arXiv:2302.01306v1 [math.CO] 2 Feb 2023

# More 图的 $z$-色数相关结果

**Abbas Khaleghi Manouchehr Zaker***

数学系，基础科学高等研究院，伊朗赞詹
45137-66731

**Sub于202年9月8日提交至《离散应用数学》** **2**

**摘要**

我们将图 $G$ 的一种 $z$-着色定义为任意由颜色类 $C_1$、.....、$C_k$ 组成的正常顶点着色，且满足：（$i$）对于任意两种颜色 $i$ 和 $j$，若$1 \leq i < j \leq k$，则任意一个颜色为 $j$ 的顶点都与一个颜色为 $i$ 的顶点相邻；（$ii$）存在一个由 $G$ 中顶点组成的集合 $\{u_1, \ldots, u_k\}$，使得 $u_j \in C_j$对于任意$j \in \{1, \ldots, k\}$， $u_k$都与 $u_j$ 相邻，其中每个 $1 \leq j \leq k$ 满足 $j \neq k$；以及（$iii$）对于每个满足 $i \neq j$ 的 $i$ 和 $j$，顶点 $u_j$ 在 $C_i$ 中有一个邻点。用 $z(G)$ 表示图$G$的任意 $z$-着色所用颜色数的最大值。分别用 $\Gamma(G)$ 和 b$(G)$ 表示 $G$ 的 Grundy数和 b-色数。图的 $z$-着色优于 Grundy 着色和 b-着色。我们证明，对于无穷多个图 $G$， $z(G)$ 远优于 min$\{\Gamma(G)$、b$(G)\}$；为此，我们构造了一个图的无限序列 $\{G_n\}_{n=3}^{\infty}$，使得对每个 $n \geq 3$，都有 $z(G_n) = n$，但 $\Gamma(G_n) =$ b$(G_n) = 2n-1$。我们证明无环图是 $z$-单调且 $z$-连续的。随后证明，即使对于二部图 $G$，判定 $z(G) = \Delta(G) + 1$ 是否成立也是 $NP$- 完全问题。最后，我们证明，识别满足 $z(G) = \chi(G)$ 的图 $G$ 是 $coNP$-完全问题，从而改进了关于 Grundy数的先前结果。

**关键词：** 图着色；First-Fit着色；Grundy数；b-色数； $z$-色数； $z$-着色

**AMS分类：** 05C15,05C85

## 1 引言

本文中的所有图都是无向的，且不含环和重边。在图 $G$ 中， $\Delta(G)$ 表示 $G$ 的最大度。设 $v$ 是 $G$ 中的一个顶点， $N(v)$

*mzaker@iasbs.ac.ir

表示 $v$ 的邻居集合和 $v$ 在 $G$ 中的闭邻域，分别记为 $N[v]$ 。此外，对于 $G$ 中顶点的任意子集 $S$，我们用 $G[S]$ 表示由 $S$ 中的元素在 $G$ 中诱导的子图。具有 $n$ 个顶点的完全图记为 $K_n$。两个顶点不相交的图 $G_1$ 和 $G_2$ 的并是图 $G_1 \cup G_2$，其顶点集为 $V$（$G_1$）$\cup V$（$G_2$），边集为 $E$（$G_1$）$\cup E$（$G_2$）。两个不相交图 $G_1$ 和 $G_2$ 的联接是图 $G_1 \oplus G_2$：由 $G_1 \cup G_2$ 得到，并在 $G_1$ 中的任意顶点与 $G_2$ 中的任意顶点之间添加一条边。图 $G$ 的正常顶点着色是指将颜色 1、2、.....赋予 $G$ 的顶点，使任意两个相邻顶点获得不同的颜色。色类是指具有相同颜色的顶点子集。对 $G$ 进行正常着色时所使用的最少颜色数称为 $G$ 的色数，记为 $\chi$（$G$）。 $G$ 的正常边着色定义类似。对 $G$ 进行正常边着色所需的不同颜色的最少数目记为 $\chi'$（$G$）。文献 [9] 已证明，判定给定的 3- 正则图 $G$ 是否可 3- 边着色是 $NP$- 完全问题。未在此处定义的术语请参阅 [2] 。Grundy 着色和 b-着色是图的正常着色中两种众所周知的技术，定义如下。

图 $G$ 的 Grundy 着色是指图 $G$ 的任意正常顶点着色，由若干颜色类组成，记作 $C_1$, ....., $C_k$，且对于每个 $i < j$， $C_j$ 中的任意顶点在 $C_i$ 中都有一个邻点。图 $G$ 的 Grundy 数（也称 First-Fit色数）记作 $\Gamma(G)$（也记作 $\chi_{\mathsf{FF}}(G)$），它是图 $G$ 的任意 Grundy 着色所使用的颜色数的最大值。显然， $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$。关于图的 Grundy 数和 First-Fit着色，已有大量研究论文，例如 [7, 8, 12, 13]。在 [12] 和 [13] 中证明了确定二部图的补图的 Grundy 数是 $NP$-完全问题；在 [8] 中则证明了确定二分图的 Grundy 数是 $NP$-完全问题。满足 $\Gamma(G) = \chi(G)$ 的图在 [13], 中被称为良着色图，文中还证明了识别良着色图是 $coNP$-完全问题。

图 $G$ 的 b-着色（或称色支配着色）是一种正常顶点着色，其中每个色类都包含一个顶点（颜色支配顶点），该顶点与其他每个色类中至少一个顶点相邻。b-色数 $b(G)$ 是满足以下条件的最大整数 $k$： $G$ 存在一种使用 $k$ 种颜色的 b-着色。显然，$b(G) \leq \Delta(G)+1$。求 $b(G)$ 是 $NP$-完全问题，但对于树 [10]有多项式时间解法。若图 $G$ 满足以下性质，则称其在 [5] 中是 b-连续的：对于任意整数 $k$，只要 $\chi(G) \leq k \leq b(G)$， $G$就存在一种使用 $k$ 种颜色的 b-着色。在 [3] 中，Bonomo等人提出了 b-单调性的概念。若对于 $G$ 的每个诱导子图 $H_1$ 以及 $H_1$的每个诱导子图 $H_2$ ，图 $G$ 都满足 $b(H_1) \leq b(H_2)$，则称其为 b-单调图。

我们注意到，Grundy 着色和 b-着色是通过应用某些重新着色操作实现的两种颜色抑制技术。文献 [11] 研究了 b-着色中所用重新着色操作的扩展。文献 [14]以$z$-着色之名引入了一种复杂的重新着色操作及相应的颜色抑制技术。图 $G$ 的 $z$-着色是由色类 $C_1$、.....、$C_k$ 构成的任意正常顶点着色，且满足 ($i$)：对于任意两个颜色 $i$ 和 $j$，若 $1 \leq i <$

