

针对 $\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*} = \frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*}$ 这一情形，我们可以进一步给出界并进行简化，其结果绘于图 S3b 以及正文图3b中，并与数值模拟进行比较:

$$P_{\text{fail}}/\text{poly}(L) \le \left[\frac{p_\text{b}}{p_\text{b}^*}\left(1 + \alpha_\text{c} p_\text{b} \frac{\sqrt{p_\text{s}^*}}{1-\sqrt{p_\text{b}/p_\text{b}^*}}\right)^2\right]^{\frac{L}{2}} \equiv f(p_\text{b}, \alpha_\text{c}, L) \tag{26}$$

式 26 不仅指出了哪些接缝错误与体错误的组合能够达到阈值，而且对于确定标度效率也很重要：当体区本身低于阈值时，低于阈值的行为会迅速趋近于体错误与接缝错误彼此独立时的情况。从上述数值可以看出，当 p_b 仅比 p_b^*低几倍时，从接缝偏离进入体区的情况会受到强烈抑制，因此式22 中接缝项在低于阈值时的标度几乎与没有任何体错误时相同。事实上，数值结果中的这一行为与该观察一致，见图 S3：当低于阈值几倍后，接缝错误与体错误组合的曲线便趋近于纯接缝错误的曲线。

将模型扩展至 2 条接缝

本节将推广我们的方法，以理解同一体区中嵌入两条接缝的情况。在这种情况下，错误链除了可以从同一条接缝跳出再跳回外，现在还可以在两条接缝之间跳转。

我们可以用以下方式解释上一节的结果。将 γ_S 增加 1 以追加一条接缝边，会带来一个额外的因子:

$$\sqrt{\frac{p_\text{s}}{p_\text{s}^*}}\left[1 + \alpha_\text{c} p_\text{b} \frac{\sqrt{p_\text{s}^*}}{1-\sqrt{p_\text{b}/p_\text{b}^*}}\right] \tag{27}$$

要低于阈值，该因子必须小于 1。为了阐释我们的结果，我们可以将上面的因子改写为:

