# 二维欧拉方程中环形涡旋斑块周围的不变KAM环面

Zineb Hassainia、Taoufik Hmidi 和 Emeric Roulley

arXiv:2302.01311v1 [math.AP] 2 Feb 2023

摘要

我们为平面欧拉方程构造了带有一个孔洞的时间准周期涡旋斑块解。只要某个环域的模数属于一个具有正测度的博雷尔集，就能在该环域附近捕捉到这些结构。证明基于 Nash-Moser 方案和 KAM 理论，并将它们应用于一个支配涡斑径向形变的哈密顿系统。与近期讨论的标量情形 [59, 61, 69, 92], 相比，由于界面之间的相互作用，会出现一些技术问题。其中一个问题与二阶梅尔尼科夫非共振条件中的一个新小除数问题有关，该问题源于以不同速度输运的输运方程。

## 目录

1 引言 **2**

2 函数与算子空间 12
2.1 函数空间.13 2.2 算子.15 2.2.1 对称性.15 2.2.2 算子拓扑.16 2.2.3 积分算子.19 2.2.4 矩阵算子.25

3 哈密顿量 重新表述 **26**
3.1 径向形变输运系统.26 3.2 哈密顿结构.28 3.3 辛结构与不变性.30

4 线性化与辛变换 **32**
4.1 线性化算子.32 4.2 平衡态处的对角化.34 4.3 辛坐标变换.39 4.4 平衡频率的几何结构.43

5 哈密顿工具 **53**

6 近似逆 **56**
6.1 线性变量变换与辛结构缺陷.57 6.2 近似逆的构造.61

7 约化 **64**
7.1 限制在法向方向上的线性化算子的结构.64 7.2 输运部分的约化.65 7.3 对法向方向的局部化.68 7.4 余项的约化.69

8 拟周期解的构造 **81**
8.1 Nash-Moser 迭代.82 8.2 最终康托集的测度.94

# 1 引言

本文研究经典二维不可压缩欧拉方程中涡旋运动的若干方面，该方程可改写为如下涡量-速度形式

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{v} = \nabla^\perp \psi, \\ \Delta \psi = \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\omega}(0, \cdot) = \boldsymbol{\omega}_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

量 $\mathbf{v}$ 表示流体质点的速度场，根据 (1.1) 中的第二个方程，该速度场应为无散的，其中使用了记号 $\nabla^\perp$ ，$\begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \end{pmatrix}$ 。标量势 $\boldsymbol{\omega}$ 称为涡量，用于衡量流体内部的局部旋转效应。它与速度场之间满足以下关系

$$\boldsymbol{\omega} \triangleq \nabla^\perp \cdot \mathbf{v}.$$

由 (1.1) 中的第三个方程，我们可以通过以下具有对数核的积分算子，根据涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 求得流函数 $\psi$

$$\psi(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log(|z - \xi|) \boldsymbol{\omega}(t, \xi) dA(\xi), \tag{1.2}$$

其中 $dA$ 是二维勒贝格测度。自 Yudovich [97] 的研究以来，众所周知，任意有界且可积的初始数据 $\boldsymbol{\omega}_0$ 都会生成 (1.1) 的唯一全局弱解，且该解是拉格朗日型，即

$$\boldsymbol{\omega}(t, x) = \boldsymbol{\omega}_0\big(\boldsymbol{\Phi}_t^{-1}(x)\big), \qquad \boldsymbol{\Phi}_t(x) = x + \int_0^t \mathbf{v}\big(t, \boldsymbol{\Phi}_s(x)\big) ds.$$

特别是 ，如果初始数据是某个有界区域的示性函数 $D_0$ 那么

$$\boldsymbol{\omega}(t, \cdot) = \mathbf{1}_{D_t}, \qquad D_t \triangleq \boldsymbol{\Phi}_t(D_0)$$

由此得到的解称为涡斑。这些解的动力学完全由边界的演化描述 $\partial D_t$. 。边界保持$C^{1,\alpha}$型正则性（ $\alpha \in$ $\in$(0, 1)）的全局时间性最初由 Chemin 在 [29, 30] 证明，随后 Bertozzi 和 Constantin 在[20]证明。注意，边界运动可以通过涡斑的轮廓动力学方程追踪。事实上，对于边界的任意参数化 $z(t)$ : $\mathbb{T} \to \partial D_t$ ，记 $\mathbf{n}\big(t, z(t, \theta)\big)$ ，$\mathrm{i}\partial_\theta z(t, \theta)$ 为边界在点 $z(t, \theta)$ 处的一个法向量，则有

$$\partial_t z(t, \theta) \cdot \mathbf{n}\big(t, z(t, \theta)\big) = \partial_\theta \Big[\psi\big(t, z(t, \theta)\big)\Big]. \tag{1.3}$$

例如， [68] 可参见其中对该方程的完整推导。1858 年，Rankine 观察到，任意径向初始区域 $D_0$ （圆盘、环域等）都会产生方程 (1.1) 的一个平稳解。从动力系统的角度来看，探索相图的局部结构，并了解这些平衡态附近是否存在周期解，具有重要意义。这一主题内容十分丰富，衍生出多个富有成果的研究方向，连接了数学的各个领域。该方向的首个结果归功于 Kirchhoff，他在 1874 [75] 中证明，椭圆 $\mathcal{E}_{a,\ b}$ 其半轴为 $a$ 和 $b$ ，当且仅当其以角速度 Ω 绕其中心匀速旋转时，

$$\Omega = \frac{ab}{(a+b)^2}.$$

实际上，椭圆是相对平衡态或 V 态的一个子类；这类解在运动过程中保持形状不变。由此我们还可以得到另一类解，即旋转斑块，其中区域 $D_t$ 绕其中心匀速旋转（由于空间不变性，不失一般性，我们可以假设中心位于原点），

$$D_t = e^{\mathrm{i}\Omega t} D_0, \qquad \Omega \in \mathbb{R}.$$

它们构成一族刚性周期解，在运动过程中区域不会发生形变，而是保持其初始形状。此后不久，1978 年，Deem 和 Zabusky [40] 通过数值计算发现了靠近单位圆盘的 3 重、4 重和 5 重 V 态。几年后，Burbea [23] 利用分岔理论从解析上证实了这些数值结果。更准确地说，他证明了对于任意整数 $\mathtt{m} \geqslant 1$，都存在一支 $\mathtt{m}$ 重单连通 V 态分支，它在角速度

$$\Omega_{\mathtt{m}} \triangleq \frac{\mathtt{m}-1}{2\mathtt{m}}.$$

实际上，$\mathtt{m} = 1$ 的情形对应于兰金涡的平移，而与模态 $\mathtt{m} = 2$ 相关的分支则给出基尔霍夫椭圆。注意，对于任意 $\mathtt{m} \geqslant 2$，分岔频率 $\Omega_{\mathtt{m}}$ 都位于区间 $(0, 1/2)$ 内；一系列研究 [47, 53, 63] 表明，在此区间之外且在单连通情形下，唯一的相对平衡态是径向对称的。文献 [27, 28, 60, 68]分析了 V 态的边界正则性和整体分岔。文献 [28, 65]讨论了椭圆的第二次分岔。更准确地说，若考虑一个椭圆$\mathcal{E}_{a,\,b}$ ($a > b$)，其描述式为

$$\mathcal{E}_{a,b} = \Big\{ \tfrac{a+b}{2}\big(w + \tfrac{\mathcal{Q}}{w}\big), \quad w \in \mathbb{T}, \quad \mathcal{Q} \triangleq \tfrac{a-b}{a+b} \in (0,1) \Big\},$$

那么对于任意整数 $\mathtt{m} \geqslant 3$，分岔发生在角速度 $\Omega = \frac{1-\mathcal{Q}^2}{4}$ 处，其中 $\mathcal{Q}$ 是多项式方程的一个解

$$f(\mathtt{m}, \mathcal{Q}) \triangleq 1 + \mathcal{Q}^{\mathtt{m}} - \tfrac{1-\mathcal{Q}^2}{2}\mathtt{m} = 0. \tag{1.4}$$

近期， [38] 研究了边界效应对 V 态产生的影响，作者证明了当流体在单位圆盘 $\mathbb{D}$内演化时 V 态的存在性。他们表明，对于任意整数 $\mathtt{m} \geqslant 1$ ，一族 $\mathtt{m}$ 重隐式曲线会在角速度为下从圆盘 $b\mathbb{D}$、 $b \in (0, 1)$处分岔

$$\Omega_{\mathtt{m}}(b) \triangleq \frac{\mathtt{m} - 1 + b^{2\mathtt{m}}}{2\mathtt{m}}.$$

与平面情形 $\mathbb{R}^2$不同，这里的单重曲线不再是平凡的；此外， [38] 进行的数值模拟表明，在某些 $b$ 区域内，分岔曲线会随角速度振荡。同样地，Hmidi、de la Hoz、Mateu 和 Verdera 在 [64] 讨论了具有一个孔洞的旋转斑块（称为双连通V态）的存在性。他们证明，对于固定的对称性 $\mathtt{m} \geqslant 3$ 且 $b \in (0, 1)$，两条双连通V态的 $\mathtt{m}$ 重曲线会从环域处分岔

$$A_b \triangleq \big\{ z \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad b < |z| < 1 \big\}, \tag{1.5}$$

前提是满足以下约束

$$f(\mathtt{m}, b) < 0,$$

其中 $f$ 由 (1.4) 给出。分岔发生在角速度

$$\Omega_{\mathtt{m}}^{\pm}(b) \triangleq \frac{1-b^2}{4} \pm \frac{1}{2\mathtt{m}} \sqrt{\left(\frac{1-b^2}{2}\mathtt{m} - 1\right)^2 - b^{2\mathtt{m}}}. \tag{1.6}$$

值得指出的是，同一个函数 $f$ 在两种不同情形（从椭圆和环域分岔）中所起的作用相当神秘，可以通过儒可夫斯基变换加以解释。至于退化情形，

$$f(m, b) = 0 \tag{1.7}$$

处理起来则更为微妙。(1.7) 的解可以按如下形式排列：

$$\{(2,b),\quad b\in(0,1)\}\qquad\text{or}\qquad\Big\{(n,\underline{b}_n),\quad n\geqslant 3,\quad \underline{b}_n\in(0,1)\Big\},\tag{1.8}$$

其中序列 $(\underline{b}_n)_{n\geqslant 3}$ 递增并趋于 1。Hmidi 和 Mateu 在 [66], 中研究了这一问题，并证明对于 $b\in(0,1)\setminus\{\underline{b}_{2p},\,p\geqslant 2\}$，二重旋转涡态会发生跨临界分岔。然而，对于 $b=\underline{b}_{\mathfrak{m}}$，$\mathfrak{m}$ 重对称性下不存在分岔，其中 $\mathfrak{m}\geqslant 3.$。最近，Wang、Xu 和 Zhou 在 [95] 中将二重旋转涡态的跨临界分岔推广到了 $b=\underline{b}_4$ 和 $b=\underline{b}_6.$ 的情形。我们还应提及，过去几年中，围绕更一般的稳态形状（多连通斑块、汤姆孙多边形、冯·卡门涡街等）以及各种主动标量方程（广义准地转方程、准地转浅水方程、Euler-$\alpha$方程）构造 V 态的研究十分活跃。更多细节请参阅
[2, 24, 25, 26, 32, 35, 36, 37, 38, 41, 49, 50, 51, 52, 54, 56, 57, 58, 62, 67, 70, 90,91, 92, 94]。

在本研究中，我们旨在探究方程 (1.1) 在环域附近是否存在时间拟周期涡斑。回顾一下，拟周期函数是指任意满足下述形式的映射 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad f(t)=F(\omega t),$$

其中 $F\colon\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}$，$\mathbb{T}^d$ 表示维数为 $d\in\mathbb{N}^*$ 的平坦环面，$\omega\in\mathbb{R}^d$ 为非退化频率向量，即

$$\forall\, l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},\quad \omega\cdot l\neq 0.\tag{1.9}$$

注意，$d=1$ 的情形对应于频率为 $\omega\in\mathbb{R}^*$.的周期函数的定义。这类函数是有限维可积哈密顿系统的自然解，其相空间由支撑拟周期运动的拉格朗日不变环面分叶。Kolmogorov-Arnold-Moser（KAM）理论 [3, 79, 82] 指出，在满足适当的正则性和非退化条件时，大多数不变环面在小的哈密顿扰动下，经光滑形变后仍然存在。应用 KAM 方法时，一个典型困难与小除数问题有关，它会导致某些中间级数无法收敛。Kolmogorov 提出的解决方法是在小除数上引入丢番图条件，从而导致固定的代数正则性损失。正如 Kolmogorov 和 Arnold 所证明的，在解析正则性框架中，这种损失可以通过经典的牛顿方法处理。然而，在有限阶可微的情形下（例如 Sobolev 空间或 Hölder 空间），这种方法会复杂得多。事实上，为了克服这一技术困难，Moser 在 [83] 中沿用 Nash 在等距嵌入问题 [84] 中采用的思路，对牛顿方法进行了正则化。如今，这种方法称为 Nash-Moser 方案。

对低维不变环面的研究不仅与有限维哈密顿系统密切相关，而且也适用于哈密顿偏微分方程，因为在后者中这一问题同样十分自然。事实上，在有限维情形下，Moser 和 P¨oschel [83, 86]等人曾研究过这一问题，并由此导出了新的丢番图条件，称为一阶和二阶 Melnikov 条件。后来，这一理论被推广并改进到多种哈密顿偏微分方程中。例如，以下论文[22, 31, 33, 76, 87, 88, 96]将其应用于一维半线性波动方程和 Schr¨odinger 方程。对于可积偏微分方程的半线性扰动，也取得了一些成果 [11, 12, 21, 43, 48, 74, 77, 78, 80]。然而，对于拟线性或完全非线性扰动的情形，直到最近才在一系列论文 [5, 6, 7, 14, 18, 46]中得到研究。这一方向的典型例子是水波方程；过去几年中，围绕其周期解和拟周期解开展了大量且深入的研究，参见例如 [1, 4, 15, 16, 19, 73, 85]。

关于已知具有哈密顿结构的二维欧拉方程中拟周期结构的出现，文献中已有的研究成果不多；最近也取得了一些有趣进展，为涡旋运动开辟了新的研究视角。关于光滑情形并辅以周期边界条件的成果，可追溯至 Crouseilles 和 Faou 在[34]发表的工作。拟周期解的构造基于彼此不相互作用的局部化行波

解。值得注意的是，他们的方法不需要借助 KAM理论中的复杂工具。最近，Enciso、Peralta-Salas 和 Torres de Lizaur 在 [44] 将他们的结果推广到了更高维情形。对于三维环面上的欧拉方程，Baldi 和 Montalto[8] 通过小幅拟周期强迫项构造出了拟周期解。

另一个新兴且前景广阔的研究方向，是构造系统 (1.1) 的拟周期涡斑，或构造各种主动标量方程（广义表面准地转方程、准地转浅水方程和 Euler-$\alpha$方程）的拟周期涡斑；近期论文 [59, 69, 92] 对此进行了部分探索。这些工作都研究了 Rankine 涡附近的单连通拟周期涡斑，前提是选取适当的外部参数，使其属于一个很大的康托集。我们强调，对于欧拉模型而言，已不存在自然参数，因此必须引入一个内部参数。目前已有两项相关研究。第一项由 Berti、Hassainia 和 Masmoudi 完成 [17]，他们运用 KAM理论证明了基尔霍夫椭圆附近存在拟周期涡斑，前提是椭圆的长宽比属于一个康托集。第二项由 Hassainia 和 Roulley 在 [61], 中完成，研究了流体在单位圆盘内演化的情形，并证明当 $b$ 属于 (0, 1) 中一个适当的康托集时，Rankine 涡附近存在拟周期涡斑 $\mathbf{1}_{b\mathbb{D}}$。

本文的主要任务是研究环域 $A_b$附近准周期涡斑（记作 (QPP)）的出现。其动机在于，正如 [64] 所述，环域附近存在时间周期涡斑；通过混合有限个频率，可以在线性层面得到 (QPP)。需要注意的是，频率 (1.6) 关于模数 $b$ 的刚性，是实现线性环面非退化性的关键要素。在非线性层面构造 (QPP) 的困难之一，源于问题的向量结构，因为我们处理的是两个耦合界面。正如我们将看到的，这会带来更多时空共振，其中一部分来自由两个不同速度输运的输运方程之间的相互作用。

接下来，我们将仔细描述双连通 (QPP) 附近的情形，然后陈述主要结果并概述证明的主要思路。首先，我们考虑涡斑两个界面的修正的极坐标参数化，该涡斑靠近环域 $A_b$，即对于 $k \in \{1, 2\}$

$$z_k(t,\theta) \triangleq R_k(t,\theta)e^{\mathrm{i}(\theta-\Omega t)}, \quad R_k(t,\theta) \triangleq \sqrt{b_k^2 + 2r_k(t,\theta)}, \quad b_1 \triangleq 1, \quad b_2 \triangleq b.$$

未知量是表示该涡片小径向形变的函数对 $r = (r_1, r_2)$。值得指出的是，与 [17, 59, 69, 92] 类似，我们的参数化是在角速度为 $\Omega > 0$. 的旋转参考系中写出的。不过，我们引入辅助参数 Ω 的原因有多重。在以往的研究中，我们借助这一参数来消除第一个平衡频率的退化，从而避免平凡共振。在我们的设定中，引入该参数是为了避免未扰动频率（特征值） $\{\mathrm{m}\Omega_{\mathrm{m}}^{\pm}(b)$（$\mathrm{m} \geqslant 2\}$）指数式地趋近于某个常数，见 (1.6)。这一事实会产生有害影响，尤其与二阶梅尔尼科夫非共振条件有关。因此，借助参数 Ω，特征值将随模态 m 线性增长。取较大的 Ω 值还带来另一项有用性质，即特征值的单调性，见引理 4.6；这进而使我们能够在对角部分上获得 R¨ussmann 条件，见引理 4.8-(iv)。

与 [59, 61, 69, 92] 的一个主要区别在于，该系统具有与界面耦合相关的向量结构。尽管如此，我们仍能从轮廓动力学方程的角度验证其哈密顿结构。事实上，我们在引理 3.1 和命题 3.1 中证明，径向形变对 $r = (r_1, r_2)$ 满足一个由两个耦合的非线性非局部输运偏微分方程组成的系统，该系统具有如下形式的哈密顿表述

$$\partial_t r = \mathcal{J}\nabla H(r), \qquad \mathcal{J} \triangleq \begin{pmatrix} \partial_\theta & 0 \\ 0 & -\partial_\theta \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

其中，哈密顿量 $H$ 可由动能和角动量恢复。该哈密顿量具有可逆性，并且在空间平移下保持不变。引理 4.1 描述了环域 $A_b$ 附近一般状态 $r$ 处的线性化算子，其形式为

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \mathcal{J}\mathbf{M}_r \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_r \triangleq \begin{pmatrix} -V_1(r) - L_{1,1}(r) & L_{1,2}(r) \\ L_{2,1}(r) & V_2(r) - L_{2,2}(r) \end{pmatrix},$$

其中， $V_k(r)$ 是标量函数，而 $L_{k,\ n}(r)$ 是由 (4.2)–(4.4) 给出的非局部算子。对角项对应于各个界面的自感应。特别地，对于 $k \in \{1,2\}$，算子 $L_{k,\ k}$ 是零阶的，反映了平面上单连通区域的欧拉作用。对于 $k \neq n \in \{1,2\}$，反对角算子 $L_{k,\ n}$ 描述了两个边界之间的相互作用，并且具有任意阶的光滑性。在引理 4.2 中，我们将证明，在对应于环形涡片的平衡态 $r = (0,0)$ 处，$\mathbf{M}_0$ 的每个元素都是傅里叶乘子，且算子 $\mathcal{J}\mathbf{M}_0$ 可写成若干 $2\times 2$ 矩阵的傅里叶展开叠加，

$$\mathcal{J}\mathbf{M}_0\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix} = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} M_j(b,\Omega)\begin{pmatrix}\rho_{j,1}\\ \rho_{j,2}\end{pmatrix}\mathbf{e}_j, \qquad M_j(b,\Omega) \triangleq \frac{\mathrm{i}j}{|j|}\begin{pmatrix}-|j|\left(\Omega+\frac{1-b^2}{2}\right)+\frac{1}{2} & -\frac{b^{|j|}}{2}\\ \frac{b^{|j|}}{2} & -|j|\Omega-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

对于所有具有傅里叶展开的 $\rho_1$ 和$\rho_2$

$$\rho_k = \sum_{j\in\mathtt{m}\mathbb{Z}^*}\rho_{j,k}\mathbf{e}_j \quad \text{s.t.} \quad \rho_{-j,k} = \overline{\rho_{j,k}}, \qquad \mathbf{e}_j(\theta) \triangleq e^{\mathrm{i}j\theta}.$$

$M_j(b,\Omega)$ 的谱为

$$\sigma\big(M_j(b,\Omega)\big) = \big\{-\mathrm{i}\Omega_{j,1}(b), -\mathrm{i}\Omega_{j,2}(b)\big\}, \qquad \Omega_{j,k}(b) \triangleq \frac{j}{|j|}\left[\left(\Omega+\tfrac{1-b^2}{4}\right)|j| - \mathrm{i}^{\mathtt{H}\left(\Delta_j(b)\right)}\tfrac{(-1)^k}{2}\sqrt{|\Delta_j(b)|}\right],$$

其中 $\mathtt{H}\ \mathbf{1}_{[0,\infty)}$ 为 Heaviside 函数，且

$$\Delta_j(b) \triangleq b^{2|j|} - \left(\tfrac{1-b^2}{2}|j|-1\right)^2.$$

在这一阶段，我们将讨论限制在某个足够大的整数 $\mathtt{m} \geqslant 3$所对应的 $\mathtt{m}$ 重对称结构上。这样做有几个原因。首先，对于任意 $b \in (0,1)$，模态 $j=2$ 都对应一个二重根，因为 $\Delta_2(b) = 0$，这意味着存在一个非平凡共振，无法通过参数 $b$ 消除，只能通过对 (QPP) 施加更高的对称性来消除。其次，与特征值实部非零相关联的双曲谱——它可能引发不稳定性和随时间增长——只会在较低对称性下出现。我们认为，在后一种构型下，仍有望通过将双曲模态置于法向方向上来构造 (QPP)，正如近期在 [17] 中所做的那样。例如，关于有限维或无限维空间中的双曲 KAM 理论，可参阅 [13, 39, 42, 55, 89, 98, 99] 。

现在，固定 $b^* \in (0,1)$，并设

$$\mathtt{m}^* \triangleq \min\left\{n \geqslant 3 \quad \text{s.t.} \quad \underline{b}_n > b^*\right\}, \tag{1.11}$$

其中，序列 $\underline{b}_n$ 定义于 (1.8) 中。于是，对于任意整数 $|j| \geqslant \mathtt{m}^*$，我们有 $\Delta_j(b) < 0$. 因此，量 $\Omega_{j,\ k}(b)$ 为实数，矩阵 $M_j(b,\Omega)$ 的谱为纯虚数。将傅里叶模态限制在格点 $\mathbb{Z}^*_{\mathtt{m}}$，且 $\mathtt{m}\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 满足 $\mathtt{m} \geqslant \mathtt{m}^*$，即可消去双曲模态。在此阶段，我们发现采用新的坐标更为方便，在这些坐标下，平衡态处的线性化算子由一个对角矩阵傅里叶乘子算子支配。这可以通过对每个矩阵 $M_j(b,\Omega)$ 进行对角化来实现。为此，我们使用关于 $\mathcal{W}$ 的辛变换 $\mathbf{Q}$，其形式为

$$\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix} = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathtt{m}}}\mathbf{Q}_j\begin{pmatrix}\rho_{j,1}\\ \rho_{j,2}\end{pmatrix}\mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{Q}_j \triangleq \frac{-1}{\sqrt{1-a_j^2(b)}}\begin{pmatrix}-1 & a_j(b)\\ a_j(b) & -1\end{pmatrix},$$

其中

$$a_j(b) \triangleq \frac{b^{|j|}}{\frac{1-b^2}{2}|j|-1+\sqrt{\left(\frac{1-b^2}{2}|j|-1\right)^2-b^{2|j|}}} \in (0,1), \tag{1.12}$$

（关于 $a_j(b)$ 的界的更多细节，参见推论 4.1），使得

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathcal{J}\mathbf{M}_0\mathbf{Q} = \mathcal{J}\mathbf{L}_0, \qquad \mathbf{L}_0\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix} \triangleq \sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathtt{m}}}\frac{1}{j}\begin{pmatrix}-\Omega_{j,1}(b) & 0\\ 0 & \Omega_{j,2}(b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_{j,1}\\ \rho_{j,2}\end{pmatrix}\mathbf{e}_j.$$

注意，$\mathrm{i}\Omega_{j,\,1}(b)$ 和 $\mathrm{i}\Omega_{j,\,2}(b)$ 不是复共轭，因此，与水波 [4, 15, 16, 19] 情形不同，其动力学无法约化为与一个复变量相关联的单个标量方程。通过辛变换 $r \mapsto \mathbf{Q}r$ 得到的新哈密顿系统

$$\partial_t r = \mathcal{J}\nabla K(r), \qquad K(r) \triangleq H(\mathbf{Q}r)$$

其在平凡解处的线性化具有良好的标准形

$$\partial_t \rho = \mathcal{J}\nabla K_{\mathbf{L}_0}(\rho), \qquad K_{\mathbf{L}_0}(\rho) \triangleq \tfrac{1}{2}\big\langle \mathbf{L}_0\rho, \rho\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})} = -\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathtt{m}}} \Big(\tfrac{\Omega_{j,1}(b)}{2j}|\rho_{j,1}|^2 - \tfrac{\Omega_{j,2}(b)}{2j}|\rho_{j,2}|^2\Big). \quad (1.13)$$

考虑两个互不相交的傅里叶模态有限集

$$\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2 \subset \mathtt{m}\mathbb{N}^*, \qquad \text{with} \qquad |\mathbb{S}_1| = d_1 < \infty, \qquad |\mathbb{S}_2| = d_2 < \infty \qquad \text{and} \qquad \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \varnothing. \quad (1.14)$$

那么，由引理 4.9 可推得，对于任意 $0 < b^* < 1$、$\Omega > 0$ 和 $r_{j,\,1},\ r_{j,\,2} \in \mathbb{R}^*$，对几乎所有$b \in [0, b^*]$，任意具有以下形式的函数

$$r(t,\theta) = \sum_{j\in\mathbb{S}_1} \tfrac{r_{j,1}}{\sqrt{1-a_j^2(b)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_j(b) \end{pmatrix} \cos\big(j\theta - \Omega_{j,1}(b)t\big) + \sum_{j\in\mathbb{S}_2} \tfrac{r_{j,2}}{\sqrt{1-a_j^2(b)}} \begin{pmatrix} -a_j(b) \\ 1 \end{pmatrix} \cos\big(j\theta - \Omega_{j,2}(b)t\big)$$

是频率为.....的拟周期解

$$\omega_{\mathrm{Eq}}(b) \triangleq \Big(\big(\Omega_{j,1}(b)\big)_{j\in\mathbb{S}_1}, \big(\Omega_{j,2}(b)\big)_{j\in\mathbb{S}_2}\Big) \quad (1.15)$$

原线性化方程 $\partial_t r = \mathcal{J}\mathrm{M}_0 r$ 的解，该方程是 $\mathtt{m}$ 重且可逆的，即 $r(-t,-\theta) = r(t,\theta) = r\big(t, \theta + \frac{2\pi}{\mathtt{m}}\big)$. 我们的主要结果表明，这些结构在非线性层面仍然成立。更准确地说，我们有以下定理。

定理 1.1. 设 $0 < b_* < b^* < 1$ 并固定 $\mathtt{m} \in \mathbb{N}$，其中 $\mathtt{m} \geqslant \mathtt{m}^*$，且 $\mathtt{m}^*$ 在 (1.11) 中定义。存在 $\Omega^*_{\mathtt{m}}$，$\Omega(b^*, \mathtt{m}) > 0$ 满足

$$\lim_{\mathtt{m}\to\infty} \Omega^*_{\mathtt{m}} = 0$$

使得对于任意 $\Omega > \Omega^*_{\mathtt{m}}$，都存在足够小的 $\varepsilon_0 \in (0,1)$，满足以下性质：对于所有振幅

$$\mathtt{a} = \big((\mathtt{a}_{j,1})_{j\in\mathbb{S}_1}, (\mathtt{a}_{j,2})_{j\in\mathbb{S}_2}\big) \in (\mathbb{R}^*_+)^{d_1+d_2} \qquad \text{satisfying} \qquad |\mathtt{a}| \leqslant \varepsilon_0,$$

存在一个类康托集

$$\mathcal{C}^{\mathtt{a}}_\infty \subset (b_*, b^*), \qquad \text{with} \qquad \lim_{\mathtt{a}\to 0} |\mathcal{C}^{\mathtt{a}}_\infty| = b^* - b_*,$$

使得对于任意 $b \in \mathcal{C}^{\mathtt{a}}_\infty$，平面欧拉方程 (1.1) 存在一个 $\mathtt{m}$ 重时间拟周期双连通涡斑解，其形式为

$$\boldsymbol{\omega}(t,\cdot) = \mathbf{1}_{D_t}, \qquad D_t = \Big\{\ell e^{\mathrm{i}(\theta-\Omega t)}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \sqrt{b^2 + 2r_2(t,\theta)} < \ell < \sqrt{1 + 2r_1(t,\theta)}\Big\},$$

其中

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}(t,\theta) = \sum_{j\in\mathbb{S}_1} \tfrac{\mathtt{a}_{j,1}\cos(j\theta - \omega_{j,1}(b,\mathtt{a})t)}{\sqrt{1-a_j^2(b)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_j(b) \end{pmatrix} + \sum_{j\in\mathbb{S}_2} \tfrac{\mathtt{a}_{j,2}\cos(j\theta - \omega_{j,2}(b,\mathtt{a})t)}{\sqrt{1-a_j^2(b)}} \begin{pmatrix} -a_j(b) \\ 1 \end{pmatrix} + \mathtt{p}\big(\omega_{\mathrm{pe}}(b,\mathtt{a})t, \theta\big)$$

且 $a_j(b)$ 由 (1.12) 给出。该解对应于一个非共振频率向量

$$\omega_{\mathrm{pe}}(b,\mathtt{a}) \triangleq \Big(\big(\omega_{j,1}(b,\mathtt{a})\big)_{j\in\mathbb{S}_1}, \big(\omega_{j,2}(b,\mathtt{a})\big)_{j\in\mathbb{S}_2}\Big) \in \mathbb{R}^{d_1+d_2}$$

满足收敛性

$$\omega_{\mathrm{pe}}(b,\mathtt{a}) \underset{\mathtt{a}\to 0}{\longrightarrow} -\Big(\big(\Omega_{j,1}(b)\big)_{j\in\mathbb{S}_1}, \big(\Omega_{j,2}(b)\big)_{j\in\mathbb{S}_2}\Big),$$

其中 $\Omega_{j,\ 1}(b)$ 和 $\Omega_{j,\ 2}(b)$ 是平衡频率。扰动 $\mathtt{p}\colon\ \mathbb{T}^{d_1+d_2+1}\to\mathbb{R}^2$ 是一个满足对称性的函数

$$\forall(\varphi,\theta)\in\mathbb{T}^{d_1+d_2+1},\quad \mathtt{p}(-\varphi,-\theta)=\mathtt{p}(\varphi,\theta)=\mathtt{p}(\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}})$$

并且对于某个较大的索引，关于索博列夫正则性的 $s$，它满足以下估计

$$\|\mathtt{p}\|_{H^s(\mathbb{T}^{d_1+d_2+1},\mathbb{R}^2)}\underset{\mathtt{a}\to0}{=}o(|\mathtt{a}|).$$

注1.1. 下界限制 $b_*$ 是必要的，因为算子 $L_{k,\ n}$, $V_{k,\ n}$ 在 $b=0$ 时可能变得奇异，这种情况对应于单连通情形。

注1.2. 根据该定理，我们得到环域周围受约束的斑块形式的全局非平凡解。关于涡旋约束的更多研究可见于 *[71, 72, 81]*。

现在我们将简要介绍证明的主要步骤。其总体策略借鉴了 Berti-Bolle [14] 为 KAM 理论发展出的纳什-莫泽方法，并在 [59, 第 6] 节中略作修改。回顾一下，Nash-Moser方案要求在平衡态的邻域内求逆线性化算子，且逆算子必须在索伯列夫空间框架下满足适当的温和估计。我们现在要介绍的第一步是将问题重新表述为关于嵌入环面的问题。注意，与 $K$ 相关的哈密顿系统是其在平衡态处线性化的拟线性扰动，即

$$\partial_t r=\mathcal{J}\mathbf{L}_0 r+X_P(r),\qquad\text{with}\qquad X_P(r)\triangleq\mathcal{J}\nabla K(r)-\mathcal{J}\mathbf{L}_0 r=\mathbf{Q}^{-1}X_{H\geqslant3}(\mathbf{Q}r),$$

其中

$$X_{H\geqslant3}(r)\triangleq\mathcal{J}\big(\nabla H(r)-\mathbf{M}_0 r\big).$$

经过重标度 $r\mapsto\varepsilon r$ 并采用拟周期框架 $\partial_t\leftrightarrow\omega\cdot\partial_\varphi$后，哈密顿系统变为

$$\omega\cdot\partial_\varphi r=\mathcal{J}\mathbf{L}_0 r+\varepsilon X_{P_\varepsilon}(r),$$

其中，$X_{P_\varepsilon}$ 是重标度哈密顿向量场，由 $X_{P_\varepsilon}(r)$ $\varepsilon^{-2}X_P(\varepsilon r)$ 定义。注意，前一个方程由重标度哈密顿量生成

$$\mathcal{K}_\varepsilon(r)\triangleq\varepsilon^{-2}K(\varepsilon r)=K_{\mathbf{L}_0}(r)+\varepsilon P_\varepsilon(r),$$

其中 $K_{\mathbf{L}_0}$ 如 (1.13) 所示，而 $\varepsilon P_\varepsilon(r)$ 描述了所有高于三次阶的项。我们考虑两个有限集 $\mathbb{S}_1$、$\mathbb{S}_2$，如 (1.14) 所示，并记 $d_1$、$|\mathbb{S}_1|$、$d_2$、$|\mathbb{S}_2|$、$d$、$d_1+d_2$ 以及

$$\overline{\mathbb{S}}_k\triangleq\mathbb{S}_k\cup(-\mathbb{S}_k),\qquad\overline{\mathbb{S}}_{0,k}\triangleq\overline{\mathbb{S}}_k\cup\{0\}.$$

并令

$$\mathbb{S}\triangleq\mathbb{S}_1\cup\mathbb{S}_2,\quad\overline{\mathbb{S}}\triangleq\mathbb{S}\cup(-\mathbb{S}),\quad\overline{\mathbb{S}}_0\triangleq\overline{\mathbb{S}}\cup\{0\}.$$

接下来，我们将相空间分解为以下正交直和

$$L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T})\times L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T})=\mathbf{H}_{\overline{\mathbb{S}}}\overset{\perp}{\oplus}\mathbf{H}^{\perp}_{\overline{\mathbb{S}}_0},\quad L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T})\triangleq\left\{f=\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathtt{m}}}f_j\mathbf{e}_j\quad\text{s.t.}\quad f_{-j}=\overline{f_j},\quad\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathtt{m}}}|f_j|^2<+\infty\right\},\tag{1.16}$$

with

$$\mathbf{H}_{\overline{\mathbb{S}}}\triangleq\left\{\sum_{j\in\overline{\mathbb{S}}_1}v_{j,1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathbf{e}_j+\sum_{j\in\overline{\mathbb{S}}_2}v_{j,2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mathbf{e}_j,\quad v_{j,k}\in\mathbb{C},\quad\overline{v_{j,k}}=v_{-j,k}\right\},$$

$$\mathbf{H}^{\perp}_{\overline{\mathbb{S}}_0}\triangleq\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1}}z_{j,1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathbf{e}_j+\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2}}z_{j,2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mathbf{e}_j,\quad z_{j,k}\in\mathbb{C},\quad\overline{z_{j,k}}=z_{-j,k}\right\}.$$

集合 $\mathbf{H}_{\overline{\mathbb{S}}}$ 和 $\mathbf{H}_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}$ 分别称为切向子空间和法向子空间。相应的投影定义为

$$\Pi_{\overline{\mathbb{S}}} \triangleq \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp} \triangleq \begin{pmatrix} \Pi_1^{\perp} & 0 \\ 0 & \Pi_2^{\perp} \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

即,

$$\forall k \in \{1,2\}, \quad \Pi_k \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}^*} v_{j,k} \mathbf{e}_j \triangleq \sum_{j \in \overline{\mathbb{S}}_k} v_{j,k} \mathbf{e}_j \qquad \text{and} \qquad \Pi_k^{\perp} \triangleq \mathbb{I}_{\mathtt{m}} - \Pi_k, \tag{1.18}$$

其中 $\mathbb{I}_{\mathtt{m}}$ 是 恒等映射。对于切向集合 $\mathbf{H}_{\overline{\mathbb{S}}}$，我们引入作用角变量 es

$$\vartheta \triangleq \big((\vartheta_{j,1})_{j \in \mathbb{S}_1}, (\vartheta_{j,2})_{j \in \mathbb{S}_2}\big), \qquad I \triangleq \big((I_{j,1})_{j \in \mathbb{S}_1}, (I_{j,2})_{j \in \mathbb{S}_2}\big)$$

如下：任取振幅 $(\mathtt{a}_{j,\ k})_{j \in \overline{\mathbb{S}}_k}$，使得对于任意 $j \in \overline{\mathbb{S}}_k$，$\mathtt{a}_{-j,\ k} = \mathtt{a}_{j,\ k} > 0$，并令

$$\forall k \in \{1,2\}, \quad \forall j \in \overline{\mathbb{S}}_k, \quad v_{j,k} \triangleq \sqrt{(\mathtt{a}_{j,k})^2 + |j| I_{j,k}}\, e^{\mathrm{i}\vartheta_{j,k}},$$

并补充以下对称性

$$\forall k \in \{1,2\}, \quad \forall j \in \mathbb{S}_k, \quad I_{-j,k} = I_{j,k} \in \mathbb{R} \qquad \text{and} \qquad \vartheta_{-j,k} = -\vartheta_{j,k} \in \mathbb{T}.$$

因此，我们得到 $r = (r_1, r_2)$ 的如下分解,

$$r = \mathbf{A}(\vartheta, I, z) \triangleq v(\vartheta, I) + z, \tag{1.19}$$

其中 $z \in \mathbf{H}_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}$ 且

$$v(\vartheta, I) \triangleq \sum_{j \in \overline{\mathbb{S}}_1} \sqrt{(\mathtt{a}_{j,1})^2 + |j| I_{j,1}}\, e^{\mathrm{i}\vartheta_{j,1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_j + \sum_{j \in \overline{\mathbb{S}}_2} \sqrt{(\mathtt{a}_{j,2})^2 + |j| I_{j,2}}\, e^{\mathrm{i}\vartheta_{j,2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{e}_j \in \mathbf{H}_{\overline{\mathbb{S}}}.$$

变换 $\mathbf{A}$ 是 $\mathcal{W}$-辛的，并且在新变量中，新的哈密顿量 $K_\varepsilon$ , $\mathcal{K}_\varepsilon \circ \mathbf{A}$ 写作

$$K_\varepsilon = -\big(\mathtt{J}\, \omega_{\mathrm{Eq}}(b)\big) \cdot I + \tfrac{1}{2} \big\langle \mathbf{L}_0\, z, z \big\rangle_{L^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T})} + \varepsilon \mathcal{P}_\varepsilon, \qquad \mathtt{J} \triangleq \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{d_1} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{d_2} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}_\varepsilon \triangleq P_\varepsilon \circ \mathbf{A}.$$

注意，泊松结构与 J 相关，并且在稍后实施 Berti-Bolle 方法时会用到。相应的哈密顿向量场为

$$X_{K_\varepsilon} \triangleq \big(\mathtt{J} \partial_I K_\varepsilon, -\mathtt{J} \partial_\vartheta K_\varepsilon, \Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp} \mathcal{J} \nabla_z K_\varepsilon\big).$$

因此，问题归结为寻找嵌入不变环面

$$i : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbf{H}_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}, \qquad \varphi \mapsto i(\varphi) \triangleq \big(\vartheta(\varphi), I(\varphi), z(\varphi)\big),$$

方程的解

$$\omega \cdot \partial_\varphi i(\varphi) = X_{K_\varepsilon}\big(i(\varphi)\big).$$

如 [14, 83], 中所观察到的，在 Nash-Moser方案中，采用一个自由度的向量值参数 $\alpha \in \mathbb{R}^d$ 进行处理较为方便；当该参数固定为 $-\mathtt{J}^{\omega_{\mathrm{Eq}}(b)}$ 时，最终可得到原问题的一个解。因此，我们将考虑以下依赖于 $\alpha$ 的哈密顿量族

$$K_\varepsilon^\alpha \triangleq \alpha \cdot I + \tfrac{1}{2} \big\langle \mathbf{L}_0\, z, z \big\rangle_{L^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T})} + \varepsilon \mathcal{P}_\varepsilon$$

并且我们要寻找以下泛函的零点

$$\mathcal{F}(i, \alpha, b, \omega, \varepsilon) \triangleq \omega \cdot \partial_\varphi i(\varphi) - X_{K_\varepsilon^\alpha}\big(i(\varphi)\big) = \begin{pmatrix} \omega \cdot \partial_\varphi \vartheta(\varphi) - \mathtt{J}\big(\alpha - \varepsilon \partial_I \mathcal{P}_\varepsilon(i(\varphi))\big) \\ \omega \cdot \partial_\varphi I(\varphi) + \varepsilon \mathtt{J} \partial_\vartheta \mathcal{P}_\varepsilon(i(\varphi)) \\ \omega \cdot \partial_\varphi z(\varphi) - \mathcal{J}\big[\mathbf{L}_0 z(\varphi) + \varepsilon \nabla_z \mathcal{P}_\varepsilon\big(i(\varphi)\big)\big] \end{pmatrix}.$$

在 Nash-Moser方案的每一步中，我们都必须在一个小的可逆嵌入环面 $i_0:\ \varphi \mapsto \big(\vartheta_0(\varphi)\ I_0(\varphi)\ z_0(\varphi)\big)$ 和 $\alpha_0 \in \mathbb{R}^d$处对该泛函进行线性化，随后需要构造$d_{i_0}$的近似右逆$\alpha\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)$。Berti-Bolle理论的核心是通过环面相空间 $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbf{H}^{\perp}_{\mathbb{S}_0}$ 上的线性微分同胚 $G_0$ 对线性化算子进行共轭，从而在作用-角-正规变量中得到一个除误差项外的三角系统。注意，与 [59],类似，我们不使用各向同性环面。因此，在这一框架下，求逆三角系统就等同于$\widehat{\ }$求逆法向方向上的线性化算子，记为 $\mathcal{L}$. 这一事实将在第 7 节中分析，并且会像 [4, 19, 59, 69] 一样用到 KAM 可约化技术。下面我们将对此加以说明，并提取其中主要的新困难。根据命题 7.1，我们可以写出

$$\widehat{\mathcal{L}} = \Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}\left(\mathcal{L} - \varepsilon\partial_\theta\mathcal{R}\right)\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}, \qquad \mathcal{L} \triangleq \omega\cdot\partial_\varphi \mathbf{I}_{\mathtt{m}} + \mathfrak{L}_{\varepsilon r}, \qquad \mathbf{I}_{\mathtt{m}} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{\mathtt{m}} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{\mathtt{m}} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{R} \triangleq \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{J_{1,1}}(r) & \mathcal{T}_{J_{1,2}}(r) \\ \mathcal{T}_{J_{2,1}}(r) & \mathcal{T}_{J_{2,2}}(r) \end{pmatrix},$$