$j \leq k$，则任何颜色为 $j$ 的顶点都与一个颜色为 $i$的顶点相邻；(*ii*) 存在一个由 $G$ 中的顶点组成的集合 $\{u_1, \ldots, u_k\}$，使得 $u_j \in C_j$对于任意 $j \in \{1, \ldots, k\}$ 和$u_k$ ，均与 $u_j$ 相邻，且对每个满足 $j \neq k$的 $1 \leq j \leq k$ 均成立；(*iii*) 对于每个满足 $i \neq j$的 $i$ 和 $j$，顶点 $u_j$ 在 $C_i$中有一个邻点。文献 [14] 证明，任何图都可以通过一个高效过程得到 $z$-着色。记 $z(G)$ 为图 $G$的任意 $z$-着色所用颜色数的最大值。在图 $G$ 的一个使用$k$ 种颜色的 $z$-着色 $C$ 中，若顶点 $v$ 在 $C$ 中颜色为 $k$ ，且 $v$ 与至少 $k-1$ 个颜色各不相同的颜色支配顶点相邻，则称 $v$ 为优美顶点。注意，$z$-着色是通过重新着色技术得到的：不断进行重新着色，直到图中得到一个含有优美顶点的 Grundy 着色。它因此优于 Grundy 着色和颜色支配着色。我们有 $z(G) \leq \min\{\Gamma(G), b(G)\} \leq \Delta(G) + 1$。我们称图 $G$ 为 $z$- 连续的，当且仅当对于任意 $k$，若 $\chi(G) \leq k \leq z(G)$，则存在一个使用 $k$ 种颜色的 $G$ 的 $z$-着色。此外，若对 $G$ 的每个诱导子图 $H_1$ 以及 $H_1$的每个诱导子图 $H_2$ ，都有 $z(H_1) \geq z(H_2)$，则称图 $G$ 为 $z$-单调的。这两个性质一般并不成立。图 $K_{n,n} \setminus nK_2$ 不是 $z$-连续的，而$K_{n,n} \setminus (n-1)K_2$ 不是 $z$-单调的。

**本文的结构如下**。在命题 1 中，我们得到了图的联接与并的 $z$-色数之间的关系。随后，在命题 2 中，我们给出一个图序列 $\{G_n\}_{n=3}^{\infty}$ ，使得对每个 $n$， $z(G_n) < \Gamma(G_n) = b(G_n)$。在第 2 节的其余部分，我们证明无环图是 $z$-连续且$z$-单调的。在第 3 节中，我们证明，对于二分图 $G$，判定 $z(G) = \Delta(G) + 1$ 是否$NP$-完全是$NP$-完全问题。最后证明，识别满足 $z(G) = \chi(G)$ 的图 $G$是 $coNP$-完全问题。

# 2 一些一般结果

本节首先根据 $z(G_1)$ 和 $z(G_2)$，得出 $G_1 \oplus G_2$ 和$G_1 \cup G_2$ 的 $z$-色数之间的关系。这些关系将在后面的一个结果中用到。文献 [1] 中得出了类似的 Grundy 数和 b-色数关系。这些关系与此类似，不过，如果 $G_1$ 和 $G_2$ 是两个顶点不相交图，那么 $b(G_1 \cup G_2) \geq max\{b(G_1), b(G_2)\}$ ，并且在许多情况下不等式是严格的。但对于 $z$-色数，我们有等式。

**命题 1**。 设 $G_1$ 和 $G_2$ 是两个顶点不相交图。那么

*(i)* $z(G_1 \oplus G_2) = z(G_1) + z(G_2)$。 (*ii*)
$z(G_1 \cup G_2) = max\{z(G_1)\ z(G_2)\}$。

**证明**。 (i) 设 $z(G_1)$ 为 $= k_1$， $z(G_2)$ 为 $= k_2$， $G = G_1 \oplus G_2$ ，并假设 $k_1 \geq k_2$。令 $c_1$ 为 $G_1$ 的一个 $z$-着色，使用 $k_1$ 种颜色；令 $c_2$ 为 $G_2$ 的一个 $z$-着色，使用 $k_2$ 种颜色。

通过令.....来定义 $G$ 的一个 $z$-着色 $c$，使用 $k_1+k_2$ 种颜色:

$$c(v)=\begin{cases}c_1(v)+k_2 & v\in V(G_1)\\ c_2(v) & v\in V(G_2)\end{cases}$$

容易验证，若 $v\in G_1$ 是 $c_1$ 中的优美顶点，那么在 $c$ 的 $G$ 的 $k_1+k_2$ 颜色着色中，$v$ 是 $z$-着色的优美顶点。因此，$z(G)\geq z(G_1)+z(G_2)$。

现在反设 $z(G)>k_1+k_2$。那么对某个整数 $t\geq 1$，$z(G)=k_1+k_2+t$。考虑 $c$的一个 $z$-着色，它用 $k_1+k_2+t$种颜色给 $G$着色。由于没有任何一种颜色能同时出现在 $G_1$ 和 $G_2$中，因此对于 $i=1$ 或 $i=2$，$G_i$中颜色的数量严格大于 $k_i$。假设这种情况发生在 $i=1$。令 $C_1,C_2,\ldots,C_j$为 $G_1$ 中满足 $j>k_1$的这些色类。定义 $c'$ 的一个 $z$-着色如下。对于每个顶点 $v\in G_1$，若 $c(v)\in C_i$，则令 $c'(v)=i$。由于 $c$ 是 $G$ 的一个 $z$-着色，因此正常着色$c'$ 是 $G_1$ 的一个 $z$-着色，且使用 $j$ 种颜色。这与 $z(G_1)$的极大性矛盾。

(ii) 令 $z(G_1\cup G_2)=k$。显然，$k\geq max\{z(G_1)\ z(G_2)\}$。假设 $k>max\{z(G_1)\ z(G_2)\}$。考虑 $G_1\cup G_2$ 的一个 $z$-着色 $c$，使用 $k$ 种颜色。设 $c$ 中一个颜色为 $k$的顶点 $w$ 是优美顶点。则存在 $k-1$ 个颜色各不相同且与 $w$相邻的颜色支配顶点。由于 $G_1$ 和 $G_2$ 顶点不相交，我们不妨设 $w$ 以及所有这些颜色支配顶点都属于例如 $G_1$。令 $G_1$ 的着色 $c_1$为将 $c$ 限制在 $G_1$上所得的着色。由此可知，$c_1$ 是 $G_1$的一个 $z$-着色。但 $c_1$ 所含颜色数多于 $z(G_1)$，矛盾。□

下一个结果表明，对于无穷多个图，$z(G)$ 远优于 $\min\{\Gamma(G),\ b(G)\}$。在 [14]中构造了一个图的无限序列 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得当 $n\to\infty$ 时，$\min\{\Gamma(H_n),\ b(H_n)\}\to\infty$，但对于每个 $n$，$z(H_n)\leq 3$。命题 2 提供了另一个序列 $G_n$，使得 $\min\{\Gamma(G_n),\ b(G_n)\}-z(G_n)\to\infty$。

**命题 2**。存在一个图的无限序列 $\{G_n\}_{n=3}^{\infty}$，使得对于每个 $n$, $\Gamma(G_n)=b(G_n)=2n-1$，但 $z(G_n)=\chi(G_n)=n$。

**证明**。对于任意正整数 $n\geq 3$，我们按如下方式构造一个图 $G_n$。首先，考虑顶点集 $\{v_1,\ldots,v_n\}$上的完全图 $K_n$。然后，在每个顶点$v_i$ 处连接一个具有 $n$ 个顶点 $\{v_1^i,\ldots,v_{n-1}^i,v_n^i\}$ 的完全图 $K(v_i)$，使得 $v_i$和$v_n^i$ 与 $K(v_i)$中的相应顶点重合，即 $v_i=v_n^i$。对于每个 $i,j$ 且满足 $1\leq i<j\leq n$，我们有 $V(K(v_i))\cap V(K(v_j))=\emptyset$。最后，对于每个 $i,\ 1\leq i\leq n$，在 $K(v_i)$ 的 $v_1^i$ 处连接 $n-1$ 个叶顶点。将所得的图记为 $G_n$。注意，$\Delta(G_n)=2n-2$ 且$\chi(G_n)=n$。图 $G_n$ 的一般形式如图1所示。