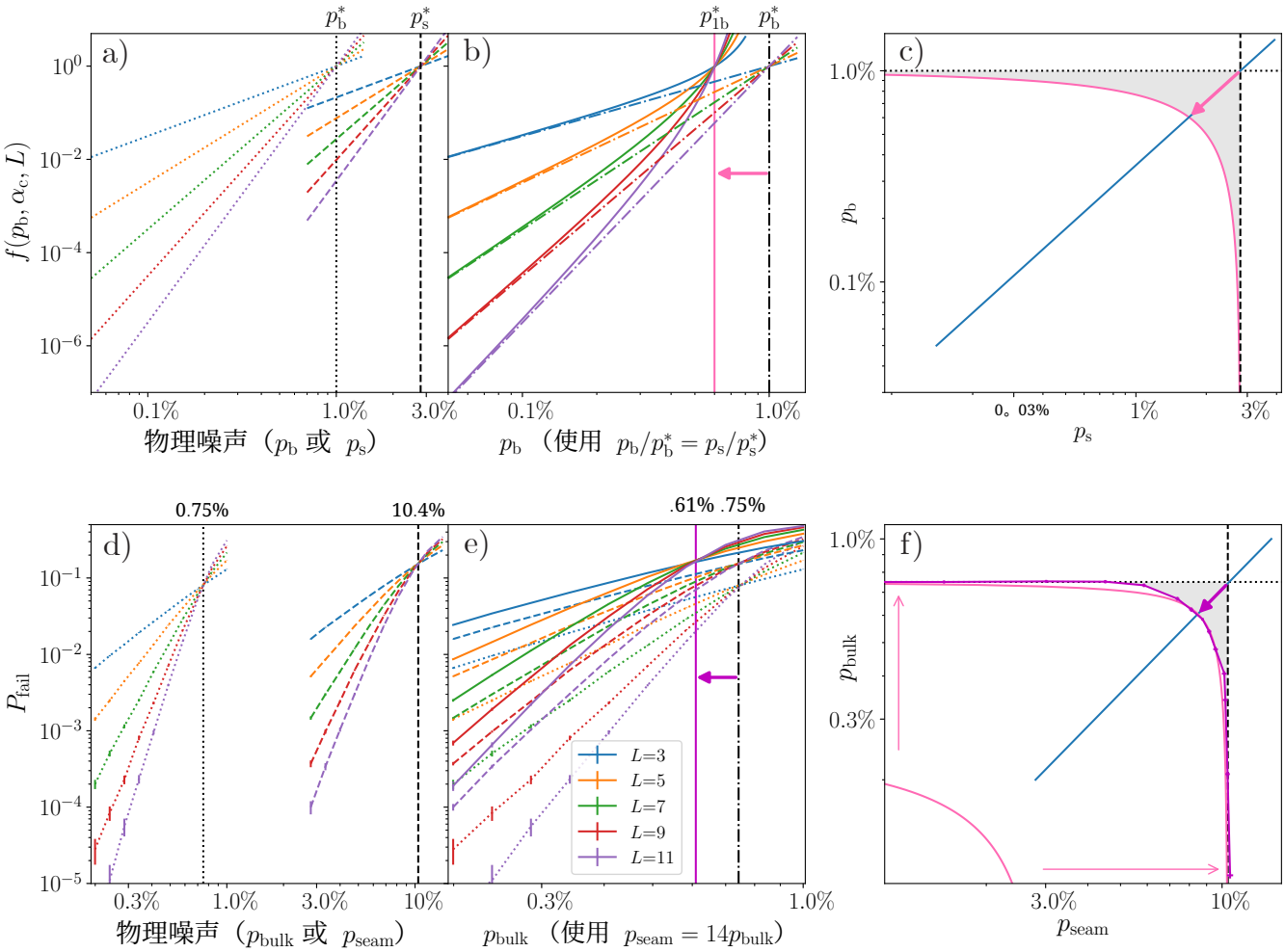


图 S3。上排：解析逻辑失败界。a) $D_b = 3$（点线）和 $D_s = 2$（虚线）的界，以及相应的阈值界 p_b^* 和 p_s^*。b) 固定 26式的解析界（方程），其中 $p_b/p_b^* = p_s/p_s^*$（实线）；此时，a) 中的接缝曲线和体区曲线重合（点划线），并将其绘制为 p_b的函数。接缝-体区相互作用使阈值界略微降低至 p_{1b}^*，如粉色箭头所示。当偏离进入体区的情况在低于阈值数倍后被“冻结”时，逻辑失败率会收敛至不存在接缝-体区相互作用时的数值。c) 在 23 式（粉色）中绘出阈值界，展示 p_s、 p_b的各种可能取值。在不存在接缝-体区相互作用时，虚线左侧（即 $p_s < p_s^*$）且点线下方（即 $p_b < p_b^*$）的所有点都低于阈值界。接缝-体区相互作用使阈值界下弯至粉色曲线，此时灰色区域不再低于阈值界。蓝线表示与 b) 中横轴对应的截线。下排：数值模拟。d) 与 a) 相同，但采用精确数值模拟。e) 与 b) 相同，但采用精确数值模拟，并取 $p_{seam} = 14p_{bulk}$，约为 $p_{bulk}/p_{bulk}^* = p_{seam}/p_{seam}^*$。包含接缝-体区相互作用的曲线（实线）同样会随着 p_{bulk}/p_{bulk}^* 变小而趋近于仅接缝曲线（虚线）。f) 以 p_{seam}、 p_{bulk} 为变量绘制数值提取的阈值（紫色）。粉色曲线是从 c) 重新绘出的界。浅粉色表示将数值提取的阈值代入，并采用有效的 $\alpha_c \to 1.4$值后得到的界；该值是仍能界定所有数值数据点的最小值。

$$= \mu_s\sqrt{4p_s} + \mu_c\sqrt{4p_s}(\sqrt{4p_b})^2\frac{1}{1-\sqrt{p_b/p_b^*}}$$
$$= \mu_s\sqrt{4p_s} + \mu_c\sqrt{4p_s}(\sqrt{4p_b})^2\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{p_b}{p_b^*}\right)^{\ell/2}$$
$$= \mu_s\sqrt{4p_s} + \mu_c\sqrt{4p_s}(\sqrt{4p_b})^2\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\mu_b\sqrt{4p_b}\right)^{\ell} \quad (28)$$

我们将这个因子解释为对不同.....求和

追加下一条接缝边的各种可能方式，并根据与每条边相关的“概率”赋予权重（实际上是“概率”的平方根，因为根据上文的论证，最小权完美匹配可以补全缺失的边）。添加下一条接缝边有两种方式：留在接缝上，在局部追加另一条接缝边（$\sqrt{4p_s}$有 μ_s 种选择）；或者先跳入体区，追加 ℓ 条体边，然后再接回接缝上（$\sqrt{4p_s}(\sqrt{4p_b})^2$有 μ_c 种方式来确定接缝的起点和终点，并对所有