其中，对任意 $(k,\ell) \in \{1,2\}^2$, $\mathcal{T}_{J_{k,\ell}}$是一个具有光滑核 $J_{k,\ell}$ 的 $\mathtt{m}$ 重且保持可逆性的积分算子，而 $\mathfrak{L}_{\varepsilon r}$ 是线性化算子

$$\mathfrak{L}_r = \begin{pmatrix} \partial_\theta\big(\mathcal{V}_1(r)\ \cdot\big) + \frac{1}{2}\mathcal{H} + \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot & 0 \\ 0 & \partial_\theta\big(\mathcal{V}_2(r)\ \cdot\big) - \frac{1}{2}\mathcal{H} - \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot \end{pmatrix} + \partial_\theta \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\mathscr{K}_{1,1}}(r) & \mathcal{T}_{\mathscr{K}_{1,2}}(r) \\ \mathcal{T}_{\mathscr{K}_{2,1}}(r) & \mathcal{T}_{\mathscr{K}_{2,2}}(r) \end{pmatrix},$$

其中，我们用 $\mathcal{H}$ 表示 $2\pi$ 周期希尔伯特变换， $\mathcal{V}_k(r)$、 $k \in \{1,2\}$是标量函数。卷积算子 $\mathcal{Q}*\cdot$具有偶光滑核 $\mathcal{Q}$。对于 $k,n \in \{1,2\}$，算子 $\mathcal{T}_{\mathscr{K}_{k,n}(r)}$是一个积分算子，其核 $\mathscr{K}_{k,n}(r)$光滑、具有 $\mathtt{m}$ 重对称性且保持可逆性，见命题 4.1。

首先，按照 [8, 45, 69], 中的 KAM约化方案，我们可以通过共轭一个如下形式的拟周期辛变量变换，约化输运部分和零阶部分

$$\mathscr{B} \triangleq \begin{pmatrix} \mathscr{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathscr{B}_2 \end{pmatrix}, \qquad \forall k \in \{1,2\}, \quad \mathscr{B}_k\rho(\mu,\varphi,\theta) = \big(1+\partial_\theta\beta_k(\mu,\varphi,\theta)\big)\rho\big(\mu,\varphi,\theta+\beta_k(\mu,\varphi,\theta)\big).$$

更准确地说，如命题7.2和命题7.3所述，我们可以找到两个函数 $\mathtt{c}_1 \triangleq \mathtt{c}_1(b,\omega,i_0)$、$\mathtt{c}_2 \triangleq \mathtt{c}_2(b,\omega,i_0)$以及一个康托集

$$\mathcal{O}^{\gamma,\tau_1}_{\infty,n}(i_0) \triangleq \bigcap_{\substack{k\in\{1,2\}\\ (l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}\\ |l|\leqslant N_n}} \Big\{(b,\omega)\in\mathcal{O} \quad \text{s.t.} \quad \big|\omega\cdot l + j\mathtt{c}_k(b,\omega,i_0)\big| > \tfrac{4\gamma^{\upsilon}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}\Big\},$$

其中 $N_n, N_{\ 0}^{(\frac{3}{2}^n)}$ 满足 $N_0 \gg 1$，且成立如下分解

$$\mathscr{B}^{-1}\big(\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m}} + \mathfrak{L}_{\varepsilon r}\big)\mathscr{B} = \omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m}} + \mathscr{D} + \mathscr{R} + \mathscr{E}_n,$$

其中

$$\mathscr{D} \triangleq \begin{pmatrix} \mathtt{c}_1\partial_\theta\ + \frac{1}{2}\mathcal{H} + \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot & 0 \\ 0 & \mathtt{c}_2\partial_\theta\ - \big(\frac{1}{2}\mathcal{H} + \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot\big) \end{pmatrix},$$

并且 $\mathscr{R}$ , $\mathscr{R}(\varepsilon r)$ 是一个实的、$\mathtt{m}$ 重且保持可逆性的时间托普利兹矩阵积分算子，具有良好的小量性质。算子 $\mathscr{E}_n$ 是一阶的，但其系数较小，且随 $n.$ 衰减得更快。下一步研究正规模态上的局域化效应。我们首先引入算子

$$\mathscr{B}_\perp \triangleq \Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}\mathscr{B}\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0} = \begin{pmatrix} \Pi^{\perp}_1\mathscr{B}_1\Pi^{\perp}_1 & 0 \\ 0 & \Pi^{\perp}_2\mathscr{B}_2\Pi^{\perp}_2 \end{pmatrix}.$$

然后，根据命题 7.4，通过将参数限制在集合 $\mathcal{O}^{\gamma,\ \tau_1,\ n}_{\infty}(i_0)$，我们证明对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，恒等式

$$\mathscr{B}^{-1}_\perp\widehat{\mathcal{L}}\mathscr{B}_\perp = \mathscr{L}_0 + \mathscr{E}^0_n, \qquad \mathscr{L}_0 \triangleq \omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp} + \mathscr{D}_0 + \mathscr{R}_0,$$

其中，$\mathbf{I}_{\mathtt{m},\ \perp}$ , $\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}\mathbf{I}_{\mathtt{m}}$ 且 $\mathscr{D}_0 = \Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}\mathscr{D}_0\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}$ 是一个具有 $\mathtt{m}$ 重保持性和可逆性的矩阵傅里叶乘子算子，其形式为

$$\mathscr{D}_0 \triangleq \begin{pmatrix} \mathscr{D}_{0,1} & 0 \\ 0 & \mathscr{D}_{0,2} \end{pmatrix},$$

with

$$\forall k\in\{1,2\},\quad \mathscr{D}_{0,k}\triangleq\left(\mathrm{i}\mu_{j,k}^{(0)}\right)_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}},\qquad \mu_{j,k}^{(0)}(b,\omega,i_0)\triangleq\Omega_{j,k}(b)+j\big(\mathtt{c}_k(b,\omega)-\mathtt{v}_k(b)\big)$$

且 $\mathscr{R}_0=\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}\mathscr{R}_0\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}$ 是一个小的实值、具有 $\mathtt{m}$ 重保持性和可逆性的时间托普利兹矩阵余项，其元素是具有光滑核的积分算子。误差项 $\mathscr{E}_n^0$ 与前一个误差项 $\mathscr{E}_n$发挥类似的作用。接下来的目标是对余项 $\mathscr{R}_0$. 实施 KAM约化。这通过一种新的混合算子拓扑来实现，该拓扑以不同方式处理对角项和反对角项。在这一方案中，对角部分像标量情形那样，通过使用非对角托普利兹范数来处理，例如参见 [69, 命题 6.5], ；而反对角部分在空间变量上任意阶光滑，因此在各向同性拓扑中加以研究。有关这一拓扑框架的更多细节，特别是式 (2.34)，请参见第 2.2.4 节。我们指出，得益于二维欧拉方程的良好结构，余项 $\mathscr{R}_0$ 的对角项和反对角项在空间变量上都任意阶光滑，因此都可以用各向同性拓扑来研究。然而，对于其他输运模型 [59, 69] ，这一事实并不成立，因为其对角线上的余项并非高度光滑，而是负阶的。基于这一原因，我们倾向于采用最一般的框架。命题 7.5 表明，我们可以找到一个算子 $\Phi_\infty$，使得在以下同时包含对角和反对角二阶梅尔尼科夫条件的康托集上

$$\begin{aligned}&\mathscr{O}_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1,\tau_2}(i_0)\triangleq\mathcal{O}_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1}(i_0)\\&\bigcap_{\substack{k\in\{1,2\}\\ j,j_0\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}}\ \bigcap_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d\\(l,j)\neq(0,j_0)\\|l|\leqslant N_n}}\left\{(b,\omega)\in\mathcal{O}\quad\text{s.t.}\quad\left|\omega\cdot l+\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_0)-\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_0)\right|>\tfrac{2\gamma\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}\right\}\\&\bigcap_{\substack{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1}\\ j_0\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2}}}\ \bigcap_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d\\\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_n}}\left\{(b,\omega)\in\mathcal{O}\quad\text{s.t.}\quad\left|\omega\cdot l+\mu_{j,1}^{(\infty)}(b,\omega,i_0)-\mu_{j_0,2}^{(\infty)}(b,\omega,i_0)\right|>\tfrac{2\gamma}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}\right\}\end{aligned}$$

成立如下分解

$$\Phi_\infty^{-1}\mathscr{L}_0\Phi_\infty=\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\mathscr{D}_\infty+\mathscr{E}_n^1\triangleq\mathscr{L}_\infty+\mathscr{E}_n^1,$$

其中，$\mathscr{D}_\infty=\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}\mathscr{D}_\infty\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}=\mathscr{D}_\infty(b,\omega,i_0)$ 是一个具有可逆傅里叶乘子项的对角算子，即

$$\mathscr{D}_\infty\triangleq\begin{pmatrix}\mathscr{D}_{\infty,1}&0\\0&\mathscr{D}_{\infty,2}\end{pmatrix},$$

with

$$\forall k\in\{1,2\},\quad\mathscr{D}_{\infty,k}\triangleq\left(\mathrm{i}\mu_{j,k}^{(\infty)}\right)_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}},\qquad\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_0)\triangleq\mu_{j,k}^{(0)}(b,\omega,i_0)+r_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_0)$$

and

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}|j|\left\|r_{j,k}^{(\infty)}\right\|^{q,\gamma}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}.$$

注意，根据特征值的单调性，差值 $\mu_{j,\,k}^{(\infty)}-\mu_{j_0\,k}^{(\infty)}$ 不为零，且以 $|j-j_0|$的速度增长。这对于混合差 $\mu_{j,\,1}^{(\infty)}-\mu_{j_0\,2}^{(\infty)}$ （源自界面之间的相互作用）不再成立，因为不同的输运速度会导致新的小除数问题。因此，为了解决这一问题，我们应调整康托集 $\mathscr{O}_{\infty\,n}^{\gamma,\,\tau_1\,\tau_2}(i_0)$的几何结构，使其在频率上呈各向同性衰减。这在一定程度上解释了为何在余项约化中需要引入式 (2.34) 的混合拓扑。另一个关键观察是，在 $j=j_0$ 处，对角外部分不存在共振，因此相应的同调方程可以在没有任何残余对角项的情况下求解。于是，在 KAM 方案结束时

我们得到一个对角傅里叶乘子算子 $\mathscr{D}_\infty$. 。现在，只需将参数限制在以下一阶梅尔尼科夫条件内，即可轻松求逆最终算子 $\mathscr{L}_\infty$

$$\Lambda_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1}(i_0) \triangleq \bigcap_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})\\|l|\leqslant N_n}} \Big\{(b,\omega)\in\mathcal{O}\quad \text{s.t.}\quad \Big|\omega\cdot l+\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_0)\Big| > \tfrac{\gamma\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}\Big\}.$$

因此，只要我们选择（$b$，$\omega$）属于集合，就可以构造 $\mathcal{L}$ 的近似右逆

$$\mathtt{G}_n^\gamma(i_0) \triangleq \mathcal{O}_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1}(i_0)\cap\mathcal{O}_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1,\tau_2}(i_0)\cap\Lambda_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1}(i_0).$$

因此，我们可以按照 [19, 59,69] 中的方法，在命题 8.1 和推论 8.1 中实施 Nash-Moser方案；考虑到我们特有的泊松结构以及非对角的二阶梅尔尼科夫条件，只需稍作修改。由此，只要将参数（$b$，$\omega$）限制在博雷尔集 $\mathtt{G}_\infty^\gamma$内，我们就能找到方程 $\mathcal{F}$（$i$，$\alpha$，$b$，$\omega$，$\varepsilon$）$=0$的一个非平凡解（$b$，$\omega$）$\mapsto$（$i_\infty$（$b$，$\omega$）$\alpha_\infty$（$b$，$\omega$））。该博雷尔集是沿多重约化的不同方案遇到的所有康托集的交集。通过构造隐式方程的解——频率曲线$b\mapsto\omega$（$b$，$\varepsilon$），即可得到原问题的一个解

$$\alpha_\infty\big(b,\omega(b,\varepsilon)\big) = -\mathtt{J}\omega_{\mathrm{Eq}}(b).$$

通过这种方式，对于 $b$ 中的任意取值，我们都能构造一个解

$$\mathcal{C}_\infty^\varepsilon \triangleq \Big\{b\in(b_*,b^*)\quad \text{s.t.}\quad \big(b,\omega(b,\varepsilon)\big)\in\mathtt{G}_\infty^\gamma\Big\}.$$

最后一步是验证这个最终集合非空且具有正测度。事实上，我们在命题 8.2 中证明了如下测度界

$$(b^*-b_*)-\varepsilon^\delta \leqslant |\mathcal{C}_\infty^\varepsilon| \leqslant (b^*-b_*)\quad \text{for some } \delta\triangleq\delta(q_0,d,\tau_1,\tau_2)>0.$$

证明相当标准，其依据是在平衡态处成立的 R¨ussmann 条件的扰动。我们强调，限制 $\Omega$ $>\Omega_{\mathtt{m}}^*$ 是引理 4.8-(iv) 和引理 8.4-(iv) 所要求的，而式 (4.76) 中给出的 $\Omega_{\mathtt{m}}^*$ 并非必要的最优值。

致谢：Zineb Hassainia 的工作得到了 Tamkeen 通过纽约大学阿布扎比分校研究院中心 SITE 提供的资助。Taoufik Hmidi 的工作得到了 Tamkeen 通过纽约大学阿布扎比分校研究院提供的资助。Emeric Roulley 的工作部分得到了 PRIN 2020XB3EFL 项目“哈密顿与色散偏微分方程”的资助。

## 2 函数与算子空间

本节旨在介绍函数类和算子类的一般拓扑框架。此外，我们将规定一些基本记号和定义，并给出本文中用到的一些技术性结果。

记号。本文将使用以下集合记号。

- 我们将频繁使用的数集记作如下

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\},\quad \mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup(-\mathbb{N}),\qquad \mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\},\qquad \mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

对于任意的 $\mathtt{m}\in\mathbb{N}^*$，我们可以记作

$$\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}=\mathtt{m}\mathbb{Z},\qquad \mathbb{N}_{\mathtt{m}}=\mathtt{m}\mathbb{N},\qquad \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}^*=\mathtt{m}\mathbb{Z}^*,\qquad \mathbb{N}_{\mathtt{m}}^*=\mathtt{m}\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{T}^{\mathtt{m}}=\underbrace{\mathbb{T}\times\cdots\times\mathbb{T}}_{\mathtt{m}\text{ times}},$$

并且对于任意 $m$、$n\in\mathbb{Z}$，满足 $m<n$，

$$[\![m,n]\!]\triangleq\{m,m+1,\ldots,n-1,n\}.$$

- 我们固定两个实数 $b_*$ 和 $b^*$，使得

$$0 < b_* < b^* < 1.$$

参数 $b$ 位于区间（$b_*, b^*$）内，表示式（1.5）中环域 $A_b$ 的半径，对应于平衡态和

- 考虑以下参数，它们将用于构造康托集以及确定扰动的正则性，

$$d \in \mathbb{N}^*, \qquad q \in \mathbb{N}^*, \tag{2.1}$$
$$0 < \gamma \leqslant 1, \qquad \tau_2 > \tau_1 > d, \tag{2.2}$$
$$S \geqslant s \geqslant s_0 > \tfrac{d+1}{2} + q + 2. \tag{2.3}$$

- 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 以及任意复周期函数 $\rho\colon\ \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$，记

$$\int_{\mathbb{T}^n} \rho(\eta) d\eta \triangleq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} \rho(\eta) d\eta. \tag{2.4}$$

- 设 $f\colon\ X \to Y$ 是一个映射，其中 $X$ 是一个集合，$Y$ 是一个向量空间。对于任意 $r_1, r_2 \in X$，记

$$\Delta_{12} f = f(r_1) - f(r_2).$$

## 2.1 函数空间

本节介绍本文中经常用到的一些泛函工具。首先，我们将引入周期情形 $H^s(\mathbb{T}^{d+1}, \mathbb{C})$ 下、指标正则性为 $s \in \mathbb{R}$ .的复索 Sobolev 空间。它由所有满足以下傅里叶展开的复周期函数 $\rho\colon\ \mathbb{T}^{d+1} \to \mathbb{C}$ 构成

$$\rho = \sum_{(l,j) \in \mathbb{Z}^{d+1}} \rho_{l,j}\, \mathbf{e}_{l,j}, \qquad \mathbf{e}_{l,j}(\varphi, \theta) \triangleq e^{\mathrm{i}(l \cdot \varphi + j\theta)}, \qquad \rho_{l,j} \triangleq \big\langle \rho, \mathbf{e}_{l,j} \big\rangle_{L^2(\mathbb{T}^{d+1})}$$

配备内积

$$\big\langle \rho, \widetilde{\rho} \big\rangle_{H^s} \triangleq \sum_{(l,j) \in \mathbb{Z}^{d+1}} \langle l, j \rangle^{2s} \rho_{l,j} \overline{\widetilde{\rho}_{l,j}}, \qquad \text{with} \qquad \langle l, j \rangle \triangleq \max(1, |l|, |j|),$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^d$中的经典 $\ell^1$ 范数。对于 $s = 0$，该空间与标准的$L^2(\mathbb{T}^{d+1}, \mathbb{C})$空间一致，并配备内积

$$\big\langle \rho_1, \rho_2 \big\rangle_{L^2(\mathbb{T}^{d+1})} \triangleq \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \rho_1(\varphi, \theta) \overline{\rho_2(\varphi, \theta)} d\varphi d\theta.$$

我们将使用乘积 Sobolev 空间

$$\mathbf{H}^s_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+1}, \mathbb{C}) \triangleq H^s_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+1}, \mathbb{C}) \times H^s_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+1}, \mathbb{C}), \tag{2.5}$$

配备内积

$$\big\langle (\rho_1, \rho_2), (\widetilde{\rho}_1, \widetilde{\rho}_1) \big\rangle_{\mathbf{H}^s_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+1}, \mathbb{C})} \triangleq \sum_{(l,j) \in \mathbb{Z}^{d+1}} \langle l, j \rangle^{2s} \rho^1_{l,j} \overline{\widetilde{\rho}^1_{l,j}} + \sum_{(l,j) \in \mathbb{Z}^{d+1}} \langle l, j \rangle^{2s} \rho^2_{l,j} \overline{\widetilde{\rho}^2_{l,j}}.$$

我们也将实空间简单记作

$$\mathbf{H}^s_{\mathtt{m}} \triangleq H^s_{\mathtt{m}} \times H^s_{\mathtt{m}}.$$

正如我们稍后将看到的，构造拟周期解时的主要障碍是共振，尤其是平凡共振。幸运的是，可以通过对

解施加更多对称性来消除它们。为此，我们需要使用以下子空间 $H^s_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})$，其中 $\mathtt{m}\in\mathbb{N}^*$，其元素关于变量 $\theta$ 具有 $\mathtt{m}$ 重对称性，也就是说

$$H^s_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})\triangleq\Big\{\rho\in H^s(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})\quad\text{s.t.}\quad\forall(\varphi,\theta)\in\mathbb{T}^{d+1},\quad\rho\big(\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big)=\rho(\varphi,\theta)\Big\}.$$

注意，$\mathtt{m}$ 重对称性等价于以下表述:

$$\forall l\in\mathbb{Z}^d,\quad\forall j\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_{\mathtt{m}},\quad\big\langle\rho,\mathbf{e}_{l,j}\big\rangle_{L^2(\mathbb{T}^{d+1})}=0.$$

实索伯列夫空间 $H^s_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{R})$ 简记为 $H^s_{\mathtt{m}}$，并定义子空间

$$H^\infty_{\mathtt{m}}\triangleq\bigcap_{s\in\mathbb{R}}H^s_{\mathtt{m}}.$$

对于 $N\in\mathbb{N}$，我们定义截断频率投影算子 $\Pi_N$ 及其在 $H^s(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})$ 上的正交投影算子 $\Pi_N^\perp$，如下所示

$$\Pi_N\rho\triangleq\sum_{\substack{(l,j)\in\mathbb{Z}^{d+1}\\ \langle l,j\rangle\leqslant N}}\rho_{l,j}\mathbf{e}_{l,j}\qquad\text{and}\qquad\Pi_N^\perp\triangleq\mathrm{Id}-\Pi_N.\tag{2.6}$$

对于给定参数 $\gamma\in\in(0,1)$，我们还将使用以下混合加权索伯列夫空间。设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 的一个有界开集，并定义巴拿赫空间

$$W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O},H^s_{\mathtt{m}})\triangleq\Big\{\rho:\mathcal{O}\to H^s_{\mathtt{m}}\quad\text{s.t.}\quad\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s\triangleq\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}\\|\alpha|\leqslant q}}\gamma^{|\alpha|}\sup_{\mu\in\mathcal{O}}\|\partial^\alpha_\mu\rho(\mu,\cdot)\|_{H^{s-|\alpha|}_{\mathtt{m}}}<\infty\Big\},$$

$$W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O},\mathbb{C})\triangleq\Big\{\rho:\mathcal{O}\to\mathbb{C}\quad\text{s.t.}\quad\|\rho\|^{q,\gamma}\triangleq\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}\\|\alpha|\leqslant q}}\gamma^{|\alpha|}\sup_{\mu\in\mathcal{O}}|\partial^\alpha_\mu\rho(\mu)|<\infty\Big\}.$$

全文中，我们将隐式使用记号 $\|\rho\|^{q,\ s^{\gamma\,\mathtt{m}},\ ;}$ 而函数 $\rho$ 依赖于更多变量，例如 $(\varphi,\theta)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^{d'}_{\mathtt{m}}\mapsto\rho(\varphi,\theta)$ 这种情形。在估计某些算子的核时，经常会遇到这种情况，此时变量可以加倍。

在下一个引理中，我们将汇集一些关于加权索伯列夫空间上各种作用的有用经典结果。证明都是标准的，例如可见 [15, 16, 19]。

引理 2.1. 设 $q\in\mathbb{N}$、$\mathtt{m}\in\mathbb{N}^*$ 以及 $(\gamma,d,s_0,s)$ 满足 (2.2)-(2.3)，则以下断言成立。

(i) 投影算子的频率增长/衰减：设 $\rho\in W^{q,\ \infty,\ \gamma}(\mathcal{O},H^s_{\mathtt{m}})$，则对所有 $N\in\mathbb{N}^*$ 和 $t>0$,

$$\|\Pi_N\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+t}\leqslant N^t\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s\qquad\text{and}\qquad\|\Pi_N^\perp\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s\leqslant N^{-t}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+t},$$

其中，截断投影算子定义于 (2.6) 中。

(ii) 乘积法则：设 $\rho_1$、$\rho_2\in W^{q,\ \infty,\ \gamma}(\mathcal{O},H^s_{\mathtt{m}})$。则 $\rho_1\rho_2\in W^{q,\ \infty,\ \gamma}(\mathcal{O},H^s_{\mathtt{m}})$，并且

$$\|\rho_1\rho_2\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s\lesssim\|\rho_1\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}\|\rho_2\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s+\|\rho_1\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s\|\rho_2\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}.$$

(iii) 复合律 1：设 $f\in C^\infty(\mathcal{O}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 以及 $\rho_1$、$\rho_2\in W^{q,\ \infty,\ \gamma}(\mathcal{O},H^s_{\mathtt{m}})$ 满足

$$\|\rho_1\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s,\|\rho_2\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s\leqslant C_0$$

对于任意常数 $C_0>0$，并定义逐点复合

$$\forall(\mu,\varphi,\theta)\in\mathcal{O}\times\mathbb{T}^{d+1},\quad f(\rho)(\mu,\varphi,\theta)\triangleq f\big(\mu,\rho(\mu,\varphi,\theta)\big).$$

*Then*

$$\|f(\rho_1)-f(\rho_2)\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s\leqslant C(s,d,q,f,C_0)\|\rho_1-\rho_2\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s.$$

(iv) 复合律 2：设 $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 的导数有界。设 $\rho \in W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O},\mathbb{C})$。则

$$\|f(\rho)-f(0)\|^{q,\gamma} \leqslant C(q,d,f)\|\rho\|^{q,\gamma}\left(1+\|\rho\|^{q-1}_{L^\infty(\mathcal{O})}\right).$$

(v) 插值不等式：设 $q<s_1\leqslant s_3\leqslant s_2$ 和 $\overline{\theta}\in[0,1]$，其中 $s_3=\overline{\theta}s_1+(1-\overline{\theta})s_2$。若 $\rho\in W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O},H^{s_2}_{\mathtt{m}})$，则 $\rho\in W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O},H^{s_3}_{\mathtt{m}})$ 且

$$\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_3}\lesssim\left(\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_1}\right)^{\overline{\theta}}\left(\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_2}\right)^{1-\overline{\theta}}.$$

下一个结果在 [69, 引理 4.2] 中得到证明，稍后研究线性化算子正则性的一些方面时会用到它。

引理 2.2. 设 $q\in\mathbb{N}$、$\mathtt{m}\in\mathbb{N}^*$、$(\gamma,d,s_0,s)$ 满足 (2.2)-(2.3)，且 $f\in W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O},H^s_{\mathtt{m}})$。考虑由下式定义的函数 $g\colon\mathcal{O}\times\mathbb{T}^d_\varphi\times\mathbb{T}_\theta\times\mathbb{T}_\eta\to\mathbb{C}$

$$g(\mu,\varphi,\theta,\eta)=\begin{cases}\frac{f(\mu,\varphi,\eta)-f(\mu,\varphi,\theta)}{\sin\left(\frac{\eta-\theta}{2}\right)}, & \text{if } \theta\neq\eta,\\ 2\partial_\theta f(\mu,\varphi,\theta), & \text{if } \theta=\eta.\end{cases}$$

*Then*

$$\|g\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s\lesssim\|f\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1}.$$

## 2.2 算子

本节旨在探讨适用于我们研究背景的一大类算子的若干代数和分析性质。首先，我们将根据它们的时间托普利兹结构、实性和 $\mathtt{m}$ 重对称性等对其进行分类。其次，我们将确定一些特定范数，例如非对角/各向同性衰减范数，并分析其性质。这部分对于后续约化线性化算子的余项至关重要。第三，我们将特别关注具有核的算子，通过探讨不同范数之间的联系以及适当拟周期变换的作用来研究它们。最后，我们将简要讨论矩阵算子。

### 2.2.1 对称性

考虑一族作用于索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})$ 的光滑有界线性算子，

$$T:\mu\in\mathcal{O}\mapsto T(\mu)\in\mathcal{L}\big(H^s(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})\big).$$

线性算子 $T(\mu)$ 可等同于无限维矩阵 $\left(T^{l,j}_{l_0,j_0}(\mu)\right)_{l,\ l_0\in\mathbb{Z}^d}$ 其中$_{j,\ j_0\in\mathbb{Z}}$

$$T(\mu)\mathbf{e}_{l_0,j_0}=\sum_{(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}}T^{l,j}_{l_0,j_0}(\mu)\mathbf{e}_{l,j},\qquad\text{where}\qquad T^{l,j}_{l_0,j_0}(\mu)\triangleq\left\langle T(\mu)\mathbf{e}_{l_0,j_0},\mathbf{e}_{l,j}\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})}.$$

在本文中，算子和测试函数可能依赖于同一参数 $\mu$，因此，按照约定，算子 $T(\mu)$ 作用于标量函数 $\rho\in W^{q,\infty,\gamma}\big(\mathcal{O},H^s(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})\big)$ 的方式定义为

$$(T\rho)(\mu,\varphi,\theta)\triangleq T(\mu)\rho(\mu,\varphi,\theta).$$

我们回顾托普利兹、实、可逆、保持可逆性以及保持 $\mathtt{m}$ 重对称性的算子的以下定义，参见例如 [5, 定义 2.2]。

定义 2.1. 设 $\rho:\mathbb{T}^{d+1}\to\mathbb{R}$ 为一个周期函数。定义对合

$$(\mathscr{I}_0\rho)(\varphi,\theta)\triangleq\rho(-\varphi,-\theta)$$

对于给定的整数 $\mathtt{m}\geqslant1$，考虑变换

$$(\mathscr{I}_{\mathtt{m}}\rho)(\varphi,\theta)\triangleq\rho\left(\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\right).$$

我们称算子 $T\in\mathcal{L}\big(L^2(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})\big)$ 为

- 时间托普利兹算子（实际上是关于变量 $\varphi$ 的托普利兹算子），如果其傅里叶系数满足，

$$\forall (l,l_0,j,j_0) \in (\mathbb{Z}^d)^2 \times \mathbb{Z}^2, \quad T^{l,j}_{l_0,j_0} = T^j_{j_0}(l-l_0), \qquad \text{with} \qquad T^j_{j_0}(l) \triangleq T^{l,j}_{0,j_0},$$

- 实值是指对于所有 $\rho \in L^2(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{R})$，都有 $T\rho$ 为实值函数，或等价地

$$\forall (l,l_0,j,j_0) \in (\mathbb{Z}^d)^2 \times \mathbb{Z}^2, \quad T^{-l,-j}_{-l_0,-j_0} = \overline{T^{l,j}_{l_0,j_0}},$$

- 可逆是指 $T \circ \mathscr{I}_0 = -\mathscr{I}_0 \circ T$，或等价地，

$$\forall (l,l_0,j,j_0) \in (\mathbb{Z}^d)^2 \times \mathbb{Z}^2, \quad T^{-l,-j}_{-l_0,-j_0} = -T^{l,j}_{l_0,j_0},$$

- 保持可逆性是指 $T \circ \mathscr{I}_0 = \mathscr{I}_0 \circ T$，或等价地，

$$\forall (l,l_0,j,j_0) \in (\mathbb{Z}^d)^2 \times \mathbb{Z}^2, \quad T^{-l,-j}_{-l_0,-j_0} = T^{l,j}_{l_0,j_0},$$

- $\mathtt{m}$ 重保持是指 $T \circ \mathscr{I}_{\mathtt{m}} = \mathscr{I}_{\mathtt{m}} \circ T$，或等价地，

$$\forall (l,l_0,j,j_0) \in (\mathbb{Z}^d)^2 \times \mathbb{Z}^2, \quad T^{l,j}_{l_0,j_0} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad j - j_0 \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}.$$

### 2.2.2 算子拓扑

我们将把范围限制在托普利兹算子上，并确定不同的拓扑；稍后将通过不同的应用说明采用这些拓扑的动机。给定 $\mathtt{m} \in \mathbb{N}^*$，则任意作用于 $\mathtt{m}$ 重对称函数 $\rho = \sum_{\substack{l_0 \in \mathbb{Z}^d \\ j_0 \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}} \rho_{l_0,\ j_0} \mathbf{e}_{l_0,\ j_0}$ 上的 $\mathtt{m}$ 重保持托普利兹算子 $T(\mu)$ 可表示为

$$T(\mu)\rho = \sum_{\substack{l,l_0 \in \mathbb{Z}^d \\ j,j_0 \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}} T^j_{j_0}(\mu, l-l_0)\rho_{l_0,j_0}\mathbf{e}_{l,j}.$$

对于 $q \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0,1]$ 和 $s \in \mathbb{R}$，我们为这组算子赋予如下非对角范数，

$$\|T\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{O-d},s} \triangleq \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d+1} \\ |\alpha| \leqslant q}} \gamma^{|\alpha|} \sup_{\mu \in \mathcal{O}} \|\partial^\alpha_\mu(T)(\mu)\|_{\text{O-d},s-|\alpha|}, \tag{2.7}$$

with

$$\|T\|_{\text{O-d},s} \triangleq \sup_{(l,m) \in \mathbb{Z}^{d+1}} \langle l,m\rangle^s \sup_{j_0 - j = m} |T^j_{j_0}(\mu,l)|.$$

我们定义截断频率算子

$$\left(P^1_N T(\mu)\right)\mathbf{e}_{l_0,j_0} \triangleq \sum_{\substack{(l,j) \in \mathbb{Z}^{d+1} \\ \langle l-l_0, j-j_0\rangle \leqslant N}} T^{l,j}_{l_0,j_0}(\mu)\mathbf{e}_{l,j} \qquad \text{and} \qquad P^{1,\perp}_N T \triangleq T - P^1_N T.$$

或者等价地

$$\left(P^1_N T(\mu)\right)^j_{j_0}(l) = \begin{cases} T^j_{j_0}(\mu,l), & \text{if} \quad \langle l, j-j_0\rangle \leqslant N, \\ 0, & \text{if not.} \end{cases} \tag{2.8}$$

在对线性化算子的余项进行约化的过程中，还将使用另一种范数与前一种范数配合，其定义如下，称为各向同性频率衰减

$$\|T\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},s} \triangleq \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d+1} \\ |\alpha| \leqslant q}} \gamma^{|\alpha|} \sup_{\mu \in \mathcal{O}} \|\partial^\alpha_\mu(T)(\mu)\|_{\text{I-D},s-|\alpha|}, \tag{2.9}$$

其中

$$\|T(\mu)\|_{\text{I-D},s} \triangleq \sup_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ j,j_0 \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}} \langle l,j_0,j\rangle^s |T^j_{j_0}(\mu,l)|.$$

相关的截断投影算子 $(P_N^2)_{N\in\mathbb{N}}$定义如下

$$\left(P_N^2 T(\mu)\right)\mathbf{e}_{l_0,j_0} \triangleq \begin{cases} \sum\limits_{\substack{(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\\ \langle l-l_0,j\rangle\leqslant N}} T_{j_0}^{j}(\mu,l-l_0)\mathbf{e}_{l,j}, & \text{if} \quad |j_0|\leqslant N,\\ 0, & \text{if} \quad |j_0|>N. \end{cases} \tag{2.10}$$

或者等价地

$$\left(P_N^2 T(\mu)\right)_{j_0}^{j}(l) = \begin{cases} T_{j_0}^{j}(\mu,l), & \text{if} \quad \langle l,j,j_0\rangle\leqslant N,\\ 0, & \text{if not.} \end{cases} \tag{2.11}$$

我们还定义正交投影算子 $P^{2,}{}_N{}^{\perp}T$, $T-P_N^2T$. 下一个引理列出了一些与非对角范数和各向同性范数相关的初等结果。

引理 2.3. 设 $q\in\mathbb{N}$, $\mathtt{m}\in\mathbb{N}^*$, $(\gamma,d,s_0,s)$ 满足 (2.2)-(2.3), $T$且 $S$ 为时间托普利兹算子。

(i) 频率局部化：设 $N\in\mathbb{N}^*$ 和 $\mathtt{t}\in\mathbb{R}_+$. ，则

$$\|P_N^1T\|_{\text{O-d},s+\mathtt{t}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\leqslant N^{\mathtt{t}}\|T\|_{\text{O-d},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}},\qquad \|P_N^{1,\perp}T\|_{\text{O-d},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\leqslant N^{-\mathtt{t}}\|T\|_{\text{O-d},s+\mathtt{t}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}$$

*and*

$$\|P_N^2T\|_{\text{I-D},s+\mathtt{t}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\leqslant N^{\mathtt{t}}\|T\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}},\qquad \|P_N^{2,\perp}T\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\leqslant N^{-\mathtt{t}}\|T\|_{\text{I-D},s+\mathtt{t}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

(ii) 与经典算子范数的联系：

$$\begin{aligned}\|T\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}&\lesssim\|T\|_{\text{O-d},s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|T\|_{\text{O-d},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}},\\ \|T\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}&\lesssim\|T\|_{\text{I-D},s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|T\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.\end{aligned}$$

特别地,

$$\begin{aligned}\|T\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}&\lesssim\|T\|_{\text{O-d},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}},\\ \|T\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}&\lesssim\|T\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}.\end{aligned}$$

(iii) 我们有如下嵌入：对于任意 $s\geqslant 0$

$$\|T\|_{\text{O-d},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|T\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

(iv) 复合律:

$$\|TS\|_{\text{O-d},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|T\|_{\text{O-d},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|S\|_{\text{O-d},s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|T\|_{\text{O-d},s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|S\|_{\text{O-d},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}$$

*and*

$$\|TS\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|ST\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|T\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|S\|_{\text{O-d},s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|T\|_{\text{I-D},s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|S\|_{\text{O-d},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

证明。(i) 和 (ii) 可通过类似于 [19] 的方法，利用 (2.7)-(2.11) 轻易得到。(iii) 我们将证明 $q=0$ 的嵌入，情形 $q\geqslant 1$ 类似。根据定义，我们写作 n

$$|T_{j_0}^{j}(\mu,l)|\leqslant\langle l,j_0,j\rangle^{-s}\|T(\mu)\|_{\text{I-D},s}.$$

因此

$$\sup_{j_0-j=m}|T_{j_0}^{j}(\mu,l)|\leqslant\sup_{j}\langle l,j+m,j\rangle^{-s}\|T(\mu)\|_{\text{I-D},s}.$$

通过直接计算，我们推断出

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}\langle l,x+m,x\rangle=\langle l,\tfrac{m}{2}\rangle$$

因此

$$\sup_{j_0-j=m}|T^j_{j_0}(\mu,l)|\lesssim\langle l,m\rangle^{-s}\|T(\mu)\|_{\text{I-D},s}.$$

由此可得

$$\|T\|_{\text{O-d},s}\lesssim\|T(\mu)\|_{\text{I-D},s}.$$

**(iv)** 我们将证明关于 $q=0$ 的这些温和估计。一般情形 $q\geqslant 1$ 可用类似的方法，借助莱布尼茨公式证明。可以验证

$$(TS)^j_{j_0}(l)=\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}T^{j_1}_{j_0}(l_1)S^j_{j_1}(l-l_1).$$

因此，对于 $s\geqslant 0$，根据范数定义和三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\langle l,j_0,j\rangle^s\big|(TS)^j_{j_0}(l)\big|\lesssim&\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}\langle l_1,j_0,j_1\rangle^s|T^{j_1}_{j_0}(l_1)S^j_{j_1}(l-l_1)|\\&+\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}\langle l-l_1,j-j_1\rangle^s|T^{j_1}_{j_0}(l_1)S^j_{j_1}(l-l_1)|.\end{aligned}\tag{2.12}$$

根据定义可得

$$\langle l-l_1,j-j_1\rangle^s|S^j_{j_1}(l-l_1)|\lesssim\|S\|_{\text{O-d},s}.\tag{2.13}$$

因此，

$$\langle l,j_0,j\rangle^s\big|\,(TS)^j_{j_0}\,(l)\big|\lesssim\|T\|_{\text{I-D},s}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}|S^j_{j_1}(l-l_1)|+\|S\|_{\text{O-d},s}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}|T^{j_1}_{j_0}(l_1)|.$$

利用 (2.13)，我们可推出对于 $s_0>\frac{d+1}{2}$，有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}|S^j_{j_1}(l-l_1)|&\leqslant\|S\|_{\text{O-d},s_0}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}\langle l-l_1,j-j_1\rangle^{-s_0}\\&\lesssim\|S\|_{\text{O-d},s_0}.\end{aligned}$$

我们还有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}|T^{j_1}_{j_0}(l_1)|&\leqslant\|T\|_{\text{I-D},s_0}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}\langle l_1,j_1\rangle^{-s_0}\\&\lesssim\|T\|_{\text{I-D},s_0}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

因此，我们得到

$$\langle l,j_0,j\rangle^s\big|\,(TS)^j_{j_0}\,(l)\big|\lesssim\|T\|_{\text{I-D},s}\|S\|_{\text{O-d},s_0}+\|S\|_{\text{O-d},s}\|T\|_{\text{I-D},s_0},$$

从而得到

$$\|TS\|_{\text{I-D},s}\lesssim\|T\|_{\text{I-D},s}\|S\|_{\text{O-d},s_0}+\|T\|_{\text{I-D},s_0}\|S\|_{\text{O-d},s}.$$

现在我们来估计 $ST$。按照 (2.12) 的方法，我们得到

$$\begin{aligned}\langle l,j_0,j\rangle^s\big|(ST)^j_{j_0}(l)\big|\lesssim&\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}\langle l_1,j_0-j_1\rangle^s|S^{j_1}_{j_0}(l_1)T^j_{j_1}(l-l_1)|\\&+\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}\langle l-l_1,j_1,j\rangle^s|S^{j_1}_{j_0}(l_1)T^j_{j_1}(l-l_1)|.\end{aligned}$$

结合 (2.13) 和 (2.14)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}\langle l_1, j_0-j_1\rangle^s|S_{j_0}^{j_1}(l_1)T_{j_1}^{j}(l-l_1)| &\lesssim \|S\|_{\text{O-d},s}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}|T_{j_1}^{j}(l-l_1)|\\ &\lesssim \|S\|_{\text{O-d},s}\|T\|_{\text{I-D},s_0}.\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}\langle l-l_1, j_1, j\rangle^s|S_{j_0}^{j_1}(l_1)T_{j_1}^{j}(l-l_1)| &\lesssim \|T\|_{\text{I-D},s}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}|S_{j_0}^{j_1}(l_1)|\\ &\lesssim \|T\|_{\text{I-D},s}\|S\|_{\text{O-d},s_0}\sum_{\substack{l_1\in\mathbb{Z}^d\\ j_1\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}}}\langle l_1, j_1-j_0\rangle^{-s_0}\\ &\lesssim \|T\|_{\text{I-D},s}\|S\|_{\text{O-d},s_0}.\end{aligned}$$

综合前面的估计可得

$$\|ST\|_{\text{I-D},s}\lesssim \|T\|_{\text{I-D},s}\|S\|_{\text{O-d},s_0}+\|T\|_{\text{I-D},s_0}\|S\|_{\text{O-d},s}.$$

至此，引理得证。 □

### 2.2.3 积分算子

本部分的主要目标是分析 Toeplitz积分算子，并将前面引入的不同范数与核的正则性联系起来。考虑一个具有如下形式的 Toeplitz积分算子

$$(\mathcal{T}_K\rho)(\mu,\varphi,\theta)\triangleq\int_{\mathbb{T}}K(\mu,\varphi,\theta,\eta)\rho(\mu,\varphi,\eta)d\eta, \tag{2.15}$$

其中，核函数 $K(\mu,\varphi,\theta,\eta)$ 在对角集合 $\{\theta=\eta\}$ 处可能是光滑的，也可能是奇异的。如果核满足

$$(\mathcal{J}_{\mathtt{m},2}K)(\mu,\varphi,\theta,\eta)\triangleq K\left(\mu,\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}},\eta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\right)=K(\mu,\varphi,\theta,\eta).$$

我们需要以下引理，其证明可由 [69, 引理 4.4] 得出。

引理 2.4. 设 $q\in\mathbb{N}$、$\mathtt{m}\in\mathbb{N}^*$、$(\gamma,d,s_0,s)$ 满足 (2.2)-(2.3)，且 $\mathcal{T}_K$ 是一个具有实值核的积分算子 $K$。则以下断言成立。

- 如果 $K$ 关于 $(\varphi,\theta,\eta)$ 为偶函数，则 $\mathcal{T}_K$ 保持可逆性。
- 如果 $K$ 关于 $(\varphi,\theta,\eta)$ 为奇函数，则 $\mathcal{T}_K$ 可逆。
- 如果 $K$ 是 $\mathtt{m}$ 重保持的，则 $\mathcal{T}_K$ 是 $\mathtt{m}$ 重保持的。

此外，

$$\|\mathcal{T}_K\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|K\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}$$

*and*

$$\|\mathcal{T}_K\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|K\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|K\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

证明。可逆性已在 [69, 引理 4.4] 中证明。现在来证明 $\mathtt{m}$ 重性质。假设 $K$ 是 $\mathtt{m}$ 重保持的，则

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_K(\mathcal{J}_{\mathtt{m}}\rho)(\varphi,\theta)&=\int_{\mathbb{T}}K(\varphi,\theta,\eta)\rho\big(\varphi,\eta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big)d\eta\\ &=\int_{\mathbb{T}}K\big(\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}},\eta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big)\rho\big(\varphi,\eta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big)d\eta\\ &=\int_{\mathbb{T}}K\big(\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}},\eta\big)\rho\big(\varphi,\eta\big)d\eta\\ &=\mathcal{J}_{\mathtt{m}}(\mathcal{T}_K\rho)(\varphi,\theta).\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{T}_K$ 是 m 重保持的。根据对偶性 $H^{-s}_{\mathtt{m}} - H^{s}_{\mathtt{m}}$，我们有

$$\begin{aligned}\left|(\mathcal{T}_K)^{j'}_{j}(l)\right| &= \left|\int_{\mathbb{T}^{d+2}} K(\varphi,\theta,\eta)e^{\mathrm{i}(l\cdot\varphi+j\theta-j'\eta)}d\varphi d\theta d\eta\right| \\ &\lesssim \langle l,j,j'\rangle^{-s}\|K\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\end{aligned}$$