我们证明 $\Gamma(G_n)=2n-1$。根据 $\Delta(G_n)=2n-2$ 以及已知的上界$\Gamma(G)\leq\Delta(G)+1$，可得 $\Gamma(G_n)\leq 2n-1$。现在，我们给出一种使用 $2n-1$ 种颜色的 $G_n$ 的部分Grundy着色。将颜色 $n,\ n+1,\ldots,2n-1$ 分别赋给顶点 $v_1,\ldots,v_n$。然后，对于 $K(v_i)$中除 $v_n^i$ 以外的任意顶点 $i\in\{1,\ldots,n\}$，赋予一个

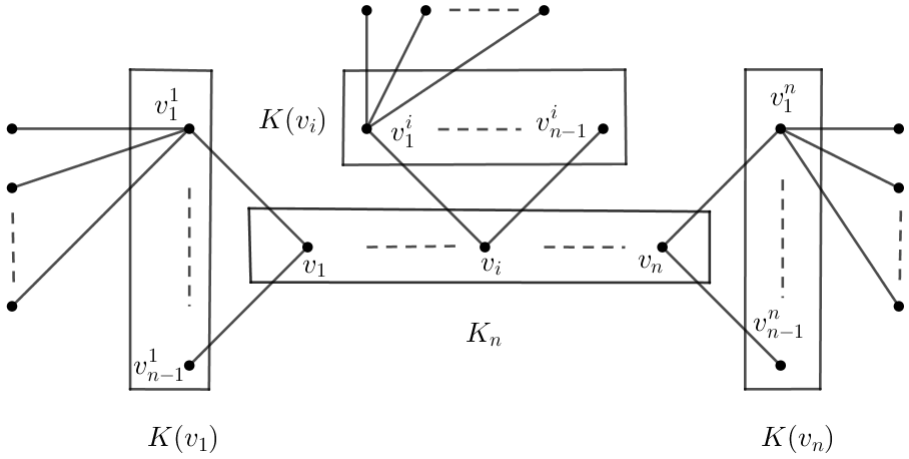



图1：图 $G_n$。

来自集合 $\{1,\ldots,n-1\}$ 的颜色 $c$，使得 $K(v_i)$ 中任意一对顶点所获颜色都不相同。我们可以轻松地将这种部分Grundy着色扩展为使用 $2n-1$ 种颜色的 $G_n$ 的Grundy着色。图2展示了这种情况的一个小实例。

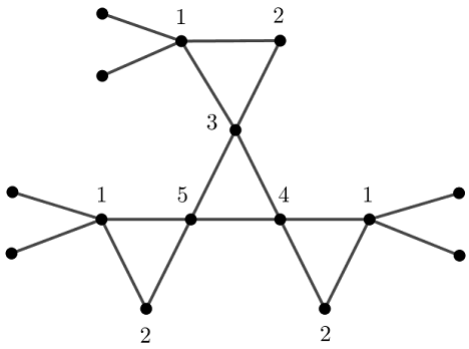



图2： $G_3$ 的一种使用5种颜色的部分Grundy着色。

我们证明 $\mathbf{b}(G_n) = 2n-1$。我们给出 $D = \{v_1,\ldots,v_n,v_1^1,v_1^2,\ldots,v_1^{n-1}\}$ 的一种部分顶点着色，使用 $2n-1$ 种不同的颜色。分别将颜色 $n,\ldots,2n-1$ 分配给 $v_1,\ldots,v_n$。然后分别将颜色 $1,\ldots,n-1$ 分配给 $v_1^1,\ldots,v_1^{n-1}$。图3展示了 $G_4$ 的这种部分着色，其中 $D$ 中的元素显示为灰色顶点。现在，利用叶顶点，我们可以将这种部分着色扩展为 $G_n$ 的一种使用 $2n-1$ 种颜色的 b-着色，其中 $D$ 中的顶点是颜色支配顶点。因此，$\mathbf{b}(G_n) \geq 2n-1$。现在，不等式 $\mathbf{b}(G_n) \leq \Delta(G_n)+1 = 2n-1$ 证明了所需的等式。

为完成证明，我们论证对于每个 $n \geq 3$，$z(G_n) = n$。反设 $G_n$ 存在一种使用 $n+1$ 种或更多颜色的 $z$-着色。设在 $G_n$ 的一种 $z$-着色中，$v$ 是颜色为 $n+1$ 的优美顶点。顶点 $v$ 至少需要 $n$ 个度为

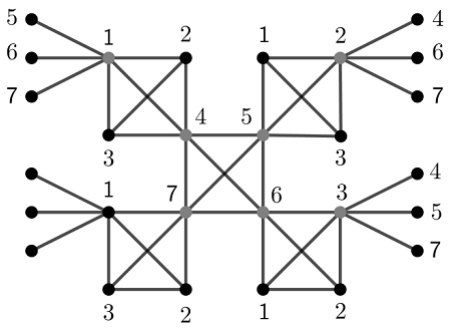



图3：使用7种颜色对 $G_4$ 进行部分着色，并具有颜色支配灰色顶点

至少为 $n$ 的邻居。根据 $G_n$ 的构造， $v$ 应属于 $\{v_1, \ldots, v_n\}$。不失一般性，设 $v = v_1$。由于 $v_1$ 中度至少为 $n$ 的邻点只有来自 $K(v_1)$ 的 $n$ 个顶点 $v_2$，.....， $v_n$ 和 $v_1^1$，因此我们可以假设 $v_1^1$ 是颜色为 1 的颜色支配顶点。因此， $\{2, \ldots, n\}$ 中的每种颜色都应出现在 $N(v_1^1)$ 中。由此可知，存在一个颜色为 $j \in \{2, \ldots, n\}$ 的 $w \in K(v_1)$。于是， $w$ 没有任何颜色为 $i$ 且满足 $i < j$ 的邻居，这与 $z$-着色的第一条性质矛盾。因此， $z(G_n) \leq n$。现在， $\chi(G_n) \leq z(G_n)$ 蕴含 $z(G_n) = n$。□

下面我们证明，无环图是 $z$-连续的且是 $z$-单调的。

**命题3.** 任意无环图都是 $z$-连续的。

**证明**。 根据命题 1（$ii$），只需证明该命题对树成立。设$T$ 是一棵树，它存在一种使用 $k$ 种颜色的 $z$-着色，其中 $k \geq 3$。我们可以为 $T$ 构造一种恰好使用 $k-1$ 种颜色的$z$-着色。如前所述， $T$ 包含树 $R_k$ 作为诱导子树。根据 $R_k$的构造， $R_{k-1}$ 包含于 $R_k$ 中，因而也包含于 $T$中。考虑使用 $k-1$种颜色对 $R_{k-1}$进行的 $z$-着色。很容易将对 $T$ 的这种部分 $z$-着色扩展为对整个 $T$的 $z$-着色，且恰好使用 $k-1$ 种颜色。□

**命题 4.** 任意无环图都是 $z$-单调的。

证明。根据命题 1（$ii$），只需证明树 $T$ 的情形。我们证明，对于 $T$ 的任意顶点 $v$， $z\,(T-v) \leq z\,(T)$。令 $z\,(T-v) = k$。设 $T_1$、.....、$T_m$ 是 $T-v$ 的连通分支，则有 $z\,(T-v) = max\{z\,(T_1)$ ....., $z\,(T_m)\}$。不妨设 $z\,(T-v) = z\,(T_1) = k$，因此我们得到一个使用 $k$ 种颜色的 $z$-着色，用于 $T_1$。我们将其扩展为 $z$ 的 $T$-着色。由于顶点 $v$ 仅与 $T_1$ 中的一个顶点相邻，因此只需用颜色 1 或 2 为顶点 $v$ 以及 $T_i$ 的每个 $i \neq 1$ 着色。于是我们得到一个使用 $k$ 种颜色的 $z$-着色，用于 $T$。□