在偏离的中间包含 k 条体边的方式）。

这种方法不仅有助于理解从单条接缝偏离后再回到该接缝的行为，也有助于理解其他情形，例如编码中存在多条接缝时的情况。举例来说，当有两条接缝时，除了考虑在同一条接缝上偏离再返回的情况，合理的做法是为上述总和增加额外项，以计入在两条接缝之间跳转的偏离。此时，我们可以定性地添加一项，对应于离开其中一条接缝并重新接入另一条接缝的所有路径：

$$(\mu_{2c}\sqrt{4p_{\rm s}}\sqrt{4p_{\rm b}}^{2})\sum_{\ell=h-2}^{\infty}\left(\mu_{\rm b}\sqrt{4p_{\rm b}}\right)^{\ell} \tag{29}$$

在接缝之间添加由 ℓ 条体边构成的链，以便在接缝之间跳跃，其中 h 是分隔接缝的距离（求和从 $h-2$ 开始，因为除了角边之外，至少还需要这么多条体边才能延伸到另一条接缝），而 μ_{2c} 是离开一条接缝并重新接入第二条接缝的方式数（$\mu_{2c}=4$ 是合理的选择，因为这些路径中占主导的会是那些朝另一条接缝方向离开的路径，所以离开的方式有一种，重新接入的方式有四种）。于是得到总和：

$$\begin{aligned}&\mu_{\rm s}\sqrt{4p_{\rm s}}+(\mu_{c}\sqrt{4p_{\rm s}}\sqrt{4p_{\rm b}}^{2})\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\mu_{\rm b}\sqrt{4p_{\rm b}}\right)^{\ell}\\&+(\mu_{2c}\sqrt{4p_{\rm s}}\sqrt{4p_{\rm b}}^{2})\sum_{\ell=h-2}^{\infty}\left(\mu_{\rm b}\sqrt{4p_{\rm b}}\right)^{\ell}\end{aligned} \tag{30}$$

与上一节的做法一样，我们可以归并单个接缝导致的阈值偏移：$p_{\rm s}^{*}\to p_{1s}^{*}$ 然后只将缝间跳跃单独分离出来：

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{p_{\rm s}}{p_{1\rm s}^{*}}}+\mu_{2\rm c}\sqrt{4p_{\rm s}}\sqrt{4p_{\rm b}}^{2}\sum_{\ell=h-2}^{\infty}\left(\mu_{\rm b}\sqrt{4p_{\rm b}}\right)^{\ell}\\&=\sqrt{\frac{p_{\rm s}}{p_{1\rm s}^{*}}}\left[1+\alpha_{2\rm c}\sqrt{p_{1\rm s}^{*}}\sqrt{p_{\rm b}}^{2}\left(\frac{p_{\rm b}}{p_{\rm b}^{*}}\right)^{(h-2)/2}\frac{1}{1-\sqrt{p_{\rm b}/p_{\rm b}^{*}}}\right]\end{aligned}$$

和之前一样，我们可以将括号中的整个项向下移，使其与 p_{1s}^{*} 相邻，从而得到接缝之间跳跃所导致的预期额外阈值偏移的形式：

$$p_{1\rm s}^{*}\to p_{2\rm s}^{*}\equiv p_{1\rm s}^{*}\Big/\left[1+\alpha_{2\rm c}p_{\rm b}\frac{\sqrt{p_{1\rm s}^{*}}}{1-\sqrt{p_{\rm b}/p_{\rm b}^{*}}}\left(\frac{p_{\rm b}}{p_{\rm b}^{*}}\right)^{(h-2)/2}\right]^{2} \tag{31}$$

请注意，对于较大的 h，这里的额外阈值偏移会消失；此时，穿过体区在接缝之间进行长距离跳跃的概率受到强烈抑制，因此对添加下一条接缝边的方式数贡献可以忽略不计。

例如，取 $p_{\rm b}/p_{\rm b}^{*}\to\frac{1}{2}$，从正文图3可以看出，由于体区包围单个接缝，缝错误阈值仅略有下降。将 p_{1s}^{*} 设为该值后，在正文图4中，我们绘出了式 31 在有效 $\alpha_{2c}=6.1$值下的结果，该结果随后与数值提取的双接缝缝错误阈值的变化行为高度吻合。解析公式似乎捕捉到了接缝间距离与体区低于阈值的程度之间的定性关系，并且可以很容易地推广到具有许多接缝以及高维的情形，例如利用更小的补丁构建大型表面码。

[1] E. Dennis、A. Kitaev、A. Landahl 和 J. Preskill，《拓扑量子存储》，《数学物理学杂志》**43**，4452（2002）。[2] O. Higgott，Pymatching：一种使用最小权重完美匹配来解码量子码的 Python软件包（2021年）。[3] G. Slade，《随机游走》，《美国科学家》**84**，146（1996）。