证明第一个估计。第二个估计由引理 2.3-(ii)-(iii) 可直接得到。 □

下一步是引入一些拟周期辛变量变换，稍后将用于线性化算子的输运部分的约化。下面的引理在标量情形 $d'=1$ in [19, 引理 2.34] 中得到证明。向量情形 $d'\geqslant 2$ 可通过类似方式获得，只需进行轻微修改。

引理 2.5。设 $q\geqslant 0$、m $d$、$d'\geqslant 1$、$s\geqslant s_0>\frac{d+d'}{2}+q+1$ 和 $\beta_1$、$\cdots$、$\beta_{d'}\in W^{q,\infty,\gamma}\big(\mathcal{O}, H^{\infty}_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+1})\big)$，使得

$$\max_{k\in\{1,\cdots,d'\}}\|\beta_k\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{2s_0}\leqslant\varepsilon_0, \tag{2.16}$$

当 $\varepsilon_0$ 充分小时，以下断言成立。

(i) 由逆微分同胚定义的函数 $\widehat{\beta}$

$$y=x+\beta(\mu,\varphi,x)\qquad\Leftrightarrow\qquad x=y+\widehat{\beta}(\mu,\varphi,y),$$

其中

$$\begin{aligned}\beta(\mu,\varphi,x)&\triangleq\big(\beta_1(\mu,\varphi,x_1),\cdots,\beta_{d'}(\mu,\varphi,x_{d'})\big),\quad x=(x_1,\cdots,x_{d'}),\\ \widehat{\beta}(\mu,\varphi,y)&\triangleq\big(\widehat{\beta}_1(\mu,\varphi,y_1),\cdots,\widehat{\beta}_{d'}(\mu,\varphi,y_{d'})\big),\quad y=(y_1,\cdots,y_{d'}),\end{aligned} \tag{2.17}$$

满足

$$\forall s\geqslant s_0,\quad \|\widehat{\beta}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\lesssim\|\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}. \tag{2.18}$$

(ii) 复合算子 $\mathcal{B}\colon W^{q,\infty,\gamma}\big(\mathcal{O},H^{s}_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+d'})\big)\to W^{q,\infty,\gamma}\big(\mathcal{O},H^{s}_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+d'})\big)$, 定义为

$$\mathcal{B}\rho(\mu,\varphi,x)\triangleq\rho\big(\mu,\varphi,x+\beta(\mu,\varphi,x)\big), \tag{2.19}$$

是连续且可逆的，其逆为

$$\mathcal{B}^{-1}\rho(\mu,\varphi,y)=\rho\big(\mu,\varphi,y+\widehat{\beta}(\mu,\varphi,y)\big).$$

此外，我们有以下估计

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}^{\pm1}\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}&\leqslant\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\left(1+C\|\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}\right)+C\|\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0},\\ \|\mathcal{B}^{\pm1}\rho-\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}&\leqslant C\left(\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1}\|\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}+\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}\|\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\right).\end{aligned} \tag{2.20}$$

(iii) Le 以及 $\beta^{[1]},\beta^{[2]}\in W^{q,\infty,\gamma}\big(\mathcal{O},H^{\infty}_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+d'})\big)$ 与 (2.17) 中相同，并满足 (2.16)。如果我们记

$$\Delta_{12}\beta\triangleq\beta^{[1]}-\beta^{[2]}\qquad\text{and}\qquad\Delta_{12}\widehat{\beta}\triangleq\widehat{\beta}^{[1]}-\widehat{\beta}^{[2]},$$

那么我们有

$$\forall s\geqslant s_0,\quad\|\Delta_{12}\widehat{\beta}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\leqslant C\left(\|\Delta_{12}\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}+\|\Delta_{12}\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}\max_{\ell\in\{1,2\}}\|\beta^{[\ell]}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1}\right). \tag{2.21}$$

接下来，我们汇总若干与变换 (2.19) 作用于 Toeplitz积分算子相关的结果。

引理 2.6. 设 $q \in \mathbb{N}$、$\mathtt{m} \in \mathbb{N}^*$ 和 $(\gamma, d, s_0, s)$ 满足 (2.2)-(2.3)。考虑一个光滑的 $\mathtt{m}$ 重保持核

$$K : (\mu, \varphi, \theta_1, \theta_2) \mapsto K(\mu, \varphi, \theta_1, \theta_2).$$

令 $\beta_k :\ \mathcal{O} \times \mathbb{T}^{d+1} \to \mathbb{T}$, $k \in \{1, 2\}$ 为奇 $\mathtt{m}$ 重对称函数，并满足小性条件

$$\max_{k\in\{1,2\}} \|\beta_k\|_{2s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \leqslant \varepsilon_0. \tag{2.22}$$

考虑拟周期变量变换

$$\forall k \in \{1, 2\}, \quad \mathscr{B}_k \triangleq (1 + \partial_\theta \beta_k)\mathcal{B}_k, \qquad \mathcal{B}_k \rho(\mu, \varphi, \theta) = \rho\big(\mu, \varphi, \theta + \beta_k(\mu, \varphi, \theta)\big),$$

则以下断言成立。

*(i)* 算子 $\mathscr{B}_1^{-1}\mathcal{T}_K\mathscr{B}_2$ 是 $\mathtt{m}$ 重保持积分算子。此外，我们有

$$\|\mathscr{B}_1^{-1}\mathcal{T}_K\mathscr{B}_2\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|K\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \|K\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \max_{k\in\{1,2\}} \|\beta_k\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{2.23}$$

*and*

$$\|\mathscr{B}_1^{-1}\mathcal{T}_K\mathscr{B}_2 - \mathcal{T}_K\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|K\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \max_{k\in\{1,2\}} \|\beta_k\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \|K\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \max_{k\in\{1,2\}} \|\beta_k\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{2.24}$$

**(ii)** 若 $K$ 关于所有变量（$\varphi, \theta_1, \theta_2$）均为偶函数（分别地，为奇函数），则 $\mathscr{B}_1^{-1}\mathcal{T}_K\mathscr{B}_2$ 是保持可逆性的（分别地，可逆的）积分算子。

**(iii)** 给定光滑泛函 $r \in W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O}, H_{\mathtt{m}}^s \times H_{\mathtt{m}}^s) \mapsto K(r)$ $\beta_k(r)$，其中 $k \in \{1, 2\}$。
考虑 $r^{[\ell]} = (r_1^{[\ell]}, r_2^{[\ell]}) \in W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O}, H_{\mathtt{m}}^s \times H_{\mathtt{m}}^s)$，$\ell \in \{1, 2\}$。记

$$\forall k \in \{1, 2\}, \quad f^{[k]} \triangleq f(r^{[k]}) \qquad \text{and} \qquad \Delta_{12} f \triangleq f^{[1]} - f^{[2]}.$$

假设存在足够小的 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$\max_{(k,\ell)\in\{1,2\}^2} \|\beta_k^{[\ell]}\|_{2s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \max_{\ell\in\{1,2\}} \|K^{[\ell]}\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \leqslant \varepsilon_0. \tag{2.25}$$

那么，下面的估计成立：

$$\begin{aligned}\|\Delta_{12}\mathscr{B}_1^{-1}\mathcal{T}_K\mathscr{B}_2\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim{}& \|\Delta_{12}K\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \|\Delta_{12}K\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \max_{(k,\ell)=\{1,2\}^2} \|\beta_k^{[\ell]}\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \\ &+ \Big(\max_{\ell\in\{1,2\}} \|K^{[\ell]}\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \max_{(k,\ell)\in\{1,2\}^2} \|\beta_k^{[\ell]}\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\Big) \max_{k\in\{1,2\}} \|\Delta_{12}\beta_k\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \\ &+ \max_{k\in\{1,2\}} \|\Delta_{12}\beta_k\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

证明。（i）直接计算可得

$$\mathscr{B}_1^{-1}\rho(\mu, \varphi, y_1) = \Big(1 + \partial_y \widehat{\beta}_1(\mu, \varphi, y_1)\Big)\rho\big(\mu, \varphi, y_1 + \widehat{\beta}_1(\mu, \varphi, y_1)\big). \tag{2.27}$$

因此，算子 $\mathcal{T}_K$ 的共轭写作

$$\mathscr{B}_1^{-1}\mathcal{T}_K\mathscr{B}_2\rho(\mu, \varphi, \theta_1) = \int_{\mathbb{T}} \rho(\mu, \varphi, \theta_2)\widehat{K}(\mu, \varphi, \theta_1, \theta_2)d\theta_2, \tag{2.28}$$

with

$$\widehat{K}(\mu, \varphi, \theta_1, \theta_2) \triangleq \big(1 + \partial_{\theta_1}\widehat{\beta}_1(\mu, \varphi, \theta_1)\big)(\mathcal{B}^{-1}K)(\mu, \varphi, \theta_1, \theta_2)$$

and

$$\mathcal{B}^{-1}K(\mu, \varphi, \theta_1, \theta_2) = K\big(\mu, \varphi, \theta_1 + \widehat{\beta}_1(\mu, \varphi, \theta_1), \theta_2 + \widehat{\beta}_2(\mu, \varphi, \theta_2)\big).$$

利用引理 2.1、引理 2.5 和 (2.22) 中的乘积法则，我们得到

$$\|\widehat{K}\|_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim \|K\|_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \|K\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \max_{k\in\{1,2\}} \|\beta_k\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}. \tag{2.29}$$

因此，应用引理 2.4 可得估计 (2.23)。至于与原算子的差，我们可以写成

$$\big(\mathscr{B}_1^{-1}\mathcal{T}_K\mathscr{B}_2 - \mathcal{T}_K\big)\rho(\mu,\varphi,\theta_1) = \int_{\mathbb{T}} \rho(\mu,\varphi,\theta_2)\widetilde{K}(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2)d\theta_2,$$

with

$$\widetilde{K}(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2) \triangleq \partial_{\theta_1}\widehat{\beta}_1(\mu,\varphi,\theta_1)(\mathcal{B}^{-1}K)(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2) + \big[\mathcal{B}^{-1}K - K\big](\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2).$$

Ther因此，根据引理 2.1 中的乘积法则，结合 (2.20) 和 (2.22)，我们可推得

$$\|\widetilde{K}\|_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim \|K\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \max_{k\in\{1,2\}} \|\beta_k\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \|K\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \max_{k\in\{1,2\}} \|\beta_k\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}.$$

然后，应用引理 2.4 可得估计 (2.24)。
(ii) 对称性由引理 2.4 和对称性假设立即得出。(iii) 根据定义及 (2.28)，我们有

$$\Delta_{12}(\mathscr{B}_1^{-1}\mathcal{T}_K\mathscr{B}_2)(\rho)(\mu,\varphi,\theta_1) = \int_{\mathbb{T}} \rho(\mu,\varphi,\theta_2)\mathbb{K}(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2)d\theta_2,$$

with

$$\begin{aligned}\mathbb{K}(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2) \triangleq\ & \big(1+\partial_{\theta_1}\widehat{\beta}_1^{[1]}(\mu,\varphi,\theta_1)\big)\mathcal{B}_{[1]}^{-1}K^{[1]}\big(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2\big)\\ & - \big(1+\partial_{\theta_1}\widehat{\beta}_1^{[2]}(\mu,\varphi,\theta_1)\big)\mathcal{B}_{[2]}^{-1}K^{[2]}\big(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2\big)\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{B}_{[\ell]}^{-1}f(\mu,\varphi,y) = f\big(\mu,\varphi,\theta_1+\widehat{\beta}_1^{[\ell]}(\mu,\varphi,\theta_1),\theta_2+\widehat{\beta}_2^{[\ell]}(\mu,\varphi,\theta_2)\big).$$

这也可以写成

$$\begin{aligned}\mathbb{K}(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2) =\ & \partial_{\theta_1}\Delta_{12}\widehat{\beta}_1(\mu,\varphi,\theta_1)\mathcal{B}_{[1]}^{-1}K^{[1]}\big(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2\big)\\ & + \big(1+\partial_{\theta_1}\widehat{\beta}_1^{[2]}(\mu,\varphi,\theta_1)\big)\mathcal{B}_{[1]}^{-1}(\Delta_{12}K)\big(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2\big)\\ & + \big(1+\partial_{\theta_1}\widehat{\beta}_1^{[2]}(\mu,\varphi,\theta_1)\big)\Big[\mathcal{B}_{[1]}^{-1}K^{[2]}\big(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2\big) - \mathcal{B}_{[2]}^{-1}K^{[2]}\big(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2\big)\Big].\end{aligned}$$

然后，由泰勒公式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{K}(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2) =\ & \partial_{\theta_1}\Delta_{12}\widehat{\beta}_1(\mu,\varphi,\theta_1)\mathcal{B}_{[1]}^{-1}K^{[1]}\big(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2\big)\\ & + \big(1+\partial_{\theta_1}\widehat{\beta}_1^{[2]}(\mu,\varphi,\theta_1)\big)\mathcal{B}_{[1]}^{-1}(\Delta_{12}K)\big(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2\big)\\ & + \big(1+\partial_{\theta_1}\widehat{\beta}_1^{[2]}(\mu,\varphi,\theta_1)\big)\Big[\Delta_{12}\widehat{\beta}_1(\mu,\varphi,\theta_1)\int_0^1 \big(\mathcal{B}_{[1],[2]}^{\tau}(\partial_{\theta_1}K^{[2]})\big)\Big(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2\Big)d\tau\\ & + \Delta_{12}\widehat{\beta}_2(\mu,\varphi,\theta_2)\int_0^1 \big(\widetilde{\mathcal{B}}_{[1],[2]}^{\tau}(\partial_{\theta_2}K^{[2]})\big)\Big(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2\Big)d\tau\Big],\end{aligned}$$

其中我们使用了以下记号

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{[1],[2]}^{\tau}f(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2) &= f\big(\mu,\varphi,\theta_1+\tau\widehat{\beta}_1^{[1]}(\mu,\varphi,\theta_1)+(1-\tau)\widehat{\beta}_1^{[2]}(\mu,\varphi,\theta_1),\theta_2+\widehat{\beta}_2^{[2]}(\mu,\varphi,\theta_2)\big),\\ \widetilde{\mathcal{B}}_{[1],[2]}^{\tau}f(\mu,\varphi,\theta_1,\theta_2) &= f\big(\mu,\varphi,\theta_1+\widehat{\beta}_1^{[2]}(\mu,\varphi,\theta_1),\theta_2+\tau\widehat{\beta}_2^{[1]}(\mu,\varphi,\theta_2)+(1-\tau)\widehat{\beta}_2^{[2]}(\mu,\varphi,\theta_2)\big).\end{aligned}$$

由乘积法则、(2.21)、(2.29) 和 (2.25)，可得

$$\begin{aligned}\|\mathbb{K}\|_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim\ & \|\Delta_{12}K\|_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \|\Delta_{12}K\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \max_{(k,\ell)\in\{1,2\}^2} \|\beta_k^{[\ell]}\|_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \max_{k\in\{1,2\}} \|\Delta_{12}\beta_k\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\\ & + \Big(\max_{\ell\in\{1,2\}} \|K^{[\ell]}\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \max_{(k,\ell)\in\{1,2\}^2} \|\beta_k^{[\ell]}\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\Big) \max_{k\in\{1,2\}} \|\Delta_{12}\beta_k\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}.\end{aligned}$$

最后，将此估计与引理 2.4 结合，我们得出 (2.26)。至此，引理 2.6 得证。

□

现在，我们回顾 [19, 引理 2.36] 中陈述的以下结果，该结果讨论了希尔伯特变换与 (2.27) 中引入的拟周期坐标变换的共轭。在此以及全文中， $\mathcal{H}$ 表示周期情形下的标准希尔伯特变换，且仅作用于变量 $\theta \in \mathbb{T}$，即:

$$\mathcal{H}(1) = 0, \qquad \forall j \in \mathbb{Z}^*, \quad \mathcal{H}\mathbf{e}_j = -\mathrm{i}\,\mathtt{sgn}(j)\mathbf{e}_j, \tag{2.30}$$

其中 sgn 表示通常的符号函数。

引理 2.7. 设 $q \in \mathbb{N}$、$\mathtt{m} \in \mathbb{N}^*$、$(\gamma, d, s_0, s)$ 满足 (2.2)-(2.3)，且 $\beta \in W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O}, H^\infty_{\mathtt{m}})$ 关于变量 $(\varphi, \theta)$ 为奇函数。存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得若 $\|\beta\|^{q,\gamma^{\mathtt{m}}}_{2s_0} \leqslant \varepsilon_0$，则

$$(\mathscr{B}^{-1}\mathcal{H}\mathscr{B} - \mathcal{H})\rho(\mu, \varphi, \theta) = \int_{\mathbb{T}} K(\mu, \varphi, \theta, \eta)\rho(\mu, \varphi, \eta)\, d\eta,$$

定义了一个 可逆且 $\mathtt{m}$ 重保持的积分算子，并满足以下估计：对所有 $s \geqslant s_0$,

$$\|K\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s \leqslant C(s,q)\|\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+2}, \qquad \|\mathscr{B}^{-1}\mathcal{H}\mathscr{B} - \mathcal{H}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},s} \leqslant C(s,q)\|\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+2}$$

*and*

$$\|\Delta_{12}(\mathscr{B}^{-1}\mathcal{H}\mathscr{B} - \mathcal{H})\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},s} \leqslant C(s,q)\Big[\|\Delta_{12}\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+2} + \|\Delta_{12}\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+1} \max_{\ell\in\{1,2\}} \|\beta^{[\ell]}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+3}\Big].$$

证明. 我们将使用希尔伯特变换的以下经典积分表示式

$$\mathcal{H}(\rho)(\theta) = \int_{\mathbb{T}} \rho(\eta)\cot\left(\frac{\theta-\eta}{2}\right) d\eta,$$

其中该积分按主值意义理解。因此，我们有

$$K(\mu,\varphi,\theta,\eta) = \big(1 + \partial_\theta\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\theta)\big)\cot\left(\frac{\theta-\eta+\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\theta)-\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\eta)}{2}\right) - \cot\left(\frac{\theta-\eta}{2}\right).$$

容易验证

$$K(\mu,\varphi,\theta,\eta) = 2\partial_\theta\left[\log\left(\frac{\sin\left(\frac{\theta-\eta+\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\theta)-\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\eta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta-\eta}{2}\right)}\right)\right].$$

这也可以写成

$$K(\mu,\varphi,\theta,\eta) = 2\partial_\theta\Big[\log\big(1 + g(\mu,\varphi,\theta,\eta)\big)\Big],$$

其中

$$g(\mu,\varphi,\theta,\eta) = \cos\left(\tfrac{\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\theta)-\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\eta)}{2}\right) - 1 + \cos\left(\tfrac{\theta-\eta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\theta)-\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\eta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta-\eta}{2}\right)}.$$

$\widehat{\ }\beta$ 上的对称性假设（因此 $\beta$ 上也如此）意味着

$$g\big(\mu,\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}},\eta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big) = g(\mu,\varphi,\theta,\eta) = g(\mu,-\varphi,-\theta,-\eta),$$

即

$$K\big(\mu,\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}},\eta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big) = K(\mu,\varphi,\theta,\eta) = -K(\mu,-\varphi,-\theta,-\eta),$$

由引理 2.4 可知， $\mathscr{B}^{-1}\mathcal{H}\mathscr{B} - \mathcal{H}$ 是一个可逆且 $\mathtt{m}$ 重保持的积分算子。利用引理 2.1、引理 2.2 和式 (2.18) 中的复合律，可得

$$\|g\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s \lesssim \|\beta\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1}.$$

因此，仍由复合律可知

$$\|K\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|\beta\|_{s+2}^{q,\gamma,\mathtt{m}}$$

应用引理 2.4 即得结论。至于差值，我们有

$$\|\Delta_{12}K\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|\Delta_{12}g\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

令

$$h(\mu,\varphi,\theta,\eta) \triangleq \frac{\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\theta)-\widehat{\beta}(\mu,\varphi,\eta)}{2}.$$

然后，利用泰勒公式，可以写成

$$\begin{aligned}\Delta_{12}g(\mu,\varphi,\theta,\eta) =& -\Delta_{12}h(\mu,\varphi,\theta,\eta)\int_0^1 \sin\big(h^{[2]}(\mu,\varphi,\theta,\eta)+t\Delta_{12}h(\mu,\varphi,\theta,\eta)\big)dt\\ &+\cos\Big(\tfrac{\theta-\eta}{2}\Big)\frac{\Delta_{12}h(\mu,\varphi,\theta,\eta)}{\sin\Big(\frac{\theta-\eta}{2}\Big)}\int_0^1 \cos\big(h^{[2]}(\mu,\varphi,\theta,\eta)+t\Delta_{12}h(\mu,\varphi,\theta,\eta)\big)dt.\end{aligned}$$

由恒等式 $\Delta_{12}h(\mu,\varphi,\theta,\eta)=\Delta_{12}\beta(\mu,\varphi,\theta)-\Delta_{12}\beta(\mu,\varphi,\eta)$，结合乘积与复合律、引理 2.2 以及（ 2.21 ），可得

$$\|\Delta_{12}g\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|\Delta_{12}\beta\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \|\Delta_{12}\beta\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \max_{\ell\in\{1,2\}} \|\beta^{[\ell]}\|_{s+2}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

再次应用引理 2.4 即得结论。 □

以下　　接下来的引理讨论迭代算子的核结构，这在后文中会有所用处　　r.

引理 2.8. 设 $q\in\mathbb{N}$、$\mathtt{m}\in\mathbb{N}^*$、 $n\in\mathbb{N}^*$ 和 $(\gamma,d,s_0,s)$ 满足 (2.2)-(2.3)，并考虑一族如 (2.15) 所示的 $\mathtt{m}$ 重保持核算子 $(\mathcal{T}_{K_i})_{i=1}^n$。那么存在一个核 $K$，使得

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_{K_i} = \mathcal{T}_K, \qquad \text{with} \qquad \|K\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \leqslant C\sum_{i=1}^n \|K_i\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \prod_{j\neq i}\|K_j\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

此外，若对某个 $i_0$，有 $K_{i_0}(\varphi,\theta,\eta)=f(\varphi,\theta)\delta(\theta-\eta)$，其中 $f\big(\varphi,\theta+\frac{2\pi}{\mathtt{m}}\big)=f(\varphi,\theta)$，则

$$\|K\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \leqslant C\|f\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \prod_{i\neq i_0}\|K_i\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + C\|f\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq i_0}}^n \|K_i\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \prod_{j\neq i,i_0}\|K_j\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

证明. 核 $K$ 是显式的，其形式为，

$$K(\varphi,\theta,\eta) = \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \prod_{i=1}^n K_i(\varphi,\eta_{i-1},\eta_i)\prod_{i=1}^{n-1} d\eta_i,$$

按照约定 $\eta_0=\theta$ 且 $\eta_n=\eta$.。 $K$ 的 $\mathtt{m}$ 重保持性质继承自 $K_i$ 的 $\mathtt{m}$ 重保持性质。因此，要得到第一个结论，只需使用引理 2.1 中的乘积定律。在第二种情形下，核的形式为

$$K(\varphi,\theta,\eta) = \int_{\mathbb{T}^{n-2}} f(\varphi,\theta,\eta_{i_0})K_{i_0-1}(\varphi,\eta_{i_0-2},\eta_{i_0}) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0,i_0-1}}^n K_i(\varphi,\eta_{i-1},\eta_i)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0-1}}^{n-1} d\eta_i$$

再次利用引理 2.1 中详述的乘积定律，即可得到所需的估计。 □

### 2.2.4 矩阵算子

为了进一步约化具有向量结构的输运线性部分中的余项，我们需要引入形如以下形式的 $2\times 2$ 标量算子矩阵

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} T_1 & T_3\\ T_4 & T_2\end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

作用于式 (2.5) 中定义的直积希尔伯特空间 $\mathbf{H}^s_{\mathfrak{m}}(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})$。注意，我们将讨论范围限制在所有 $T_i:\mathcal{O}\to\mathcal{L}\big(H^s_{\mathfrak{m}}(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})\big)$ 均为式 (2.15) 中所述的 $\mathfrak{m}$ 重保持托普利兹核算子的情形。若矩阵算子 $\mathbf{T}$ 的所有矩阵元 $T_i$ 都具有某一性质，则称 $\mathbf{T}$ 具有该性质（例如实、$\mathfrak{m}$ 重保持、可逆或保持可逆性）。$\mathbf{T}$ 的对角部分 $\lfloor\mathbf{T}\rceil$ 定义如下：

$$\lfloor\mathbf{T}\rceil\triangleq\begin{pmatrix}\lfloor T_1\rceil & 0\\ 0 & \lfloor T_2\rceil\end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

对于任意标量算子 $T$，记号 $\lfloor T\rceil$ 表示其对角部分，定义为

$$\forall(l_0,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}},\quad \lfloor T\rceil\mathbf{e}_{l_0,j_0}\triangleq T^{l_0,j_0}_{l_0,j_0}\mathbf{e}_{l_0,j_0}=\big\langle T\mathbf{e}_{l_0,j_0},\mathbf{e}_{l_0,j_0}\big\rangle_{L^2(\mathbb{T}^{d+1},\mathbb{C})}\mathbf{e}_{l_0,j_0}. \tag{2.33}$$

$\mathbf{T}$下一个目标是为矩阵算子类赋予如下混合范数

$$|||\,\mathbf{T}\,|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s\triangleq\|T_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s}+\|T_2\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s}+\|T_3\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{I-D},s}+\|T_4\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{I-D},s}. \tag{2.34}$$

稍后在第 7.4 节进行余项约化时，将说明选择此范数的原因。事实上，用于度量对角项 $T_1$ 和 $T_2$ 的非对角范数与文献 [17, 59, 61, 69, 92]中的标量情形相容。然而，用于度量反对角项 $T_3$ 和 $T_4$ 的各向同性范数与算子的平滑效应相容；引入该范数是为了处理二阶梅尔尼科夫条件中一种新的空间共振现象，该现象由对角特征值之间的相互作用引起。截断投影算子 $(\mathbf{P_N})_{N\in\mathbb{N}}$ 定义如下

$$\mathbf{P_N}\mathbf{T}\triangleq\begin{pmatrix}P^1_NT_1 & P^2_NT_3\\ P^2_NT_4 & P^1_NT_2\end{pmatrix}\qquad\text{and}\qquad\mathbf{P}^{\perp}_{\mathbf{N}}\mathbf{T}\triangleq\begin{pmatrix}P^{1,\perp}_NT_1 & P^{2,\perp}_NT_3\\ P^{2,\perp}_NT_4 & P^{1,\perp}_NT_2\end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

其中，$P^1_N$在 (2.8) 中定义，$P^2_N$在 (2.10) 中定义。我们将证明以下结果 .

推论 2.1. 设 $q\in\mathbb{N}$、$\mathfrak{m}\in\mathbb{N}^*$、$(\gamma,d,s_0,s)$ 满足 (2.2)-(2.3)，且 $\mathbf{T}$、$\mathbf{S}$ 是 (2.31) 中的两个矩阵算子，则以下断言成立。

(i) 投影算子性质：对于任意 $\mathfrak{t}\geqslant 0$

$$|||\mathbf{P_N}\mathbf{T}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s+\mathfrak{t}}\leqslant N^{\mathfrak{t}}\,|||\,\mathbf{T}\,|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s\qquad\text{and}\qquad|||\,\mathbf{P}^{\perp}_{\mathbf{N}}\mathbf{T}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s\leqslant N^{-\mathfrak{t}}\,|||\,\mathbf{T}\,|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s+\mathfrak{t}}.$$

(ii) 复合律：

$$|||\mathbf{T}\mathbf{S}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s\lesssim|||\mathbf{T}\,|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s\,|||\mathbf{S}\,|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0}+|||\,\mathbf{T}\,|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0}\,|||\mathbf{S}\,|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s.$$

(iii) 与算子范数的联系：对于 $\rho=(\rho_1,\rho_2)\in\mathbf{H}^s_{\mathfrak{m}}$,

$$\|\mathbf{T}\rho\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s\lesssim|||\mathbf{T}\,|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0}\,\|\rho\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s+|||\mathbf{T}\,|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s\,\|\rho\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0}.$$

特别是,

$$\|\mathbf{T}\rho\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s\lesssim|||\mathbf{T}\,|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s\,\|\rho\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s.$$

证明。（i）由 (2.35)、(2.34) 和引理 2.3-(i) 立即可得。
(ii) 有

$$\mathbf{TS}=\begin{pmatrix}T_1S_1+T_3S_4 & T_1S_3+T_3S_2\\ T_4S_1+T_2S_4 & T_2S_2+T_4S_3\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}R_1 & R_3\\ R_4 & R_2\end{pmatrix}.$$

估计 $R_1$。由引理 2.3-(iv) 中详细说明的乘积法则可得

$$\begin{aligned}\|R_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s}\lesssim{}&\|T_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s}\|S_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s_0}+\|T_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s_0}\|S_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s}\\&+\|T_3\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s}\|S_4\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s_0}+\|T_3\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s_0}\|S_4\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s}.\end{aligned}$$

然后结合引理 2.3-(iii) 中的嵌入估计与 (2.34)，可得 t

$$\|R_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s}\lesssim|||\mathbf{T}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s}|||\mathbf{S}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0}+|||\mathbf{T}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0}|||\mathbf{S}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s}.$$

现在来估计 $R_3$。利用引理 2.3-(iv) 和 (2.34)，可推得

$$\begin{aligned}\|R_3\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{I-D},s}\lesssim{}&\|S_3\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{I-D},s}\|T_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s_0}+\|S_3\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{I-D},s_0}\|T_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s}\\&+\|T_3\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{I-D},s}\|S_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s_0}+\|T_3\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{I-D},s_0}\|S_1\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\text{O-d},s}\\\lesssim{}&|||\mathbf{T}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s}|||\mathbf{S}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0}+|||\mathbf{T}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0}|||\mathbf{S}|||^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s}.\end{aligned}$$

项 $R_2$ 和 $R_4$ 可以用类似的方法处理。
(iii) 这一点可直接由 (2.34) 和引理 2.3-(ii) 得出。 □

# 3 哈密顿量重构

这里，我们使用极坐标参数化来描述环域附近涡片的两个界面的轮廓动力学。最终得到一个由径向形变满足的耦合非线性非局部输运方程组，并可将其重写为哈密顿系统。这一结构对于建立平稳环域斑块附近的拟周期解至关重要。

## 3.1 径向形变的输运系统

设 $D_0=D_1\backslash\overline{D_2}$ 是一个双连通域，其中 $D_1$ 和 $D_2$ 是两个单连通域，且 $\overline{D_2}$ 严格包含于 $D_1$. 。考虑初始数据 $\boldsymbol{\omega}_0=\mathbf{1}_{D_0}$，则对任意 $t\geqslant 0$，尤多维奇解具有如下形式： $\boldsymbol{\omega}(t)=\mathbf{1}_{D_t}$，其中 $D_t=D_{t,\,1}\backslash\overline{D_{t,\,2}}$ 是一个双连通域。此外，$D_{t,\,1}$ 和 $D_{t,\,2}$ 是两个单连通域，且 $D_{t,\,2}$ 严格包含于 $D_{t,\,1}$。对于固定的 $b\in(0,1)$，我们从一个接近环域 $A_b$的区域 $D_0$ 出发，其中环域 $A_b$由式 (1.5) 定义。于是，在一段较短的时间区间 $[0,T]$内，区域 $D_t$ 将始终局限在同一环域附近。因此，在此时间区间内，我们可以使用以下边界的辛极坐标参数化。对于 $k\in\{1,2\}$,

$$\begin{array}{rccll}z_k(t):&\mathbb{T}&\mapsto&\partial D_{t,k}&\text{where}\\&\theta&\mapsto&e^{-\mathrm{i}\Omega t}w_k(t,\theta),&\end{array}\qquad\begin{array}{l}w_k(t,\theta)\triangleq\left(b_k^2+2r_k(t,\theta)\right)^{\frac12}e^{\mathrm{i}\theta},\\b_1\triangleq1,\quad b_2\triangleq b.\end{array}\tag{3.1}$$

与 [17, 59, 69], 角速度 $\Omega>0$ 的引入类似，这是出于一些技术上的考虑，旨在规避与特征模态 $n=1$ 相关的平凡共振；在当前构型中，引入它是为了处理一个更微妙的现象，即向量情形下特征值序列的解析累积，见引理 4.2。假设径向形变 $r_1$ 和 $r_2$足够小，即

$$|r_1(t,\theta)|+|r_2(t,\theta)|\ll1.$$

接下来，为方便起见，我们记

$$\forall k\in\{1,2\},\quad R_k(t,\theta)\triangleq\left(b_k^2+2r_k(t,\theta)\right)^{\frac12}.\tag{3.2}$$

请注意，在这一特定情形下，由 (1.2) 定义的流函数具有如下形式

$$\psi(t,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{D_{t,1}}\log(|z-\xi|)dA(\xi)-\frac{1}{2\pi}\int_{D_{t,2}}\log(|z-\xi|)dA(\xi).\tag{3.3}$$

涡旋斑块方程 (1.3) 给出了一个由 $r_1$ 和 $r_2$ 满足的耦合输运型偏微分方程组。以下引理对此进行了描述。

引理 3.1. 对于短时间 $T>0$，通过 (3.1) 定义的径向形变 $r_1$ 和 $r_2$ 满足以下非线性耦合系统：对所有 $k\in\{1,2\}$，$(t,\theta)\in[0,T]\times\mathbb{T}$，

$$\partial_t r_k(t,\theta)+\Omega\partial_\theta r_k(t,\theta)=-\partial_\theta\Big[\psi\big(t,z_k(t,\theta)\big)\Big] \tag{3.4}$$

$$=(-1)^{k+1}F_{k,k}[r](t,\theta)+(-1)^k F_{k,3-k}[r](t,\theta), \tag{3.5}$$

其中 $r=(r_1,r_2)$，且对所有 $k,n\in\{1,2\}$，

$$F_{k,n}[r](t,\theta)\triangleq\int_{\mathbb{T}}\log\big(A_{k,n}(t,\theta,\eta)\big)\partial^2_{\theta\eta}\Big(R_k(t,\theta)R_n(t,\eta)\sin(\eta-\theta)\Big)d\eta, \tag{3.6}$$

$$A_{k,n}(t,\theta,\eta)\triangleq\big|R_k(t,\theta)e^{\mathrm{i}\theta}-R_n(t,\eta)e^{\mathrm{i}\eta}\big|, \tag{3.7}$$

其中我们使用了记号 (2.4)。

证明. 对于 $k\in\{1,2\}$，我们将 $\mathbf{n}_k(t,\cdot)$ 记为斑块边界 $\partial D_{t,k}$ 的一个内法向量。根据 [68, 第 174], 页，涡旋斑块方程写为

$$\forall k\in\{1,2\},\quad \partial_t z_k(t,\theta)\cdot\mathbf{n}_k\big(t,z_k(t,\theta)\big)=\partial_\theta\Big[\psi\big(t,z_k(t,\theta)\big)\Big].$$

将 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 识别，并取 $\mathbf{n}_k\big(t,z_k(t,\theta)\big)=\mathrm{i}\partial_\theta z_k(t,\theta)$，由 (3.1) 得

$$\begin{aligned}\partial_t z_k(t,\theta)\cdot\mathbf{n}_k\big(t,z_k(t,\theta)\big)&=\mathrm{Im}\Big(\partial_t z_k(t,\theta)\overline{\partial_\theta z_k(t,\theta)}\Big)\\&=-\partial_t r_k(t,\theta)-\Omega\partial_\theta r_k(t,\theta).\end{aligned}$$

结合最后两个恒等式，我们得到 (3.4)。接下来，我们打算使用斯托克斯定理，将积分 (3.3) 转化为边界上的积分。该定理可以改写为复数形式，

$$2\mathrm{i}\int_D\partial_{\overline{\xi}}f(\xi,\overline{\xi})dA(\xi)=\int_{\partial D}f(\xi,\overline{\xi})d\xi, \tag{3.8}$$

其中，$f:\overline{D}\to\mathbb{C}$ 是一个 $C^1$类函数，$D$ 是一个单连通有界区域，$\partial D$ 是 $D$的边界。为使论证严谨，我们将对数核光滑化，定义如下:

$$\epsilon>0,\quad f_\epsilon(\xi,\overline{\xi})\triangleq(\overline{\xi}-\overline{z})\Big[\log\big(|z-\xi|^2+\epsilon\big)-1\Big].$$

于是，我们有

$$\partial_{\overline{\xi}}f_\epsilon(\xi,\overline{\xi})=\log\big(|z-\xi|^2+\epsilon\big)-\frac{\epsilon}{|z-\xi|^2+\epsilon}.$$

应用（3.8）可得

$$2\mathrm{i}\int_{D_{t,k}}\log\big(|z-\xi|^2+\epsilon\big)dA(\xi)-2\mathrm{i}\int_{D_{t,k}}\frac{\epsilon}{|z-\xi|^2+\epsilon}dA(\xi)=\int_{\partial D_{t,k}}f_\epsilon(\xi,\overline{\xi})d\xi$$

并取极限 $\epsilon\to0$，结合（3.3），即可得到

$$\psi(t,z)=\frac{1}{8\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D_{t,1}}(\overline{\xi}-\overline{z})\Big[\log\big(|\xi-z|^2\big)-1\Big]d\xi-\frac{1}{8\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D_{t,2}}(\overline{\xi}-\overline{z})\Big[\log\big(|\xi-z|^2\big)-1\Big]d\xi.$$

用 (3.1) 对边界进行参数化，并采用记号 (2.4)，我们推得

$$\begin{aligned}\psi(t,z)=&\frac{1}{4\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}}(\overline{z}_1(t,\eta)-\overline{z})\Big[\log\big(|z_1(t,\eta)-z|^2\big)-1\Big]\partial_\eta z_1(t,\eta)d\eta\\&-\frac{1}{4\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}}(\overline{z}_2(t,\eta)-\overline{z})\Big[\log\big(|z_2(t,\eta)-z|^2\big)-1\Big]\partial_\eta z_2(t,\eta)d\eta.\end{aligned} \tag{3.9}$$

因此，对积分内部求导可得

$$\partial_{\overline{z}}\psi(t,z) = -\frac{1}{4\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}} \log\big(|z_1(t,\eta)-z|^2\big)\partial_\eta z_1(t,\eta)d\eta + \frac{1}{4\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}} \log\big(|z_2(t,\eta)-z|^2\big)\partial_\eta z_2(t,\eta)d\eta.$$

因此，通过简单计算可得

$$\begin{aligned}\partial_\theta[\psi(t,z_k(t,\theta))] &= 2\mathrm{Re}\Big((\partial_{\overline{z}}\psi)(t,z_k(t,\theta))\partial_\theta\overline{z}_k(t,\theta)\Big)\\ &= -\int_{\mathbb{T}} \log\Big(|z_k(t,\theta)-z_1(t,\eta)|\Big)\partial^2_{\theta\eta}\mathrm{Im}\big(z_1(t,\eta)\overline{z}_k(t,\theta)\big)d\eta\\ &\quad + \int_{\mathbb{T}} \log\Big(|z_k(t,\theta)-z_2(t,\eta)|\Big)\partial^2_{\theta\eta}\mathrm{Im}\big(z_2(t,\eta)\overline{z}_k(t,\theta)\big)d\eta. \end{aligned} \tag{3.10}$$

利用 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}\forall\, k,n\in\{1,2\},\quad \mathrm{Im}\big(z_n(t,\eta)\overline{z}_k(t,\theta)\big) &= R_n(t,\eta)R_k(t,\theta)\sin(\eta-\theta),\\ |z_k(t,\theta)-z_n(t,\eta)| &= \big|R_k(t,\theta)e^{\mathrm{i}\theta}-R_n(t,\eta)e^{\mathrm{i}\eta}\big|.\end{aligned}$$

通过将最后两个恒等式与 (3.4)-(3.10) 结合，我们完成了引理 3.1 的证明. □

## 3.2 哈密顿结构

本文的主要目的是探究引理 3.1 所述方程之外的哈密顿结构。首先，与涡斑 $\underline{\boldsymbol{\omega}(t,\cdot)} = \mathbf{1}_{D_t} = \mathbf{1}_{D_{t,\,1}\setminus D_{t,\,2}}$ 相关的动能为

$$\begin{aligned}E(r) &\triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{D_t}\psi(t,z)dA(z)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{D_{t,1}}\psi(t,z)dA(z) - \frac{1}{2\pi}\int_{D_{t,2}}\psi(t,z)dA(z)\end{aligned} \tag{3.11}$$

其角冲量定义为

$$\begin{aligned}J(r) &\triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{D_t}|z|^2dA(z)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{D_{t,1}}|z|^2dA(z) - \frac{1}{2\pi}\int_{D_{t,2}}|z|^2dA(z),\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中流函数 $\psi$ 在 (3.3) 中定义。本节的主要结果如下。

命题 3.1。系统 (3.5) 是哈密顿系统，其形式为

$$\partial_t r = \mathcal{J}\nabla H(r) \tag{3.13}$$

其中 $r$、$(r_1,r_2)$，

$$\mathcal{J} \triangleq \begin{pmatrix}\partial_\theta & 0\\ 0 & -\partial_\theta\end{pmatrix} \tag{3.14}$$

且 $\nabla$ 是 $L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})$-梯度，哈密顿量 $H$ 定义为

$$H(r) \triangleq -\tfrac{1}{2}\big(E(r)+\Omega J(r)\big), \tag{3.15}$$

其中 $E$ 和 $J$ 定义于 (3.11) 和 (3.12) 中。

证明。我们首先计算角冲量 $J$ 的 $L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})$ 梯度。为此，我们需要用 $r$ 写出其表达式。结合 (3.12) 和 (3.1) 使用 (3.8) 可得

$$\begin{aligned}J(r) &= \frac{1}{8\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D_{t,1}}|z|^2\overline{z}dz - \frac{1}{8\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D_{t,2}}|z|^2\overline{z}dz\\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}}\big(1+2r_1(t,\theta)\big)^2d\theta - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}}\big(b^2+2r_2(t,\theta)\big)^2d\theta.\end{aligned}$$

对 $r=(r_1,r_2)$ 求导，可得对于 $\rho=(\rho_1,\rho_2)\in L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})$,

$$\big\langle \nabla J(r),\rho\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}=\int_{\mathbb{T}}\big(1+2r_1(t,\theta)\big)\rho_1(\theta)d\theta-\int_{\mathbb{T}}\big(b^2+2r_2(t,\theta)\big)\rho_2(\theta)d\theta.$$

这意味着

$$\nabla J(r)=\begin{pmatrix}1+2r_1\\ -b^2-2r_2\end{pmatrix}\qquad\text{and}\qquad \tfrac{1}{2}\Omega\,\mathcal{J}\nabla J(r)=\Omega\,\partial_\theta r. \tag{3.16}$$

接下来要计算动能 $E$（定义见式 (3.11)）关于 $L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})$ 的梯度。将式 (3.3) 与式 (3.1) 结合，并作变换 $\xi$ 为 $e^{-\mathrm{i}t\Omega}\xi$，可得

$$\psi\big(t,e^{-\mathrm{i}t\Omega}z\big)=\frac{1}{2\pi}\int_{\widetilde{D}_{t,1}}\log(|z-\xi|)dA(\xi)-\frac{1}{2\pi}\int_{\widetilde{D}_{t,2}}\log(|z-\xi|)dA(\xi),$$

~其中 $D_{t,k}$ 是边界由下式参数化的区域

$$\begin{aligned} w_k:\ \mathbb{T}&\ \mapsto\ \partial\widetilde{D}_{t,k}\\ \theta&\ \mapsto\ R_k(t,\theta)e^{\mathrm{i}\theta},\quad R_k(t,\theta)=\big(b_k^2+2r_k(t,\theta)\big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

利用极坐标变换，经直接计算可得:

$$\psi\big(t,e^{-\mathrm{i}\Omega t}z\big)=\int_{\mathbb{T}}\int_{R_2(t,\eta)}^{R_1(t,\eta)}G\big(z,\ell_2e^{\mathrm{i}\eta}\big)\ell_2d\ell_2d\eta,\qquad G(z,\xi)\triangleq\log(|z-\xi|). \tag{3.17}$$