我们需要引入 $k$-原子的概念。对于每个正整数 $k$，文献 [13] 构造了一个记作 $\mathcal{A}_k$ 的图类，它满足以下性质：

任意图 $G$ 的 Grundy数 至少为 $k$，当且仅当 $G$ 含有一个与 $\mathcal{A}_k$ 中某个元素同构的诱导子图。$\mathcal{A}_k$ 中的任意图称为 $k$-原子。原子图的概念也用于研究图的 b-着色[4]。对于任意正整数 $k$，恰好存在一棵树 $k$-原子，记作$T_k$。对于 $k = 1$，2，$T_k$ 分别同构于顶点数为一和二的完全图。假设 $T_k$ 是针对 $k \geq 2$ 构造的，那么 $T_{k+1}$ 可由 $T_k$ 得到：给 $T_k$ 的每个顶点各添加一片叶子，使得 $|V(T_{k+1})| = 2|V(T_k)|$。命题 5 确定了 $z(T_k)$。文献 [14] 证明，存在唯一一棵树 $R_k$，使得 $z(R_k) = k$，并且对于每棵树 $T$，$z(T) \geq k$ 当且仅当 $T$ 含有一个与 $R_k$ 同构的子树。

**命题 5**。对于任意整数 $k$, $z(T_k) = \lceil (k+1)/2 \rceil$。

**证明**。根据 $T_k$ 的构造，其度序列为：

$$k-1, k-1, k-2, k-2, k-3, k-3, k-3, k-3, k-4, \ldots, 2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1$$

对于任意 $i \in \{1, \ldots, k-2\}$，度序列中恰有 $2^{k-1-i}$ 个度为 $i$ 的顶点。要证明 $z(T_k) \geq \lceil (k+1)/2 \rceil$，根据命题 4，只需得到 $T_k$ 的一个子图 $H$，使得 $z(H) \geq \lceil (k+1)/2 \rceil$。在 $T_k$ 的一个使用 $k$ 种颜色的 Grundy 着色 $c$ 中，存在一个顶点，记为 $v_k$，其颜色为 $k$。以 $v_k$ 为根，它有 $k-1$ 个子节点 $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$，它们的颜色分别为 $1, 2, \ldots, k-1$。也就是说，对每个 $i$，都有 $c(v_i) = i$。将 $v_k, v_{k-1}, v_{\lceil k/2 \rceil}$ 添加到 $H$ 中，并分别将新颜色 $\lceil (k+1)/2 \rceil, \lceil (k+1)/2 \rceil - 1, \ldots, 2, 1$ 指派给 $v_k, v_{k-1}, \ldots, v_{\lceil k/2 \rceil + 1}, v_{\lceil k/2 \rceil}$。注意，$\lceil (k+1)/2 \rceil = k - \lceil k/2 \rceil + 1$。我们扩展此部分着色以及子图$H$ 本身，使得对每个$i \in \{\lceil k/2 \rceil, \ldots, k\}$，$v_i$ 都是颜色为 $i - \lceil k/2 \rceil + 1$ 的颜色支配顶点。这样，$v_k$ 就成为 $H$ 中的一个优美顶点。考虑顶点 $v_{\lceil k/2 \rceil}$，它在 $c$ 中的颜色为 $\lceil k/2 \rceil$，并且有 $\lceil k/2 \rceil - 1$ 个子节点，其颜色为 $1, 2, \ldots, \lceil k/2 \rceil - 1$。我们将颜色为 $2, \ldots, \lceil k/2 \rceil - 1$ 的子节点及其后代顶点连同它们在 $c$ 中的颜色一起添加到 $H$。于是，$v_{\lceil k/2 \rceil}$ 就成为 $H$ 中颜色为 1 的颜色支配顶点。对 $v_{\lceil k/2 \rceil + 1}, \ldots, v_k$ 中其他顶点进行扩展的技巧类似。我们得到 $z(T_k) \geq z(H) \geq \lceil (k+1)/2 \rceil$。

为证明 $z(T_k) \leq \lceil (k+1)/2 \rceil$，反设 $T_k$ 存在一种使用 $\lceil (k+1)/2 \rceil + 1$ 种颜色的 $z$-着色$c'$。设 $v$ 是 $c'$ 中颜色为 $\lceil (k+1)/2 \rceil + 1$ 的优美顶点。顶点 $v$ 至少需要 $\lceil (k+1)/2 \rceil$ 个度至少为 $\lceil (k+1)/2 \rceil$的邻点。然而，通过对 $k$ 进行归纳法，很容易证明，在 $T_k$ 中，任何度至少为 $t$ 的顶点至多有 $k - t$ 个度至少为 $t$ 的邻点。特别地，任何度至少为 $\lceil (k+1)/2 \rceil$ 的顶点，至多有 $k - \lceil (k+1)/2 \rceil = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ 个度至少为 $\lceil (k+1)/2 \rceil$的邻点。因此，这样的顶点 $v$ 不存在。□

以下结果是命题 5 和命题 4 的推论。

**推论1**。对于任意树 $T$, $\Gamma(T) \leq 2z(T) - 1$，且等号在树原子上成立。

**证明**。 设 $\Gamma(T) = k$。如前所述， $T$ 包含 $T_k$ 作为子图，因此$z(T_k) = \lceil (k+1)/2 \rceil \leq z(T)$。□

# 3 复杂性结果

本节证明，即使对于二部图，确定 $z$-色数也是 $NP$-完全的。下文中，$M_{n,\ n}$ 表示从完全二部图 $K_{n,\ n}$ 中删除一个完美匹配后得到的图，即 $M_{n,\ n} = K_{n,\ n} \setminus nK_2$。对于任意图 $G$，其点边关联图记作$I(G)$，这是一个二部图，其二部划分为 $V(I(G)) = V(G) \cup E(G)$；其中， $G$ 中的任意一条边 $e = uv$ （在 $I(G)$ 中视为一个顶点）与其在 $I(G)$ 中的两个端点 $u$， $v$ 相邻。图 4 给出了 $I(G)$ 的一个例子。

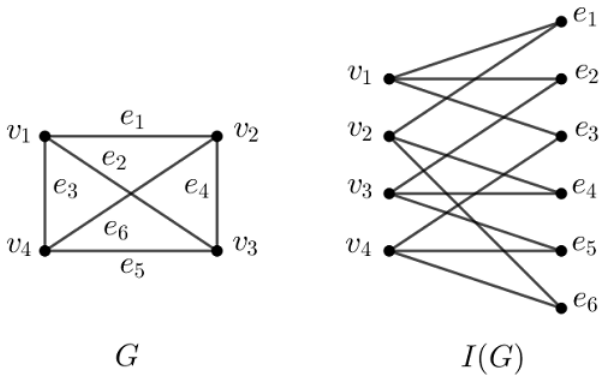



图4：一个 3-正则图 $G$ 及其关联图 $I(G)$。

**定理 1.** 判定二部图 $H$ 是否满足 $z(H) = \Delta(H) + 1$是 $NP$-完全的。

**证明**。 该问题属于 $NP$，因为给定 $H$ 的正常顶点着色 $C$，我们可以在 $O(|V(H)| + |E(H)|)$ 步内判断它是否为一种至少使用 $k$ 种颜色的 $z$-着色。为证明该问题是 $NP$-困难的，我们给出一个从 3-正则图的 3-边可着色性归约而来的归约；如前所述，该问题是 $NP$-完全的。

假设 $A$和 $B$是$M_{n+2,\ n+2} = K_{n+2,\ n+2} \setminus (n+2)K_2$中的二分集合。令$F$为图5所示的图，其中一个顶点被指定为顶点$f$。我们由 $F$和$M_{n+2,\ n+2}$ 构造一个新图 $T$，方法如下：将 $F$的顶点 $f$与 $B$的 $n-1$个顶点相连。对于任意正整数 $i$，令 $T_i$为$T$的一个同构副本，其中$M_{n+2,\ n+2}$的顶点标记为 $\{v_1^i, \ldots, v_{i-1}^i, v_{i+1}^i, \ldots, v_n^i, x^i, y^i, q^i\}$ 和 $\{u_1^i, \ldots, u_{i-1}^i, u_{i+1}^i, \ldots u_n^i, a^i, b^i, c^i\}$。图6展示了 $T_i$。

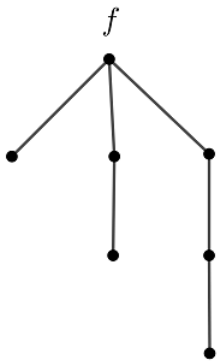



图5：图 $F$。

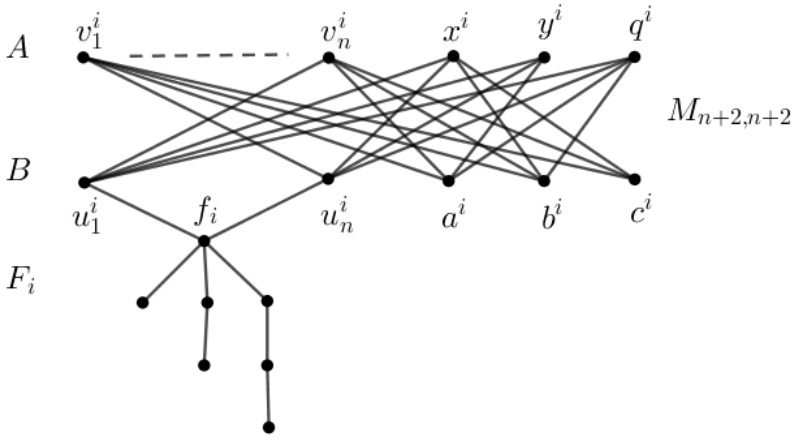



图6：图 $T_i$。

令 $G$ 为任意一个有 $n$ 个顶点的3-正则图。设 $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 和 $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$。令 $I(G)$为 $G$的点边关联图。我们从 $I(G)$逐步构造一个新图 $H$，方法如下。首先令 $H$ 为 $I(G)$本身。然后，对于每个顶点 $e_i \in E(G)$（作为 $I(G)$的一个顶点），向 $H$ 中添加一个与 $M_3$,3同构的副本$M_3$,3($e_i$)，并将$M_3$,3($e_i$)的一个顶点与 $I(G)$的顶点 $e_i$ 合并。换言之，$e_i \in M_3$,3($e_i$)。回想一下，$M_n$、$_n = K_n$、$_n \setminus nK_2$。接着，向 $H$中添加一个新顶点 $w$，使其与 $I(G)$中 $V(G)$的所有顶点相邻；再向 $H$中添加副本$M^1_{n+3}$、$_{n+3}$、 $M^2_{n+3}$、$_{n+3}$和$M^3_{n+3}$、$_{n+3}$，它们均与$M_{n+3}$、$_{n+3}$ 同构。然后分别从每个副本中任取顶点 $v_{n+1}$、$v_{n+2}$ 和 $v_{n+3}$，并添加边 $wv_{n+1}$、$wv_{n+2}$ 和$wv_{n+3}$。最后，对于任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，将图 $T_i$ 添加到 $H$ 中，并添加一条边，将 $v_i$ 与 $\{v_1^i, \ldots, v_{i-1}^i, v_{i+1}^i, \ldots, v_n^i\} \subseteq V(T_i)$中的所有顶点相连。图示如下：

$H$ 如图7所示。我们有

$$V(H) = V(G) \cup \bigcup_{i=1}^{m} V(M_{3,3}(e_i)) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} V(T_i)) \cup (\bigcup_{i=1}^{3} V(M^i_{n+3,n+3})) \cup \{w\}.$$

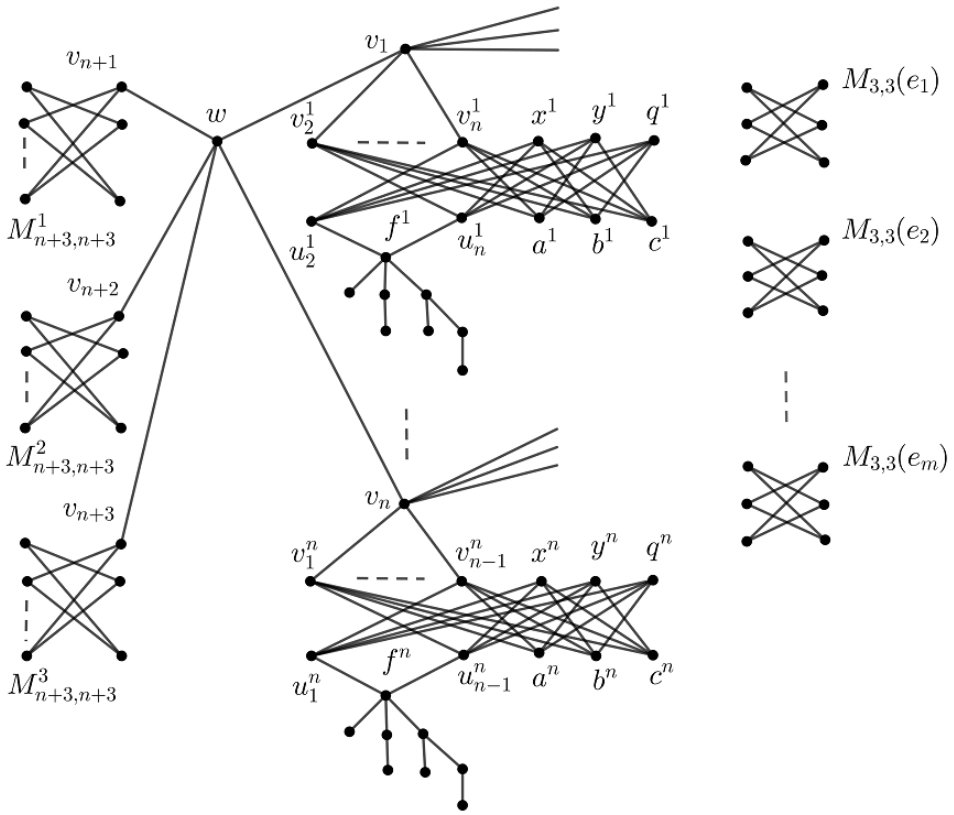



图7：图 $H$。

关于 $H$，我们有以下事实。

$(i)$ $d_H(w) = n+3$, and $d_H(v_i) = n+3$, for $1 \le i \le n$.