回到式 (3.11)，再次利用极坐标变换可得

$$E(r)=\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\int_{R_2(t,\theta)}^{R_1(t,\theta)}\int_{R_2(t,\eta)}^{R_1(t,\eta)}G\big(\ell_1e^{\mathrm{i}\theta},\ell_2e^{\mathrm{i}\eta}\big)\ell_1\ell_2d\ell_1d\ell_2d\theta d\eta.$$

因此， $E$ 沿给定方向 $\rho=(\rho_1,\rho_2)$ 的盖托导数具有如下形式

$$\begin{aligned}\frac{dE(r)\rho}{dr}=&\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\int_{R_2(t,\eta)}^{R_1(t,\eta)}G\big(R_1(t,\theta)e^{\mathrm{i}\theta},\ell_2e^{\mathrm{i}\eta}\big)\rho_1(\theta)\ell_2d\ell_2d\theta d\eta\\ &+\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\int_{R_2(t,\theta)}^{R_1(t,\theta)}G\big(\ell_1e^{\mathrm{i}\theta},R_1(t,\eta)e^{\mathrm{i}\eta}\big)\rho_1(\eta)\ell_1d\ell_1d\theta d\eta\\ &-\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\int_{R_2(t,\eta)}^{R_1(t,\eta)}G\big(R_2(t,\theta)e^{\mathrm{i}\theta},\ell_2e^{\mathrm{i}\eta}\big)\rho_2(\theta)\ell_2d\ell_2d\theta d\eta\\ &-\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\int_{R_2(t,\theta)}^{R_1(t,\theta)}G\big(\ell_1e^{\mathrm{i}\theta},R_2(t,\eta)e^{\mathrm{i}\eta}\big)\rho_2(\eta)\ell_1d\ell_1d\theta d\eta.\end{aligned}$$

由于 $G(z,\xi)$ 关于 $(z,\xi)$ 对称，因此必要时交换 $\theta\leftrightarrow\eta$ 后可得,

$$\begin{aligned}\frac{dE(r)\rho}{dr}=&2\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\int_{R_2(t,\eta)}^{R_1(t,\eta)}G\big(R_1(t,\theta)e^{\mathrm{i}\theta},\ell_2e^{\mathrm{i}\eta}\big)\rho_1(\theta)\ell_2d\ell_2d\theta d\eta\\ &-2\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\int_{R_2(t,\eta)}^{R_1(t,\eta)}G\big(R_2(t,\theta)e^{\mathrm{i}\theta},\ell_2e^{\mathrm{i}\eta}\big)\rho_2(\theta)\ell_2d\ell_2d\theta d\eta.\end{aligned}$$

由 (3.17) 和 (3.1) 可得

$$\nabla E(r)=\begin{pmatrix}2\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\int_{R_2(t,\eta)}^{R_1(t,\eta)}G\big(w_1(t,\theta),\ell_2e^{\mathrm{i}\eta}\big)\ell_2d\ell_2d\eta\\ -2\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\int_{R_2(t,\eta)}^{R_1(t,\eta)}G\big(w_2(t,\theta),\ell_2e^{\mathrm{i}\eta}\big)\ell_2d\ell_2d\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\psi\big(t,z_1(t,\theta)\big)\\ -2\psi\big(t,z_2(t,\theta)\big)\end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

最后，由 (3.18)、(3.16) 和 (3.4) 可得所需结果。至此，命题 3.1 的证明完成。 □

### 3.3 辛结构与不变性

本节旨在探讨命题 3.1 中已介绍的哈密顿表述背后的辛结构。我们还将讨论一些对称性，例如可逆性和 m– 重持久性。

▶ 辛结构。我们将介绍与哈密顿方程 (3.13) 相关的辛结构。为此，我们需要先确定相空间；不过，在此之前，我们将使用以下可由 (3.13) 推导出的事实，

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}} r(t,\theta)d\theta = 0.$$

这意味着边界围成的面积随时间守恒。因此，我们将在以下零空间平均相空间 $L^2_*(\mathbb{T}) \times L^2_*(\mathbb{T})$ 中进行研究，其定义为

$$L^2_*(\mathbb{T}) \triangleq \left\{ f = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} f_j \mathbf{e}_j \quad \text{s.t.} \quad f_{-j} = \overline{f_j}, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} |f_j|^2 < +\infty \right\}, \qquad \mathbf{e}_j(\theta) \triangleq e^{\mathrm{i}j\theta}.$$

方程 (3.13) 在相空间 $L^2_*(\mathbb{T}) \times L^2_*(\mathbb{T})$ 上诱导出如下辛结构，该结构由辛 2-形式给出

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(r,h) &\triangleq \left\langle \mathcal{J}^{-1} r, h \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \partial_\theta^{-1} r_1(\theta) h_1(\theta) d\theta - \int_{\mathbb{T}} \partial_\theta^{-1} r_2(\theta) h_2(\theta) d\theta,\end{aligned}$$

其中

$$\partial_\theta^{-1} f \triangleq \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \tfrac{f_j}{\mathrm{i}j} \mathbf{e}_j \qquad \text{for} \qquad f = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} f_j \mathbf{e}_j.$$

相应的哈密顿向量场为 $X_H(r)$ $\mathcal{J}\nabla H(r)$（其中 $\nabla$ 是 $L^2 \times L^2$-梯度）。它定义为哈密顿量 $H$ 关于辛 2-形式 $\mathcal{W}$ 的辛梯度，即

$$dH(r)[\cdot] = \mathcal{W}(X_H(r), \cdot).$$

展开为傅里叶级数

$$r = (r_1, r_2), \qquad \forall k \in \{1,2\}, \quad r_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} r_{j,k}\mathbf{e}_j \qquad \text{with} \qquad r_{-j,k} = \overline{r_{j,k}},$$

则辛形式 $\mathcal{W}$ 变为

$$\mathcal{W}(r,h) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{\mathrm{i}j}\Big[ r_{j,1}h_{-j,1} - r_{j,2}h_{-j,2} \Big], \tag{3.19}$$

或者等价地，

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \tfrac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{\mathrm{i}j}\Big[ dr_{j,1}\wedge dr_{-j,1} - dr_{j,2}\wedge dr_{-j,2} \Big] \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\mathrm{i}j}\Big[ dr_{j,1}\wedge dr_{-j,1} - dr_{j,2}\wedge dr_{-j,2} \Big].\end{aligned} \tag{3.20}$$

定义 3.1.（辛）相空间 $L^2_*(\mathbb{T}) \times L^2_*(\mathbb{T})$上的线性变换 $\Phi$ 是辛的，若 $\Phi$ 保持辛 2-形式 $\mathcal{W}$，即

$$\mathcal{W}(\Phi u, \Phi v) = \mathcal{W}(u,v),$$

或者等价地

$$\Phi^\top \circ \mathcal{J}^{-1} \circ \Phi = \mathcal{J}^{-1}.$$

由此可以得到以下结果，该结果将在后文中用到，且证明很直接。

引理 3.2. 设 $\Phi$是一个具有如下形式的矩阵空间傅里叶乘子

$$\Phi\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix} \triangleq \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \Phi_j \begin{pmatrix}\rho_{j,1}\\ \rho_{j,2}\end{pmatrix} \mathbf{e}_j\,, \qquad \Phi_j \in M_2(\mathbb{R}),$$

并且 考察式 (3.19) 中定义的辛 2-形式 $\mathcal{W}$。那么， $\Phi$ 是辛的，当且仅当 *if*

$$\forall j \in \mathbb{Z}^*, \quad \Phi_j^\top \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \Phi_j = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

▶ 可逆性。我们将分析方程 (3.13) 的可逆性，这对于利用对称性约化相空间并消除大多数平凡共振至关重要。我们考虑定义在相空间 $L^2_*(\mathbb{T}) \times L^2_*(\mathbb{T})$ 上的对合 $\mathcal{S}$：

$$(\mathcal{S}r)(\theta) \triangleq r(-\theta), \tag{3.21}$$

它满足

$$\mathcal{S}^2 = \mathrm{Id} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{J}\circ\mathcal{S} = -\mathcal{S}\circ\mathcal{J}. \tag{3.22}$$

利用变量代换 $\eta \mapsto -\eta$ 和奇偶性论证，可由式 (3.6) 得到

$$\forall\, k,n \in \{1,2\}, \quad F_{k,n}\circ\mathcal{S} = -\mathcal{S}\circ F_{k,n}.$$

那么我们得 出结论：由引理 3.1、(3.13) 和 (3.22) 可知，哈密顿向量场 $X_H$ 满足 s

$$X_H \circ \mathcal{S} = -\mathcal{S}\circ X_H.$$

因此，我 们将重点研究满足可逆性条件的方程 (3.13) 的拟周期解

$$r(-t,-\theta) = r(t,\theta). \tag{3.23}$$

▶ m重对称性。令 $\mathtt{m} \geqslant 1$ 为一个整数，并考虑相空间 $L^2_*(\mathbb{T}) \times L^2_*(\mathbb{T})$ 上定义的变换 $\mathscr{T}_\mathtt{m}$

$$(\mathscr{T}_\mathtt{m} r)(\theta) \triangleq r\left(\theta + \tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\right). \tag{3.24}$$

那么显然

$$\mathscr{T}_\mathtt{m}^\mathtt{m} = \mathrm{Id} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{J}\circ\mathscr{T}_\mathtt{m} = \mathscr{T}_\mathtt{m}\circ\mathcal{J}.$$

利用变量代换 $\eta \mapsto \eta + \frac{2\pi}{\mathtt{m}}$，我们很容易从 (3.6) 得到

$$\forall\, k,n \in \{1,2\}, \quad F_{k,n}\circ\mathscr{T}_\mathtt{m} = \mathscr{T}_\mathtt{m}\circ F_{k,n}.$$

因此,

$$X_H \circ \mathscr{T}_\mathtt{m} = \mathscr{T}_\mathtt{m}\circ X_H.$$

因此，我们所关注的解满足 m 重对称性

$$r\left(t,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\right) = r(t,\theta). \tag{3.25}$$

因此，我们将在由下式定义的闭子空间 $L^2_\mathtt{m}(\mathbb{T}) \times L^2_\mathtt{m}(\mathbb{T})$ 中进行研究：

$$L^2_\mathtt{m}(\mathbb{T}) \triangleq \left\{ f = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} f_j \mathbf{e}_j \in L^2_*(\mathbb{T}) \quad \text{s.t.} \quad f_j \neq 0 \;\Rightarrow\; j \in \mathbb{Z}_\mathtt{m} \right\}. \tag{3.26}$$

# 4 线性化与辛变换

本节将计算方程 (3.13) 在任意接近平衡解 $r = 0.$ 的状态处线性化后得到的线性哈密顿量。事实证明，在平衡态处，我们得到一个矩阵傅里叶乘子；通过线性辛坐标变换，可以在适当的基底下将其对角化。详情请参见引理 4.5。然而，为了避免与模态 $j = 2$ 对应的二重特征值以及潜在的双曲方向，这一过程要求采用更高的 m 重对称性。

## 4.1 线性化算子

主要目的是探究线性化算子的结构，该算子具有变系数输运系统的形式，并受到紧扰动。

引理 4.1. 方程 (3.13) 在小状态 $r$ 处的线性化方程由以下线性哈密顿方程给出，

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \mathcal{J}\mathbf{M}_r \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_r \triangleq \begin{pmatrix} -V_1(r) - L_{1,1}(r) & L_{1,2}(r) \\ L_{2,1}(r) & V_2(r) - L_{2,2}(r) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

其中 $V_k(r)$ 是标量函数，$L_{k,\ n}(r)$ 是由下式定义的非局部算子

$$V_k(r)(t,\theta) \triangleq \Omega + (-1)^k \big[V_{k,k}(r)(t,\theta) - V_{k,3-k}(r)(t,\theta)\big], \tag{4.2}$$

$$V_{k,n}(r)(t,\theta) \triangleq \int_{\mathbb{T}} \log\big(A_{k,n}(r)(t,\theta,\eta)\big)\partial_\eta\Big(\tfrac{R_n(t,\eta)}{R_k(t,\theta)}\sin(\eta-\theta)\Big)d\eta, \tag{4.3}$$

$$L_{k,n}(r)\rho(t,\theta) \triangleq \int_{\mathbb{T}} \rho(t,\eta)\log\big(A_{k,n}(r)(t,\theta,\eta)\big)d\eta \tag{4.4}$$

而 $A_{k,\ n}(r)$ 和 $R_k$ 分别由 (3.7) 和 (3.2) 定义。此外，如果 $r$ 满足 (3.23) 和 (3.25)，且 $\mathrm{m} \geqslant 1$，那么算子 $\mathbf{M}_r$ 保持 m 重可逆性。

证明。在整个证明过程中，我们将省略时间变量以简化记号，并在相关处保留 $r$ 。由 (3.4) 可知，只需对涉及流函数的项进行线性化。所有计算均为形式上的，但在第 2 节引入的泛函背景下，可以用经典方法严格论证。根据 (3.9)，我们可以写成

$$\psi\big(z_k(\theta)\big) = (-1)^{k+1}\Big[\widetilde{\psi}\big(r_k, z_k(\theta)\big) - \widetilde{\psi}\big(r_{3-k}, z_k(\theta)\big)\Big], \tag{4.5}$$

$$\widetilde{\psi}(r_n, z) \triangleq \tfrac{1}{4\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}} (\overline{z}_n(\eta) - \overline{z})\Big[\log\big(|z - z_n(\eta)|^2\big) - 1\Big]\partial_\eta z_n(\eta)d\eta. \tag{4.6}$$

应用链式法则可得

$$\begin{aligned} d_{r_k}\Big(\psi\big(z_k(\theta)\big)\Big)[\rho_k](\theta) = (-1)^{k+1}\Big[&d_{r_k}\widetilde{\psi}\big(r_k, z_k(\theta)\big)[\rho_k](\theta) \\ &+ 2\mathrm{Re}\Big((\partial_{\overline{z}}\widetilde{\psi})\big(r_k, z_k(\theta)\big)d_{r_k}\overline{z}_k(\theta)[\rho_k](\theta)\Big) \\ &- 2\mathrm{Re}\Big((\partial_{\overline{z}}\widetilde{\psi})\big(r_{3-k}, z_k(\theta)\big)d_{r_k}\overline{z}_k(\theta)[\rho_k](\theta)\Big)\Big], \\ d_{r_{3-k}}\Big(\psi\big(z_k(\theta)\big)\Big)[\rho_{3-k}](\theta) = (-1)^k &d_{r_{3-k}}\widetilde{\psi}\big(r_{3-k}, z_k(\theta)\big)[\rho_{3-k}](\theta). \end{aligned} \tag{4.7}$$

~由 (3.17)，我们得到 $\psi$ 的如下表达式，

$$\widetilde{\psi}\big(r_k, e^{-\mathrm{i}\Omega t}z\big) = \int_{\mathbb{T}}\int_0^{R_k(\eta)} \log\big(|z - \ell_2 e^{\mathrm{i}\eta}|\big)\ell_2 d\ell_2 d\eta.$$

因此，沿着方向 $\rho_k$ 对 $r_k$ 求导，我们得到

$$d_{r_k}\widetilde{\psi}\big(r_k, e^{-\mathrm{i}\Omega t}z\big)[\rho_k](\theta) = \int_{\mathbb{T}} \rho_k(\eta)\log\big(|z - R_k(\eta)e^{\mathrm{i}\eta}|\big)d\eta.$$

由此可知，对于任意 $k$、$n\in\{1,2\}$，根据 (4.4) 有

$$\begin{aligned} d_{r_k}\widetilde{\psi}\big(r_k,z_n(\theta)\big)[\rho_k](\theta)&=\int_{\mathbb{T}}\rho_k(\eta)\log\big(|R_n(\theta)e^{\mathrm{i}\theta}-R_k(\eta)e^{\mathrm{i}\eta}|\big)d\eta\\ &=L_{k,n}(r)\rho_k(\theta). \end{aligned}\tag{4.8}$$

另一方面，对 (3.1) 求导可得

$$d_{r_k}\overline{z}_k(\theta)[\rho_k](\theta)=\tfrac{\rho_k(\theta)}{R_k(\theta)}e^{-\mathrm{i}(\theta-\Omega t)}.$$

此外，根据 (4.6)，我们有

$$\partial_{\overline{z}}\widetilde{\psi}(r_n,z)=-\tfrac{1}{4\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}}\log\big(|z-z_n(\eta)|^2\big)\partial_\eta z_n(\eta)d\eta.$$

结合最后两个恒等式，我们推得，对于 $k$、$n\in\{1,2\}$，

$$2\mathrm{Re}\Big((\partial_{\overline{z}}\widetilde{\psi})\big(r_n,z_k(\theta)\big)d_{r_k}\overline{z}_k(\theta)[\rho_k](\theta)\Big)=-\tfrac{\rho_k(\theta)}{R_k(\theta)}\int_{\mathbb{T}}\log\big(|z_k(\theta)-z_n(\eta)|\big)\partial_\eta\mathrm{Im}\Big(z_n(\eta)e^{-\mathrm{i}(\theta-\Omega t)}\Big)d\eta.$$

由 (3.1) 可得恒等式

$$\mathrm{Im}\Big(z_n(\eta)e^{-\mathrm{i}(\theta-\Omega t)}\Big)=R_n(\eta)\sin(\eta-\theta).$$

然后，由 (4.3) 可得

$$2\mathrm{Re}\Big((\partial_{\overline{z}}\widetilde{\psi})\big(r_n,z_k(\theta)\big)d_{r_k}\overline{z}_k(\theta)[\rho_k](\theta)\Big)=-V_{k,n}(r)(\theta)\rho_k(\theta).\tag{4.9}$$

综合 (4.5)、(4.7)、(4.8) 和 (4.9)，可得

$$\begin{aligned} d_r\Big(\psi\big(z_k(\theta)\big)\Big)[\rho](\theta)&=d_{r_k}\Big(\psi\big(z_k(\theta)\big)\Big)[\rho_k](\theta)+d_{r_{3-k}}\Big(\psi\big(z_k(\theta)\big)\Big)[\rho_{3-k}](\theta)\\ &=(-1)^{k+1}\Big[L_{k,k}(r)\rho_k(\theta)-V_{k,k}(r)(\theta)\rho_k(\theta)\\ &\qquad+V_{k,3-k}(r)(\theta)\rho_k(\theta)-L_{k,3-k}(r)\rho_{3-k}(\theta)\Big]. \end{aligned}$$

由此得到 (4.1) 中 $\mathbf{M}_r$ 的表达式。接下来，假设 $r$ 满足 (3.23) 和 (3.25)。那么，由 (3.2)、(4.2) 和 (4.3)，可得以下对称性

$$V_k(r)(-t,-\theta)=V_k(r)(t,\theta)=V_k(r)\big(t,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big).\tag{4.10}$$

类似地，由 (3.2) 和 (3.7) 可得

$$A_{k,n}(r)(-t,-\theta,-\eta)=A_{k,n}(r)(t,\theta,\eta)=A_{k,n}(r)\big(t,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}},\eta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big).\tag{4.11}$$

因此，算子 $\mathbf{M}_r$ 的对称性是引理 2.4 的直接推论。引理 4.1 的证明至此完成。

□

接下来的目标是推导平衡态 $r=0$ 处线性化算子的显式结构。

引理 4.2. 方程 (3.13) 在 $r=0$ 处的线性化方程写为，

$$\partial_t\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}=\mathcal{J}\mathbf{M}_0\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{M}_0\triangleq\begin{pmatrix}-V_1(0)-\mathcal{K}_1*\cdot & \mathcal{K}_b*\cdot\\ \mathcal{K}_b*\cdot & V_2(0)-\mathcal{K}_1*\cdot\end{pmatrix},\tag{4.12}$$

其中

$$\forall k\in\{1,2\},\quad \mathtt{v}_k(b)\triangleq V_k(0)=\Omega+(2-k)\tfrac{1-b^2}{2},\tag{4.13}$$

$$\forall x\in(0,1],\quad \mathcal{K}_x(\theta)\triangleq\log\big|1-xe^{\mathrm{i}\theta}\big|.\tag{4.14}$$

卷积按以下方式理解

$$\mathcal{K}_x * \rho(\theta) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_x(\theta - \eta)\rho(\eta)d\eta.$$

实解的空间傅里叶展开

$$\forall k \in \{1,2\}, \quad \rho_k(t,\theta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \rho_{j,k}(t)e^{\mathrm{i}j\theta}, \qquad \text{with} \qquad \rho_{-j,k} = \overline{\rho_{j,k}},$$

系统　统 (4.12) 等价于以下可数族线性微分系统　　$ms$

$$\forall j \in \mathbb{Z}^*, \quad \begin{pmatrix} \dot\rho_{j,1} \\ \dot\rho_{j,2} \end{pmatrix} = M_j(b,\Omega) \begin{pmatrix} \rho_{j,1} \\ \rho_{j,2} \end{pmatrix}, \quad M_j(b,\Omega) \triangleq \frac{\mathrm{i}j}{|j|} \begin{pmatrix} -|j|\left(\Omega + \frac{1-b^2}{2}\right) + \frac{1}{2} & -\frac{b^{|j|}}{2} \\ \frac{b^{|j|}}{2} & -|j|\Omega - \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

证明。我们将用到以下公式，可见于 [27, 引理 A.3] 和 [91, 引理 3.2]。

$$\forall j \in \mathbb{Z}^*, \quad \forall x \in (0,1], \quad \int_{\mathbb{T}} \log\left(\left|1 - xe^{\mathrm{i}\theta}\right|\right)\cos(j\theta)d\theta = -\frac{x^{|j|}}{2|j|}. \quad (4.16)$$

首先注意到，由 (3.7) 可推得，对于 $r = 0$，有

$$A_{k,n}(0)(\theta,\eta) = \left|b_k e^{i\theta} - b_n e^{i\eta}\right| = \left(b_k^2 + b_n^2 - 2b_k b_n \cos(\eta - \theta)\right)^{\frac{1}{2}}$$

从而特别得到

$$A_{1,2}(0)(\theta,\eta) = A_{2,1}(0)(\theta,\eta) = \left|1 - be^{\mathrm{i}(\eta-\theta)}\right|.$$

取 $r$　　将 $= 0$ 代入（4.3），并结合变量代换 $\eta \mapsto \eta + \theta$ 以及（4.16），可得

$$\forall\, k \in \{1,2\}, \quad V_{k,k}(0)(\theta) = \int_{\mathbb{T}} \log\left(\left|1 - e^{\mathrm{i}\eta}\right|\right)\cos(\eta)d\eta = -\frac{1}{2},$$
$$V_{k,3-k}(0)(\theta) = \frac{b_{3-k}}{b_k}\int_{\mathbb{T}} \log\left(\left|1 - be^{\mathrm{i}\eta}\right|\right)\cos(\eta)d\eta = -\frac{b_{3-k}b}{2b_k}.$$

将上一个恒等式与（4.2）结合可得（4.13）。将 $r = 0$ 代入（4.4），由于 $\rho$的空间平均为零，得到

$$\forall\, k \in \{1,2\}, \qquad L_{k,k}(0)\rho = \mathcal{K}_1 * \rho \qquad \text{and} \qquad L_{k,3-k}(0)\rho = \mathcal{K}_b * \rho,$$

其中，核 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_b$ 由（4.14）定义。再次应用（4.16）可得

$$\forall j \in \mathbb{Z}^*, \qquad \mathcal{K}_1 * \mathbf{e}_j = -\frac{1}{2|j|}\mathbf{e}_j \qquad \text{and} \qquad \mathcal{K}_b * \mathbf{e}_j = -\frac{b^{|j|}}{2|j|}\mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{e}_j(\theta) = e^{\mathrm{i}j\theta}.$$

最后，汇　总前面的计算可得（4.15）。引理 4 的证明至此完成。　　2. □

## 4.2 平衡态的对角化

在本小节中，我们将对引理 4.2 中出现的平衡矩阵算子进行对角化。这将得到一个更适用于作用-角度重述的新哈密顿系统。在此之前，我们先给出关于式 (4.15) 中引入的矩阵 $M_j$ 的谱结构的以下结果。

引理 4.3。设 $\Omega > 0$, $j \in \mathbb{Z}^*$ 和 $b \in (0,1)$。则矩阵 $M_j(b,\Omega)$ 的特征值（定义见 (4.15)）为 $-\mathrm{i}\Omega_{j,k}(b)$, $k \in \{1,2\}$，其中

$$\Omega_{j,k}(b) \triangleq \frac{j}{|j|}\left[\left(\Omega + \tfrac{1-b^2}{4}\right)|j| - \mathrm{i}^{\mathtt{H}\left(\Delta_j(b)\right)}\tfrac{(-1)^k}{2}\sqrt{|\Delta_j(b)|}\right], \quad (4.17)$$

其中 $\mathrm{H}\,\mathbf{1}_{[0,\infty)}$ 是 Heaviside 函数，且

$$\Delta_j(b) \triangleq b^{2|j|} - \left(\tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1\right)^2. \tag{4.18}$$

相应的特征子空间是一维的，由以下向量生成

$$v_{j,1}(b) \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -a_j(b) \end{pmatrix}, \quad v_{j,2}(b) \triangleq \begin{pmatrix} -a_j(b) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_j(b) \triangleq \frac{b^{|j|}}{\frac{1-b^2}{2}|j| - 1 + \mathrm{i}^{\mathrm{H}\left(\Delta_j(b)\right)}\sqrt{|\Delta_j(b)|}}.$$

证明。根据 (4.15)，我们有

$$\forall j \in \mathbb{Z}^*, \quad M_{-j}(b,\Omega) = \overline{M_j(b,\Omega)}.$$

因此，只需考虑 $j \in \mathbb{N}^*$ 的情形。矩阵 $M_j(b,\Omega)$ 的特征值是以下二次多项式方程的解

$$X^2 + \mathrm{i}\,[\mu_j + \delta_j]\,X - \left[\mu_j\delta_j + \tfrac{b^{2j}}{4}\right] = 0, \quad \text{with} \quad \mu_j \triangleq j\left(\Omega + \tfrac{1-b^2}{2}\right) - \tfrac{1}{2} \quad \text{and} \quad \delta_j \triangleq j\Omega + \tfrac{1}{2}. \tag{4.19}$$

最后一个方程的判别式为

$$\begin{aligned} -(\mu_j + \delta_j)^2 + b^{2j} + 4\mu_j\delta_j &= b^{2j} - \left(\mu_j - \delta_j\right)^2 \\ &= \Delta_j(b) \end{aligned}$$

该方程的解为 $-\mathrm{i}\Omega_{j,k}(b)$，$k \in \{1,2\}$，其中 $\Omega_{j,k}(b)$ 由 (4.17) 给出。特征向量 $v_{j,k}(b)$ 的表达式可通过直接计算得到。注意，对所有 $j \in \mathbb{N}^*$，

$$a_j(0) = 0, \qquad a_j(1) = -1$$

并且对所有 $b \in (0,1)$，若 $\Delta_j(b) > 0$，则 $a_j(b)$ 有定义。我们将证明，即使当 $\Delta_j(b) \leqslant 0$ 时，$a_j(b)$ 仍有定义。根据 (4.18)，对所有 $j \in \mathbb{N}^*$，我们可以写成

$$\Delta_j(b) = \left(b^j - 1 + \tfrac{1-b^2}{2}j\right)\left(b^j + 1 - \tfrac{1-b^2}{2}j\right). \tag{4.20}$$

特别地，我们有

$$\forall b \in (0,1), \quad \Delta_1(b) = -\frac{1}{4}(1-b)^2(1+b)^2 < 0, \qquad \Delta_2(b) = 0 \qquad \text{and} \qquad a_2(b) = -1.$$

对于 $j \geqslant 3$，我们可以很容易地验证

$$\begin{aligned} \forall b \in (0,1), \quad \tfrac{1-b^2}{2}j + b^j - 1 &= (1-b)\left(\tfrac{j}{2}(1+b) - (1+b) - b^2\left[1 + b + \cdots + b^{j-3}\right]\right) \\ &\geqslant (1-b)\left(\tfrac{j-2}{2}(1+b) - b^2(j-2)\right) \\ &\geqslant \tfrac{j-2}{2}(1-b)^2(1+2b) \\ &> 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

当且仅当 $b^j + 1 - \frac{1-b^2}{2}j \leqslant 0$ 时，$\Delta_j(b) \leqslant 0$。在这种情况下，对于所有 $b \in (0,1)$，$a_j(b)$ 的分母满足

$$\tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1 + \sqrt{-\Delta_j(b)} \geqslant \tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1 \geqslant b^j > 0.$$

引理 4.3 的证明至此结束。 □

接下来　本任务旨在研究式 (4.18) 中定义的判别式 $\Delta_j(b)$ 的符号　　.

引理 4.4. 存在一个严格递增且收敛到 1 的序列 $(\underline{b}_j)_{j\geqslant 3}\subset(0,1)$，使得

$$\Big\{b\in(0,1)\quad \text{s.t.}\quad \exists\, j\in\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\},\quad \Delta_j(b)=0\Big\}=\Big\{\underline{b}_j,\, j\geqslant 3\Big\},$$

*with*

$$\underline{b}_3=\frac{1}{2}\qquad\text{and}\qquad \underline{b}_4=\sqrt{\sqrt{2}-1}. \tag{4.22}$$

此外，对于任意固定的 $j_0\geqslant 3$，有

$$\forall b\in(\underline{b}_{j_0},\underline{b}_{j_0+1}),\quad \begin{cases}\Delta_j(b)>0, & \text{if } j\leqslant j_0,\\ \Delta_j(b)<0, & \text{if } j\geqslant j_0+1.\end{cases}$$

证明。对于 $j\geqslant 3$，根据 (4.20) 和 (4.21)，可知函数 $b\mapsto\Delta_j(b)$ 的零点就是函数 $b\mapsto b^j+1-\frac{1-b^2}{2}j$ 的零点。为了研究后一个离散函数的零点，我们考虑其连续形式

$$\forall(b,x)\in(0,1)\times[3,\infty),\quad f(b,x)\triangleq b^x+1-\tfrac{1-b^2}{2}x. \tag{4.23}$$

于是，对于固定的 $x\in[3,\infty)$，有 $f(0,x)=1-\frac{x}{2}<0$，$f(1,x)=2$，并且

$$\forall b\in(0,1),\quad \partial_b f(b,x)=x\big(b^{x-1}+b\big)>0. \tag{4.24}$$

因此，由介值定理，存在唯一的 $\underline{b}_x\in(0,1)$ 满足

$$f(\underline{b}_x,x)=0,\qquad \forall b<\underline{b}_x,\quad f(b,x)<0\qquad\text{and}\qquad \forall b>\underline{b}_x,\quad f(b,x)>0.$$

此外，由于

$$\forall b\in(0,1),\quad \partial_x f(b,x)=b^x\log(b)-\tfrac{1-b^2}{2}<0. \tag{4.25}$$

于是，函数 $x\mapsto f(b,x)$ 在 $[3,\infty)$ 上严格递减，这意味着 $x\mapsto\underline{b}_x$ 在 $[3,\infty)$ 上严格递增。因此，对于任意固定的整数 $j_0\geqslant 3$，有

$$f(\underline{b}_{j_0},j_0)=0\qquad\text{and}\qquad \forall b\in(\underline{b}_{j_0},\underline{b}_{j_0+1}),\quad \begin{cases}f(b,j)>0, & \text{if } j\leqslant j_0,\\ f(b,j)<0, & \text{if } j\geqslant j_0+1.\end{cases} \tag{4.26}$$

结合 (4.20)、(4.21)、(4.23) 和 (4.26)，我们得出所需结果。最后，(4.22) 可由这些恒等式推出

$$\begin{aligned} f(b,3)&=b^3+\tfrac{3}{2}b^2-\tfrac{1}{2}\\ &=(b+1)^2\big(b-\tfrac{1}{2}\big)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f(b,4)&=b^4+2b^2-1\\ &=\big(b^2+1+\sqrt{2}\big)\left(b+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\left(b-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right).\end{aligned}$$

引理 4.4 的证明至此结束。 □

现在我们将基于引理 4.4，重点讨论保证特征值具有椭圆性的条件。

推论 4.1。令 $\Omega>0$, $b^*\in(0,1)\setminus\big\{\underline{b}_n,\, n\geqslant 3\big\}$ 并设

$$\mathtt{m}^*\triangleq\mathtt{m}^*(b^*)\triangleq\min\big\{n\geqslant 3\quad\text{s.t.}\quad \underline{b}_n>b^*\big\}. \tag{4.27}$$

那么，对于所有 $|j| \geqslant \mathtt{m}^*$ 和 $b \in [0, b^*]$，矩阵 $M_j(b, \Omega)$（定义见 (4.15)）的特征值均为单重纯虚数 $-\mathrm{i}\Omega_{j,\,k}(b)$，$k \in \{1, 2\}$，其中

$$\Omega_{j,k}(b) = \frac{j}{|j|}\left[\left(\Omega + \tfrac{1-b^2}{4}\right)|j| + \tfrac{(-1)^{k+1}}{2}\sqrt{\left(\tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1\right)^2 - b^{2|j|}}\right] \tag{4.28}$$

$$= \frac{j}{|j|}\left[\left(\Omega + (2-k)\tfrac{1-b^2}{2}\right)|j| + \tfrac{(-1)^k}{2} + (-1)^{k+1}\mathtt{r}_j(b)\right], \tag{4.29}$$

其中

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{\substack{b\in[0,b^*]\\ |j|\geqslant \mathtt{m}^*}} |j|^\alpha |\partial_j^m \partial_b^n \mathtt{r}_j(b)| \leqslant C_{n,m,\alpha}. \tag{4.30}$$

相应的特征子空间为实数域上的，并由以下向量生成

$$v_{j,1}(b) = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_j(b) \end{pmatrix}, \quad v_{j,2}(b) = \begin{pmatrix} -a_j(b) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_j(b) = \frac{b^{|j|}}{\frac{1-b^2}{2}|j| - 1 + \sqrt{\left(\frac{1-b^2}{2}|j| - 1\right)^2 - b^{2|j|}}}. \tag{4.31}$$

此外，存在 $\delta$ , $\delta(b^*) > 0$ 使得对所有 $|j| \geqslant \mathtt{m}^*$ 以及 $b \in [0, b^*]$,

$$0 \leqslant a_j(b) < 1 - \delta \tag{4.32}$$

*and*

$$\forall n, \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{\substack{b\in[0,b^*]\\ |j|\geqslant \mathtt{m}^*}} |j|^\alpha |\partial_b^n a_j(b)| < \infty. \tag{4.33}$$

*Proof.* 根据 (4.27)、(4.24)、(4.25) 和 (4.26)，对所有 $b \in [0, b^*]$ 以及 $|j| \geqslant \mathtt{m}^*$，有

$$f(b, |j|) \leqslant f(b^*, \mathtt{m}^*) < f(\underline{b}_{\mathtt{m}^*}, \mathtt{m}^*) = 0. \tag{4.34}$$

结合 (4.20)、(4.21)、(4.23) 和 (4.34)，可得

$$\forall b \in [0, b^*], \quad \forall |j| \geqslant \mathtt{m}^*, \quad \Delta_j(b) < 0.$$

于是，由引理 4.3 可得 (4.28) 和 (4.31)。另一方面，不等式 (4.34) 还意味着

$$f(b^*, \mathtt{m}^*) = \left(b^*\right)^{\mathtt{m}^*} + 1 - \tfrac{1-(b^*)^2}{2}\mathtt{m}^* < 0. \tag{4.35}$$

由此，对于任意 $|j| \geqslant \mathtt{m}^*$ 和 $b \in [0, b^*]$,

$$\tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1 \geqslant \tfrac{1-(b^*)^2}{2}\mathtt{m}^* - 1 > 0. \tag{4.36}$$

因此，对于任意 $|j| \geqslant \mathtt{m}^*$ 和 $b \in [0, b^*]$，由 (4.28) 可得,

$$\Omega_{j,k}(b) = \frac{j}{|j|}\left[\left(\Omega + \tfrac{1-b^2}{4}\right)|j| + \tfrac{(-1)^{k+1}}{2}\left(\tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1\right)\sqrt{1 - b^{2|j|}\left(\tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1\right)^{-2}}\right]$$

$$= \frac{j}{|j|}\left[\left(\Omega + \tfrac{1-b^2}{4}\right)|j| + \tfrac{(-1)^{k+1}}{2}\left(\tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1\right) + (-1)^{k+1}\mathtt{r}_j(b)\right],$$

with

$$\mathtt{r}_j(b) \triangleq \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1\right)\left[\sqrt{1 - b^{2|j|}\left(\tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1\right)^{-2}} - 1\right]. \tag{4.37}$$

由（4.35）和（4.36），对于所有 $|j| \geqslant \mathtt{m}^*$ 和 $b \in [0, b^*] \subset [0, 1]$，有:

$$b^{|j|}\left(\tfrac{1-b^2}{2}|j| - 1\right)^{-1} \leqslant (b^*)^{|j|}\left(\tfrac{1-(b^*)^2}{2}\mathtt{m}^* - 1\right)^{-1} \leqslant (b^*)^{\mathtt{m}^*}\left(\tfrac{1-(b^*)^2}{2}\mathtt{m}^* - 1\right)^{-1} < 1. \tag{4.38}$$

因此，将平方根展开为幂级数并使用莱布尼茨法则，经过直接计算，我们得到（4.30）中所声称的 $\mathrm{r}_j(b)$ 的界。接下来，我们将检验不等式（4.32）。利用（4.31）、（4.36）和（4.38），我们可以断定存在 $\delta=\delta(b^*)\in(0,1)$，使得对于所有 $|j|\geqslant \mathrm{m}^*$ 和 $b\in[0,b^*]$，有：

$$0\leqslant a_j(b)\leqslant b^{|j|}\Big(\tfrac{1-b^2}{2}|j|-1\Big)^{-1}<1-\delta.$$

因此，估计 (4.33) 可由 (4.31) 和莱布尼茨法则推出。至此，推论 4.1 的证明完成。

□

由推论 4.1 可知，为了避开双曲谱，我们可以将傅里叶模态限制在格点 $\mathbb{Z}_{\mathrm{m}}$，其中 $\mathrm{m}\geqslant \mathrm{m}^*$。因此，我们将在 (3.26) 中引入的相空间 $L^2_{\mathrm{m}}(\mathbb{T})\times L^2_{\mathrm{m}}(\mathbb{T})$ 中进行讨论。接下来，我们引入一个适当的辛变换 Q，用于对引理 4.2 所述平衡态处的线性化算子进行对角化。之后需要进行这种对角化，以便对余项进行约化，见命题 7.5。线性变换 Q 由其对任意元素 $(\rho_1,\rho_2)\in L^2_{\mathrm{m}}(\mathbb{T})\times L^2_{\mathrm{m}}(\mathbb{T})$ 的作用定义，其傅里叶展开为

$$\forall k\in\{1,2\},\quad \rho_k=\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathrm{m}}}\rho_{j,k}\mathbf{e}_j,\qquad \text{with}\qquad \rho_{-j,k}=\overline{\rho_{j,k}},\qquad \mathbf{e}_j(\theta)=e^{\mathrm{i}j\theta}$$

如下

$$\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}\triangleq\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathrm{m}}}\mathbf{Q}_j\begin{pmatrix}\rho_{j,1}\\ \rho_{j,2}\end{pmatrix}\mathbf{e}_j\,,\qquad \mathbf{Q}_j\triangleq\tfrac{1}{\sqrt{1-a_j^2(b)}}\begin{pmatrix}1 & -a_j(b)\\ -a_j(b) & 1\end{pmatrix},\tag{4.39}$$

其中 $a_j(b)$ 由 (4.31) 给出。我们有以下性质。

引理 4.5. 设 $\mathrm{m}\geqslant\mathrm{m}^*$, $b\in[0,b^*]$，其中 $\mathrm{m}^*$ 和 $b^*$ 在推论 4.1 中定义。则以下断言成立。

1. $\mathsf{Q}: L^2_{\mathrm{m}}(\mathbb{T})\times L^2_{\mathrm{m}}(\mathbb{T})\to L^2_{\mathrm{m}}(\mathbb{T})\times L^2_{\mathrm{m}}(\mathbb{T})$ 关于辛形式 (3.20) 是辛的。此外 $\mathsf{Q}^\top=\mathsf{Q}$。

2. Q 是可逆的，其逆变换由下式给出

$$\mathbf{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}\triangleq\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathrm{m}}}\mathbf{Q}_j^{-1}\begin{pmatrix}\rho_{j,1}\\ \rho_{j,2}\end{pmatrix}\mathbf{e}_j\,,\qquad \mathbf{Q}_j^{-1}=\tfrac{1}{\sqrt{1-a_j^2(b)}}\begin{pmatrix}1 & a_j(b)\\ a_j(b) & 1\end{pmatrix}.\tag{4.40}$$

3. 变换 $\mathsf{Q}^{+1}$、Q 和 $\mathsf{Q}^{-1}$ 写作

$$\mathbf{Q}^{\pm1}=\begin{pmatrix}\mathbb{I}_{\mathrm{m}} & 0\\ 0 & \mathbb{I}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}P_1*\cdot & \mp P_2*\cdot\\ \mp P_2*\cdot & P_1*\cdot\end{pmatrix},\qquad P_k\triangleq\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathrm{m}}}\frac{(2-k)+(-1)^k\sqrt{(2-k)+(-1)^k a_j^2(b)}}{\sqrt{1-a_j^2(b)}}\mathbf{e}_j.\tag{4.41}$$

对于任意 $k\in\{1,2\}$，核 $P_k$ 满足对称性

$$P_k(-\theta)=P_k(\theta)=P_k\big(\theta+\tfrac{2\pi}{\mathrm{m}}\big)\tag{4.42}$$

以及估计

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \|\partial_\theta^n P_k*\rho\|_s^{q,\gamma,\mathrm{m}}\lesssim\|\rho\|_s^{q,\gamma,\mathrm{m}}.\tag{4.43}$$

4. 变换　　变换 Q 将算子 $\mathcal{J}\mathbf{M}_0$，对角化，其中 $\mathbf{M}_0$ 在式 (4.12) 中引入，记为　　*ly*

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathcal{J}\mathbf{M}_0\mathbf{Q}=\mathcal{J}\mathbf{L}_0,\qquad \mathbf{L}_0\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}\triangleq\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathrm{m}}}\tfrac{1}{j}\begin{pmatrix}-\Omega_{j,1}(b) & 0\\ 0 & \Omega_{j,2}(b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_{j,1}\\ \rho_{j,2}\end{pmatrix}\mathbf{e}_j.\tag{4.44}$$

5. 线性化轮廓动力学方程 (4.12) 的所有实值解具有如下形式

$$\rho(t,\theta)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathrm{m}}}\tfrac{A_j}{\sqrt{1-a_j^2(b)}}\begin{pmatrix}1\\ -a_j(b)\end{pmatrix}e^{-\mathrm{i}(\Omega_{1,j}(b)t-j\theta)}+\tfrac{B_j}{\sqrt{1-a_j^2(b)}}\begin{pmatrix}-a_j(b)\\ 1\end{pmatrix}e^{-\mathrm{i}(\Omega_{2,j}(b)t-j\theta)}\tag{4.45}$$

其中有 $\overline{A_j}=A_{-j}$、$\overline{B_j}=B_{-j}$.

证明。1. 根据定义（4.39）进行直接计算可得

$$\forall j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}^*, \quad \mathbf{Q}_j^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

然后，利用引理 3.2，我们得出第一个结论。注意，还可以得到

$$\forall j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}^*, \quad \mathbf{Q}_j^\top = \mathbf{Q}_j,$$

这意味着 $\mathsf{Q}^\top = \mathsf{Q}$。
2. 第二个结论可通过直接计算轻易得到。
3. 根据 (4.39) 和 (4.40)，我们可以写成

$$\mathbf{Q}_j^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-a_j^2(b)}} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{1-a_j^2(b)} & \mp a_j(b) \\ \mp a_j(b) & 1 - \sqrt{1-a_j^2(b)} \end{pmatrix},$$

从而得到 (4.41)。对称性 (4.42) 可由以下事实 $a_{-j}(b) = a_j(b)$（见 (4.31)）或 $P_k$. 定义中对傅里叶模态的限制得到。估计 (4.43) 可通过结合 (4.41) 和 (4.33) 应用莱布尼茨法则与链式法则得到。

4. 注意，由 (4.39) 和 (4.31) 可知，

$$\mathbf{Q}_j = \frac{1}{\sqrt{1-a_j^2(b)}} \begin{pmatrix} v_{j,1}(b) & v_{j,2}(b) \end{pmatrix}.$$

那么，根据推论 4.1，矩阵 $\mathsf{Q}_j$ 将 (4.15) 中定义的矩阵 $M_j(b, \Omega)$ 对角化，即

$$\forall j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}^*, \quad \mathbf{Q}_j^{-1} M_j(b, \Omega) \mathbf{Q}_j = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} \Omega_{j,1}(b) & 0 \\ 0 & \Omega_{j,2}(b) \end{pmatrix}.$$

因此，由引理 4.2 可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}^{-1} \mathcal{J} \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}) \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}^*} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\Omega_{1,j}(b) & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\Omega_{2,j}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{j,1} \\ \rho_{j,2} \end{pmatrix} \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}^*} \mathrm{i}j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{j}\Omega_{1,j}(b) & 0 \\ 0 & \frac{1}{j}\Omega_{2,j}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{j,1} \\ \rho_{j,2} \end{pmatrix} \mathbf{e}_j, \end{aligned} \tag{4.46}$$

进而得到 (4.44)。
5. 求解线性微分系统 (4.15) 时，第四点的结论可立即推出。这就完成了引理 4.5 的证明。

□

## 4.3 辛坐标变换

本节旨在通过 (4.39) 中引入的辛线性变换 $\mathsf{Q}$，对非线性哈密顿系统 (3.13) 进行共轭。注意，此变换不依赖于未知量 $r$，而只依赖于参数 $b$.

考虑辛未知量 $\tilde{r}$ 、$\mathsf{Q}^{-1}r$。于是，哈密顿系统 (3.13) 可写为

$$\partial_t \tilde{r} = X_K(\tilde{r}) = \mathcal{J} \nabla K(\tilde{r}), \qquad K(\tilde{r}) \triangleq H(\mathbf{Q}\tilde{r}), \qquad \tilde{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \in L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}) \times L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}). \tag{4.47}$$

事实上，一方面，我们有

$$\partial_t \widetilde{r} = \mathbf{Q}^{-1} \partial_t r = \mathbf{Q}^{-1} \mathcal{J} \nabla H(r) = \mathbf{Q}^{-1} \mathcal{J} (\nabla H)(\mathbf{Q}\widetilde{r}). \tag{4.48}$$

另一方面，

$$\mathcal{J} \nabla K(\widetilde{r}) = \mathcal{J} \nabla \big( H(\mathbf{Q}\widetilde{r}) \big) = \mathcal{J} \mathbf{Q} (\nabla H)(\mathbf{Q}\widetilde{r}). \tag{4.49}$$

因此，如果 $\mathsf{Q}\mathcal{J}\mathsf{Q} = \mathcal{J}$，那么我们有如下等价关系

$$\Big(\partial_t r = \mathcal{J}\nabla H(r) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \widetilde{r} = \mathcal{J}\nabla K(\widetilde{r})\Big) \tag{4.50}$$

最后一个条件成立，因为引理 4.5-1 表明 $\mathsf{Q}$ 是辛的，且 $\mathsf{Q}^\top = \mathsf{Q}$。

我们将寻求形如以下形式的方程 (4.47) 的时间准周期解

$$\tilde{r}(t,\theta) = \hat{r}(\omega t, \theta),$$

其中 $\hat{r} : (\varphi, \theta) \in \mathbb{T}^{d+1} \to \mathbb{R}^2$，且 $\omega \in \mathbb{R}^d$ 是一个非共振向量频率。在这种情况下，方程 (4.47) 变为

$$\omega \cdot \partial_\varphi \hat{r} = \mathcal{J}\nabla K(\hat{r}).$$

在下文中，我们将简化记号，并用 $r$ 表示 $\hat{r}$。因此，上述方程变为

$$\omega \cdot \partial_\varphi r = \mathcal{J}\nabla K(r), \qquad K(r) \triangleq H(\mathbf{Q}r), \qquad r = (r_1, r_2) \in L^2_{\mathfrak{m}}(\mathbb{T}) \times L^2_{\mathfrak{m}}(\mathbb{T}). \tag{4.51}$$

本节的主要结果如下。

**命题 4.1.** 方程 (4.51) 在给定的小状态 $r$ 处的线性化方程具有以下形式

$$\omega \cdot \partial_\varphi \rho + \mathfrak{L}_r \rho = 0, \qquad \mathfrak{L}_r \triangleq -d_r\big(\mathcal{J}\nabla K(r)\big),$$

*with*

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_r = &\begin{pmatrix} \partial_\theta\big(\mathcal{V}_1(r)\,\cdot\big) + \frac{1}{2}\mathcal{H} + \partial_\theta \mathcal{Q} * \cdot & 0 \\ 0 & \partial_\theta\big(\mathcal{V}_2(r)\,\cdot\big) - \frac{1}{2}\mathcal{H} - \partial_\theta \mathcal{Q} * \cdot \end{pmatrix} \\ &+ \partial_\theta \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\mathscr{K}_{1,1}}(r) & \mathcal{T}_{\mathscr{K}_{1,2}}(r) \\ \mathcal{T}_{\mathscr{K}_{2,1}}(r) & \mathcal{T}_{\mathscr{K}_{2,2}}(r) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

其中

1. 标量函数 $\mathcal{V}_k(r)$ $V_k(\mathsf{Q}r)$，$k \in \{1,2\}$ 满足

$$\|\mathcal{V}_k(r) - V_k(0)\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s \lesssim \|r\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s+1}, \tag{4.53}$$

其中 $V_k(r)$ 和 $V_k(0)$ 分别由式 (4.2) 和 (4.13) 描述，

2. 偶核为 $\mathcal{Q}$ 的卷积算子 $\mathcal{Q} * \cdot$ 定义为

$$\forall\, j \in \mathbb{Z}^*_{\mathfrak{m}}, \quad \mathcal{Q} * \mathbf{e}_j \triangleq \tfrac{\mathtt{r}_j(b)}{|j|}\mathbf{e}_j, \tag{4.54}$$

其中 $\mathtt{r}_j(b)$ 已在推论 4.1 中引入，

3. 对于 $k, n \in \{1,2\}$，算子 $\mathcal{T}_{\mathscr{K}_{k,n}}(r)$ 是一个具有形式 (2.15) 的积分算子，其核 $\mathscr{K}_{k,n}(r)$ 是 $\mathfrak{m}$重可逆性保持的，并满足以下估计：对于任意 $s \geqslant s_0$

$$\|\mathscr{K}_{k,n}(r)\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s \lesssim \|r\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s+1}$$

*and*

$$\|\Delta_{12}\mathscr{K}_{k,n}(r)\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_s \lesssim \|\Delta_{12} r\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s+1} + \|\Delta_{12} r\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0+1} \max_{\ell\in\{1,2\}} \|r_\ell\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s+1}.$$

证明。根据 (4.48)、(4.49) 和 (4.50)，可得

$$\mathcal{J}\nabla K(r) = \mathbf{Q}^{-1}\mathcal{J}(\nabla H)(\mathbf{Q}r). \tag{4.55}$$

沿 $\rho$ 方向对该恒等式关于 $r$ 求导，并利用引理 4.1，得到

$$\begin{aligned} d_r\big(\mathcal{J}\nabla K(r)\big)\rho &= \mathbf{Q}^{-1}\big(d_r\big(\mathcal{J}\nabla H\big)(\mathbf{Q}r)\big)\mathbf{Q}\rho \\ &= \mathbf{Q}^{-1}\mathcal{J}\mathbf{M}_{\mathbf{Q}r}\mathbf{Q}\rho \\ &= \mathbf{Q}^{-1}\mathcal{J}\mathbf{M}_0\mathbf{Q}\rho + \mathbf{Q}^{-1}\mathcal{J}\big(\mathbf{M}_{\mathbf{Q}r} - \mathbf{M}_0\big)\mathbf{Q}\rho. \end{aligned} \tag{4.56}$$

由 (4.46)、(4.29)、(4.13)，并回顾 (2.30) 和 (4.54)，可写为

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathcal{J}\mathbf{M}_0\mathbf{Q} = -\begin{pmatrix} V_1(0)\partial_\theta + \frac{1}{2}\mathcal{H} + \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot & 0 \\ 0 & V_2(0)\partial_\theta - \frac{1}{2}\mathcal{H} - \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot \end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

另一方面，由引理 4.1 和引理 4.2 可得

$$\mathbf{M}_{\mathbf{Q}r} - \mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} -f_1(r) & 0 \\ 0 & f_2(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -L_{1,1}(\mathbf{Q}r) + \mathcal{K}_1 *\cdot & L_{1,2}(\mathbf{Q}r) - \mathcal{K}_b *\cdot \\ L_{2,1}(\mathbf{Q}r) - \mathcal{K}_b *\cdot & -L_{2,2}(\mathbf{Q}r) + \mathcal{K}_1 *\cdot \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

with

$$\forall k \in \{1,2\}, \quad f_k(r) \triangleq V_k(\mathbf{Q}r) - V_k(0). \tag{4.59}$$

注意，若 $r$ 满足 (3.23) 和 (3.25)，那么根据 (4.10)， $f_k(r)$ 本身也满足相同的对称性，

$$f_k(r)(-\varphi,-\theta) = f_k(r)(\varphi,\theta) = f_k(r)\big(\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big). \tag{4.60}$$

现在我们来讨论定量估计。为此，我们先给出以下分解。根据 (3.7)，可写为

$$\begin{aligned} A_{k,k}(r)(\varphi,\theta,\eta) &= \Big((R_k(\varphi,\theta)-R_k(\varphi,\eta))^2 + 4R_k(\varphi,\theta)R_k(\varphi,\eta)\sin^2\Big(\tfrac{\eta-\theta}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2b_k\Big|\sin\Big(\tfrac{\eta-\theta}{2}\Big)\Big|\left(\left(\frac{R_k(\varphi,\theta)-R_k(\varphi,\eta)}{2b_k\sin\big(\frac{\eta-\theta}{2}\big)}\right)^2 + \frac{1}{b_k^2}R_k(\varphi,\theta)R_k(\varphi,\eta)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\triangleq 2b_k\Big|\sin\Big(\tfrac{\eta-\theta}{2}\Big)\Big|\, v_k(r)(\varphi,\theta,\eta). \end{aligned}$$

函数 $v_k(r)$ 关于各个变量以及 $r$ 都是光滑的。此外， $v_k(0) = 1$.应用引理 2.2 和引理 2.1-(iii) 可得

$$\|v_k(r)-1\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|r\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}, \qquad \|\Delta_{12}v_k\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|\Delta_{12}r\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \|\Delta_{12}r\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \max_{\ell\in\{1,2\}}\|r_\ell\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{4.61}$$

我们还可以写成

$$\begin{aligned} A_{k,3-k}^2(r)(\varphi,\theta,\eta) &= R_k^2(\varphi,\theta) + R_{3-k}^2(\eta) - 2R_k(\varphi,\theta)R_{3-k}(\varphi,\eta)\cos(\eta-\theta) \\ &= A_{k,3-k}^2(0)(\varphi,\theta,\eta)\big(1+h_k(r)(\varphi,\theta,\eta)\big), \end{aligned}$$

其中

$$h_k(r)(\varphi,\theta,\eta) \triangleq 2\frac{r_k(\varphi,\theta) + r_{3-k}(\varphi,\eta) - \cos(\eta-\theta)\big(R_k(\varphi,\theta)R_{3-k}(\varphi,\eta) - b_kb_{3-k}\big)}{b_k^2 + b_{3-k}^2 - 2b_kb_{3-k}\cos(\eta-\theta)}.$$

根据引理 2.1-(iii) 中的复合律，函数 $h_k$ 满足

$$\|h_k(r)\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|r\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}, \qquad \|\Delta_{12}h_k\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|\Delta_{12}r\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{4.62}$$

根据上述分解以及估计 (4.61)、(4.62)，结合 (4.59)、(4.2)、(4.3)，引理 2.1-(iii) 中的乘积律和复合律可得

$$\|f_k(r)\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|r\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \tag{4.63}$$

and

$$\|\Delta_{12}f_k\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|\Delta_{12}r\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \|\Delta_{12}r\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \max_{\ell\in\{1,2\}}\|r_\ell\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{4.64}$$

鉴于 (4.4) 和 (4.14)，我们还可以得到关于 $k \in \{1,2$ 的以下分解 $\}$

$$L_{k,k}(\mathbf{Q}r) = \mathcal{K}_1 *\cdot + \mathcal{T}_{\mathbb{K}_{k,k}}(r) \qquad \text{and} \qquad L_{k,3-k}(\mathbf{Q}r) = \mathcal{K}_b *\cdot + \mathcal{T}_{\mathbb{K}_{k,3-k}}(r), \tag{4.65}$$

其中 $\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{k,k}}(r)$ 和 $\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{k,3-k}}(r)$ 是具有光滑核的积分算子

$$\mathbb{K}_{k,k}(r)(\varphi,\theta,\eta) \triangleq \log\big(v_k(\mathbf{Q}r)(\varphi,\theta,\eta)\big)$$

and

$$\mathbb{K}_{k,3-k}(r)(\varphi,\theta,\eta) \triangleq \tfrac{1}{2}\log\big(1+h_k(\mathbf{Q}r)(\varphi,\theta,\eta)\big).$$

此外，若 $r$ 满足 (3.23) 和 (3.25)，则对所有 $k$、$n\in\{1,2\}$，特别利用 (4.11) 即可容易验证，

$$\mathbb{K}_{k,n}(r)(-\varphi,-\theta,-\eta)=\mathbb{K}_{k,n}(r)(\varphi,\theta,\eta)=\mathbb{K}_{k,n}(r)\big(\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}},\eta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big). \tag{4.66}$$

显然，(4.41)-(4.43) 蕴含 Q 在 $\mathrm{H}^s_{\mathtt{m}}$. 上的连续性。因此，结合 (4.61) 和 (4.62)，应用引理 2.1-(iii) 中的复合律，可得

$$\forall(k,n)\in\{1,2\}^2,\quad \|\mathbb{K}_{k,n}(r)\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|r\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \tag{4.67}$$

and

$$\forall(k,n)\in\{1,2\}^2,\quad \|\Delta_{12}\mathbb{K}_{k,n}(r)\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|\Delta_{12}r\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\Delta_{12}r\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\max_{\ell\in\{1,2\}}\|r_\ell\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{4.68}$$

结合 (4.58) 和 (4.65)，我们可推出

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathcal{J}\big(\mathbf{M}_{\mathbf{Q}r}-\mathbf{M}_0\big)\mathbf{Q}=-\mathbf{Q}^{-1}\partial_\theta\begin{pmatrix}f_1(r)&0\\0&f_2(r)\end{pmatrix}\mathbf{Q}-\mathbf{Q}^{-1}\partial_\theta\begin{pmatrix}\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{1,1}}(r)&-\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{1,2}}(r)\\\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{2,1}}(r)&-\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{2,2}}(r)\end{pmatrix}\mathbf{Q}.$$

将上一个恒等式与 (4.56) 和 (4.57) 结合，我们得到 (4.52)，其中

$$\begin{pmatrix}\mathcal{T}_{\mathscr{K}_{1,1}}(r)&\mathcal{T}_{\mathscr{K}_{1,2}}(r)\\\mathcal{T}_{\mathscr{K}_{2,1}}(r)&\mathcal{T}_{\mathscr{K}_{2,2}}(r)\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{Q}^{-1}\begin{pmatrix}f_1(r)&0\\0&f_2(r)\end{pmatrix}\mathbf{Q}-\begin{pmatrix}f_1(r)&0\\0&f_2(r)\end{pmatrix}+\mathbf{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{1,1}}(r)&-\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{1,2}}(r)\\\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{2,1}}(r)&-\mathcal{T}_{\mathbb{K}_{2,2}}(r)\end{pmatrix}\mathbf{Q}.$$

根据前述估计、(4.41)、(4.43)、(4.63) 和 (4.67)，再结合引理 2.8，经过直接计算可得，核 $\mathscr{K}_{k,\ n}(r)$ 满足以下估计

$$\forall(k,n)\in\{1,2\}^2,\quad \|\mathscr{K}_{k,n}(r)\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|r\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

采用与前面类似的论证，特别利用 (4.68) 和 (4.64)，可得

$$\forall(k,n)\in\{1,2\}^2,\quad \|\Delta_{12}\mathscr{K}_{k,n}(r)\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|\Delta_{12}r\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\Delta_{12}r\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\max_{\ell\in\{1,2\}}\|r_\ell\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

至于对称性性质，可从核的结构中轻易得到。事实上，根据 (4.66)、(4.60) 和 (4.42) 可验证

$$r(-\varphi,-\theta)=r(\varphi,\theta)\quad\Longrightarrow\quad\mathscr{K}_{k,n}(r)(-\varphi,-\theta,-\eta)=\mathscr{K}_{k,n}(r)(\varphi,\theta,\eta), \tag{4.69}$$

$$r\big(\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big)=r(\varphi,\theta)\quad\Longrightarrow\quad\mathscr{K}_{k,n}(r)\big(\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}},\eta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big)=\mathscr{K}_{k,n}(r)(\varphi,\theta,\eta). \tag{4.70}$$

所需结果的证明至此完成。 □

注 4.1。方程 (4.47) 在 $r=0$ 处的线性化方程具有如下形式

$$\partial_t\rho=\mathcal{J}\nabla K_{\mathbf{L}_0}(\rho),\qquad\rho=(\rho_1,\rho_2)\in L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T})\times L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}), \tag{4.71}$$

其中，$\mathcal{J}$ 在 (3.14) 中定义，$K_{\mathbf{L}_0}$ 为二次哈密顿量

$$K_{\mathbf{L}_0}(\rho)\triangleq\tfrac{1}{2}\big\langle\mathbf{L}_0\rho,\rho\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}=-\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathtt{m}}}\Big(\tfrac{\Omega_{j,1}(b)}{2j}|\rho_{j,1}|^2-\tfrac{\Omega_{j,2}(b)}{2j}|\rho_{j,2}|^2\Big) \tag{4.72}$$

而 $\mathrm{L}_0$ 是由 (4.44) 定义的算子。因此，线性化轮廓动力学方程 (4.71) 的实值振荡解为

$$\rho(t,\theta)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^*_{\mathtt{m}}}A_j\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-\mathrm{i}(\Omega_{1,j}(b)t-j\theta)}+B_j\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-\mathrm{i}(\Omega_{2,j}(b)t-j\theta)},$$

其中 $\overline{A_j}=A_{-j}$, $\overline{B_j}=B_{-j}$。

## 4.4 平衡频率的几何结构

本节将介绍平衡频率的一些有用性质。我们首先讨论其单调性，并证明一些有用的界。随后，我们将通过研究横截条件来探讨其非退化性。后者对于最终康托集的测度估计至关重要，该集合会产生在线性层面和非线性层面出现的拟周期解。下面给出一个引理。

引理 4.6 。令 $\Omega > 0$ 和 $\mathtt{m}^*, b^*$ 如推论 4.1 中所定义。则以下结论成立 .

1. 对所有 $|j| \geqslant \mathtt{m}^*$ 和 $k \in \{1,2\}$，$\Omega_{-j,k}(b) = -\Omega_{j,k}(b)$。
2. 数列 $\left(-\frac{\Delta_j(b)}{j^2}\right)_{j\geqslant \mathtt{m}^*}$ 为正且递增。回顾一下，$\Delta_j(b)$ 在 (4.18) 中定义 .
3. 序列 $\left(\Omega_{j,1}(b)\right)_{j\geqslant \mathtt{m}^*}$ 为正递增序列，而序列 $\left(\frac{\Omega_{j,2}(b)}{j}\right)_{j\geqslant \mathtt{m}^*}$ 为正递减序列。此外，对所有 $|j| \geqslant \mathtt{m}^*$ 和 $k \in \{1,2\}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Omega_{j,k}(b)}{j} = \Omega + (2-k)\tfrac{1-b^2}{2}. \tag{4.73}$$

*and*

$$\left|\Omega_{j,k}(b)\right| \geqslant \Omega|j|.$$

4. 对所有 $\mathtt{m} \geqslant \mathtt{m}^*$，存在 $\Omega_{\mathtt{m}}^* = \Omega^*(b^*, \mathtt{m}) > 0$ 满足

$$\lim_{\mathtt{m}\to\infty} \Omega_{\mathtt{m}}^* = 0 \tag{4.74}$$

使得对所有 $\Omega > \Omega_{\mathtt{m}}^*$，序列 $\left(\Omega_{j,2}(b)\right)_{j\geqslant \mathtt{m}}$ 递增。

5. 存在 $c > 0$，使得对所有 $k \in \{1,2\}$,

$$\forall\, \Omega > \Omega_{\mathtt{m}}^*, \quad \forall\, b \in [0, b^*], \quad \forall\, |j| \geqslant \mathtt{m}^*, \quad \forall\, |j'| \geqslant \mathtt{m}^*, \quad \left|\Omega_{j,k}(b) - \Omega_{j',k}(b)\right| \geqslant c|j - j'|.$$

6. 给定 $q_0 \in \mathbb{N}$，存在 $C > 0$，使得对所有 $k \in \{1,2\}$,

$$\forall\, |j| \geqslant \mathtt{m}^*, \quad \forall\, |j'| \geqslant \mathtt{m}^*, \quad \max_{q\in[\![0,q_0]\!]} \sup_{b\in[0,b^*]} \left|\partial_b^q\big(\Omega_{j,k}(b) - \Omega_{j',k}(b)\big)\right| \leqslant C|j - j'|.$$

证明。1. 这可由 (4.28) 立即得到。
2. 为了研究离散函数 $j \mapsto -\frac{\Delta_j(b)}{j^2}$，我们将考察它的连续版本

$$\forall x \geqslant \mathtt{m}^*, \quad g(x) \triangleq -\tfrac{\Delta_x(b)}{x^2} = \tfrac{1}{x^2}\big(\tfrac{1-b^2}{2}x - 1\big)^2 - \tfrac{b^{2x}}{x^2}.$$

对 $x$ 求导并使用 (4.36)，我们得出

$$g'(x) = \tfrac{2}{x^3}\big(\tfrac{1-b^2}{2}x - 1 + b^{2x}\big) - \tfrac{2b^{2x}}{x^2}\log(b) > 0.$$

因此，映射 $j \mapsto -\Delta_j(b)/j^2$ 严格递增。
3. 数列 $\left(\frac{\Omega_{j,k}(b)}{j}\right)_{j\geqslant \mathtt{m}^*}$ 的单调性可由恒等式得出

$$\tfrac{\Omega_{j,k}(b)}{j} = \big(\Omega + \tfrac{1-b^2}{4}\big) + \tfrac{(-1)^{k+1}}{2}\sqrt{\tfrac{-\Delta_j(b)}{j^2}}$$

以及第二个点。此外，由最后一个恒等式我们还可以得出

$$\tfrac{\Omega_{j,1}(b)}{j} \geqslant \Omega.$$

接下来，由 (4.29)-(4.30) 可得 (4.73)。由于 $\left(\frac{\Omega_{j,2}(b)}{j}\right)_{j\geqslant \mathtt{m}^*}$ 是递减的，因此由 (4.73) 可推得

$$\frac{\Omega_{j,2}(b)}{j} \geqslant \lim_{j\to\infty}\frac{\Omega_{j,2}(b)}{j} = \Omega > 0.$$

至此，第三点的证明结束。

4. 考虑离散映射 $j \mapsto \Omega_{j,\,2}(b)$ 的连续延拓，

$$\forall (b,x)\in[0,b^*]\times(\mathtt{m}^*,\infty),\quad h(b,x)\triangleq \Omega x + \tfrac{1-b^2}{4}x - \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta_x(b)}.$$

对 $x$ 求导并利用 (4.18) 和 (4.36)，可得

$$\begin{aligned}\partial_x h(b,x) &= \frac{b^{2x}\log(b) - \frac{1-b^2}{2}\left(\frac{1-b^2}{2}x - 1 - \sqrt{-\Delta_x(b)}\right) + 2\Omega\sqrt{-\Delta_x(b)}}{2\sqrt{-\Delta_x(b)}}\\ &= \frac{b^{2x}\log(b) + \left(\frac{1-b^2}{2}x-1\right)\left[2\Omega\sqrt{1-b^{2x}\left(\frac{1-b^2}{2}x-1\right)^{-2}} + \frac{1-b^2}{2}\left(\sqrt{1-b^{2x}\left(\frac{1-b^2}{2}x-1\right)^{-2}}-1\right)\right]}{2\sqrt{-\Delta_x(b)}}.\end{aligned}$$

根据 (4.38)，对于所有 $b<b^*$ 和 $x\geqslant \mathtt{m}\geqslant \mathtt{m}^*$，

$$0 < \sqrt{1-(b^*)^{2\mathtt{m}}\left(\frac{1-(b^*)^2}{2}\mathtt{m}-1\right)^{-2}} \leqslant \sqrt{1-b^{2x}\left(\frac{1-b^2}{2}x-1\right)^{-2}} < 1. \tag{4.75}$$

因此，结合 (4.36) 和 (4.75)，得到

$$\begin{aligned}2\sqrt{-\Delta_x(b)}\partial_x h(b,x) \geqslant b^{2x}\log(b) + \left(\tfrac{1-b^2}{2}x-1\right)\Bigg[&2\Omega\sqrt{1-(b^*)^{2\mathtt{m}}\left(\tfrac{1-(b^*)^2}{2}\mathtt{m}-1\right)^{-2}}\\ &+\tfrac{1-(b^*)^2}{2}\left(\sqrt{1-(b^*)^{2\mathtt{m}}\left(\tfrac{1-(b^*)^2}{2}\mathtt{m}-1\right)^{-2}}-1\right)\Bigg].\end{aligned}$$

令

$$\Omega^*_{\mathtt{m}} \triangleq \frac{\frac{1-(b^*)^2}{2}\left(1-\sqrt{1-(b^*)^{2\mathtt{m}}\left(\frac{1-(b^*)^2}{2}\mathtt{m}-1\right)^{-2}}\right) - \min\limits_{b\in[0,b^*]}\left(b^{\mathtt{m}}\log(b)\right)}{2\sqrt{1-(b^*)^{2\mathtt{m}}\left(\frac{1-(b^*)^2}{2}\mathtt{m}-1\right)^{-2}}} > 0 \tag{4.76}$$

得到

$$\forall \Omega>\Omega^*_{\mathtt{m}},\quad 2\sqrt{-\Delta_x(b)}\partial_x h(b,x) > \left(b^x+1-\tfrac{1-b^2}{2}x\right)\min_{b\in[0,b^*]}\left(b^{\mathtt{m}}\log(b)\right) \overset{(4.23)}{=} f(b,x)\min_{b\in[0,b^*]}\left(b^{\mathtt{m}}\log(b)\right).$$

由此，根据 (4.34)，我们得出

$$\forall \Omega>\Omega^*_{\mathtt{m}},\quad \partial_x h(b,x) > 0.$$

令 (4.76) 中的 $\mathtt{m}$ 取极限，立即得到 (4.74)。至此，第四点的证明结束。5. 由于 $j\mapsto \Omega_{j,\,k}(b)$、$k\in\{1,2\}$ 都是奇函数，因此只需验证 $j\in\mathbb{N}^*$ 的结果。关于和式 $|\Omega_{j,\,k}(b)+\Omega_{j',\,k}(b)$ 的估计，由数列 $\left(\Omega_{j,\,k}(b)\right)_{j\geqslant \mathtt{m}^*}$、$k\in\{1,2\}$ 的正性以及第三点即可轻易得到，即

$$\forall b\in[0,b^*],\quad \left|\Omega_{j,k}(b)+\Omega_{j',k}(b)\right| = \Omega_{j,k}(b)+\Omega_{j',k}(b) \geqslant \Omega(j+j').$$

接下来我们将证明差值的估计。根据 (4.29)，对所有满足 $j\neq j'$ 的 $j,j'\geqslant \mathtt{m}^*$，有

$$\Omega_{j,k}(b)-\Omega_{j',k}(b) = \left(\Omega+(2-k)\tfrac{1-b^2}{2}\right)(j-j') + (-1)^{k+1}\left(\mathtt{r}_j(b)-\mathtt{r}_{j'}(b)\right). \tag{4.77}$$

由此可得

$$\left|\Omega_{j,k}(b)-\Omega_{j',k}(b)\right| \geqslant \Omega|j-j'| - \sup_{b\in[0,b^*]}\left|\mathtt{r}_j(b)-\mathtt{r}_{j'}(b)\right|.$$

结合泰勒公式与 (4.30)，可得对于任意 $b\in[0,b^*]$,

$$\begin{aligned}\big|\mathtt{r}_j(b)-\mathtt{r}_{j'}(b)\big|&\leqslant C_0\Big|\int_{j'}^{j}\frac{dx}{x^2}\Big|\\&\leqslant C_0\tfrac{|j-j'|}{jj'}.\end{aligned}$$

这意味着

$$\big|\Omega_{j,k}(b)-\Omega_{j',k}(b)\big|\geqslant\Big(\Omega-\tfrac{C_0}{jj'}\Big)|j-j'|. \tag{4.78}$$

因此，存在 $N$，使得若 $jj'>N$，所需的不等式成立。对于 $jj'\leqslant N$，我们将利用 $j\mapsto\Omega_{j,\,k}(b)$ 的单射性质，结合 $b\in[0,b^*]\mapsto\Omega_{j,\,k}(b)$ 与 $-\Omega_{j',\,k}(b)$ 的连续性，得到对任意 $j\neq j'\in[\![\mathtt{m}^*,N]\!]$,

$$\forall\Omega>\Omega^*_{\mathtt{m}},\quad\inf_{b\in[0,b^*]}\big|\Omega_{j,k}(b)-\Omega_{j',k}(b)\big|\triangleq c^k_{jj'}>0.$$

因此

$$\inf_{\substack{j\neq j'\in[\![\mathtt{m}^*,N]\!]\\b\in[0,b^*]}}\big|\Omega_{j,k}(b)-\Omega_{j',k}(b)\big|=\inf_{j\neq j'\in[\![\mathtt{m}^*,N]\!]}c^k_{jj'}>0.$$

取

$$c\triangleq\frac{1}{N}\min\Big(\inf_{j\neq j'\in[\![\mathtt{m}^*,N]\!]}c^k_{jj'}\ ,\ N\Omega-C_0\Big)$$

并将最后一个不等式与 (4.78) 结合，便得到所需结果。
6. 对 (4.77) 求导，得到

$$\begin{aligned}\partial_b\big(\Omega_{j,k}(b)-\Omega_{j',k}(b)\big)&=-(2-k)b(j-j')+(-1)^{k+1}\partial_b\big(\mathtt{r}_j(b)-\mathtt{r}_{j'}(b)\big),\\\partial_b^2\big(\Omega_{j,k}(b)-\Omega_{j',k}(b)\big)&=-(2-k)(j-j')+(-1)^{k+1}\partial_b^2\big(\mathtt{r}_j(b)-\mathtt{r}_{j'}(b)\big),\\\forall q\geqslant3,\quad\partial_b^q\big(\Omega_{j,k}(b)-\Omega_{j',k}(b)\big)&=(-1)^{k+1}\big(\partial_b^q\mathtt{r}_j(b)-\partial_b^q\mathtt{r}_{j'}(b)\big).\end{aligned}$$

B由中值定理结合 (4.30)，我们得以完成引理 4 的证明 .6. □

非退化性与横截性。在本节余下部分，我们将沿用 [9, 19] 中提出的方法，讨论线性频率的非退化性和横截性。首先回顾向量值函数的非退化性定义。

定义 4.1. 设 $N\in\mathbb{N}^*$。若函数 $f$，$(f_1,\dots,f_N):[\alpha_1,\alpha_2]\to\mathbb{R}^N$，其中 $\alpha_1<\alpha_2$，对于任意向量 $c$，$(c_1,\dots,c_N)\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$，标量函数 $f\cdot c=f_1c_1+\cdots+f_Nc_N$ 在整个区间 $[\alpha_1,\alpha_2]$ 上不恒为零，则称其为非退化的。

我们有以下结果。

引理 4.7. 设 $\Omega>0$ 和 $\mathtt{m}^*,b^*$ 如推论 4.1 中所定义。固定一个整数 $\mathtt{m}\geqslant\mathtt{m}^*$，并考虑有限子集

$$\forall k\in\{1,2\},\quad S_k\subset\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\cap\mathbb{N}^*\quad\text{with}\quad|S_k|<\infty.$$

则以下结论成立。

1. 若 $|S_1\cap S_2|\leqslant1$，则向量值函数

$$[0,b^*]\ni b\mapsto\Big(\big(\Omega_{j,1}(b)\big)_{j\in S_1},\big(\Omega_{j,2}(b)\big)_{j\in S_2}\Big)$$

是非退化的。

2. 如果 $|S_1 \cap S_2| = 0$，那么向量值函数

$$[0, b^*] \ni b \mapsto \Big( \big(\Omega_{j,1}(b)\big)_{j\in S_1}, \big(\Omega_{j,2}(b)\big)_{j\in S_2}, \mathtt{v}_1(b), \mathtt{v}_2(b) \Big),$$
$$[0, b^*] \ni b \mapsto \Big( \big(\Omega_{j,1}(b)\big)_{j\in S_1}, \big(\Omega_{j,2}(b)\big)_{j\in S_2}, \mathtt{v}_k(b) \Big), \quad k \in \{1, 2\}$$

是非退化的，其中 $\mathtt{v}_k$ 定义见 (4.13)。

证明。我们指出，线性频率 (4.28) 与文献 [17] 中研究的基尔霍夫椭圆附近的线性频率非常相似。因此，我们将采用 [17, 引理 5.2] 中所发展的相同论证，并作少许修改。根据 (4.28)，函数 $b \mapsto \Omega_{j,\,k}(b)$、$k \in \{1, 2\}$ 在 $b = 0$ 的一个完整邻域内均定义良好且解析。此外，由 (4.29) 和 (4.37)，频率 $\Omega_{j,\,k}(b)$ 可写为

$$\Omega_{j,k}(b) = A_{j,k}(z) + (-1)^{k+1} B_j(z) \triangleq \widetilde{\Omega}_{j,k}(z), \tag{4.79}$$
$$z \triangleq b^2, \quad A_{j,k}(z) \triangleq \Omega j + \frac{2-k}{2} j(1-z) + \tfrac{(-1)^k}{2}, \quad B_j(z) \triangleq \mathtt{r}_j(b) \underset{z\to 0}{=} -\frac{z^j}{2(j-2)} + O(z^{j+1}).$$

1. 根据定义 4.1，需要证明对于所有 $c$，$\big((c_{j,\,1})_{j\in S_1}, (c_{j,\,2})_{j\in S_2}\big) \in \mathbb{R}^{|S_1|+|S_2|} \setminus \{0\}$，函数

$$z \mapsto \sum_{j\in S_1\setminus(S_1\cap S_2)} c_{j,1}\widetilde{\Omega}_{j,1}(z) + \sum_{j\in S_2\setminus(S_1\cap S_2)} c_{j,2}\widetilde{\Omega}_{j,2}(z) + \sum_{j\in S_1\cap S_2} \big(c_{j,1}\widetilde{\Omega}_{j,1}(z) + c_{j,2}\widetilde{\Omega}_{j,2}(z)\big)$$

在区间 $[0, (b^*)^2]$ 上不恒为零。反设存在 $c$，$\big((c_{j,1})_{j\in S_1}, (c_{j,2})_{j\in S_2}\big) \in \mathbb{R}^{|S_1|+|S_2|} \setminus \{0\}$，使得对任意 $|z| \leqslant (b^*)^2$，

$$\sum_{j\in S_1\setminus(S_1\cap S_2)} c_{j,1}\widetilde{\Omega}_{j,1}(z) + \sum_{j\in S_2\setminus(S_1\cap S_2)} c_{j,2}\widetilde{\Omega}_{j,2}(z) + \sum_{j\in S_1\cap S_2} c_{j,1}\widetilde{\Omega}_{j,1}(z) + c_{j,2}\widetilde{\Omega}_{j,2}(z) = 0. \tag{4.80}$$

写作

$$S_1 \cup S_2 = \{j_1, j_2, \cdots, j_d\}, \qquad \text{with} \qquad \mathtt{m} \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_d,$$

然后对 $z$ 求 (4.80) 中的恒等式，注意到 $\mathtt{m} \geqslant 3$，得到

$$\begin{cases} \widetilde{c}_{j_1} D_z^{(j_1)} B_{j_1}(z) + \ldots + \widetilde{c}_{j_d} D_z^{(j_1)} B_{j_d}(z) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \widetilde{c}_{j_1} D_z^{(j_d)} B_{j_1}(z) + \ldots + \widetilde{c}_{j_d} D_z^{(j_d)} B_{j_d}(z) = 0, \end{cases}$$

其中

$$\widetilde{c}_j \triangleq \begin{cases} c_{j,1}, & \text{if} \quad j \in S_1 \setminus (S_1 \cap S_2), \\ -c_{j,2}, & \text{if} \quad j \in S_2 \setminus (S_1 \cap S_2), \\ c_{j,1} - c_{j,2}, & \text{if} \quad j \in S_1 \cap S_2. \end{cases}$$

后者是一个线性系统，可以改写成矩阵形式：

$$\mathcal{M}(z)\widetilde{c} = 0, \qquad \mathcal{M}(z) \triangleq \begin{pmatrix} D_z^{(j_1)} B_{j_1}(z) & \ldots & D_z^{(j_1)} B_{j_d}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_z^{(j_d)} B_{j_1}(z) & \ldots & D_z^{(j_d)} B_{j_d}(z) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{c} \triangleq \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{j_1} \\ \vdots \\ \widetilde{c}_{j_d} \end{pmatrix}.$$

注意，由 (4.79) 可知，对所有 $j \geqslant \mathtt{m}$ 均有

$$D_z^{(j)} B_j(0) = -\frac{j!}{2(j-2)} \qquad \text{and} \qquad \forall\, 2 \leqslant m < j, \quad D_z^{(m)} B_j(0) = 0.$$

因此，存在一些实常数 $\alpha_{i,\ j}$，使得

$$\mathcal{M}(0)=\begin{pmatrix} -\frac{j_1!}{2(j_1-2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{2,1} & -\frac{j_2!}{2(j_2-2)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d-1,1} & \dots & \alpha_{d-1,d-2} & -\frac{j_{d-1}!}{2(j_{d-1}-2)} & 0 \\ \alpha_{d,1} & \dots & \alpha_{d,d-2} & \alpha_{d,d-1} & -\frac{j_d!}{2(j_d-2)} \end{pmatrix}$$

这是一个三角矩阵，其行列式为

$$\det \mathcal{M}(0)=(-1)^d\prod_{i=1}^{d}\frac{j_i!}{2(j_i-2)}\neq 0\,.$$

由此可得 $\widetilde{c}=0$，即

$$\forall j\in(S_1\cup S_2)\setminus(S_1\cap S_2),\quad c_{j,k}=0\qquad\text{and}\qquad\forall j\in S_1\cap S_2,\quad c_{j,1}=c_{j,2}. \tag{4.81}$$

将 (4.81) 代入 (4.80)，并在 $z=0$ 处求值，由 (4.79) 可得

$$\big(2\Omega+\tfrac{1}{2}\big)\sum_{j\in S_1\cap S_2}jc_{j,1}=0.$$

利用 $\Omega>0$ 这一事实，若 $S_1\cap S_2=\{j_0\}$，则有

$$c_{j_0,1}=0.$$

这与 (4.81) 一起导出矛盾，从而证明了第一点。
2. 接下来，我们将证明函数

$$[0,b^*]\ni b\mapsto\Big(\big(\Omega_{j,1}(b)\big)_{j\in S_1},\big(\Omega_{j,2}(b)\big)_{j\in S_2},\mathtt{v}_1(b),\mathtt{v}_2(b)\Big)$$

根据定义 4.1，若 $S_1\cap S_2=\varnothing$，则其为非退化的。反设存在

$$c\triangleq\big((c_{j,1})_{j\in S_1},(c_{j,2})_{j\in S_2},c_{0,1},c_{0,2}\big)\in\mathbb{R}^{|S_1|+|S_2|+2}\backslash\{0\}$$

使得对于任意 $|z|\leqslant(b^*)^2$，

$$c_{0,1}\widetilde{\mathtt{v}}_1(z)+c_{0,2}\widetilde{\mathtt{v}}_2(z)+\sum_{j\in S_1}c_{j,1}\widetilde{\Omega}_{j,1}(z)+\sum_{j\in S_2}c_{j,2}\widetilde{\Omega}_{j,2}(z)=0, \tag{4.82}$$

其中我们记

$$\forall k\in\{1,2\},\quad\widetilde{\mathtt{v}}_k(z)\triangleq\mathtt{v}_k(b)=\Omega+\frac{2-k}{2}(1-z).$$

以与第一种情况类似的方式推理，通过微分论证可得

$$\forall j\in S_1\cup S_2,\quad\forall k\in\{1,2\},\quad c_{j,k}=0.$$

将这些恒等式代入 (4.82)，可得

$$c_{0,1}\widetilde{\mathtt{v}}_1(z)+c_{0,2}\widetilde{\mathtt{v}}_2(z)=0.$$

也就是说

$$\Omega\big(c_{0,1}+c_{0,2}\big)+\frac{1-z}{2}c_{0,1}=0.$$

The 最后一个表达式对任意 $|z|\leqslant(b^*)^2$，都成立，然后利用 $\Omega\neq0$ 这一事实，我们推得 er

$$c_{0,1}=c_{0,2}=0.$$

因此，向量 $c$ 为零，这与假设矛盾。函数非退化性的证明

$$[0,b^*] \ni b \mapsto \Big( \big(\Omega_{j,1}(b)\big)_{j\in S_1}, \big(\Omega_{j,2}(b)\big)_{j\in S_2}, \mathtt{v}_k(b) \Big), \qquad k\in\{1,2\}$$

可通过选择从前一种情形得到

$$c \triangleq \big((c_{j,1})_{j\in S_1}, (c_{j,2})_{j\in S_2}, c_{0,k}, c_{0,3-k}\big) = \big((c_{j,1})_{j\in S_1}, (c_{j,2})_{j\in S_2}, c_{0,k}, 0\big).$$

至此，引理 4.7 的证明完成。 □

令 $\Omega > 0$ 和 $\mathtt{m}^*, b^*$ 如推论 4.1 中所定义。固定一个整数 $\mathtt{m} \geqslant \mathtt{m}^*$，并考虑有限子集

$$\forall k\in\{1,2\}, \quad \mathbb{S}_k \subset \mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \cap \mathbb{N}^*, \qquad \text{with} \qquad d_k \triangleq |\mathbb{S}_k| < \infty \qquad \text{and} \qquad \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \varnothing. \tag{4.83}$$

对于所有 $b\in[0,b^*]$，定义切向平衡频率向量为

$$\omega_{\mathrm{Eq}}(b) \triangleq \big(\omega_{\mathrm{Eq},1}(b)\omega_{\mathrm{Eq},2}(b)\big) \in \mathbb{R}^d, \qquad \text{with} \quad \omega_{\mathrm{Eq},k}(b) \triangleq \big(\Omega_{j,k}(b)\big)_{j\in\mathbb{S}_k} \in \mathbb{R}^{d_k}, \quad d \triangleq d_1+d_2 \tag{4.84}$$

以及集合

$$\mathbb{S} \triangleq \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2, \quad \overline{\mathbb{S}} \triangleq \mathbb{S} \cup (-\mathbb{S}), \quad \overline{\mathbb{S}}_0 \triangleq \overline{\mathbb{S}} \cup \{0\}, \quad \overline{\mathbb{S}}_k = \mathbb{S}_k \cup (-\mathbb{S}_k) \quad \text{and} \quad \overline{\mathbb{S}}_{0,k} = \overline{\mathbb{S}}_k \cup \{0\}.$$