**(*ii*)** 对于 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j \le n$、$j \ne i$，有 $d_H(v_j^i) = n+2$，因为 $M_{n+2}$ 中的一个顶点，$_{n+2}$在 $T_i$ 中的度为 $n+1$，并且 $v_i$ 与 $v_j^i$ 相邻。

**(*iii*)** 对于 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j \le n$、$j \ne i$，有 $d_H(u_j^i) = n+2$，因为 $M_{n+2}$ 中的一个顶点，$_{n+2}$在 $T_i$ 中的度为 $n+1$，并且 $f_i$ 与 $u_j^i$ 相邻。

**(*iv*)** 对于 $1 \le j \le m$，有 $d_H(e_j) = 4$，因为 $e_j$ 在 $I$ 中有两个邻点，在 $M_3$ 中也有两个邻点，$_3(e_i)$。

$(v)$ $d_H(x^i) = d_H(y^i) = d_H(q^i) = d_H(a^i) = d_H(b^i) = d_H(c^i) = n+1$和 $d(f^i) = n+2$，对于 $1 \le i \le n$和 $d_H(v_{n+1}) = d_H(v_{n+2}) = d_H(v_{n+3}) = n+3$。

**(*vi*)** $\Delta(H) = n+3$，唯一度为 $n+3$ 的顶点是 $w$ 和 $v_i$，对于$1 \le i \le n+3$。

为证明该定理，我们证明 $z(H) = \Delta(H) + 1 = n + 4$ 当且仅当 $G$ 可3边着色。

首先，假设 $c$ 是 $z$-着色，使用 $n+4$ 种颜色来着色 $H$。我们证明， $G$ 的边可以用3 种颜色正确着色。

在 $c$ 中，颜色为 $n+4$ 的任何优美顶点都至少需要 $n+3$ 个度至少为$n+3$的邻居。唯一满足这些性质的顶点是 $w$，因此 $c(w) = n+4$。由于$d_H(w) = n+3$，对每个 $1 \le i \le n+3$， $w$ 恰有一个颜色为 $i$的邻居。于是对每个 $1 \le i \le n+3$， $c(v_i) \in \{1, 2, \ldots, n+3\}$。由于 $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}\}$是颜色支配的，因此，对于后一个集合中的任意顶点 $v$ 以及任意满足 $j \neq c(v)$ 的 $j \in \{1, 2, \ldots, n+3\}$， $v$都应有一个颜色为 $j$的邻居。

**断言 1.** 对于任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$, $c(v_i) \in \{4, 5, \ldots, n+3\}$。

**断言 1 的证明:**

反设存在一个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，使得 $c(v_i) \in \{1, 2, 3\}$。不失一般性，设 $c(v_1) = 1$。由于 $v_1$ 是度为 $n+3$ 且颜色为 1 的颜色支配，因此 $\{2, 3, \ldots, n+3\}$ 中的每种颜色都应出现在 $N[v_1]$ 中。顶点 $v_1$ 在 $T_1$ 中恰有 $n-1$ 个邻点。 $v_1$ 的其他邻点属于类型$e_p$，其中某个 $p \in \{1, \ldots, m\}$。注意，根据性质（$iv$），对于每个$p$，都有 $d_H(e_p) = 4$，进而 $c(e_p) \le 5$。由此可知，对于某个 $l$， $r$、 $s \in \{1, \ldots, m\}$、 $v_1$ 应分别与来自 $M_3$、$3(e_l)$、$M_3$、$3(e_s)$ 和 $M_3$、$3(e_r)$ 的 $e_l$、 $e_s$ 和 $e_r$ 相邻，使得$c(e_l)$ $c(e_s)$ $c(e_r)$ $\in \{2, 3, 4, 5\}$。现在，以下情形之一成立。

**情形1**。 $c(e_l)$ $c(e_s)$ $c(e_r) \in \{2, 3, 4\}$

在这种情形下， $v_1$具有颜色 $\{5, 6, \ldots, n+3\}$的邻居应出现在 $v_1$ 的邻域中，即 $A$ 从 $M_{n+2,\ n+2}$ 的部分中。这意味着， $A$中与 $v_1$相邻的顶点必须各有一个颜色为2、3、4的邻点。这些邻点必须位于 $T_1$的 $B$部分中。因此 $c(a^1)$ $c(b^1)$ $c(c^1) \in \{2, 3, 4\}$。

**情形2**。 $c(e_l)$ $c(e_s)$ $c(e_r) \in \{2, 3, 5\}$

在这种情形下， $v_1$具有颜色 $\{4, 6, \ldots, n+3\}$的邻居应出现在 $v_1$ 的邻域中，即 $A$ 从 $M_{n+2,\ n+2}$ 的部分中。这意味着， $A$中与 $v_1$相邻的顶点必须各有一个颜色为2、3、5的邻点。这些邻点必须位于 $T_1$的 $B$部分中。因此 $c(a^1)$ $c(b^1)$ $c(c^1) \in \{2, 3, 5\}$。

**情形3**。 $c(e_l)$ $c(e_s)$ $c(e_r) \in \{2, 4, 5\}$

类似论证可证明，在此情形下 $c(a^1)$ $c(b^1)$ $c(c^1) \in \{2, 4, 5\}$ .

**情形4**。 $c(e_l)$ $c(e_s)$ $c(e_r) \in \{3, 4, 5\}$

类似论证证明，在这种情况下 $c(a^1)$ $c(b^1)$ $c(c^1) \in \{3, 4, 5\}$。这四种情况如图8和图9所示。

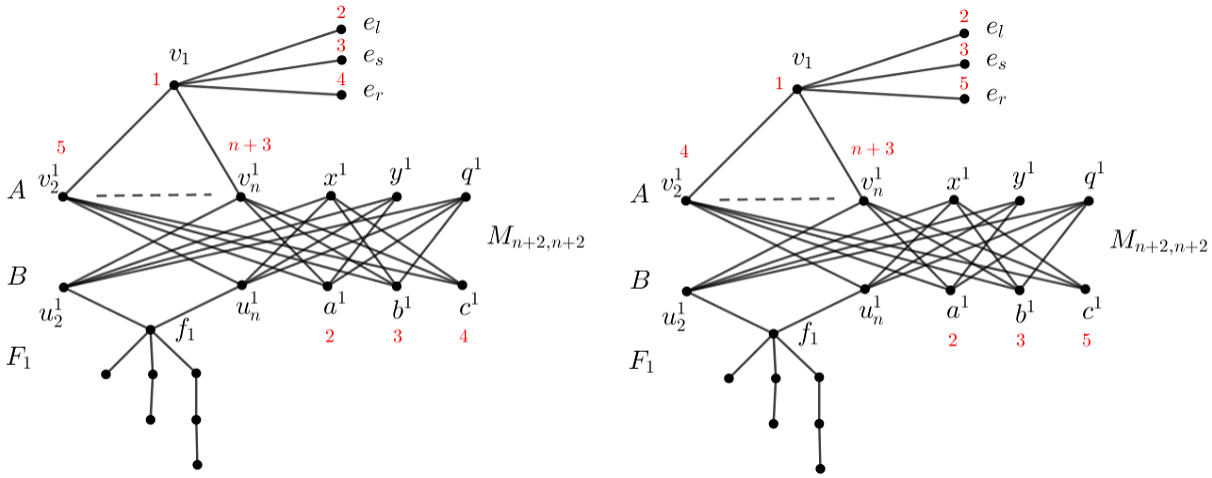



图 8：一种 $T_1$ 的着色，使得 $c(e_l)$ $c(e_s)$ $c(e_r) \in \{2,3,4\}$ 和 $\{2,3,5\}$。

注意，在所有情况下，对于 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j \le n-1$，$c(u_j^i) = c(v_j^i)$。在这四种情况下，顶点 $a^1$、$b^1$ 和 $c^1$ 都没有颜色1的邻点，这就产生了矛盾。通过相同的论证可知，对于每个 $1 \le i \le n$，$c(v_i) \notin \{2,3\}$。这就完成了断言 1 的证明。