在下一个命题中，我们根据引理 4.7 的定性非退化条件、线性频率的解析性及其渐近性，推导出一些定量界。

引理 4.8. [横截性] 存在 $q_0\in\mathbb{N}$ 和 $\rho_0>0$，使得以下结论成立。回顾一下，$\mathtt{v}_k(b)$、$\Omega_{j,\,k}$ 和 $\omega_{\mathrm{Eq}}$ 分别在 (4.13)、(4.28) 和 (4.84) 中定义。

1. 对任意 $l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$，我们有

$$\inf_{b\in[0,b^*]} \max_{q\in[\![0,q_0]\!]} \Big|\partial_b^q \omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot l\Big| \geqslant \rho_0\langle l\rangle.$$

2. 对任意 $k\in\{1,2\}$ 以及 $(l,j)\in(\mathbb{Z}^d\times\mathbb{N}_{\mathtt{m}})\setminus\{(0,0)\}$

$$\inf_{b\in[0,b^*]} \max_{q\in[\![0,q_0]\!]} \Big|\partial_b^q \big(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot l + j\mathtt{v}_k(b)\big)\Big| \geqslant \rho_0\langle l\rangle.$$

3. 对任意 $k\in\{1,2\}$ 以及 $(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{N}^*_{\mathtt{m}}\setminus\mathbb{S}_k)$

$$\inf_{b\in[0,b^*]} \max_{q\in[\![0,q_0]\!]} \Big|\partial_b^q \big(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot l + \Omega_{j,k}(b)\big)\Big| \geqslant \rho_0\langle l\rangle.$$

4. 我们假设附加约束 $\Omega > \Omega^*_{\mathtt{m}}$，参见引理 4.6-4-5。对于满足附加条件 $(l,j)\neq(0,j')$ 的任意 $k\in\{1,2\}$ 和$l\in\mathbb{Z}^d, j, j'\in\mathbb{N}^*_{\mathtt{m}}\setminus\mathbb{S}_k$，我们有

$$\inf_{b\in[0,b^*]} \max_{q\in[\![0,q_0]\!]} \Big|\partial_b^q \big(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot l + \Omega_{j,k}(b) \pm \Omega_{j',k}(b)\big)\Big| \geqslant \rho_0\langle l\rangle.$$

5. 对任意 $l\in\mathbb{Z}^d$、$j\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{S}_1$、$j'\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{S}_2$，有

$$\inf_{b\in[0,b^*]} \max_{q\in[\![0,q_0]\!]} \Big|\partial_b^q \big(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot l + \Omega_{j,1}(b) \pm \Omega_{j',2}(b)\big)\Big| \geqslant \rho_0\langle l, j, j'\rangle.$$

证明。1. 假设，反证法地，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $b_n \in [0, b^*]$ 和 $l_n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ 使得

$$\max_{q \in [\![0,n]\!]} \left| \partial_b^q \left( \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot \frac{l_n}{\langle l_n \rangle} \right)_{|b=b_n} \right| < \frac{1}{n+1}. \cdot \tag{4.85}$$

数列 $(b_n)_n \subset [0, b^*]$ 和 $(c_n)_n$，$\left(\frac{l_n}{\langle l_n \rangle}\right)_n \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 有界。经过抽取子列后，我们可以假设

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{\langle l_n \rangle} = \widetilde{c} \neq 0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \widetilde{b}.$$

令 $n \to \infty$ 在 (4.85) 中取极限，可得

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \partial_b^q \big( \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot \widetilde{c} \big)_{|b=\widetilde{b}} = 0, \qquad \text{with} \qquad \widetilde{c} \neq 0.$$

因此，实解析函数 $b \to \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot \widetilde{c}$ 恒等于零。这与引理 4.7 矛盾。2. 在 $l = 0$ 和 $j \in \mathbb{N}_{\mathtt{m}}^*$ 的情况下，由 (4.13) 显然有，

$$\inf_{b \in [0,b^*]} \max_{q \in [\![0,q_0]\!]} \left| \partial_b^q \big( j \mathrm{v}_k(b) \big) \right| \geqslant \inf_{b \in [0,b^*]} \left| \mathrm{v}_k(b) \right| \geqslant \Omega \geqslant \rho_0 \langle l \rangle,$$

对某个 $\rho_0 > 0.$ 成立。接下来，我们考虑 $j \in \mathbb{N}_{\mathtt{m}}^*, l \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ 的情形。由三角不等式，结合 $\omega_{\mathrm{Eq}}$ 和 $\mathrm{v}_k(b)$ 的有界性，可得

$$\left| \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot l + j \mathrm{v}_k(b) \right| \geqslant |j| \left| \mathrm{v}_k(b) \right| - \left| \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot l \right| \geqslant c|j| - C|l| \geqslant |l|$$

只要 $|j| \geqslant C_0 |l|$ 对某个 $C_0 > 0.$ 成立。因此，我们只需考虑满足以下条件的指标 $j$ 和 $l$

$$|j| \leqslant C_0 |l|, \qquad j \in \mathbb{N}_{\mathtt{m}}, \qquad l \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}. \tag{4.86}$$

反设存在满足 (4.86) 的数列 $\{l_n\} \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, $\{j_n\} \subset \mathbb{N}_{\mathtt{m}}$，以及 $\{b_n\} \subset [0, b^*]$，使得

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant q, \quad \left| \partial_b^q \left( \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot \frac{l_n}{\langle l_n \rangle} + \frac{j_n \mathrm{v}_k(b)}{\langle l_n \rangle} \right)_{|b=b_n} \right| < \frac{1}{1+n}. \tag{4.87}$$

数列 $\{b_n\}, \{d_n\}, \left\{\frac{j_n}{\langle l_n \rangle}\right\}$ 和 $\{c_n\}, \left\{\frac{l_n}{\langle l_n \rangle}\right\}$ 有界。因此，经过抽取子列后，不妨设

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \widetilde{b}, \qquad \lim_{n\to\infty} d_n = \widetilde{d} \geqslant 0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \widetilde{c} \neq 0.$$

因此，在 (4.87) 中令 $n \to +\infty$，并利用 $b \mapsto \mathrm{v}_k(b)$ 是光滑函数这一事实，可得

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \partial_b^q \left( \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot \widetilde{c} + \widetilde{d}\, \mathrm{v}_k(b) \right)_{|b=\widetilde{b}} = 0.$$

~ ~因此，实解析函数 $b \mapsto \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot \widetilde{c} + d\, \mathrm{v}_k(b)$ 在 $(\widetilde{c}, d) \neq (0,0)$ 处恒等于零，这与引理 4.7 矛盾。

3. 令 $k \in \{1, 2\}$，并考虑 $(l, j) \in \mathbb{Z}^d \times (\mathbb{N}_{\mathtt{m}}^* \setminus \mathbb{S}_k)$。由三角不等式和引理 4.6-3，可得

$$\left| \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot l + \Omega_{j,k}(b) \right| \geqslant \left| \Omega_j(b) \right| - \left| \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot l \right| \geqslant \Omega j - C|l| \geqslant \tfrac{\Omega}{2} \langle l \rangle$$

前提是 t $j \geqslant C_0 |l|$ 对于某个 $C_0 > 0.$ 因此，我们将证明限制在满足 $j$ 的整数上

$$0 \leqslant j < C_0 |l|, \qquad j \in \mathbb{N}_{\mathtt{m}}^* \setminus \mathbb{S}_k \qquad \text{and} \qquad l \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}. \tag{4.88}$$

通过矛盾法，对于所有的 $n \in \mathbb{N}$，我们假设存在序列 $\{l_n\} \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$、$\{j_n\} \subset \mathbb{N}_{\mathtt{m}}^* \setminus \mathbb{S}_k$ 和 $\{b_n\} \subset [0, b^*]$，使得

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant q, \quad \left| \partial_b^q \left( \omega_{\mathrm{Eq}}(b) \cdot \frac{l_n}{\langle l_n \rangle} + \frac{\Omega_{j_n,k}(b)}{\langle l_n \rangle} \right)_{|b=b_n} \right| < \frac{1}{1+n}. \tag{4.89}$$

由于序列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$、$\left\{\frac{l_n}{\langle l_n\rangle}\right\}$ 有界，因此利用紧致性，我们可以假设

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\widetilde{b}\qquad\text{and}\qquad\lim_{n\to\infty} c_n=\widetilde{c}\neq 0.$$

我们将区分两种情形。

• 情形 1：$\{l_n\}$ 有界。由 (4.88) 可知，经过抽取后，数列 $\{l_n\}$ 和 $\{j_n\}$ 是稳定的。因此，我们可以假设对任意 $n\in\mathbb{N}$，都有 $l_n=\widetilde{l}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$ 和 $j_n=\widetilde{j}\in\mathbb{N}^*_{\mathtt{m}}\setminus\mathbb{S}_k$。令 $n\to+\infty$ 在 (4.89) 中取极限，得到

$$\forall q\in\mathbb{N},\quad \partial_b^q\Big(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\widetilde{l}+\Omega_{\widetilde{j},k}(b)\Big)_{|_{b=\widetilde{b}}}=0.$$

因此，实解析函数 $b\mapsto\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot l+\Omega_{\widetilde{j},\,k}(b)$ 满足 $(l,1)\neq(0,0)$，且恒等于零，这与引理 4.7 矛盾。

• 情形 2：$\{l_n\}$ 无界。取一个子数列后，我们假设 $\lim_{n\to\infty}|l_n|=\infty$ 和 $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\langle l_n\rangle}=\widetilde{c}\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$. 我们将区分两个子情形。

• 子情形 1。序列 $\{j_n\}$ 有界。经过抽取子列，我们可以假设这个整数序列是稳定的。对 (4.89) 取极限 $n\to+\infty$，得到

$$\forall q\in\mathbb{N},\quad \partial_b^q\omega_{\mathrm{Eq}}(b)_{|_{b=\widetilde{b}}}\cdot\widetilde{c}=0.$$

因此，实解析函数 $b\mapsto\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\widetilde{c}$（其中 $\widetilde{c}\neq 0$）恒等于零，这与引理 4.7 矛盾。

• 子情形 2。序列 $\{j_n\}$ 无界。于是，经过抽取子列，我们可以假设 $\lim_{n\to\infty} j_n=\infty$。根据 (4.29)，有

$$\tfrac{\Omega_{j_n,k}(b)}{\langle l_n\rangle}=\tfrac{j_n}{\langle l_n\rangle}\Big(\Omega+(2-k)\tfrac{1-b^2}{2}\Big)+\tfrac{(-1)^k}{2\langle l_n\rangle}+(-1)^{k+1}\tfrac{\mathtt{r}_{j_n}(b)}{\langle l_n\rangle}.\tag{4.90}$$

由 (4.88)，序列 $\left\{\frac{j_n}{\langle l_n\rangle}\right\}$ 有界。经过抽取子列，它收敛到 $\widetilde{d}$.。随后求导并在 (4.90) 中取极限，得到

$$\lim_{n\to+\infty}\tfrac{\partial_b^q\Omega_{j_n,k}(b_n)}{\langle l_n\rangle}=\partial_b^q\big(\widetilde{d}\,\mathtt{v}_k(b)\big)_{|_{b=\widetilde{b}}},$$

在最后一个恒等式中用到了估计 (4.30)。因此，对 (4.89) 取极限 $j\to+\infty$，得到

$$\forall q\in\mathbb{N},\quad \partial_b^q\Big(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\widetilde{c}+\widetilde{d}\,\mathtt{v}_k(b)\Big)_{|_{b=\widetilde{b}}}=0.$$

因此，实解析函数 $b\mapsto\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\widetilde{c}+d\mathtt{v}_k(b)$ 恒等于零。这与引理 4.7 矛盾，因为 $(\widetilde{c},d)\neq 0$。

4. 设 $l\in\mathbb{Z}^d, j,j'\in\mathbb{N}^*_{\mathtt{m}}\setminus\mathbb{S}_k$ 满足 $(l,j)\neq(0,j')$。由三角不等式和引理 4.6-5，因 $\Omega>\Omega^*_{\mathtt{m}}$，可推得

$$\big|\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot l+\Omega_{j,k}(b)\pm\Omega_{j',k}(b)\big|\geqslant\big|\Omega_{j,k}(b)\pm\Omega_{j',k}(b)\big|-\big|\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot l\big|\geqslant c|j\pm j'|-C|l|\geqslant\langle l\rangle$$

若对某个 $C_0>0$. 有 $|j-j'|\geqslant C_0|l|$，则此时所需的估计显然成立。因此，我们将证明限制在满足以下条件的整数上

$$|j\pm j'|<C_0\langle l\rangle,\qquad l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},\qquad j,j'\in\mathbb{N}^*_{\mathtt{m}}\setminus\mathbb{S}_k.\tag{4.91}$$

用矛盾法，假设对所有 $n\in\mathbb{N}$，都存在 $(l_n,j_n)\neq(0,j'_n)\in\mathbb{Z}^{d+1}$ 满足 (4.91)，且 $b_n\in[0,b^*]$，使得

$$\forall q\in\mathbb{N},\quad\forall n\geqslant q,\quad\left|\partial_b^q\left(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\tfrac{l_n}{\langle l_n\rangle}+\tfrac{\Omega_{j_n,k}(b)\pm\Omega_{j'_n,k}(b)}{\langle l_n\rangle}\right)_{|_{b=b_n}}\right|<\frac{1}{1+n}.\tag{4.92}$$

由于数列 $\left\{\frac{l_n}{\langle l_n\rangle}\right\}_n$ 和 $\{b_n\}_n$ 有界，因此经过抽取子列后，可以假设 $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\langle l_n\rangle}=\widetilde{c}\neq 0$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n=\widetilde{b}.$。我们分两种情况讨论：

• 情形 1：$(l_n)_n$ 有界。我们只关注与差 $\Omega_{j_n,\,k}-\Omega_{j'_n,\,k}$相关的最微妙情形。经过抽取，我们可以假设这个整数序列是稳定的，也就是说，$\sim l_n=l.$ 观察 (4.91)，我们有两种子情形。

• 子情况 1：$(j_n)_n$ 和 $(j'_n)_n$ 有界。经过抽取，我们可以假设它们是~稳定的，也就是说，$j_n=\widetilde{\jmath}$，$j'_n=\widetilde{\jmath}'$。此外，根据假设，我们还有 $(l,\ \widetilde{\jmath})\neq(0,\ \widetilde{\jmath}')$ 且 $\widetilde{\jmath},\ \widetilde{\jmath}'\notin\mathbb{S}_k$。因此，取 (4.92) 中的极限 $n\to+\infty$，得到

$$\forall q\in\mathbb{N},\quad \partial_b^q\left(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\widetilde{l}+\Omega_{\widetilde{\jmath},k}(b)-\Omega_{\widetilde{\jmath}',k}(b)\right)_{|_{b=\widetilde{b}}}=0.$$

~因此，实解析函数 $b\mapsto\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot l+\Omega_{\widetilde{\jmath},\ k}(b)-\Omega_{\widetilde{\jmath}',\ k}(b)$ 恒等于零。若 $\widetilde{\jmath}=j'$，则~这与引理 4.7 矛盾，因为 $l\neq 0.$ 在 $\widetilde{\jmath}\neq j'\in\mathbb{N}_{\mathtt{m}}^*\setminus\mathbb{S}_k$ 的情形下，这仍然与引理 4.7 矛盾，此处应用的向量频率为 $(\omega_{\mathrm{Eq}},\,\Omega_{\widetilde{\jmath},\ k},\,\Omega_{\widetilde{\jmath}',\ k})$。

• 子情形 2：$(j_n)_n$ 和 $(j'_n)_n$ 无界。不妨经过抽取后假设 $\lim_{n\to\infty} j_n=\lim_{m\to\infty} j'_n=\infty$。不失一般性，假设对于给定的 $n$，有 $j_n\geqslant j'_n$。根据 (4.29)，我们可以写成

$$\frac{\partial_b^q\left(\Omega_{j_n,k}(b)-\Omega_{j'_n,k}(b)\right)}{\langle l_n\rangle}=\partial_b^q\mathtt{v}_k(b)\tfrac{j_n-j'_n}{\langle l_n\rangle}+\tfrac{(-1)^{k+1}}{\langle l_n\rangle}\partial_b^k\big(\mathtt{r}_{j_n}(b)-\mathtt{r}_{j'_n}(b)\big).\tag{4.93}$$

根据 (4.91)，经过抽取后，我们可以假设 $\lim_{n\to\infty}\frac{j'_n-j_n}{\langle l_n\rangle}=\widetilde{d}$。因此，结合 (4.93) 和 (4.30)，可得

$$\lim_{n\to\infty}\partial_b^q\left(\frac{\Omega_{j_n,k}(b)-\Omega_{j'_n,k}(b)}{\langle l_n\rangle}\right)_{|_{b=b_n}}=\widetilde{d}\,\partial_b^q\big(\mathtt{v}_k(b)\big)_{|_{b=\widetilde{b}}}.$$

在 (4.92) 中取极限 $n\to+\infty$，得到

$$\forall q\in\mathbb{N},\quad \partial_b^q\left(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\widetilde{c}+\widetilde{d}\,\mathtt{v}_k(b)\right)_{|_{b=\widetilde{b}}}=0.$$

~于是，实解析函数 $b\mapsto\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\ \cdot\widetilde{c}+d\mathtt{v}_k(b)$，其中 $(\widetilde{c},d)\neq(0,0)$，恒等于零。这与引理 4.7 矛盾。

• 情形 2：$(l_n)_n$ 无界。经过抽取后，我们可以假设 $\lim_{n\to\infty}|l_n|=\infty.$。我们将区分三种子情形。

• 子情形 1。数列 $(j_n)_n$ 和 $(j'_n)_n$ 有界。因此，经过抽取子列后，它们将收敛。在 (4.92) 中取极限可得

$$\forall q\in\mathbb{N},\quad \partial_b^q\omega_{\mathrm{Eq}}(\bar{b})\cdot\widetilde{c}=0.$$

这与引理 4.7 矛盾。

• 子情形 2。数列 $(j_n)_n$ 和 $(j'_n)_n$ 都无界。此情形与情形 1 的子情形 2 类似。

• 子情形 3。序列 $(j_n)_n$ 无界，而 $(j'_n)_n$ 有界。不妨设 $\lim_{n\to\infty} j_n=\infty$ 且 $j'_n=\widetilde{\jmath}.$。根据 (4.91)，经过抽取子序列可得 $\lim_{n\to\infty}\frac{j_n\pm j'_n}{|l_n|}=\widetilde{d}.$。利用泰勒公式结合 (4.30)，对于任意 $b\in[0,b^*]$，有

$$\begin{aligned}\big|\partial_b^q\mathtt{r}_{j'_n}(b)-\partial_b^q\mathtt{r}_{j_n}(b)\big|&\leqslant C\Big|\int_{j'_n}^{j_n}\frac{dx}{x^2}\Big|\\&\leqslant C|j_n-j'_n|(j_nj'_n)^{-1}.\end{aligned}\tag{4.94}$$

结合 (4.94) 和 (4.30) 使用 (4.29)，我们得到，对于任意 $q \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle l_n\rangle^{-1}\partial_b^q\Big(\Omega_{j_n,k}(b) \pm \Omega_{j'_n,k}(b) - (j_n \pm j'_n)\mathtt{v}_k(b)\Big)_{|b=b_n} = \\ (-1)^k \lim_{n\to\infty} \partial_b^q \left(\tfrac{1\pm 1}{2\langle l_n\rangle} - \tfrac{\mathtt{r}_{j_n}(b)\pm \mathtt{r}_{j'_n}(b)}{\langle l_n\rangle}\right)_{|b=b_n} = 0.$$

因此，在式 (4.92) 中取极限可得

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \partial_b^q\left(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot \widetilde{c} + \widetilde{d}\mathtt{v}_k(b)\right)_{b=\widetilde{b}} = 0.$$

~ ~因此，实解析函数 $b \mapsto \omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\widetilde{c} + d\mathtt{v}_k(b)$ 恒等于零，且 $(\widetilde{c}, d) \neq 0$，这与引理 4.7 矛盾。

5. 反证法，假设对所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $b_n \in [0, b^*]$ 和 $(l_n, j_n, j'_n) \in \mathbb{Z}^{d+2}\setminus\{0\}$，其中 $j_n \in (\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Z}_{\mathtt{m}})\setminus\mathbb{S}_1$，且 $j'_n \in (\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Z}_{\mathtt{m}})\setminus\mathbb{S}_2$，使得

$$\max_{q\in[\![0,n]\!]}\left|\partial_b^q\left(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\tfrac{l_n}{\langle l_n, j_n, j'_n\rangle} + \tfrac{\Omega_{j_n,1}(b)\pm\Omega_{j'_n,2}(b)}{\langle l_n, j_n, j'_n\rangle}\right)_{|b=b_n}\right| < \frac{1}{1+n}$$

因此

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant q, \quad \left|\partial_b^q\left(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\tfrac{l_n}{\langle l_n, j_n, j'_n\rangle} + \tfrac{\Omega_{j_n,1}(b)\pm\Omega_{j'_n,2}(b)}{\langle l_n, j_n, j'_n\rangle}\right)_{|b=b_n}\right| < \frac{1}{1+n}. \tag{4.95}$$

序列 $(b_n)_n \subset [0, b^*]$ 有界。经过抽取子序列后，我们可以假设

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \widetilde{b} \in [0, b^*].$$

我们区分两种情况。

•情形 1：T 序列 $\{\langle l_n, j_n, j'_n\rangle\}_n$ 有界。因此，经过抽取子序列，我们可以假设 tha t

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \widetilde{c} \in \mathbb{Z}^d, \qquad \lim_{n\to\infty} j_n = \widetilde{\jmath} \in (\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Z}_{\mathtt{m}})\setminus\mathbb{S}_1 \qquad \text{and} \qquad \lim_{n\to\infty} j'_n = \widetilde{\jmath}' \in (\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Z}_{\mathtt{m}})\setminus\mathbb{S}_2.$$

在 (4.95) 中取极限，得到

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \partial_b^q\left(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\widetilde{c} + \Omega_{\widetilde{\jmath},1}(b) \pm \Omega_{\widetilde{\jmath}',2}(b)\right)_{b=\widetilde{b}} = 0.$$

因此，实解析函数 $b \mapsto \omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot\widetilde{c} + \Omega_{\widetilde{\jmath},1}(b) \pm \Omega_{\widetilde{\jmath}',2}(b)$ 在区间$[0, b^*]$上恒等于零。如果下列条件之一成立，这就与引理 4.7 矛盾：

$$\widetilde{\jmath} \notin \mathbb{S}_2 \qquad \text{and} \qquad \widetilde{\jmath}' \notin \mathbb{S}_1,$$

or

$$\widetilde{\jmath} \in \mathbb{S}_2 \qquad \text{and} \qquad \widetilde{\jmath}' \notin \mathbb{S}_1,$$

or

$$\widetilde{\jmath} \notin \mathbb{S}_2 \qquad \text{and} \qquad \widetilde{\jmath}' \in \mathbb{S}_1.$$

因此，剩下需要检验的是以下情形：

$$\widetilde{\jmath} \in \mathbb{S}_2 \qquad \text{and} \qquad \widetilde{\jmath}' \in \mathbb{S}_1. \tag{4.96}$$

记 $\widetilde{c} = \Big(\big(\widetilde{c}_{j,1}\big)_{j\in\mathbb{S}_1}, \big(\widetilde{c}_{j,1}\big)_{j\in\mathbb{S}_2}\Big)$，则对于任意 $z \in [0, (b^*)^2]$，我们有

$$\sum_{j\in\mathbb{S}_1\setminus\{\widetilde{\jmath}'\}} \widetilde{c}_{j,1}\widetilde{\Omega}_{j,1}(z) + \sum_{j\in\mathbb{S}_2\setminus\{\widetilde{\jmath}\}} \widetilde{c}_{j,2}\widetilde{\Omega}_{j,2}(z) + \widetilde{c}_{\widetilde{\jmath}',1}\widetilde{\Omega}_{\widetilde{\jmath}',1}(z) \pm \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\jmath}',2}(z) + \widetilde{c}_{\widetilde{\jmath},2}\widetilde{\Omega}_{\widetilde{\jmath},2}(z) + \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\jmath},1}(z) = 0. \tag{4.97}$$

仿照引理 4.7 的证明，通过微分论证可得

$$\forall j \in (\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2) \setminus \{\widetilde{\jmath}', \widetilde{\jmath}\}, \quad \forall k \in \{1,2\}, \quad c_{j,k} = 0, \qquad c_{\widetilde{\jmath},2} = 1 \qquad \text{and} \qquad c_{\widetilde{\jmath}',1} = \pm 1.$$

将这些恒等式代入在 $z = 0$ 处取值的 (4.97)，并利用 (4.79)，得到

$$\big(2\Omega + \tfrac{1}{2}\big)(\widetilde{\jmath}' \pm \widetilde{\jmath}) = 0.$$

这意味着 $\widetilde{\jmath}' = \mp\widetilde{\jmath}$，与 (4.96) 和 (4.83) 矛盾。

• 情形 2：序列 $\{\langle l_n, j_n, j_n'\rangle\}_n$ 无界。利用 (4.29)，我们可以写成

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant q, \quad \left| \partial_b^q \left( \big(\omega_{\mathrm{Eq}}(b), \Omega + \tfrac{1-b^2}{2}, \pm\Omega\big) \cdot \tfrac{(l_n, j_n, j_n')}{\langle l_n, j_n, j_n'\rangle} + \tfrac{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} + \mathtt{r}_{j_n}(b) \mp \mathtt{r}_{j_n'}(b)}{\langle l_n, j_n, j_n'\rangle} \right)_{|b=b_n} \right| < \frac{1}{1+n}. \tag{4.98}$$

序列 $(c_n)_n$，$\big(\frac{(l_n,j_n,j_n')}{\langle l_n,j_n,j_n'\rangle}\big)_n \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 有界。由紧致性，并经过抽取子列后，我们可以假设

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{(l_n,j_n,j_n')}{\langle l_n,j_n,j_n'\rangle} = \widetilde{c} \neq 0.$$

在 (4.98) 中取极限并利用 (4.30)，得到

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \partial_b^q \Big( \big(\omega_{\mathrm{Eq}}(b), \Omega + \tfrac{1-b^2}{2}, \pm\Omega\big) \cdot \widetilde{c} \Big)_{b=\widetilde{b}} = 0.$$

因此，实解析函数 $b \mapsto \big(\omega_{\mathrm{Eq}}(b), \Omega + \frac{1-b^2}{2}, \pm\Omega\big) \cdot \widetilde{c}$ 恒等于零，且 $\widetilde{c} \neq 0$，这与引理 4.7 矛盾。引理得证。 □

线性拟周期解。注意，只选取有限个频率时，(4.45) 中的和便会产生线性化方程 (4.12) 的拟周期解，前提是参数 $b$ 属于一个适当的、具有全测度的类康托集。以下结果可仿照 [59, Lem 3.3]，的证明方式，基于引理 4.8-(i) 和引理 8.1 得出。

引理 4.9. 设 $\Omega > 0$, $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2 \subset \mathbb{N}^*$ 如 (4.83) 中所示，且 $b^*$ 如推论 4.1 中所示。则存在一个类康托集 $\mathcal{C} \subset [0, b^*]$，满足 $|\mathcal{C}| = b^*$，并且对所有 $b \in \mathcal{C}$，每个具有如下形式的函数

$$\rho(t,\theta) = \sum_{j\in\mathbb{S}_1} \tfrac{\rho_{j,1}}{\sqrt{1-a_j^2(b)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_j(b) \end{pmatrix} \cos\big(j\theta - \Omega_{j,1}(b)t\big) + \sum_{j\in\mathbb{S}_2} \tfrac{\rho_{j,2}}{\sqrt{1-a_j^2(b)}} \begin{pmatrix} -a_j(b) \\ 1 \end{pmatrix} \cos\big(j\theta - \Omega_{j,2}(b)t\big),$$

其中 $\rho_{j,\,1}$，$\rho_{j,\,2} \in \mathbb{R}^*$，都是方程 (4.12) 的时间拟周期可逆解，其向量频率为 $\omega_{\mathrm{Eq}}(b)$，定义见 (4.84)。

## 5 哈密顿工具

本节主要旨在将哈密顿方程 (4.47) 中拟周期解的存在性，与在适当的相空间中构造不变环面联系起来。更确切地说，我们将通过引入作用角变量，把问题重新表述为嵌入环面的问题。注意，根据注 4.1、(4.55) 和 (4.44)，方程 (4.47) 可视为其在平衡态处线性部分的拟线性扰动，即

$$\partial_t r = \mathcal{J}\mathbf{L}_0 r + X_P(r), \qquad \text{with} \qquad X_P(r) \triangleq \mathcal{J}\nabla K(r) - \mathcal{J}\mathbf{L}_0 r = \mathbf{Q}^{-1} X_{H\geqslant 3}(\mathbf{Q}r), \tag{5.1}$$

其中

$$X_{H\geqslant 3}(r) \triangleq \mathcal{J}\big(\nabla H(r) - \mathbf{M}_0 r\big)$$

并且，Q $H$、$\mathrm{M}_0$, $\mathrm{L}_0$ 分别定义于 (4.39)、(3.15)、(4.12) 和 (4.44) 中。下面的引理总结了向量场 $X_P$ 满足的一些温和估计。注意，向量场 $X_{H\geqslant 3}(r)$ 的两个分量的结构，与欧拉方程在单位圆盘 [61, eq. (5.1)]的情形下得到的结构非常相似。此外，辛变量变换 $\mathrm{Q}^{\pm 1}$ 仅依赖于参数 $b$（而不依赖于 $r$），并且对任意 $s.$，它都将 $\mathrm{H}^s_{\mathfrak{m}}$ 连续地映到自身。因此，类似于 [61, 引理 5.2]，可得到以下估计。

引理 5.1. 设 $b^*$、$\mathtt{m}^*$ 如推论 4.1 中所述，$\mathtt{m} \geqslant \mathtt{m}^*$，且 $(\gamma, q, s_0, s)$ 满足 (2.1)、(2.2) 和 (2.3)。存在 $\varepsilon_0 \in (0,1]$，使得若

$$\|r\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+2} \leqslant \varepsilon_0,$$

那么，在 (5.1) 中定义的向量场 $X_P$ 满足以下估计

$$\begin{aligned}
&(i)\ \|X_P(r)\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+1} + \|r\|^q_{\gamma,\mathtt{m},s+2}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+1};\quad (ii)\ \|d_r X_P(r)[\rho]\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+2} \lesssim \|\rho\|^q_{\gamma,\mathtt{m},s+2}\|r\|^q_{\gamma,\mathtt{m},s_0+1} + \|r\|^q_{\gamma,\mathtt{m},s+2}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+1};\\
&(iii)\ \|d^2_r X_P(r)[\rho_1,\rho_2]\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+2} \lesssim \|\rho_1\|^q_{\gamma,\mathtt{m},s+2}\|\rho_2\|^q_{\gamma,\mathtt{m},s_0+1} + \big(\|\rho_1\|^q_{\gamma,\mathtt{m},s+2} + \|r\|^q_{\gamma,\mathtt{m},s+2}\|\rho_1\|^q_{\gamma,\mathtt{m},s_0+1}\big)\|\rho_2\|^q_{\gamma,\mathtt{m},s_0+1}.
\end{aligned}$$

由于我们将寻找小振幅拟周期解，因此将解重标度为如下形式更为方便 $r \mapsto \varepsilon r$ 其中 $r$ 在适当的函数空间中有界。因此，哈密顿方程 (4.51) 可写为

$$\omega \cdot \partial_\varphi r = \partial_\theta \mathbf{L}_0 r + \varepsilon X_{P_\varepsilon}(r), \tag{5.2}$$

其中 $\mathrm{L}_0$ 是由 (4.44) 定义的算子，而 $X_{P_\varepsilon}$ 是由 $X_{P_\varepsilon}(r)$ $\varepsilon^{-2}X_P(\varepsilon r)$ 定义的重标度哈密顿向量场。注意，(5.2) 是由重标度哈密顿量生成的哈密顿系统

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\varepsilon(r) &\triangleq \varepsilon^{-2}K(\varepsilon r)\\
&= K_{\mathbf{L}_0}(r) + \varepsilon P_\varepsilon(r),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $K_{\mathbf{L}_0}$ 是注 4.1 中定义的二次哈密顿量，而 $\varepsilon P_\varepsilon(r)$ 描述了所有高于三次阶的项。

作用-角-正规变量 回顾 (3.26)、(4.83)–(4.84) 中引入的记号。给定相空间 $L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}) \times L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T})$ 的分解 (1.16)，以及作用-角-正规变量分解 (1.19)，(3.20) 中的辛 2-形式变为

$$\mathcal{W} = \sum_{j\in\mathbb{S}_1} d\vartheta_{j,1}\wedge dI_{j,2} - \sum_{j\in\mathbb{S}_2} d\vartheta_{j,2}\wedge dI_{j,2} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1}} \frac{1}{j} dr_{j,1}\wedge dr_{-j,1} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2}} \frac{1}{j} dr_{j,2}\wedge dr_{-j,2}. \tag{5.4}$$

泊松括号定义为

$$\{F,G\} \triangleq \mathcal{W}(X_F, X_G) = \big\langle \nabla F, \mathbf{J}\nabla G\big\rangle, \tag{5.5}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是内积，定义为

$$\big\langle(\vartheta, I, z), (\underline{\vartheta}, \underline{I}, \underline{z})\big\rangle \triangleq \vartheta\cdot\underline{\vartheta} + I\cdot\underline{I} + \big\langle z, \underline{z}\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}.$$

泊松结构 $\mathbf{J}$ 对应于 $\mathcal{W}$，由恒等式 (5.5) 定义，是无界算子 or

$$\mathbf{J} : (\vartheta, I, z) \mapsto (\mathtt{J}I, -\mathtt{J}\vartheta, \mathcal{J}z),$$

其中 $\mathcal{J}$ 由 (3.14) 给出，并且

$$\mathtt{J} \triangleq \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{d_1} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{d_2}\end{pmatrix},$$

其中 $\mathrm{I}_{d_k}$ 是 $d_k$ 阶单位矩阵。现在我们将研究由 (5.3) 中的哈密顿量 $\mathcal{K}_\varepsilon$ 生成的哈密顿系统，该系统采用作用-角-正规变量 $(\vartheta, I, z) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbf{H}^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}$。我们考虑由下式定义的哈密顿量 $K_\varepsilon(\vartheta, I, z)$:

$$K_\varepsilon \triangleq \mathcal{K}_\varepsilon \circ \mathbf{A} \tag{5.6}$$

其中 A 是式 (1.19) 中定义的映射。由于 $\mathrm{L}_0$ 在 (4.44) 中稳定子空间 $\mathbf{H}^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}$，因此变量 $(\vartheta, I, z)$ 中的二次哈密顿量 $K_{\mathbf{L}_0}$（见 (4.72)）除一个常数外可写为:

$$\begin{aligned}
K_{\mathbf{L}_0}\circ\mathbf{A} &= -\sum_{j\in\mathbb{S}_1}\Omega_{j,1}(b)I_{j,1} + \sum_{j\in\mathbb{S}_2}\Omega_{j,2}(b)I_{j,2} + \frac{1}{2}\big\langle \mathbf{L}_0\, z, z\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}\\
&= -\big(\mathtt{J}\,\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\big)\cdot I + \frac{1}{2}\big\langle \mathbf{L}_0\, z, z\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

其中 $\omega_{\mathrm{Eq}}(b) \in \mathbb{R}^d$ 是未扰动切向频率向量。根据 (5.3) 和 (5.7)，式 (5.6) 中的哈密顿量$K_\varepsilon$ 可写为

$$\begin{aligned} &K_\varepsilon = \mathcal{N} + \varepsilon \mathcal{P}_\varepsilon, \qquad \text{with} \\ &\mathcal{N} \triangleq -\big(\mathtt{J}\,\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\big)\cdot I + \frac{1}{2}\big\langle \mathbf{L}_0\, z, z\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}, \qquad \mathcal{P}_\varepsilon \triangleq P_\varepsilon \circ \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

我们寻找一个嵌入的不变环面

$$i : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbf{H}^\perp_{\mathbb{S}_0}, \qquad \varphi \mapsto i(\varphi) \triangleq \big(\vartheta(\varphi), I(\varphi), z(\varphi)\big),$$

其中 $\vartheta(\varphi) - \varphi$ 是哈密顿向量场的一个 $(2\pi)^d$-周期函数

$$X_{K_\varepsilon} \triangleq \big(\mathtt{J}\partial_I K_\varepsilon, -\mathtt{J}\partial_\vartheta K_\varepsilon, \Pi^\perp_{\mathbb{S}_0}\mathcal{J}\nabla_z K_\varepsilon\big)$$

其上充满了具有丢番图频率向量 $\omega$ 的拟周期解。注意，对于值 $\varepsilon = 0$，哈密顿系统

$$\omega \cdot \partial_\varphi i(\varphi) = (X_{\mathcal{N}} + \varepsilon X_{\mathcal{P}_\varepsilon})(i(\varphi)) \tag{5.9}$$

对于参数 $b \in [0, b^*]$ 的任意取值，都具有不变环面

$$i_{\mathrm{flat}}(\varphi) \triangleq (\varphi, 0, 0),$$

只要 $\omega = -\omega_{\mathrm{Eq}}(b)$。现在，为了构造哈密顿系统 (5.9) 的一个不变环面，使其支持频率向量为 $\omega$、且接近于 $-\omega_{\mathrm{Eq}}(b)$ 的拟周期运动，我们将把问题表述为 [19] 中建立的“假想共轭的纳什-莫泽定理”。其做法是将频率 $\omega \in \mathbb{R}^d$ 用作参数，并在哈密顿量族中引入“反项” $\alpha \in \mathbb{R}^d$

$$K^\alpha_\varepsilon \triangleq \mathcal{N}_\alpha + \varepsilon \mathcal{P}_\varepsilon, \qquad \mathcal{N}_\alpha \triangleq \alpha \cdot I + \tfrac{1}{2}\big\langle \mathbf{L}_0\, z, z\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}. \tag{5.10}$$

$\alpha$ 的值将在迭代过程中进行调整，以便在线性层面控制哈密顿方程的 $I$分量的平均值

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(i,\alpha) \triangleq \mathcal{F}(i,\alpha,\omega,b,\varepsilon) &\triangleq \omega\cdot\partial_\varphi i(\varphi) - X_{K^\alpha_\varepsilon}(i(\varphi)) = \omega\cdot\partial_\varphi i(\varphi) - (X_{\mathcal{N}_\alpha} + \varepsilon X_{\mathcal{P}_\varepsilon})(i(\varphi)) \\ &= \begin{pmatrix} \omega\cdot\partial_\varphi\vartheta(\varphi) - \mathtt{J}\big(\alpha - \varepsilon\partial_I\mathcal{P}_\varepsilon(i(\varphi))\big) \\ \omega\cdot\partial_\varphi I(\varphi) + \varepsilon\mathtt{J}\partial_\vartheta\mathcal{P}_\varepsilon(i(\varphi)) \\ \omega\cdot\partial_\varphi z(\varphi) - \mathcal{J}\mathbf{L}_0 z(\varphi) - \varepsilon\mathcal{J}\nabla_z\mathcal{P}_\varepsilon(i(\varphi)) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

通过参数 $\alpha$ 所提供的这个自由度，将在方案的最后给出原问题的一个解 $(\omega, i)$；当参数取为 $\alpha = \mathtt{J}\,\omega_{\mathrm{Eq}}(b)$ 时，对任意 $b$ 取值，该解都存在于某个适当的康托集中。注意，(3.21) 中描述的对合 $\mathcal{S}$变为

$$\mathfrak{S} : (\vartheta, I, z) \mapsto (-\vartheta, I, \mathcal{S}z) \tag{5.12}$$

(3.24) 中的算子 $\mathscr{T}_{\mathtt{m}}$ 变为

$$\mathfrak{T}_{\mathtt{m}} : (\vartheta, I, z) \mapsto (\vartheta, I, \mathscr{T}_{\mathtt{m}} z). \tag{5.13}$$

此外，我们可以很容易地验证，哈密顿向量场 $X_{K^\alpha_\varepsilon}$ 关于 $\mathfrak{S}$是可逆的，并且关于 $\mathfrak{T}_{\mathtt{m}}$是 $\mathtt{m}$ 重保持的。因此，自然要寻找 $\mathcal{F}(i,\alpha) = 0$的 $\mathtt{m}$ 重可逆解，即满足

$$\vartheta(-\varphi) = -\vartheta(\varphi), \qquad I(-\varphi) = I(\varphi), \qquad z(-\varphi) = \big(\mathcal{S}z(\varphi)\big) \qquad \text{and} \qquad \mathscr{T}_{\mathtt{m}} z(\varphi) = z(\varphi). \tag{5.14}$$

下文中，我们用

$$\mathfrak{I}(\varphi) \triangleq i(\varphi) - (\varphi, 0, 0) = \big(\vartheta(\varphi) - \varphi, I(\varphi), z(\varphi)\big)$$

表示环面 $\varphi \mapsto i(\varphi)$ 的周期分量。本节最后总结哈密顿向量场所满足的一些温和估计

$$X_{\mathcal{P}_\varepsilon} \triangleq \big(\mathtt{J}\partial_I\mathcal{P}_\varepsilon, -\mathtt{J}\partial_\vartheta\mathcal{P}_\varepsilon, \Pi^\perp_{\mathbb{S}_0}\mathcal{J}\nabla_z\mathcal{P}_\varepsilon\big),$$

其中 $\mathcal{P}_\varepsilon$ 在 (5.8) 中定义。下一个引理的证明与利用引理 5.1 证明 [19, 引理 5.1] 的方式类似。

引理 5.2. 设 $b^*$、$\mathfrak{m}^*$ 如推论 4.1 中所述，$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}^*$，且 $(\gamma, q, s_0, s)$ 满足 (2.1)、(2.2) 和 (2.3)。存在 $\varepsilon_0 \in (0,1)$，使得如果

$$\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \qquad \text{and} \qquad \|\mathfrak{I}\|_{s_0+2}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \leqslant 1,$$

$t$当扰动哈密顿向量场$X_{\mathcal{P}_\varepsilon}$ 满足以下温和估计时 ，

$$\begin{aligned}
&(i)\|X_{\mathcal{P}_\varepsilon}(i)\|_{s}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim 1 + \|\mathfrak{I}\|_{s+2}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}; \quad (ii)\left\|d_i X_{\mathcal{P}_\varepsilon}(i)[\widehat{i}]\right\|_{s}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim \|\widehat{i}\|_{s+2}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \|\mathfrak{I}\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\|\widehat{i}\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}, \\
&(iii)\quad \left\|d_i^2 X_{\mathcal{P}_\varepsilon}(i)[\widehat{i},\widehat{i}]\right\|_{s}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim \|\widehat{i}\|_{s+2}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\|\widehat{i}\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \|\mathfrak{I}\|_{s+2}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\left(\|\widehat{i}\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\right)^2.
\end{aligned}$$

# 6 近似逆

为了利用 Nash-Moser 方案证明定理 1.1，我们必须为泛函 $\mathcal{F}$ 所对应的线性化算子构造一个近似右逆。该泛函定义于式 (5.11)，而构造须针对任意靠近平坦环面的 $\mathfrak{m}$ 重可逆状态 $(i_0, \alpha_0)$ 进行，

$$d_{(i,\alpha)}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0) = \omega\cdot\partial_\varphi i_0 - d_i X_{K_\varepsilon^{\alpha_0}}(i_0) - \begin{pmatrix} \mathtt{J}\widehat{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

为此，我们将采用 Berti-Bolle 方法来构造近似逆。该方法在 [12] 中提出，通过作用量-角变量分量和法向分量中的三角系统，将线性化方程“近似”解耦。在 [59, 的第 6] 节中，这一策略略作简化，省去了引入中间各向同性环面的步骤，直接处理原环面 $i_0$。这里，我们将严格遵循后一种做法，同时密切关注哈密顿结构的差异，因为这种差异源于向量框架。因此，为求完整起见，我们将重现所有代数计算；关于分析部分的更多细节（其与此处的分析非常相似），请参见 [59, 的第 6] 节。

我们首先引入相空间 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathtt{H}_{\mathbb{S}_0}^{\perp}$ 上的微分同胚 $G_0 : (\phi, y, w) \mapsto (\vartheta, I, z)$，定义如下：

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ I \\ z \end{pmatrix} \triangleq G_0 \begin{pmatrix} \phi \\ y \\ w \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \vartheta_0(\phi) \\ I_0(\phi) + L_1(\phi)y + L_2(\phi)w \\ z_0(\phi) + w \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

其中

$$L_1(\phi) \triangleq \mathtt{J}[\partial_\varphi \vartheta_0(\phi)]^{-\top}, \qquad L_2(\phi) \triangleq \mathtt{J}[(\partial_\vartheta \widetilde{z}_0)(\vartheta_0(\phi))]^{\top}\mathcal{J}^{-1}, \qquad \widetilde{z}_0(\vartheta) \triangleq z_0(\vartheta_0^{-1}(\vartheta)) \tag{6.3}$$

转置算子通过以下对偶关系定义：给定一个配备内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathtt{H}}$ 的希尔伯特空间 $\mathtt{H}$，以及一个线性算子 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathtt{H})$，

$$\forall\, u \in \mathtt{H}, \qquad \forall v \in \mathbb{R}^d, \qquad \left\langle A^{\top}u, v\right\rangle_{\mathbb{R}^d} \triangleq \left\langle u, Av\right\rangle_{\mathtt{H}}.$$

注意，在 新的坐标中，$i_0$ 变为平凡嵌入环面 $(\phi, y, w) = (\varphi, 0, 0)$，记 ly

$$G_0(\varphi, 0, 0) = i_0(\varphi).$$

下文将使用以下记号

- 我们用 $\mathtt{u} = (\phi, y, w)$ 表示由 $G_0$ 在 (6.2) 中诱导的坐标。
- 映射

  $$\mathtt{u}_0(\varphi) \triangleq G_0^{-1}(i_0)(\varphi) = (\varphi, 0, 0)$$

  指的是平凡环面

- 我们将记作

$$\widetilde{G}_0(\mathtt{u},\alpha)\triangleq\big(G_0(\mathtt{u}),\alpha\big)$$

在 $\alpha$ 分量上与恒等映射一致的微分同胚。

- 我们用“误差函数”来量化嵌入环面 $i_0(\mathbb{T})$ 对哈密顿向量场 $X_{K_\varepsilon^{\alpha_0}}$ 的近似不变性。

$$Z(\varphi)\triangleq(Z_1,Z_2,Z_3)(\varphi)\triangleq\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)(\varphi)=\omega\cdot\partial_\varphi i_0(\varphi)-X_{K_\varepsilon^{\alpha_0}}\big(i_0(\varphi)\big).\tag{6.4}$$

## 6.1 线性变量变换与辛结构的缺陷

在本小节中，我们将通过线性变量变换，将式 (6.1) 中的线性化算子 $d_{i,\ \alpha}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)$ 共轭为

$$D G_0(\mathtt{u}_0(\varphi))\begin{pmatrix}\widehat{\phi}\\ \widehat{y}\\ \widehat{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi) & 0 & 0\\ \partial_\varphi I_0(\varphi) & L_1(\varphi) & L_2(\varphi)\\ \partial_\varphi z_0(\varphi) & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\phi}\\ \widehat{y}\\ \widehat{w}\end{pmatrix},\tag{6.5}$$

一个误差幅度为 $Z=\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)$ 的三角系统。主要结果如下。

命题 6.1. 在线性变量变换 $DG_0(\mathtt{u}_0)$ 下，线性化算子 $d_{i,\ \alpha}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)$ 被变换为

$$[DG_0(\mathtt{u}_0)]^{-1}d_{(i,\alpha)}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)D\widetilde{G}_0(\mathtt{u}_0)[\widehat{\phi},\widehat{y},\widehat{w},\widehat{\alpha}]=\mathbb{D}[\widehat{\phi},\widehat{y},\widehat{w},\widehat{\alpha}]+\mathbb{E}[\widehat{\phi},\widehat{y},\widehat{w}]\tag{6.6}$$

其中

1. 算子 $\mathbb{D}$ 具有如下三角形式

$$\mathbb{D}[\widehat{\phi},\widehat{y},\widehat{w},\widehat{\alpha}]\triangleq\begin{pmatrix}\omega\cdot\partial_\varphi\widehat{\phi}-\big[K_{20}(\varphi)\widehat{y}+K_{11}^\top(\varphi)\widehat{w}+L_1^\top(\varphi)\widehat{\alpha}\big]\\ \omega\cdot\partial_\varphi\widehat{y}+\mathcal{B}(\varphi)\widehat{\alpha}\\ \omega\cdot\partial_\varphi\widehat{w}-\mathcal{J}\big[K_{11}(\varphi)\widehat{y}+K_{02}(\varphi)\widehat{w}+L_2^\top(\varphi)\widehat{\alpha}\big]\end{pmatrix},$$

$\mathcal{B}(\varphi)$ 和 $K_{20}(\varphi)$ 是实矩阵，

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\varphi)&\triangleq L_1^{-1}(\varphi)\partial_\varphi I_0(\varphi)L_1^\top(\varphi)+[\partial_\varphi z_0(\varphi)]^\top L_2^\top(\varphi),\\ K_{20}(\varphi)&\triangleq\varepsilon L_1^\top(\varphi)(\partial_{II}\mathcal{P}_\varepsilon)(i_0(\varphi))L_1(\varphi)\,,\end{aligned}$$

$K_{02}(\varphi)$ 是 $\mathrm{H}^\perp_{\mathbb{S}_0}$ 上的线性自伴算子，由下式给出

$$\begin{aligned}K_{02}(\varphi)\triangleq{}&(\partial_z\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))+\varepsilon L_2^\top(\varphi)(\partial_{II}\mathcal{P}_\varepsilon)(i_0(\varphi))L_2(\varphi)\\ &+\varepsilon L_2^\top(\varphi)(\partial_{zI}\mathcal{P}_\varepsilon)(i_0(\varphi))+\varepsilon(\partial_I\nabla_z\mathcal{P}_\varepsilon)(i_0(\varphi))L_2(\varphi),\end{aligned}\tag{6.7}$$

以及 $K_{11}(\varphi)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathrm{H}^\perp_{\mathbb{S}_0})$，

$$K_{11}(\varphi)\triangleq\varepsilon L_2^\top(\varphi)(\partial_{II}\mathcal{P}_\varepsilon)(i_0(\varphi))L_1(\varphi)+\varepsilon(\partial_I\nabla_z\mathcal{P}_\varepsilon)(i_0(\varphi))L_1(\varphi),$$

2. 余项 $\mathbb{E}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widehat{\phi},\widehat{y},\widehat{w}]\triangleq{}&[DG_0(\mathtt{u}_0)]^{-1}\partial_\varphi Z(\varphi)\widehat{\phi}\\ &+\begin{pmatrix}0\\ \mathcal{A}(\varphi)\big[K_{20}(\varphi)\widehat{y}+K_{11}^\top(\varphi)\widehat{w}\big]-R_{10}(\varphi)\widehat{y}-R_{01}(\varphi)\widehat{w}\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{A}(\varphi)$ 和 $R_{10}(\varphi)$ 是 $d\times d$ 实矩阵，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\varphi)&\triangleq[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^\top\mathtt{J}\partial_\varphi I_0(\varphi)-[\partial_\varphi I_0(\varphi)]^\top\mathtt{J}\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)-[\partial_\varphi z_0(\varphi)]^\top\mathcal{J}^{-1}\partial_\varphi z_0(\varphi),\\ R_{10}(\varphi)&\triangleq[\partial_\varphi Z_1(\varphi)]^\top[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top},\end{aligned}$$

以及 $R_{01}(\varphi)\in\mathcal{L}(\mathrm{H}^\perp_{\mathbb{S}_0},\mathbb{R}^d)$，

$$R_{01}(\varphi)\triangleq[\partial_\varphi Z_1(\varphi)]^\top[(\partial_\vartheta\widetilde{z}_0)(\vartheta_0(\varphi))]^\top\mathcal{J}^{-1}-[\partial_\varphi Z_3(\varphi)]^\top\mathcal{J}^{-1}\,.$$

证明。在 (5.11) 中，非线性算子 $\mathcal{F}$ 与映射 $G_0$ 的复合为

$$\mathcal{F}(G_0(\mathtt{u}(\varphi)),\alpha)=\omega\cdot\partial_\varphi\big(G_0(\mathtt{u}(\varphi))\big)-X_{K_\varepsilon^\alpha}\big(G_0(\mathtt{u}(\varphi))\big). \tag{6.8}$$

于是，在方向 $(\widehat{\mathtt{u}}\ \widehat{\alpha})$ 上对 (6.8) 在 $(\mathtt{u}_0,\alpha_0)$ 处求导，得到

$$\begin{aligned} d_{(\mathtt{u},\alpha)}(\mathcal{F}\circ G_0)(\mathtt{u}_0,\alpha_0)[(\widehat{\mathtt{u}},\widehat{\alpha})](\varphi)&=\omega\cdot\partial_\varphi\big(DG_0(\mathtt{u}_0)\widehat{\mathtt{u}}\big)-\partial_\phi\big[X_{K_\varepsilon^{\alpha_0}}\big(G_0(\mathtt{u}(\varphi))\big)\big]_{\mathtt{u}=\mathtt{u}_0}\widehat{\phi}\\ &\quad-\partial_y\big[X_{K_\varepsilon^{\alpha_0}}\big(G_0(\mathtt{u}(\varphi))\big)\big]_{\mathtt{u}=\mathtt{u}_0}\widehat{y}-\partial_w\big[X_{K_\varepsilon^{\alpha_0}}\big(G_0(\mathtt{u}(\varphi))\big)\big]_{\mathtt{u}=\mathtt{u}_0}\widehat{w}-\begin{pmatrix}\mathtt{J}\widehat{\alpha}\\0\\0\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

由 (6.5) 可知,

$$\omega\cdot\partial_\varphi\big(DG_0(\mathtt{u}_0)[\widehat{\mathtt{u}}](\varphi)\big)=DG_0(\mathtt{u}_0)\,\omega\cdot\partial_\varphi\widehat{\mathtt{u}}+\partial_\varphi\big(\omega\cdot\partial_\varphi i_0\big)\widehat{\phi}+\begin{pmatrix}0\\(\omega\cdot\partial_\varphi L_1(\varphi))\widehat{y}+\big(\omega\cdot\partial_\varphi L_2(\varphi)\big)\widehat{w}\\0\end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

由 (6.3)–(6.4) 可得

$$\begin{aligned} \omega\cdot\partial_\varphi L_1(\varphi)&=-\mathtt{J}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}(\omega\cdot\partial_\varphi[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^\top)[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}\\ &=-\mathtt{J}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}\Big(\big[\partial_\varphi Z_1(\varphi)\big]^\top+\big[\partial_\varphi\big((\partial_I K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\big)\big]^\top\mathtt{J}\Big)[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

注意，由 (6.3) 可知，我们有恒等式

$$\partial_\varphi z_0(\varphi)=(\partial_\vartheta\widetilde{z}_0)(\vartheta_0(\varphi))\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi). \tag{6.12}$$

因此，算子 $L_2(\varphi)$ 可写为

$$L_2(\varphi)=\mathtt{J}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}[\partial_\varphi z_0(\varphi)]^\top\mathcal{J}^{-1}=L_1(\varphi)[\partial_\varphi z_0(\varphi)]^\top\mathcal{J}^{-1}. \tag{6.13}$$

由最后两个恒等式可得

$$\begin{aligned} \omega\cdot\partial_\varphi L_2(\varphi)&=-\mathtt{J}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}(\omega\cdot\partial_\varphi[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^\top)[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}[\partial_\varphi z_0(\varphi)]^\top\mathcal{J}^{-1}\\ &\quad+\mathtt{J}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}[\partial_\varphi(\omega\cdot\partial_\varphi z_0)(\varphi)]^\top\mathcal{J}^{-1} \end{aligned}$$

由 (6.4) 可得

$$\begin{aligned} \omega\cdot\partial_\varphi L_2(\varphi)&=-\mathtt{J}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}\Big(\big[\partial_\varphi Z_1(\varphi)\big]^\top+\big[\partial_\varphi\big((\partial_I K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\big)\big]^\top\Big)L_2(\varphi)\\ &\quad+\mathtt{J}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}\Big(\big[\partial_\varphi Z_3(\varphi)\big]^\top-\big[\partial_\varphi\big((\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\big)\big]^\top\Big). \end{aligned} \tag{6.14}$$

综合 (6.10)、(6.11) 和 (6.14) 可得

$$\begin{aligned} \omega\cdot\partial_\varphi\big(DG_0(\mathtt{u}_0)[\widehat{\mathtt{u}}](\varphi)\big)&=DG_0(\mathtt{u}_0)\,\omega\cdot\partial_\varphi\widehat{\mathtt{u}}+\partial_\varphi\big(\omega\cdot\partial_\varphi i_0\big)\widehat{\phi}\\ &\quad-\begin{pmatrix}0\\\mathtt{J}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}\Big(\big[\mathcal{C}_I(\varphi)L_1(\varphi)+R_{10}(\varphi)\big]\widehat{y}+\big[\mathcal{C}_I(\varphi)L_2(\varphi)+\mathcal{C}_z(\varphi)+R_{01}(\varphi)\big]\widehat{w}\Big)\\0\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.15}$$

其中 $R_{10}(\varphi)$ 和 $R_{01}(\varphi)$ 由 (ii) 给出，并且

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_I(\varphi)&\triangleq\big[\partial_\varphi\big((\partial_I K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\big)\big]^\top \qquad (6.16)\\ &=[\partial_\varphi I_0(\varphi)]^\top(\partial_{II}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))+[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^\top(\partial_{\vartheta I}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))+[\partial_\varphi z_0(\varphi)]^\top(\partial_I\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi)),\\ \mathcal{C}_z(\varphi)&\triangleq\big[\partial_\varphi\big((\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\big)\big]^\top \qquad (6.17)\\ &=[\partial_\varphi I_0(\varphi)]^\top(\partial_{zI}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))+[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^\top(\partial_{z\vartheta}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))+[\partial_\varphi z_0(\varphi)]^\top(\partial_z\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi)). \end{aligned}$$

根据 (5.11) 和 (6.2)，可写为

$$\partial_\phi\big[X_{K_\varepsilon^{\alpha_0}}\big(G_0(\mathtt{u}(\varphi))\big)\big]_{\mathtt{u}=\mathtt{u}_0}\widehat{\phi}=\partial_\varphi\big[X_{K_\varepsilon^{\alpha_0}}(i_0(\varphi))\big]\widehat{\phi},$$

$$\partial_y\big[X_{K_\varepsilon^{\alpha_0}}\big(G_0(\mathtt{u}(\varphi))\big)\big]_{\mathtt{u}=\mathtt{u}_0}\widehat{y}=\begin{pmatrix}\mathtt{J}(\partial_{II}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_1(\varphi)\widehat{y}\\ -\mathtt{J}(\partial_{I\vartheta}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_1(\varphi)\widehat{y}\\ \mathcal{J}\big[(\partial_I\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_1(\varphi)\widehat{y}\big]\end{pmatrix},$$

$$\partial_w\big[X_{K_\varepsilon^{\alpha_0}}\big(G_0(\mathtt{u}(\varphi))\big)\big]_{\mathtt{u}=\mathtt{u}_0}\widehat{w}=\begin{pmatrix}(\mathtt{J}\partial_{II}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_2(\varphi)\widehat{w}+\mathtt{J}(\partial_{zI}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\widehat{w}\\ -\mathtt{J}(\partial_{I\vartheta}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_2(\varphi)\widehat{w}-\mathtt{J}(\partial_{z\vartheta}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\widehat{w}\\ \mathcal{J}\big[(\partial_I\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_2(\varphi)\widehat{w}+(\partial_z\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\widehat{w}\big]\end{pmatrix}.$$

因此，将（6.15）和最后三个恒等式代入（6.9），可得

$$\begin{aligned}d_{(\mathtt{u},\alpha)}(\mathcal{F}\circ G_0)(\mathtt{u}_0,\alpha_0)[(\widehat{\mathtt{u}},\widehat{\alpha})]&=DG_0(\mathtt{u}_0)\,\omega\cdot\partial_\varphi\widehat{\mathtt{u}}+\partial_\varphi\big[\mathcal{F}(i_0(\varphi))\big]\widehat{\phi}\\
&+\begin{pmatrix}-\mathtt{J}(\partial_{II}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_1(\varphi)\widehat{y}\\ \mathtt{J}(\partial_{I\vartheta}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_1(\varphi)\widehat{y}-\mathtt{J}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}[\mathcal{C}_I(\varphi)L_1(\varphi)+R_{10}(\varphi)]\widehat{y}\\ -\mathcal{J}(\partial_I\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_1(\varphi)\widehat{y}\end{pmatrix}\\
&+\begin{pmatrix}-\mathtt{J}(\partial_{II}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_2(\varphi)\widehat{w}-\mathtt{J}(\partial_{zI}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\widehat{w}\\ \big[\mathtt{J}(\partial_{I\vartheta}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_2(\varphi)+\mathtt{J}(\partial_{z\vartheta}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\big]\widehat{w}\\ -\mathcal{J}\big[(\partial_I\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_2(\varphi)\widehat{w}+(\partial_z\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\widehat{w}\big]\end{pmatrix}\\
&-\begin{pmatrix}0\\ \mathtt{J}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-\top}\big[\mathcal{C}_I(\varphi)L_2(\varphi)+\mathcal{C}_z(\varphi)+R_{01}(\varphi)\big]\widehat{w}\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathtt{J}\widehat{\alpha}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{6.18}$$

由（6.5）、（6.12）和（6.13）可容易验证

$$[DG_0(\mathtt{u}_0)]^{-1}=\begin{pmatrix}[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-1} & 0 & 0\\ -\mathcal{B}(\varphi)\mathtt{J} & [\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^\top\mathtt{J} & -[\partial_\varphi z_0(\varphi)]^\top\mathcal{J}^{-1}\\ -(\partial_\vartheta\widetilde{z}_0)(\vartheta_0(\varphi)) & 0 & I\end{pmatrix}$$

其中，$\mathcal{B}(\varphi)$ 由（i）给出。最后，对（6.18）应用 $[DG_0(\mathtt{u}_0)]^{-1}$ 并利用（6.16）、（6.17），可得

$$\begin{aligned}[DG_0(\mathtt{u}_0)]^{-1}d_{(\mathtt{u},\alpha)}(\mathcal{F}\circ G_0)(\mathtt{u}_0,\alpha_0)[\widehat{\mathtt{u}}\ \widehat{\alpha}]&=\omega\cdot\partial_\varphi\widehat{\mathtt{u}}+[DG_0(\mathtt{u}_0)]^{-1}\partial_\varphi\big[\mathcal{F}(i_0(\varphi))\big]\widehat{\phi}\\
&+\begin{pmatrix}-K_{20}(\varphi)\widehat{y}\\ \mathcal{A}(\varphi)K_{20}(\varphi)\widehat{y}-R_{10}(\varphi)\widehat{y}\\ -\mathcal{J}K_{11}(\varphi)\widehat{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-K_{11}^\top(\varphi)\widehat{w}\\ \mathcal{A}(\varphi)K_{11}^\top(\varphi)\widehat{w}-R_{01}(\varphi)\widehat{w}\\ -\mathcal{J}K_{02}(\varphi)\widehat{w}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-[\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)]^{-1}\mathtt{J}\widehat{\alpha}\\ \mathcal{B}(\varphi)\widehat{\alpha}\\ [(\partial_\vartheta\widetilde{z}_0)(\vartheta_0(\varphi))]\mathtt{J}\widehat{\alpha}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中，$\mathcal{A}(\varphi)$ 定义于（ii），并满足 $\mathcal{B}(\varphi)=\mathcal{A}(\varphi)L_1^\top(\varphi)+[\partial_\varphi I_0(\varphi)]^\top$，且

$$\begin{aligned}K_{20}(\varphi)&\triangleq L_1^\top(\varphi)(\partial_{II}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_1(\varphi),\\
K_{11}(\varphi)&\triangleq L_2^\top(\varphi)(\partial_{II}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_1(\varphi)+(\partial_I\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_1(\varphi),\\
K_{02}(\varphi)&\triangleq(\partial_z\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))+L_2^\top(\varphi)(\partial_{II}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_2(\varphi)+L_2^\top(\varphi)(\partial_{zI}K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))\\
&\quad+(\partial_I\nabla_z K_\varepsilon^{\alpha_0})(i_0(\varphi))L_2(\varphi).\end{aligned}$$

这到　再结合 (5.10)，即可得到所需的恒等式，从而完成命题 6.1 的证明　　. □

接下来，为了证明余项 $\mathbb{E}$ 的量级为 $Z$，我们将证明命题 6.1-(ii) 中定义的矩阵 $\mathcal{A}$，在某个类似康托尔集上的精确解处，除了一个指数小的余项外为零。具体而言，我们将证明以下引理。

引理 6.1。矩阵 $\mathcal{A}$ 的系数由下式给出

$$\mathcal{A}_{kj}(\varphi)\triangleq[\mathtt{J}\partial_{\varphi_j}I_0(\varphi)]\cdot\partial_{\varphi_k}\vartheta_0(\varphi)-[\mathtt{J}\partial_{\varphi_j}\vartheta_0(\varphi)]\cdot\partial_{\varphi_k}I_0(\varphi)-\big\langle\mathcal{J}^{-1}\partial_{\varphi_j}z_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}z_0(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}.$$

对所有 $\varphi\in\mathbb{T}^d$，均满足：

$$\begin{aligned}\omega\cdot\partial_\varphi\mathcal{A}_{kj}(\varphi)&=[\mathtt{J}\partial_{\varphi_j}Z_2(\varphi)]\cdot\partial_{\varphi_k}\vartheta_0(\varphi)-[\mathtt{J}\partial_{\varphi_j}Z_1(\varphi)]\cdot\partial_{\varphi_k}I_0(\varphi)-\big\langle\mathcal{J}^{-1}\partial_{\varphi_j}Z_3(\varphi),\partial_{\varphi_k}z_0(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}\\
&\quad+[\mathtt{J}\partial_{\varphi_j}I_0(\varphi)]\cdot\partial_{\varphi_k}Z_2(\varphi)-[\mathtt{J}\partial_{\varphi_j}\vartheta_0(\varphi)]\cdot\partial_{\varphi_k}Z_1(\varphi)-\big\langle\mathcal{J}^{-1}\partial_{\varphi_j}z_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}Z_3(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

其中 $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的典范基。

证明。由系数 $\mathcal{A}_{kj}$ 的表达式可得

$$\begin{aligned}\omega\cdot\partial_\varphi\mathcal{A}_{kj}(\varphi)=&\big\langle \mathtt{J}\partial_{\varphi_j}\omega\cdot\partial_\varphi I_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}\vartheta_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}+\big\langle \mathtt{J}\partial_{\varphi_j} I_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}\omega\cdot\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\\&-\big\langle \mathtt{J}\partial_{\varphi_j}\omega\cdot\partial_\varphi\vartheta_0(\varphi),\partial_{\varphi_k} I_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}-\big\langle \mathtt{J}\partial_{\varphi_j}\vartheta_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}\omega\cdot\partial_\varphi I_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\\&-\big\langle \mathcal{J}^{-1}\partial_{\varphi_j}\omega\cdot\partial_\varphi z_0(\varphi),\partial_{\varphi_k} z_0(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}-\big\langle \mathcal{J}^{-1}\partial_{\varphi_j} z_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}\omega\cdot\partial_\varphi z_0(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

由 (6.4) 可得

$$\begin{aligned}\omega\cdot\partial_\varphi\mathcal{A}_{kj}(\varphi)=&\big\langle \mathtt{J}\partial_{\varphi_j} Z_2(\varphi),\partial_{\varphi_k}\vartheta_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}+\big\langle \mathtt{J}\partial_{\varphi_j} I_0(\varphi),\partial_{\varphi_k} Z_1(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\\&-\big\langle \mathtt{J}\partial_{\varphi_j} Z_1(\varphi),\partial_{\varphi_k} I_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}-\big\langle \mathtt{J}\partial_{\varphi_j}\vartheta_0(\varphi),\partial_{\varphi_k} Z_2(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\\&-\big\langle \mathcal{J}^{-1}\partial_{\varphi_j} z_0(\varphi),\partial_{\varphi_k} Z_3(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}-\big\langle \mathcal{J}^{-1}\partial_{\varphi_j} Z_3(\varphi),\partial_{\varphi_k} z_0(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}\\&+\mathcal{B}^1_{kj}(\varphi)+\mathcal{B}^2_{kj}(\varphi)+\mathcal{B}^3_{kj}(\varphi),\end{aligned}\tag{6.19}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^1_{kj}(\varphi)&\triangleq-\big\langle\partial_{\varphi_j}(\partial_I K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi)),\partial_{\varphi_k} I_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}+\big\langle\partial_{\varphi_j} I_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}(\partial_I K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\big\rangle_{\mathbb{R}^d},\\ \mathcal{B}^2_{kj}(\varphi)&\triangleq-\big\langle\partial_{\varphi_j}(\partial_\vartheta K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi)),\partial_{\varphi_k}\vartheta_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}+\big\langle\partial_{\varphi_j}\vartheta_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}(\partial_\vartheta K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\big\rangle_{\mathbb{R}^d},\\ \mathcal{B}^3_{kj}(\varphi)&\triangleq\big\langle\partial_{\varphi_j} z_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}(\nabla_z K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}-\big\langle\partial_{\varphi_j}(\nabla_z K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi)),\partial_{\varphi_k} z_0(\varphi)\big\rangle_{L^2\times L^2}.\end{aligned}$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^1_{kj}(\varphi)=&-\big\langle(\partial_{I\vartheta}K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_j}\vartheta_0(\varphi),\partial_{\varphi_k} I_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}-\big\langle(\partial_{zI}K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_j} z_0(\varphi),\partial_{\varphi_k} I_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\\&+\big\langle\partial_{\varphi_j} I_0(\varphi),(\partial_{I\vartheta}K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_k}\vartheta_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}+\big\langle\partial_{\varphi_j} I_0(\varphi),(\partial_{Iz}K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_k} z_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d},\\ \mathcal{B}^2_{kj}(\varphi)=&-\big\langle(\partial_{I\vartheta}K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_j} I_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}\vartheta_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}-\big\langle(\partial_{z\vartheta}K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_j} z_0(\varphi),\partial_{\varphi_k}\vartheta_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}\\&+\big\langle\partial_{\varphi_j}\vartheta_0(\varphi),(\partial_{I\vartheta}K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_k} I_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d}+\big\langle\partial_{\varphi_j}\vartheta_0(\varphi),(\partial_{\vartheta z}K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_k} z_0(\varphi)\big\rangle_{\mathbb{R}^d},\\ \mathcal{B}^3_{kj}(\varphi)=&\big\langle(\partial_I\nabla_z K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_k} I_0(\varphi),\partial_{\varphi_j} z_0(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}\\&-\big\langle\partial_{\varphi_k} z_0(\varphi),(\partial_I\nabla_z K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_j} I_0(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}\\&+\big\langle(\partial_\vartheta\nabla_z K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_k}\vartheta_0(\varphi),\partial_{\varphi_j} z_0(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}\\&-\big\langle\partial_{\varphi_k} z_0(\varphi),(\partial_\vartheta\nabla_z K^{\alpha_0}_\varepsilon)(i_0(\varphi))\partial_{\varphi_j}\vartheta_0(\varphi)\big\rangle_{L^2(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

结合上述三个恒等式可得

$$\mathcal{B}^1_{kj}(\varphi)+\mathcal{B}^2_{kj}(\varphi)+\mathcal{B}^3_{kj}(\varphi)=0.$$

结合 (6.19)，即可完成该引理的证明。 □

我们将序列 $(N_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ 定义为

$$N_{-1}\triangleq 1,\qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad N_n\triangleq N_0^{\left(\frac{3}{2}\right)^n},\qquad \text{with}\qquad N_0\geqslant 2.\tag{6.20}$$

下面的引理在 [19, 引理 5.3] 和 [59, 引理 6.2] 中得到证明。

引理 6.2. 在引理 6.1 中定义的系数 $\mathcal{A}_{jk}$ 分解为

$$\mathcal{A}_{kj}=\mathcal{A}^{(n)}_{kj}+\mathcal{A}^{(n),\perp}_{kj},\qquad with\qquad \mathcal{A}^{(n)}_{kj}\triangleq\Pi_{N_n}\mathcal{A}_{kj}\qquad and\qquad \mathcal{A}^{(n),\perp}_{kj}\triangleq\Pi^\perp_{N_n}\mathcal{A}_{kj}.\tag{6.21}$$

此外，以下性质成立。

1. 对任意 $s\in\mathbb{R}$，函数 $\mathcal{A}^{(n)}{}^{\perp}_{,kj}$ 满足，

$$\forall\,\mathtt{b}\geqslant 0,\quad \|\mathcal{A}^{(n),\perp}_{kj}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s\lesssim N_n^{-\mathtt{b}}\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1+\mathtt{b}}.$$

2. 存在函数 $\mathcal{A}^{(n)}_{,kj}{}^{\mathrm{ext}}$，其对任意 $(b,\omega)\in\mathcal{O}$ 均有定义，并且对任意 $s\geqslant s_0$，满足估计

$$\|\mathcal{A}^{(n),\mathrm{ext}}_{kj}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\lesssim\gamma^{-1}\big(\|Z\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\tau_1(q+1)+1}+\|Z\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+1}\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\tau_1(q+1)+1}\big)\,.$$

此外，$\mathcal{A}^{(n)}_{,\ kj}{}^{\mathrm{ext}}$ 在康托集上与 $\mathcal{A}^{(n)}_{kj}$ 重合

$$\mathtt{DC}_{N_n}(\gamma,\tau_1)\triangleq\bigcap_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\\|l|\leqslant N_n}}\Big\{\omega\in\mathbb{R}^d\quad\text{s.t.}\quad|\omega\cdot l|\geqslant\tfrac{\gamma}{\langle l\rangle^{\tau_1}}\Big\}.\tag{6.22}$$

## 6.2 近似逆的构造

根据命题 6.1-(ii) 和引理 6.2，在精确解处，误差项 $\mathbb{E}$ 为零；在康托集 $\mathtt{DC}_{N_n}(\gamma,\tau_1)$ 上，仅有一个指数级小的余项。因此，为了求得 (6.6) 中线性算子的一个近似逆，只需对算子 $\mathbb{D}$ 作近似求逆，该算子是三角形的。更确切地说，我们先对线性系统 $\mathbb{D}[\widehat{u}]=(g_1,g_2,g_3)$ 中的作用分量方程求逆，该方程与其他方程解耦，

$$\omega\cdot\partial_\varphi\widehat{y}=g_2-\mathcal{B}(\varphi)\widehat{\alpha}.$$

然后，我们将求解最后一个法向分量方程

$$\omega\cdot\partial_\varphi\widehat{w}-\mathcal{J}K_{02}(\varphi)\widehat{w}=g_3+\mathcal{J}\big[K_{11}(\varphi)\widehat{y}+L_2^{\top}(\varphi)\widehat{\alpha}\big].$$

为此，我们需要在参数集合限制为类康托集时，求得法向方向上线性化算子的一个近似右逆

$$\widehat{\mathcal{L}}\triangleq\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}\big(\omega\cdot\partial_\varphi-\mathcal{J}K_{02}(\varphi)\big)\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}\tag{6.23}$$

其中，投影算子 $\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}$ 是 (1.17) 中定义的投影算子。最后，在选择 $\widehat{\alpha}$ 使得方程具有零平均值后，我们将求解 $\mathbb{D}[\widehat{u}]=(g_1,g_2,g_3)$ 中的第一个方程。

下面的命题简要陈述了法向方向上的可逆性；$\widehat{\ }$算子 $\mathcal{L}$ 的近似右逆的构造将在第 7 节讨论。关于 Cantor 型集合的详细描述及精确陈述，参见命题 7.6。

命题 6.2. 给定条件 (2.2)、(2.3)、(7.42) 和 (7.43)，存在 $\sigma_5,\sigma_5(\tau_1,\tau_2,q,d)>0$，使得若

$$\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_h+\sigma_5}\leqslant 1,$$

则存在一族定义在 $\mathcal{O}$ 上的线性算子 $\big(\widehat{\mathtt{T}}_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$，并满足估计

$$\forall\, s\in[s_0,S],\quad\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\widehat{\mathtt{T}}_n\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\lesssim\gamma^{-1}\left(\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\sigma_5}+\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\sigma_5}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+\sigma_5}\right)$$

并且，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，有如下分解

$$\widehat{\mathcal{L}}=\widehat{\mathtt{L}}_n+\widehat{\mathtt{R}}_n,\qquad\text{with}\qquad\widehat{\mathtt{L}}_n\widehat{\mathtt{T}}_n=\mathrm{Id},$$

在康托集 $\mathtt{G}_n$、$\mathtt{G}_n(\gamma,\tau_1,\tau_2,i_0)\subset\mathtt{DC}_{N_n}(\gamma,\tau_1)\times(b_*,b^*)$中，其中算子 $\widehat{\ }\mathtt{L}_n$和 $\widehat{\ }\mathtt{R}_n$在 $\mathcal{O}$ 中定义，并满足

$$\begin{aligned}
&\forall s\in[s_0,S],\quad\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\widehat{\mathtt{L}}_n\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\lesssim\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1}+\varepsilon\gamma^{-2}\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\sigma_5}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+1},\\
&\forall s\in[s_0,S],\quad\|\widehat{\mathtt{R}}_n\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}\lesssim N_n^{s_0-s}\gamma^{-1}\left(\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\sigma_5}+\varepsilon\gamma^{-2}\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\sigma_5}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+\sigma_5}\right)\\
&\qquad\qquad+\varepsilon\gamma^{-3}N_0^{\mu_2}N_{n+1}^{-\mu_2}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+\sigma_5}.
\end{aligned}$$

主要目标是为 (6.6) 中的算子 $[DG_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1}d_{(i,\alpha)}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)D\widetilde{G}_0(\mathfrak{u}_0)$ 求一个近似逆。为此，由于我们只要求有限多个非共振条件 (6.22)，对于任意$\omega\in\mathbb{R}^d$，将 $\omega\cdot\partial_\varphi$ 分解为

$$\omega\cdot\partial_\varphi=\mathcal{D}_{(n)}+\mathcal{D}_{(n)}^{\perp},\qquad \mathcal{D}_{(n)}\triangleq\omega\cdot\partial_\varphi\,\Pi_{N_n}+\Pi_{N_n,\mathtt{g}}^{\perp},\qquad \mathcal{D}_{(n)}^{\perp}\triangleq\omega\cdot\partial_\varphi\,\Pi_{N_n}^{\perp}-\Pi_{N_n,\mathtt{g}}^{\perp},\tag{6.24}$$

其中

$$\Pi_{N_n,\mathtt{g}}^{\perp}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}h_l\mathbf{e}_l\triangleq\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\\ |l|>N_n}}\mathtt{g}(l)h_l\mathbf{e}_l.$$

函数 $\mathtt{g}:\ \mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\to\{-1,1\}$ 对所有 $l=(l_1,\cdots,l_d)\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$，定义为向量 $l$ 中第一个非零分量的符号。因此，它满足

$$\forall l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},\quad \mathtt{g}(-l)=-\mathtt{g}(l).$$

这里使用投影算子 $\Pi_{N_n,\mathtt{g}}^{\perp}$，而非 $\Pi_{N_n}^{\perp}$，以保持可逆性。于是，根据命题 6.1、恒等式 (6.21)-(6.24) 以及命题 6.2，我们得到以下分解

$$[DG_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1}d_{(i,\alpha)}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)D\widetilde{G}_0(\mathfrak{u}_0)=\mathbb{D}_n+\mathbb{E}_n+\mathscr{P}_n+\mathscr{Q}_n,\tag{6.25}$$

with

$$\mathbb{D}_n[\widehat{\phi},\widehat{y},\widehat{w},\widehat{\alpha}]\triangleq\begin{pmatrix}\mathcal{D}_{(n)}\widehat{\phi}-K_{20}\widehat{y}-K_{11}^{\top}\widehat{w}-L_1^{\top}\widehat{\alpha}\\ \mathcal{D}_{(n)}\widehat{y}+\mathcal{B}\widehat{\alpha}\\ \widehat{\mathtt{L}}_{\omega,n}\widehat{w}-\mathcal{J}\big[K_{11}\widehat{y}+L_2^{\top}\widehat{\alpha}\big]\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{E}_n[\widehat{\phi},\widehat{y},\widehat{w}]\triangleq[DG_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1}[\partial_\varphi Z]\widehat{\phi}+\begin{pmatrix}0\\ \mathcal{A}^{(n)}\big[K_{20}\widehat{y}+K_{11}^{\top}\widehat{w}\big]-R_{10}\widehat{y}-R_{01}\widehat{w}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\mathscr{P}_n[\widehat{\phi},\widehat{y},\widehat{w}]\triangleq\begin{pmatrix}\mathcal{D}_{(n)}^{\perp}\widehat{\phi}\\ \mathcal{D}_{(n)}^{\perp}\widehat{y}+\mathcal{A}^{(n),\perp}\big[K_{20}\widehat{y}+K_{11}^{\top}\widehat{w}\big]\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathscr{Q}_n[\widehat{\phi},\widehat{y},\widehat{w}]\triangleq\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \widehat{\mathtt{R}}_n[\widehat{w}]\end{pmatrix},$$

其中 $\mathcal{A}^{(n)}$ 和 $\mathcal{A}^{(n),\perp}$ 分别是系数为 $\mathcal{A}_{kj}^{(n)}$ 和 $\mathcal{A}^{(n)}{}_{,kj}^{\ \perp}$ 的矩阵，见 (6.21)。我们将线性算子 $\mathbb{L}_{\mathrm{ext}}$ 定义为

$$\mathbb{L}_{\mathrm{ext}}\triangleq\mathbb{D}_n+\mathbb{E}_n^{\mathrm{ext}}+\mathscr{P}_n+\mathscr{Q}_n,\tag{6.26}$$

其中，算子 $\mathbb{E}_n^{\mathrm{ext}}$ 在整个参数集合 $\mathcal{O}$ 上的精确解处取零，其定义为

$$\mathbb{E}_n^{\mathrm{ext}}[\widehat{\phi},\widehat{y},\widehat{w}]\triangleq[DG_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1}[\partial_\varphi Z]\widehat{\phi}+\begin{pmatrix}0\\ \mathcal{A}^{(n),\mathrm{ext}}\big[K_{20}(\varphi)\widehat{y}+K_{11}^{\top}\widehat{w}\big]-R_{10}\widehat{y}-R_{01}\widehat{w}\\ 0\end{pmatrix},$$

其中 $\mathcal{A}^{(n),\mathrm{ext}}$ 是系数为 $\mathcal{A}^{(n)}{}_{,kj}^{\ \mathrm{ext}}$ 的矩阵，见 (6.21)。算子 $\mathbb{L}_{\mathrm{ext}}$ 定义在整个集合 $\mathcal{O}$ 上，并且根据构造，在康托集 $\mathtt{G}_n$ 上与 (6.25) 中的线性算子一致，

$$\forall(b,\omega)\in\mathtt{G}_n,\quad \mathbb{L}_{\mathrm{ext}}=[DG_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1}d_{(i,\alpha)}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)D\tilde{G}_0(\mathfrak{u}_0).\tag{6.27}$$

下述命题表明，主项 $\mathbb{D}_n$ 存在精确逆。其证明见 [59, 命题 6.3]

命题 6.3。在满足条件 (2.2)、(2.3)、(7.42) 和 (7.43) 的情况下，存在 $\sigma_6$，$\sigma_6(\tau_1,\tau_2,q,d)>0$，使得如果

$$\|\mathfrak{I}_0\|_{s_h+\sigma_6}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\leqslant 1,$$

那么存在一族算子 $\left([\mathbb{D}_n]_{\mathrm{ext}}^{-1}\right)_n$，使得对于所有满足可逆性和 $\mathfrak{m}$重对称性性质的 $g$ 、$(g_1, g_2, g_3)$

$$g_1(\varphi) = g_1(-\varphi), \qquad g_2(\varphi) = -g_2(-\varphi), \qquad g_3(\varphi) = -(\mathcal{S}g_3)(\varphi), \qquad (\mathscr{T}_{\mathfrak{m}}g_3)(\varphi) = g_3(\varphi), \tag{6.28}$$

函数 $[\mathbb{D}_n]_{\mathrm{ext}}^{-1}g$ 满足以下估计，对所有 $s_0 \leqslant s \leqslant S$,

$$\|[\mathbb{D}_n]_{\mathrm{ext}}^{-1}g\|_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim \gamma^{-1}\big(\|g\|_{s+\sigma_6}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \|\mathfrak{I}_0\|_{s+\sigma_6}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\|g\|_{s_0+\sigma_6}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\big)$$

并且对所有 $(b,\omega) \in \mathsf{G}_n$，都有

$$\mathbb{D}_n[\mathbb{D}_n]_{\mathrm{ext}}^{-1} = \mathrm{Id}.$$

回到线性算子 $d_{i,\alpha}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)$，根据 (6.26) 和 (6.27)，在康托集 $\mathsf{G}_n$ 上，我们有如下分解

$$\begin{aligned} d_{i,\alpha}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0) = {} & DG_0(\mathfrak{u}_0)\,\mathbb{D}_n\,[D\widetilde{G}_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1} + DG_0(\mathfrak{u}_0)\,\mathbb{E}_n^{\mathrm{ext}}\,[D\widetilde{G}_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1} \\ & + DG_0(\mathfrak{u}_0)\,\mathscr{P}_n\,[D\widetilde{G}_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1} + DG_0(\mathfrak{u}_0)\,\mathscr{Q}_n\,[D\widetilde{G}_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1}. \end{aligned}$$

将算子

$$\mathrm{T}_0 \triangleq \mathrm{T}_0(i_0) \triangleq D\widetilde{G}_0(\mathfrak{u}_0)\,[\mathbb{D}_n]_{\mathrm{ext}}^{-1}\,[DG_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1} \tag{6.29}$$

将其作用于最后一个恒等式的右侧，我们得到对所有 $(b,\omega) \in \mathsf{G}_n$,

$$\begin{aligned} d_{i,\alpha}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)\mathrm{T}_0 - \mathrm{Id} = \mathcal{E}_1^{(n)} + \mathcal{E}_2^{(n)} + \mathcal{E}_3^{(n)} \quad \text{with} \qquad & \mathcal{E}_1^{(n)} \triangleq DG_0(\mathfrak{u}_0)\,\mathbb{E}_n^{\mathrm{ext}}\,[D\widetilde{G}_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1}\mathrm{T}_0, \\ & \mathcal{E}_2^{(n)} \triangleq DG_0(\mathfrak{u}_0)\,\mathscr{P}_n\,[D\widetilde{G}_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1}\mathrm{T}_0, \\ & \mathcal{E}_3^{(n)} \triangleq DG_0(\mathfrak{u}_0)\,\mathscr{Q}_n\,[D\widetilde{G}_0(\mathfrak{u}_0)]^{-1}\mathrm{T}_0. \end{aligned}$$

因此，算子 $\mathrm{T}_0$ 是 $d_{i,\ \alpha}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)$ 的近似右逆。特别地，我们有以下结果，其证明与 [69, 定理 5.1] 类似。

定理 6.1。（近似逆）设 $(\gamma, q, d, \tau_1, s_0, \mu_2, s_h, S)$ 满足 (2.2)–(2.3) 和 (7.42)–(7.43)。存在 $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}(\tau_1,\tau_2,d,q) > 0$，使得若

$$\|\mathfrak{I}_0\|_{s_h+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \leqslant 1, \tag{6.30}$$

那么，对于满足 (6.28) 的光滑 $g = (g_1, g_2, g_3)$，由 (6.29) 定义的算子 $\mathrm{T}_0$ 是可逆的、$\mathfrak{m}$ 重保持的，并且满足

$$\forall s \in [s_0, S], \quad \|\mathrm{T}_0 g\|_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim \gamma^{-1}\left(\|g\|_{s+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \|\mathfrak{I}_0\|_{s+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\|g\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\right). \tag{6.31}$$