**断言 2。** 对于每个 $1 \le j \le m$, $c(e_j) \in \{1,2,3\}$。

**断言 2 的证明：**

设 $v_i$ 是一个满足 $1 \le i \le n$的任意顶点。顶点 $v_i$ 是度为$n+3$的颜色支配顶点，并且根据断言 1，$c(v_i) \in \{4,\dots,n+3\}$。因此，对于每个 $t \in \{1,2,3\}$，$v_i$ 恰好有一个颜色为 $t$ 的邻点。如果对于某个邻点，例如 $e_j \in M_{3,\ 3}(e_j)$，属于 $v_i$，我们有$c(e_j) \notin \{1,2,3\}$，那么根据 $z$-着色的第一条性质，存在某个 $p \in \{1,\dots,n\}$ 满足 $p \ne i$，使得 $v_p$ 与 $e_j$ 相邻，并且 $c(v_p) = 3$。注意，顶点 $v_p$未出现在$M_{3,\ 3}(e_j)$中，这根据断言 1 导致矛盾。该情形如图 10 所示。

最后，$w$ 应当从 $\{1,2,3\}$ 中每种颜色各有三个颜色支配邻点。由于 $N_H(w) = \{v_1,\dots,v_n,v_{n+1},v_{n+2},v_{n+3}\}$，因此 $c(v_{n+1})$ $c(v_{n+2})$ $c(v_{n+3}) \in \{1,2,3\}$。
现在证明 $c$ 诱导出 $G$ 的正常 3-边着色 $c'$。

如前所证，$c(w) = n+4$。不失一般性，我们可以假设对于每个 $1 \le i \le n$，$c(v_i) = i+3$。由于 $v_i$ 与 $w$ 相邻，而后者的颜色大于 $n+3$，并且 $d(v_i) = n+3$，因此其余 $n+2$ 种颜色只剩下 $n+2$ 个顶点。因此，对于某个 $l$，$s$，$r \in \{1,\dots,m\}$，存在三个顶点分别与 $v_i$ 相邻，它们分别来自 $M_{3,\ 3}(e_l)$、$M_{3,\ 3}(e_s)$ 和 $M_{3,\ 3}(e_r)$，且颜色各不相同。根据断言 2，这些颜色只能是 1、2、3。此外，对于任意 $j \in \{1,\dots,m\}$，$e_j$在 $H$中至多有两个颜色不大于 3 的邻点。定义

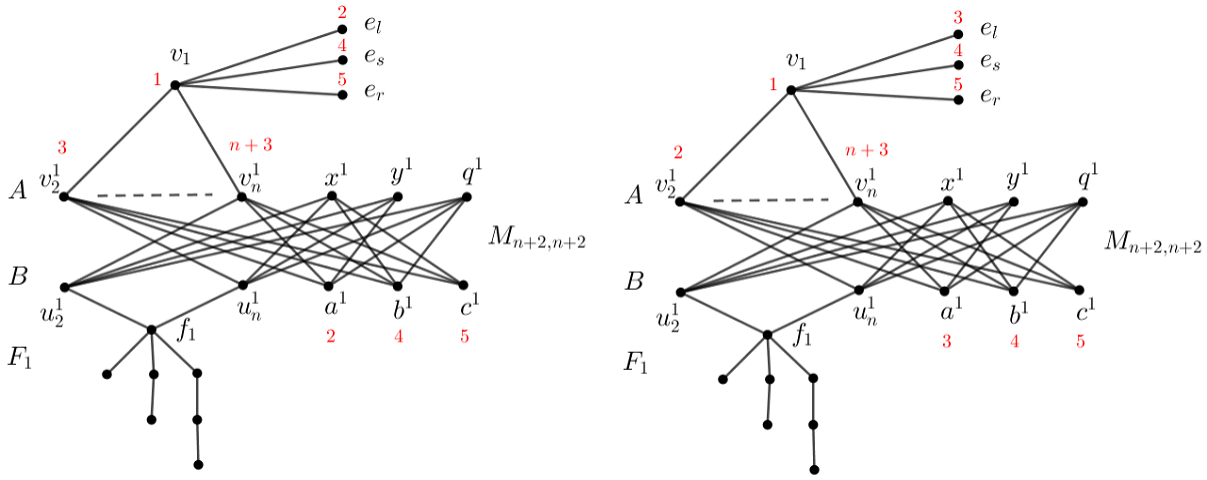



图 9： $T_1$ 的一种着色，使得 $c(e_l)$ $c(e_s)$ $c(e_r)$ $\in \{2,4,5\}$ 和 $\{3,4,5\}$。

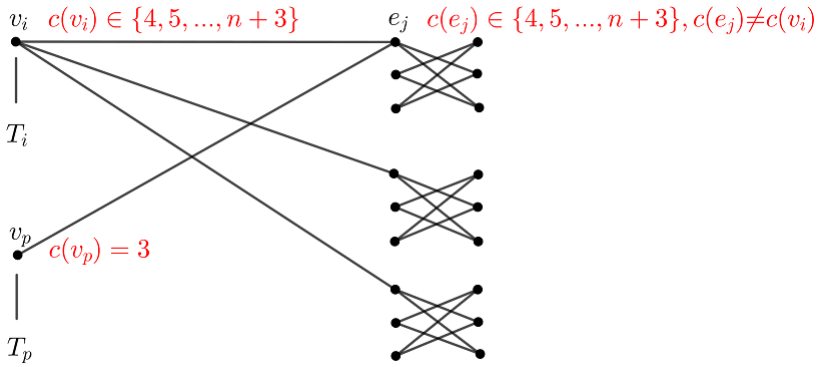



图 10： $v_p$、 $T_i$ 和 $T_p$，如断言 2 的证明中所示。

$c'(e_j) = c(e_j) \in \{1,2,3\}$。事实上， $v_i$ 在 $G$中关联的三条边，与 $v_i$ 在 $H$ 中相邻的边，颜色各不相同。

我们证明 $c'$ 的正常性。如果 $c'(e_j) = c'(e_t)$，使得 $e_j$ 和 $e_t$ 有一个公共端点 $v_i$，那么 $v_i$ 就不是颜色支配顶点。因此， $c'$ 是正常 3- 边着色。

现在假设 $G$ 有一种 3-边着色 $\theta$，使用颜色 1,2, 3。我们将得到一个$z$-着色 $c$，其所在图为 $H$，并使用 $n+4$种颜色，方法如下。首先，对任意 $1 \leq j \leq m$，贪心地为 $M_{3,3}(e_j)$ 的顶点着色，使得 $e_j$ 被着为 $\theta(e_j)$，并定义 $c(e_j) = \theta(e_j)$。这样一来， $V(G) \subseteq V(H)$ 中的每个顶点在 $\{1,2,3\}$ 中都有一个邻点，分别对应每种颜色。

接下来，对于每个 $1 \leq i \leq n$，贪心地为 $v_i$ 和 $T_i$ 着色，使得 $c(v_i) = c(f^i) = i+3$，并且 $c(a^i) = c(x^i) = 1$， $c(b^i) = c(y^i) = 2$， $c(c^i) = c(q^i) = 3$。此外，对于任何满足 $j \neq i$ 的 $1 \leq j \leq n$，令 $c(v_j^i) = c(u_j^i) = j+3$。

接下来，以贪心方式为 $M^1_{n+3,\ n+3}$、 $M^2_{n+3,\ n+3}$ 以及 $M^3_{n+3,\ n+3}$ 着色，使得对于任意 $i \in \{1,2,3\}$， $w$ 都有一个着色为 $i$ 的邻点。这意味着， $v_{n+1}$、$v_{n+2}$ 和 $v_{n+3}$ 是颜色分别为 1、2 和 3 的颜色支配顶点。

最后，将 $n+4$ 赋给 $w$。显然，对于任意 $i \in \{1,\ldots,n+3\}$， $w$ 都有一个颜色为 $i$中每种颜色的颜色支配邻居。因此， $z(H) = n+4$，因为 $\Delta(H) = n+3$。□

下面的构造及其相应结果将在下一个结果中使用。

**命题 6.** 设 $P_4$ 是一个含四个顶点的路径，其中度为1 的两个顶点分别为 $v_1$ 和 $v_4$。设 $G$ 是一个最大度为$\Delta(G)$的连通二部图。通过将 $v_1$ 与$G$的所有顶点相连，并将 $v_4$ 与 $K_{\Delta(G)}$的所有顶点相连，由 $G$、 $P_4$ 和 $K_{\Delta(G)}$ 构造图 $H$ 。则

$$z(H) = max\{z(G), \Delta(G)\} + 1$$

.

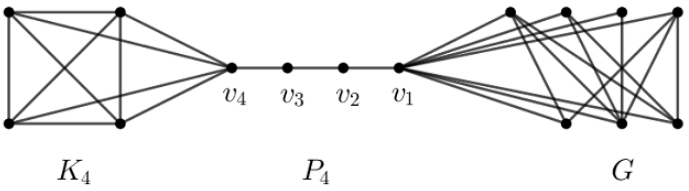



图 11：二分图 $G$ 满足$\Delta(G) = 4$时，命题 6 中图 $H$ 的构造。

证明。二分图 $G$ 满足 $\Delta(G) = 4$ 时对应的图 $H$ 如图 11 所示。显然， $z(H) \geq max\{z(G)\ \Delta(G)\} + 1$。我们证明 $z(H) \leq max\{z(G)\ \Delta(G)\} + 1$。首先，设 $z(G) \geq \Delta(G)$。反设 $z(H) > \max\{z(G)\ \Delta(G)\} + 1$。那么，对某个 $t \geq 1$，有$z(H) = z(G) + t + 1$。因此，存在一种 $z$-着色，使得 $H$有 $z(G) + t + 1$ 种颜色。设$v$ 是此 $z$-着色中颜色为 $z(G) + t + 1$ 的优美顶点。顶点 $v$ 至少需要 $z(G) + t$ 个度至少为 $z(G) + t$的邻居。由于对每个$v \in K_{\Delta(G)} \oplus v_4$， $d_H(v) = \Delta(G)$，因此 $v \notin V(K_{\Delta(G)} \oplus v_4)$。又由于 $v_2$ 和 $v_3$ 的度均为 2，故 $v \notin \{v_2, v_3\}$。因此 $v \in G \oplus v_1$。若 $v = v_1$，则 $v_1$的颜色支配邻居中没有一个可以是 $v_2$，因为 $v_2$ 的度为 2。由于顶点 $v_1$与 $G$ 相连，且 $z(G \oplus v_1) = z(G) + 1$。由此可知， $H$ 的任何一种使用超过 $z(G) + 1$ 种颜色的 $z$-着色，都能转化为$G \oplus v_1$中一种使用超过 $z(G) + 1$ 种颜色的 $z$-着色，这就产生了矛盾。类似论证可证明 $z(G) \leq \Delta(G)$的情形。□

已证明，在 [13] 中，判定满足 $\Gamma(G) = \chi(G)$ 的图 $G$ 是否成立是 $coNP$-完全的。我们将这一结果推广到 $z$-色数。

**定理 2.** 以下判定问题是 $coNP$-完全的。

实例：图 $G$。

问题： $z$（$G$） $=\chi$（$G$）？

证明。首先注意到 $z(G) > \chi(G)$ 当且仅当存在两个针对 $G$ 的 $z$-着色，分别使用例如 $k$ 种和 $k'$ 种颜色，使得 $k > k'$。因此，要证明该问题属于 $coNP$，一个简短的证书是针对 $G$ 的一对 $z$-着色 $(C, C')$，满足 $C$ 使用的颜色严格多于 $C'$。检查对 $G$ 的顶点进行颜色赋值是否构成 $z$-着色，需要 $\mathcal{O}(|E(G)|)$ 个时间步。接下来需要证明该问题是 $NP$-难的。由定理 1 可知，对于给定的二分图 $G$，判定$z(G) = \Delta(G) + 1$ 是 $NP$-完全的。我们将后一个问题多项式时间归约到本问题的补图。将给定的最大度为 $\Delta(G)$ 的二分图 $G$ 转化为图 $H$ ；该图由命题 6 中构造的 $G$、$P_4$ 和 $K_{\Delta(G)}$ 得到。我们有 $z(H) = max\{z(G)\ \Delta(G)\} + 1$，并且 $\chi(H) = max\{\chi(G)\ \Delta(G)\} + 1 = \Delta(G) + 1$。若 $z(G) = \Delta(G) + 1$，则有 $z(H) = \Delta(G) + 2 > \Delta(G) + 1 = \chi(H)$。若 $z(G) \leq \Delta(G)$，则显然有 $z(H) \leq \chi(H)$。证明完毕。□

# 参考文献

[1] M.Blidia, N.I. Eschouf, F. Maffray, S. Arumugam, $b\gamma$-完美图的刻画，AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics 9（2012年）21–29。

[2] A.J. Bondy、P.M. Murty，《图论》，Springer（2008年）。[3] F. Bonomo、G. Dur´an、F. Maffray、J. Marenco、M. Valencia-Pabon，关于余图和 $P_4$-稀疏图的 b-着色，《图与组合》25（2009年）153–167。[4] B. Effantin、N.Gastineau、O.Togni，通过诱导子图刻画 b-色数和部分 Grundy 数，《离散数学》339（2016年）2157–2167。[5]T. Faik、J.-F. Sacl´e，若干 b-连续图类，技术报告 N1350，LRI，巴黎南大学（2003年）。[6] Z. F¨uredi、A. Gy´arf´as、G.N. S´ark¨ozy、S. Selkow，关于 First-Fit色数的不等式，《图论杂志》59（2008年）75–88。[7] A. Gy´arf´as、J. Lehel，图的在线着色与 First-Fit着色，《图论杂志》12（1988年）217–227。

[8] F. Havet、L. Sampaio，关于图的 Grundy色数和 b-色数，《Algorithmica》65（2013年）885–899。[9] I. Holyer，边着色的 NP完全性，《SIAM计算杂志》10(4)（1981）718–720。[10] R.W. Irving、D.F. Manlove，图的 b-色数，《离散应用数学》91（1999）127–141。[11] A.S. Pedersen、D. Rautenbach，抗重着色着色，《离散应用数学》159（2011）1013–1021。[12] M. Zaker，二部图的补图的 Grundy色数，《澳大拉西亚组合数学杂志》31（2005）325–330。[13] M. Zaker，关于图的 Grundy色数的结果，《离散数学》306（2006）3166–3173。[14] M.Zaker，一种新的顶点着色启发式方法及相应的色数，《Algorithmica》82（2020）2395–2414。