此外，$\mathrm{T}_0$ 是 $d_{i,\ \alpha}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)$ 在康托集 $\mathsf{G}_n$上的几乎近似右逆。更准确地说，对于所有 $(b,\omega) \in \mathsf{G}_n$，都有

$$d_{i,\alpha}\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)\mathrm{T}_0 - \mathrm{Id} = \mathcal{E}_1^{(n)} + \mathcal{E}_2^{(n)} + \mathcal{E}_3^{(n)}, \tag{6.32}$$

其中，算子 $\mathcal{E}_1^{(n)}$ 、$\mathcal{E}_2^{(n)}$ 和 $\mathcal{E}_3^{(n)}$ 在整个集合 $\mathcal{O}$ 上定义，并满足以下估计

$$\|\mathcal{E}_1^{(n)}\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim \gamma^{-1}\|\mathcal{F}(i_0,\alpha_0)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\|\rho\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}, \tag{6.33}$$

$$\forall\, \mathtt{b} \geqslant 0, \quad \|\mathcal{E}_2^{(n)}\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim \gamma^{-1}N_n^{-\mathtt{b}}\big(\|\rho\|_{s_0+\overline{\sigma}+\mathtt{b}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \|\mathfrak{I}_0\|_{s_0+\overline{\sigma}+\mathtt{b}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\big\|\rho\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\big), \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned} \forall\, \mathtt{b} \in [0,S], \quad \|\mathcal{E}_3^{(n)}\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim {} & N_n^{-\mathtt{b}}\gamma^{-2}\Big(\|\rho\|_{s_0+\mathtt{b}+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \varepsilon\gamma^{-2}\|\mathfrak{I}_0\|_{s_0+\mathtt{b}+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\|\rho\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\Big) \\ & + \varepsilon\gamma^{-4}N_0^{\mu_2}N_n^{-\mu_2}\|\rho\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

# 7 约化

本节致力于研究与非线性方程 (4.51) 相关的线性化算子的可约性，其结构详见命题 4.1。第一步是按照 [59, 69]，利用适当的拟周期辛坐标变换将其共轭为对角矩阵傅里叶乘子。第二部分讨论限制在法向方向上的算子的渐近结构。最后一部分，我们着重研究余项约化。为表述我们的结论，需要引入以下参数。

$$\begin{aligned} &s_l \triangleq s_0+\tau_1 q+\tau_1+2, && \overline{\mu}_2 \triangleq 4\tau_1 q+6\tau_1+3,\\ &\overline{s}_l \triangleq s_l+\tau_2 q+\tau_2, && \overline{s}_h \triangleq \tfrac{3}{2}\overline{\mu}_2+s_l+1 \end{aligned} \tag{7.1}$$

and

$$\sigma_1 \triangleq s_0+\tau_1 q+2\tau_1+4, \qquad \sigma_2 \triangleq \sigma_1+3. \tag{7.2}$$

在本节中，我们将始终采用以下假设

$$\mathcal{O} \triangleq (b_*,b^*)\times\mathscr{U}, \qquad \text{with} \qquad 0<b_*<b^*<1 \qquad \text{and} \qquad \mathtt{m}\geqslant \mathtt{m}^*, \tag{7.3}$$

其中，$\mathtt{m}^*$ 在推论 4.1 中定义。集合 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个开子集，包含平衡频率向量曲线，即，我们选择

$$\mathscr{U} \triangleq B(0,R_0) \qquad \text{s.t.} \qquad \omega_{\mathrm{Eq}}\big([b_*,b^*]\big)\subset B\big(0,\tfrac{R_0}{2}\big), \qquad R_0>0. \tag{7.4}$$

我们记

$$\mathbf{H}^s_{\perp,\mathtt{m}} \triangleq \mathbf{H}^s_{\mathtt{m}}\cap\mathbf{H}^{\perp}_{\mathbb{S}_0}$$

并赋予该空间与索伯列夫空间相同的范数。

## 7.1 限制在法向方向上的线性化算子的结构

这里，我们给出法向方向上线性化算子的结构

$$\widehat{\mathcal{L}}=\widehat{\mathcal{L}}(i_0)=\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}\big(\omega\cdot\partial_\varphi-\mathcal{J}K_{02}(\varphi)\big)\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}$$

由 (6.23) 和 (6.7) 定义，其中 $i_0=(\vartheta_0,I_0,z_0)$ 是一个 $\mathtt{m}$ 重可逆环面（满足 (5.14)），且其周期分量 $\mathfrak{I}_0$ 满足小性条件

$$\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+2}\leqslant 1,$$

^见引理 (5.2)。线性算子 $\mathcal{L}$ 可分解为与原问题相关的线性化算子的有限秩扰动，如下所示。关于可将其推广到我们的矩阵情形的详细证明，请参阅 [69, 命题 6.1] 。我们指出，$\mathtt{m}$重对称性也可以很容易地追踪。

^命题 7.1。设 $(\gamma,q,d,s_0)$ 满足 (2.3)。那么，(6.23) 中定义的算子 $\mathcal{L}$ 具有如下形式

$$\widehat{\mathcal{L}}=\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}\left(\mathcal{L}-\varepsilon\partial_\theta\mathcal{R}\right)\Pi^{\perp}_{\mathbb{S}_0}, \qquad \mathcal{L}\triangleq\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m}}+\mathfrak{L}_{\varepsilon r}, \qquad \mathcal{R}\triangleq\begin{pmatrix}\mathcal{T}_{J_{1,1}}(r) & \mathcal{T}_{J_{1,2}}(r)\\ \mathcal{T}_{J_{2,1}}(r) & \mathcal{T}_{J_{2,2}}(r)\end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{I}_{\mathtt{m}}\triangleq\begin{pmatrix}\mathbb{I}_{\mathtt{m}} & 0\\ 0 & \mathbb{I}_{\mathtt{m}}\end{pmatrix}$$

表示 $L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+1})\times L^2_{\mathtt{m}}(\mathbb{T}^{d+1})$ 的恒等映射。算子 $\mathfrak{L}_{\varepsilon r}$ 在命题 4.1 中定义，由 (1.19) 可得

$$r(\varphi)=\mathbf{A}\big(\vartheta_0(\varphi),\,I_0(\varphi),z_0(\varphi)\big),$$

其中 A 如 (1.19) 所示，并补充了可逆性和 m 重性质

$$r(-\varphi,-\theta)=r(\varphi,\theta)=r\big(\varphi,\theta+\tfrac{2\pi}{\mathtt{m}}\big).$$

此外，对于任意 $k,n\in\{1,2\}$，算子 $\mathcal{T}_{J_{k,n}}(r)$ 是一个形如 (2.15) 的积分算子，其核 $J_{k,n}(r)$ 保持 m 重可逆性。此外，在假设

$$\|\mathfrak{I}_0\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\leqslant 1, \tag{7.5}$$

成立的条件下，对于所有 $s\geqslant s_0$,
我们有

(i) 函数 $r$ 满足以下估计，

$$\|r\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim 1+\|\mathfrak{I}_0\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \tag{7.6}$$

*and*

$$\|\Delta_{12}r\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|\Delta_{12}i\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\Delta_{12}i\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\max_{\ell\in\{1,2\}}\|\mathfrak{I}_\ell\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{7.7}$$

(ii) 对于任意 $k,n\in\{1,2\}$，核 $J_{k,n}$ 满足以下估计

$$\|J_{k,n}\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim 1+\|\mathfrak{I}_0\|_{s+3}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \tag{7.8}$$

*and*

$$\|\Delta_{12}J_{k,n}\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|\Delta_{12}i\|_{s+3}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\Delta_{12}i\|_{s_0+3}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\max_{\ell\in\{1,2\}}\|\mathfrak{I}_\ell\|_{s+3}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{7.9}$$

这里 $\mathfrak{I}_\ell(\varphi)=i_\ell(\varphi)-(\varphi,0,0)$，对于任意函数 $f$，$\Delta_{12}f$, $f(i_1)-f(i_2)$表示在满足 (7.5) 的两个不同状态 $i_1$ 和 $i_2$ 处取值的 $f$ 之差。

## 7.2 输运部分的约化

主要目的是将命题 4.1 中描述的线性化算子的输运部分化为常系数。注意，输运算子是对角形式，因此我们将分别约化各个标量分量。我们按照论文 [4, 8, 15, 45]的思路，在 [59, 69], 中通过 KAM迭代方案完成了这一工作。以下命题的证明从略，因为它与[69, 中的命题 6.2], 相同，其中方案以 (4.59)、(4.53) 和 (7.12) 初始化。此外，在整个迭代过程中，m重对称性可以很容易地得到验证。

命题 7.2. 给定条件 (2.3)–(2.2) 和 (7.1)–(7.3)。设 $\upsilon\in(0,\frac{1}{q+1}]$. 对于满足以下条件的任意 $(\mu_2,\mathtt{p}\ s_h)$

$$\mu_2\geqslant\overline{\mu}_2,\qquad \mathtt{p}\geqslant 0,\qquad s_h\geqslant\max\left(\tfrac{3}{2}\mu_2+s_l+1,\overline{s}_h+\mathtt{p}\right), \tag{7.10}$$

存在 $\varepsilon_0>0$，使得如果

$$\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{\mu_2}\leqslant\varepsilon_0\qquad\text{and}\qquad\|\mathfrak{I}_0\|_{s_h+\sigma_1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\leqslant 1, \tag{7.11}$$

那么，对于所有的 $k\in\{1,2\}$，存在 $\mathtt{c}_k$、$\mathtt{c}_k(b,\omega,i_0)\in W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O},\mathbb{C})$ 以及 $\beta_k$、$\beta_k(b,\omega,i_0)\in W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O},H_{\mathtt{m}}^S)$，使得以下结果成立。

(i) 常数 $\mathtt{c}_k$ 满足以下估计，

$$\|\mathtt{v}_k-\mathtt{c}_k\|^{q,\gamma}\lesssim\varepsilon, \tag{7.12}$$

其中 $\mathtt{v}_k$ 在 (4.13) 中定义。

(ii) 变换 $\mathscr{B}_k^{\pm1}$ 与函数 $\beta_k$ 和 $\widehat{\beta}_k$ 通过（2.19）—（2.27）相关，具有 m重可逆性保持性，并满足以下估计：对所有 $s\in[s_0,S]$

$$\|\mathscr{B}_k^{\pm1}\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\varepsilon\gamma^{-1}\|\mathfrak{I}_0\|_{s+\sigma_1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}, \tag{7.13}$$

$$\|\widehat{\beta}_k\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|\beta_k\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}\left(1+\|\mathfrak{I}_0\|_{s+\sigma_1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right). \tag{7.14}$$

（iii）在康托集

$$\mathcal{O}_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1}(i_0) \triangleq \bigcap_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\{(0,0)\}\\|l|\leqslant N_n}} \Big\{(b,\omega)\in\mathcal{O} \quad \text{s.t.} \quad \big|\omega\cdot l + j\mathsf{c}_k(b,\omega)\big| > \tfrac{4\gamma^{\upsilon}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}\Big\} \tag{7.15}$$

我们有

$$\mathscr{B}_k^{-1}\Big(\omega\cdot\partial_\varphi\mathbb{I}_{\mathtt{m}} + \partial_\theta\big(\mathcal{V}_k(\varepsilon r)\ \cdot\big)\Big)\mathscr{B}_k = \omega\cdot\partial_\varphi\mathbb{I}_{\mathtt{m}} + \mathsf{c}_k\partial_\theta + \mathscr{E}_{n,k}, \tag{7.16}$$

其中 $\mathcal{V}_k$ 是 在命题 4.1-1 中定义，且$\mathscr{E}_{n,\ k}$, $\mathscr{E}_{n,\ k}(b,\omega,i_0)$ 是满足以下条件的线性算子

$$\|\mathscr{E}_{n,k}\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \varepsilon N_0^{\mu_2}N_{n+1}^{-\mu_2}\|\rho\|_{s_0+2}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{7.17}$$

*(iv)* 给定两个环面 $i_1$ 和 $i_2$，它们都满足 (7.11)（将 $\mathfrak{I}_0$ 替换为 $\mathfrak{I}_1$ 或 $\mathfrak{I}_2$），我们有

$$\|\Delta_{12}\mathsf{c}_k\|^{q,\gamma} \lesssim \varepsilon\|\Delta_{12}i\|_{\overline{s}_h+\sigma_1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}, \tag{7.18}$$

$$\|\Delta_{12}\beta_k\|_{\overline{s}_h+\mathtt{p}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \|\Delta_{12}\widehat{\beta}_k\|_{\overline{s}_h+\mathtt{p}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \varepsilon\gamma^{-1}\|\Delta_{12}i\|_{\overline{s}_h+\mathtt{p}+\sigma_1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{7.19}$$

定义矩阵算子

$$\mathscr{B} \triangleq \begin{pmatrix}\mathscr{B}_1 & 0\\ 0 & \mathscr{B}_2\end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \mathscr{E}_n \triangleq \begin{pmatrix}\mathscr{E}_{n,1} & 0\\ 0 & \mathscr{E}_{n,2}\end{pmatrix}, \tag{7.20}$$

其中 $\mathscr{B}_k$ 和 $\mathscr{E}_{n,\ k}$ 已在命题 7.2 中定义。接下来，我们计划描述变换 $\mathscr{B}$ 对命题 4.1 中引入的线性化算子的作用，并推导一些有用的估计。

命题 7.3. 在满足条件 (2.2)–(2.3)、(7.1)、(7.3) 和 (7.10) 的情况下，存在 $\varepsilon_0>0$，使得若

$$\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{\mu_2} \leqslant \varepsilon_0 \qquad \text{and} \qquad \|\mathfrak{I}_0\|_{q,s_h+\sigma_2}^{\gamma,\mathtt{m}} \leqslant 1, \tag{7.21}$$

其中 $\sigma_2$ 由 (7.2) 给出，那么将参数限制在 (7.15) 定义的康托集上，可得

$$\mathscr{L} \triangleq \mathscr{B}^{-1}\big(\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m}} + \mathfrak{L}_{\varepsilon r}\big)\mathscr{B} = \omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m}} + \mathscr{D} + \mathscr{R} + \mathscr{E}_n, \tag{7.22}$$

其中

$$\mathscr{D} \triangleq \begin{pmatrix}\mathsf{c}_1\partial_\theta\ \cdot + \frac{1}{2}\mathcal{H} + \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot & 0\\ 0 & \mathsf{c}_2\partial_\theta\ \cdot - \big(\frac{1}{2}\mathcal{H} + \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot\big)\end{pmatrix},$$

且算子 $\mathscr{R}$，$\mathscr{R}(\varepsilon r)$ 是一个实的、$\mathtt{m}$ 重且保持可逆性的矩阵积分算子，满足

$$\forall s\in[s_0,S], \quad |||\mathscr{R}|||_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \varepsilon\gamma^{-1}\Big(1+\|\mathfrak{I}_0\|_{s+\sigma_2}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\Big). \tag{7.23}$$

此外，给定两个均满足 (7.21) 的环面 $i_1$ 和 $i_2$（将 $\mathfrak{I}_0$ 替换为 $\mathfrak{I}_1$ 或 $\mathfrak{I}_2$），我们有

$$|||\ \Delta_{12}\mathscr{R}|||_{\overline{s}_h+\mathtt{p}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \varepsilon\gamma^{-1}\|\Delta_{12}i\|_{\overline{s}_h+\mathtt{p}+\sigma_2}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{7.24}$$

证明. 由 (7.20) 和 (4.52)，我们可以写出

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^{-1}\big(\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m}} + \mathfrak{L}_{\varepsilon r}\big)\mathscr{B} = &\begin{pmatrix}\mathscr{B}_1^{-1}\big(\omega\cdot\partial_\varphi\mathbb{I}_{\mathtt{m}} + \partial_\theta\big(\mathcal{V}_1(\varepsilon r)\ \cdot\big)\big)\mathscr{B}_1 & 0\\ 0 & \mathscr{B}_2^{-1}\big(\omega\cdot\partial_\varphi\mathbb{I}_{\mathtt{m}} + \partial_\theta\big(\mathcal{V}_2(\varepsilon r)\ \cdot\big)\big)\mathscr{B}_2\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\mathcal{H} + \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\mathcal{H} - \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathscr{R}_{1,1} & \mathscr{R}_{1,2}\\ \mathscr{R}_{2,1} & \mathscr{R}_{2,2}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中

$$\mathscr{R}_{k,k'} \triangleq \mathscr{B}_k^{-1}\partial_\theta\mathcal{T}_{\mathscr{K}_{k,k'}(\varepsilon r)}\mathscr{B}_{k'} + (-1)^{k+1}\delta_{k,k'}\Big(\tfrac{1}{2}\mathscr{B}_k^{-1}\mathcal{H}\mathscr{B}_k - \tfrac{1}{2}\mathcal{H} + \mathscr{B}_k^{-1}\big(\partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot\big)\mathscr{B}_k - \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot\Big)$$

并且 $\delta_{k,\ k'}$ 表示通常的克罗内克符号。结合（7.16）和（4.52），可以在康托集 $\mathcal{O}^{\gamma,\ \infty^{\tau_1},\ n}(i_0)$ 中得到分解（7.22），其中

$$\mathscr{R}=\begin{pmatrix}\mathscr{R}_{1,1} & \mathscr{R}_{1,2}\\ \mathscr{R}_{2,1} & \mathscr{R}_{2,2}\end{pmatrix}.$$

$\widehat{\ }\ \mathcal{Q}$、$\beta$ 和 $\beta$的对称性由命题 4.1-2 和命题 7.2-2 给出，结合引理 2.4 和引理 2.7，可知 $\mathscr{B}_k^{-1}\mathcal{H}\mathscr{B}_k-\mathcal{H}$ 和 $\mathscr{B}_k^{-1}\mathcal{Q}\mathscr{B}_k-\mathcal{Q}$ 是实、可逆且保持 m 重对称的积分算子。根据引理 2.7、(7.14)、(7.19)、(7.21) 和 (7.2)，算子 $\mathscr{B}_k^{-1}\mathcal{H}\mathscr{B}_k-\mathcal{H}$ 是积分算子，并满足

$$\|\mathscr{B}_k^{-1}\mathcal{H}\mathscr{B}_k-\mathcal{H}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},s}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}\left(1+\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+2+\sigma_1}\right),\tag{7.25}$$

$$\|\Delta_{12}(\mathscr{B}_k^{-1}\mathcal{H}\mathscr{B}_k-\mathcal{H})\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},\overline{s}_h+\mathtt{p}}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}\|\Delta_{12}i\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\overline{s}_h+\mathtt{p}+2+\sigma_1}.\tag{7.26}$$

至于 $\mathcal{Q}$中的项，根据记号 (2.15)、(4.54) 和 (4.30)，我们注意到

$$\mathcal{Q}*\rho=\mathcal{T}_{\widehat{Q}}\,\rho,\qquad\text{with}\qquad\widehat{Q}(b,\varphi,\theta,\eta)\triangleq\mathcal{Q}(b,\theta-\eta)$$

and

$$\|\widehat{Q}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\leqslant C(q,s),$$

对某个常数 $C(q,s)>0$成立。因此，应用引理 2.6，并结合 (7.14)、(7.19) 和小性条件 (7.21)，可得

$$\|\mathscr{B}_k^{-1}(\partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot)\mathscr{B}_k-\partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},s}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}\left(1+\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\sigma_1+1}\right),\tag{7.27}$$

$$\|\Delta_{12}\big(\mathscr{B}_k^{-1}(\partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot)\mathscr{B}_k-\partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot\big)\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},\overline{s}_h+\mathtt{p}}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}\|\Delta_{12}i\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\overline{s}_h+\mathtt{p}+\sigma_1+1}.\tag{7.28}$$

至于算子$\mathscr{B}_k^{-1}\partial_\theta\mathcal{T}_{\mathscr{K}_{k,\ k'}(\varepsilon r)}\mathscr{B}_{k'}$，根据引理 2.4、(4.69)、(4.70) 以及由命题 7.2-2 给出的$\prec\beta$、$\beta$的对称性，它首先是实的、保持 m 重对称且可逆的时间托普利兹算子。此外，利用 (2.23)、命题 4.1-3、(7.14)、(7.6)、(7.21) 和 (7.2)，我们推得

$$\begin{aligned}\|\mathscr{B}_k^{-1}\partial_\theta\mathcal{T}_{\mathscr{K}_{k,k'}(\varepsilon r)}\mathscr{B}_{k'}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},s}&\lesssim\|\mathscr{K}_{k,k'}(\varepsilon r)\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1}+\|\mathscr{K}_{k,k'}(\varepsilon r)\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}\max_{\ell\in\{1,2\}}\|\beta_\ell\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+2}\\&\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}\left(1+\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\sigma_1+2}\right).\end{aligned}\tag{7.29}$$

利用命题 4.1-3，并结合 (7.6) 和 (7.7)，我们得到

$$\begin{aligned}\|\Delta_{12}\mathscr{K}_{k,k'}(\varepsilon r)\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}&\lesssim\varepsilon\|\Delta_{12}r\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1}+\varepsilon\|\Delta_{12}r\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+1}\max_{\ell\in\{1,2\}}\|r_\ell\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1}\\&\lesssim\varepsilon\Big(\|\Delta_{12}i\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1}+\|\Delta_{12}i\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+1}\max_{\ell\in\{1,2\}}\|\mathfrak{I}_\ell\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1}\Big).\end{aligned}\tag{7.30}$$

因此，将 (2.26) 与 (7.30)、(7.14)、(7.19) 和 (7.21) 结合起来，我们得到

$$\|\Delta_{12}\mathscr{B}_k^{-1}\partial_\theta\mathcal{T}_{\mathscr{K}_{k,k'}(\varepsilon r)}\mathscr{B}_{k'}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},\overline{s}_h+\mathtt{p}}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}\|\Delta_{12}i\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\overline{s}_h+\mathtt{p}+2+\sigma_1}.\tag{7.31}$$

结合 (7.25)、(7.27) 和 (7.29)，我们得到

$$\|\mathscr{R}_{k,k'}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},s}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}\left(1+\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+2+\sigma_1}\right).$$

此外，综合 (7.26)、(7.28) 和 (7.31) 可得

$$\|\Delta_{12}\mathscr{R}_{k,k'}\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},\overline{s}_h+\mathtt{p}}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}\|\Delta_{12}i\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\overline{s}_h+\mathtt{p}+2+\sigma_1}.$$

这就证明了命题 7.3。 □

## 7.3 局部化到法向方向

本节将重点关注约化输运部分时法向方向上的局域化效应。为此，我们考虑如下定义的局部化准周期辛坐标变换

$$\mathscr{B}_\perp \triangleq \Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}\mathscr{B}\Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0} = \begin{pmatrix} \Pi_1^\perp \mathscr{B}_1 \Pi_1^\perp & 0 \\ 0 & \Pi_2^\perp \mathscr{B}_2 \Pi_2^\perp \end{pmatrix},$$

其中投影　　算子定义于 (1.17)-(1.18) 中。于是，本节的主要结果如下：　　s.

命题 7.4. 设 $(\gamma, q, d, \tau_1, s_0, S, \mathtt{m})$ 满足 (2.2)–(2.3) 和 (7.3)。设 $(\overline{\mu}_2, s_l, \overline{s}_h, \mu_2, \mathtt{p}\ s_h)$ 满足 (7.1) 和 (7.10)。存在 $\varepsilon_0 > 0$ and $\sigma_3$, $\sigma_3(\tau_1, q, d, s_0) \geqslant \sigma_2$，其中 $\sigma_2$ 由 (7.2) 给出，使得若

$$\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{\mu_2} \leqslant \varepsilon \qquad \text{and} \qquad \|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_h+\sigma_3} \leqslant 1, \tag{7.32}$$

则以下断言成立。

(i) 算子 $\mathscr{B}_\perp^{\pm 1}$ 满足以下估计

$$\|\mathscr{B}_\perp^{\pm 1}\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s \lesssim \|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s + \varepsilon\gamma^{-1}\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\sigma_3}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}. \tag{7.33}$$

(ii) 对于 (7.15) 中引入的康托集 $\mathcal{O}^{\gamma,\tau_1}_{\infty,n}(i_0)$ 中任意的 $n \in \mathbb{N}^*$，我们有

$$\mathscr{B}_\perp^{-1}\widehat{\mathcal{L}}\mathscr{B}_\perp = \mathscr{L}_0 + \mathscr{E}_n^0, \qquad \mathscr{L}_0 \triangleq \omega\cdot\partial_\varphi \mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp} + \mathscr{D}_0 + \mathscr{R}_0, \tag{7.34}$$

其中 $\mathrm{I}_{\mathtt{m},\perp}$, $\Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}\mathrm{I}_{\mathtt{m}}$，而 $\mathscr{D}_0 = \Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}\mathscr{D}_0\Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}$ 是如下给出的可逆傅里叶乘子算子

$$\mathscr{D}_0 \triangleq \begin{pmatrix} \mathscr{D}_{0,1} & 0 \\ 0 & \mathscr{D}_{0,2} \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{D}_{0,k} \triangleq \left(\mathrm{i}\mu^{(0)}_{j,k}\right)_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}, \qquad \mu^{(0)}_{-j,k}(b,\omega) = -\mu^{(0)}_{j,k}(b,\omega),$$

*with*

$$\mu^{(0)}_{j,k}(b,\omega,i_0) \triangleq \Omega_{j,k}(b) + jr^{(0)}_k(b,\omega,i_0), \qquad r^{(0)}_k(b,\omega,i_0) \triangleq \mathtt{c}_k(b,\omega) - \mathtt{v}_k(b) \tag{7.35}$$

并且满足

$$\|r^{(0)}_k\|^{q,\gamma} \lesssim \varepsilon \qquad \text{and} \qquad \|\Delta_{12}r^{(0)}_k\|^{q,\gamma} \lesssim \varepsilon\|\Delta_{12}i\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\overline{s}_h+\sigma_1}. \tag{7.36}$$

注意，频率 $\Omega_{j,k}(b)$ 定义于 (4.17) 中。

(iii) 算子 $\mathscr{E}_n^0$ 满足以下估计

$$\|\mathscr{E}_n^0\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0} \lesssim \varepsilon N_0^{\mu_2}N_{n+1}^{-\mu_2}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+2}. \tag{7.37}$$

(iv) 算子 $\mathscr{R}_0$ 是一个 m 重保持且可逆的时间 Toeplitz 矩阵算子，满足

$$\forall s \in [s_0, S], \quad |||\mathscr{R}_0|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s \lesssim \varepsilon\gamma^{-1}\left(1 + \|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\sigma_3}\right) \tag{7.38}$$

*and*

$$|||\,\Delta_{12}\mathscr{R}_0|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\overline{s}_h+\mathtt{p}} \lesssim \varepsilon\gamma^{-1}\|\Delta_{12}i\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\overline{s}_h+\mathtt{p}+\sigma_3}. \tag{7.39}$$

(v) 算子 $\mathscr{L}_0$ 满足

$$\forall s \in [s_0, S], \quad \|\mathscr{L}_0\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s \lesssim \|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+1} + \varepsilon\gamma^{-1}\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\sigma_3}\|\rho\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}. \tag{7.40}$$

证明。(i) 利用 (7.13) 和引理 2.1-(i) 即可得到。
(ii) (7.36) 中第一个估计由 (7.12) 得出，第二个估计则由 (7.18) 得出。另一方面，利用命题 7.1 中详细给出的 $\widehat{\mathcal{L}}$，结合分解 $\mathrm{Id} = \Pi_{\mathbb{S}_0} + \Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}$，我们写作

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_\perp^{-1}\widehat{\mathcal{L}}\mathscr{B}_\perp &= \mathscr{B}_\perp^{-1}\Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}(\mathcal{L} - \varepsilon\partial_\theta\mathcal{R})\mathscr{B}_\perp \\ &= \mathscr{B}_\perp^{-1}\Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}\mathcal{L}\mathscr{B}\Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0} - \mathscr{B}_\perp^{-1}\Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}\mathcal{L}\Pi_{\mathbb{S}_0}\mathscr{B}\Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0} - \varepsilon\mathscr{B}_\perp^{-1}\Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}\partial_\theta\mathcal{R}\mathscr{B}_\perp.\end{aligned}$$

根据命题 7.3，在康托集 $\mathcal{O}^{\gamma,\ \infty^{\tau_1},\ n}(i_0)$ 中，

$$\mathcal{L}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{L}$$

并且因此，利用 $\mathscr{B}_\perp^{-1}\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^\perp = \mathscr{B}_\perp^{-1}$，我们得到

$$\mathscr{B}_\perp^{-1}\widehat{\mathcal{L}}\mathscr{B}_\perp = \mathscr{B}_\perp^{-1}\mathscr{B}\mathscr{L}\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^\perp - \mathscr{B}_\perp^{-1}\mathcal{L}\Pi_{\mathbb{S}_0}\mathscr{B}\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^\perp - \varepsilon\mathscr{B}_\perp^{-1}\partial_\theta\mathcal{R}\mathscr{B}_\perp.$$

因此，利用 (7.22)，我们推得

$$\mathscr{B}_\perp^{-1}\mathscr{B}\mathscr{L}\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^\perp = (\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m}} + \mathscr{D})\,\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^\perp + \mathscr{E}_n^0 + \mathscr{B}_\perp^{-1}\mathscr{B}\mathscr{R}\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^\perp,$$

with

$$\mathscr{E}_n^0 \triangleq \mathscr{B}_\perp^{-1}\mathscr{B}\mathscr{E}_n\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^\perp. \tag{7.41}$$

因此，在康托集 $\mathcal{O}^{\gamma,\ \infty^{\tau_1},\ n}(i_0)$ 中，有如下约化

$$\mathscr{B}_\perp^{-1}\widehat{\mathcal{L}}\mathscr{B}_\perp = \omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp} + \mathscr{D}_0 + \mathscr{R}_0 + \mathscr{E}_n^0,$$

其中我们令

$$\mathscr{D}_0 \triangleq \begin{pmatrix} \mathtt{c}_1\partial_\theta\ \cdot + \frac{1}{2}\mathcal{H} + \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot & 0 \\ 0 & \mathtt{c}_2\partial_\theta\ \cdot - \frac{1}{2}\mathcal{H} - \partial_\theta\mathcal{Q}*\cdot \end{pmatrix}\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^\perp,$$

$$\mathscr{R}_0 \triangleq -\mathscr{B}_\perp^{-1}\mathcal{L}\Pi_{\mathbb{S}_0}\mathscr{B}\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^\perp - \varepsilon\mathscr{B}_\perp^{-1}\partial_\theta\mathcal{R}\mathscr{B}_\perp + \mathscr{B}_\perp^{-1}\mathscr{B}\mathscr{R}\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^\perp.$$

(iii) 可由 (7.41)、(7.33)、(7.13) 和 (7.17) 得到。
(iv) 要得到估计 (7.38) 和 (7.39)，可参考引理 [69, 、命题 6.3 和引理 6.3]，只需针对第 2 节中引入的混合拓扑作极少的修改。计算过程较长，并基于 $\mathscr{B}_\perp^{\pm1}$ 和 $\mathscr{B}^{\pm1}$ 的对偶表示。特别地，可以使用引理 2.4、(7.23)、(7.24)、(7.8)、(7.9) 和 (7.19)。

(v) 该估计由 (7.34)、(7.12)、(7.38)、(7.32) 和推论 2.1-(iii) 得出。 □

## 7.4 余项的约化

本节致力于将命题 7.4 中定义的算子 $\mathscr{L}_0$ 共轭为对角形式，允许存在快速衰减的小余项。我们将通过适用于算子情形的标准 KAM 可约化技术来实现这一点。具体而言，我们将利用被限制在适当康托集上的外部参数，以排除二阶 Melnikov 假设中的共振。请注意，这项研究还可以得到特征值分布及其相对于环面参数化的稳定性的若干估计。这被视为关键步骤：既是为了得到一个近似逆，也是为了通过 Nash-Moser 方案获得一个最终的大型康托集。关于将这一 KAM 策略应用于偏微分方程的实例，可参见 [5, 10, 46, 59, 69] 。

命题 7.5. 设 $(\gamma, q, d, \tau_1, \tau_2, s_0, \overline{s}_l, \overline{\mu}_2, S, \mathtt{m})$ 满足 (2.3)、(2.2)、(7.1) 和 (7.3)。对于任意满足条件的 $(\mu_2, s_h)$

$$\mu_2 \geqslant \overline{\mu}_2 + 2\tau_2 q + 2\tau_2 \qquad \text{and} \qquad s_h \geqslant \frac{3}{2}\mu_2 + \overline{s}_l + 1, \tag{7.42}$$

存在 $\varepsilon_0 \in (0,1)$ 和 $\sigma_4, \sigma_4(\tau_1, \tau_2, q, d) \geqslant \sigma_3$，其中 $\sigma_3$ 定义见命题 7.4，使得若

$$\varepsilon\gamma^{-2-q}N_0^{\mu_2} \leqslant \varepsilon_0 \tag{7.43}$$

*and*

$$\|\mathfrak{I}_0\|_{s_h+\sigma_4}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \leqslant 1, \tag{7.44}$$

则以下断言成立。

(i) 存在一族可逆线性算子 $\Phi_\infty : \mathcal{O} \to \mathcal{L}\big(\mathrm{H}^s_{\perp,\mathtt{m}}\big)$，满足以下估计

$$\forall s \in [s_0, S], \qquad \|\Phi_\infty^{\pm 1}\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \|\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \varepsilon\gamma^{-2}\|\mathfrak{I}_0\|_{s+\sigma_4}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{7.45}$$

存在一个对角算子 $\mathscr{L}_\infty$, $\mathscr{L}_\infty(b,\omega,i_0)$，其形式为

$$\mathscr{L}_\infty = \omega\cdot\partial_\varphi \mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp} + \mathscr{D}_\infty$$

其中，$\mathscr{D}_\infty = \Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0}\mathscr{D}_\infty\Pi^\perp_{\overline{\mathbb{S}}_0} = \mathscr{D}_\infty(b,\omega,i_0)$ 是一个具有可逆傅里叶乘子项的对角算子，即

$$\mathscr{D}_\infty \triangleq \begin{pmatrix} \mathscr{D}_{\infty,1} & 0 \\ 0 & \mathscr{D}_{\infty,2}\end{pmatrix}, \qquad \mathscr{D}_{\infty,k} \triangleq \Big(\mathrm{i}\mu_{j,k}^{(\infty)}\Big)_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}, \qquad \mu_{-j,k}^{(\infty)}(b,\omega) = -\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega),$$

*with*

$$\forall j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}, \quad \mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_0) \triangleq \mu_{j,k}^{(0)}(b,\omega,i_0) + r_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_0) \tag{7.46}$$

*and*

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}} |j| \left\| r_{j,k}^{(\infty)} \right\|^{q,\gamma} \lesssim \varepsilon\gamma^{-1}, \tag{7.47}$$

使得在康托集中

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1,\tau_2}(i_0) \triangleq \mathcal{O}_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1}(i_0)\\
&\bigcap_{\substack{k\in\{1,2\}\\ j,j_0\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}} \bigcap_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d\\ (l,j)\neq(0,j_0)\\ |l|\leqslant N_n}} \Big\{(b,\omega)\in\mathcal{O} \quad \text{s.t.} \quad \big|\omega\cdot l + \mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_0) - \mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_0)\big| > \tfrac{2\gamma\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}\Big\}\\
&\bigcap_{\substack{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1}\\ j_0\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2}}} \bigcap_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d\\ \langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_n}} \Big\{(b,\omega)\in\mathcal{O} \quad \text{s.t.} \quad \big|\omega\cdot l + \mu_{j,1}^{(\infty)}(b,\omega,i_0) - \mu_{j_0,2}^{(\infty)}(b,\omega,i_0)\big| > \tfrac{2\gamma}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}\Big\}
\end{aligned}$$

我们有

$$\Phi_\infty^{-1}\mathscr{L}_0\Phi_\infty = \mathscr{L}_\infty + \mathscr{E}_n^1,$$

且线性算子 $\mathscr{E}_n^1$ 满足以下估计

$$\|\mathscr{E}_n^1\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \varepsilon\gamma^{-2}N_0^{\mu_2}N_{n+1}^{-\mu_2}\|\rho\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{7.48}$$

我们分别参见 (7.15)、(7.34) 和 (7.35)，了解 $\mathcal{O}^{\gamma,\tau_1}_{\infty,n}(i_0)$ $\mathscr{L}_0$ 和 $\big(\mu_{j,k}^{(0)}(b,\omega,i_0)\big)_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}$ 的定义。

(ii) 给定两个均满足 (7.43)-(7.44) 的环面 $i_1$ 和 $i_2$，则对于 $k\in\{1,2\}$ 我们有 $e$

$$\forall j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}, \quad \left\|\Delta_{12}r_{j,k}^{(\infty)}\right\|^{q,\gamma} \lesssim \varepsilon\gamma^{-1}\|\Delta_{12}i\|_{\overline{s}_h+\sigma_4}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \tag{7.49}$$

*and*

$$\forall j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}, \quad \left\|\Delta_{12}\mu_{j,k}^{(\infty)}\right\|^{q,\gamma} \lesssim \varepsilon\gamma^{-1}|j|\|\Delta_{12}i\|_{\overline{s}_h+\sigma_4}^{q,\gamma,\mathtt{m}}. \tag{7.50}$$

证明。(i) 首先回顾命题 7.4：在限制到康托集 $\mathcal{O}^{\gamma,\tau_1}_{\infty,n}(i_0)$ 时，下列恒等式成立

$$\mathscr{B}_\perp^{-1}\widehat{\mathcal{L}}\mathscr{B}_\perp = \mathscr{L}_0 + \mathscr{E}_n^0,$$

其中算子 $\mathscr{L}_0$ 分解如下

$$\mathscr{L}_0 = \omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp} + \mathscr{D}_0 + \mathscr{R}_0,$$

with

$$\mathscr{D}_0=\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}\mathscr{D}_0\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}=\begin{pmatrix}\mathscr{D}_{0,1}&0\\0&\mathscr{D}_{0,2}\end{pmatrix},\qquad \mathscr{D}_{0,k}=\left(\mathrm{i}\mu_{j,k}^{(0)}\right)_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}},\qquad \mu_{-j,k}^{(0)}(b,\omega)=-\mu_{j,k}^{(0)}(b,\omega)$$

且 $\mathscr{R}_0$ 是一个实的、可逆的零阶时间托普利兹算子，满足 $\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}\mathscr{R}_0\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}=\mathscr{R}_0$. 定义如下量

$$\delta_0(s)=\gamma^{-1}\,|||\,\mathscr{R}_0\,|||_s^{q,\gamma,\mathtt{m}},$$

由（7.38），可得

$$\delta_0(s)\leqslant C\varepsilon\gamma^{-2}\left(1+\|\mathfrak{I}_0\|_{s+\sigma_3}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right).\tag{7.51}$$

因此，结合（7.42）、（7.43）以及 $\sigma_4\geqslant\sigma_3$，得到

$$\begin{aligned}N_0^{\mu_2}\delta_0(s_h)&\leqslant CN_0^{\mu_2}\varepsilon\gamma^{-2}\\&\leqslant C\varepsilon_0.\end{aligned}\tag{7.52}$$

小性条件（7.51）和（7.52）使我们能够类似于标量情形 [69, Prop. 6.5]，启动 KAM 约化过程。不过，接下来的 KAM 迭代是在矩阵层面进行的。为此，我们需要考虑混合范数（2.34），以克服求解同调方程时反对角项引起的空间共振。为阐明这一点，我们先讨论该过程中的一般 KAM 步骤。

▶ KAM 步骤。现在，我们说明余项约化中使用的典型 KAM 步骤。假设我们有一个线性算子 $\mathscr{L}$，当参数限制在某个康托集 $\mathscr{O}$上时，它具有以下形式

$$\mathscr{L}=\omega\cdot\partial_{\varphi}\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\mathscr{D}+\mathscr{R},$$

with

$$\mathscr{D}=\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}\mathscr{D}\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}=\begin{pmatrix}\mathscr{D}_1&0\\0&\mathscr{D}_2\end{pmatrix},\qquad \mathscr{D}_k=\left(\mathrm{i}\mu_{j,k}\right)_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}},\qquad \mu_{-j,k}(b,\omega)=-\mu_{j,k}(b,\omega).\tag{7.53}$$

此外，我们假设矩阵算子

$$\mathscr{R}=\begin{pmatrix}\mathscr{R}_1&\mathscr{R}_3\\\mathscr{R}_4&\mathscr{R}_2\end{pmatrix}$$

是实的、可逆的、关于时间的零阶托普利兹算子，并且满足

$$\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}\mathscr{R}\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}=\mathscr{R}.$$

由 (1.17) 可知，后一假设等价于

$$\begin{pmatrix}\Pi_1^{\perp}\mathscr{R}_1\Pi_1^{\perp}&\Pi_1^{\perp}\mathscr{R}_3\Pi_2^{\perp}\\\Pi_2^{\perp}\mathscr{R}_4\Pi_1^{\perp}&\Pi_2^{\perp}\mathscr{R}_2\Pi_2^{\perp}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathscr{R}_1&\mathscr{R}_3\\\mathscr{R}_4&\mathscr{R}_2\end{pmatrix}.\tag{7.54}$$

根据 定义 2.1， $\mathscr{R}_k$ 的实性和可逆性等价于 sa y

$$(\mathscr{R}_k)_{l_0,j_0}^{l,j}\triangleq\mathrm{i}\,r_{j_0,k}^{j}(b,\omega,l-l_0)\in\mathrm{i}\,\mathbb{R}\qquad\text{and}\qquad(\mathscr{R}_k)_{-l_0,-j_0}^{-l,-j}=-(\mathscr{R}_k)_{l_0,j_0}^{l,j}.\tag{7.55}$$

此外，条件 (7.54) 等价于

$$\forall k\in\{1,2\},\quad\forall\,l\in\mathbb{Z}^d,\quad\forall\,j\text{ or }\,j_0\in\overline{\mathbb{S}}_{0,k},\quad r_{j_0,k}^{j}(b,\omega,l)=0,\tag{7.56}$$

$$\forall\ell\in\{3,4\},\quad\forall\,l\in\mathbb{Z}^d,\quad\forall\,j\in\overline{\mathbb{S}}_{0,\ell-2}\text{ or }\,j_0\in\overline{\mathbb{S}}_{0,5-\ell},\quad r_{j_0,\ell}^{j}(b,\omega,l)=0.\tag{7.57}$$

现在，考虑一个接近恒等式的线性可逆变换

$$\Phi=\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\Psi:\mathcal{O}\to\mathcal{L}(\mathbf{H}_{\perp,\mathtt{m}}^{s}),\qquad\Psi=\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}\Psi\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}=\begin{pmatrix}\Psi_1&\Psi_3\\\Psi_4&\Psi_2\end{pmatrix},\tag{7.58}$$

其中 $\Psi$ 依赖于 $\mathscr{R}$，并且在与混合范数 (2.34) 相关的适当意义下足够小。那么，限制在 $\mathscr{O}$ 上，可以直接得到以下分解

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\mathscr{L}\Phi &= \Phi^{-1}\Big(\Phi\left(\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_{\overline{\mathbb{S}}_0}+\mathscr{D}\right)+\left[\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_{\overline{\mathbb{S}}_0}+\mathscr{D},\Psi\right]+\mathscr{R}+\mathscr{R}\Psi\Big)\\ &= \omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_{\overline{\mathbb{S}}_0}+\mathscr{D}+\Phi^{-1}\Big(\left[\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_{\overline{\mathbb{S}}_0}+\mathscr{D}\,,\,\Psi\right]+\mathbf{P_N}\mathscr{R}+\mathbf{P}^{\perp}_{\mathbf{N}}\mathscr{R}+\mathscr{R}\Psi\Big),\end{aligned}$$

其中，$\mathrm{P_N}\mathscr{R}$ 和$\mathrm{P}^{\perp}_{\mathbf{N}}\mathscr{R}$ 的定义同（2.35）。我们将选取 $\Psi$，使上述表达式中包含一个新的余项 $\mathscr{R}_{\mathrm{next}}$，它相较于先前的余项 $\mathscr{R}$ 在二次意义下更小，同时将对角部分 $\mathscr{D}$ 修改为具有相同结构（7.53）的新对角部分 $\mathscr{D}_{\mathrm{next}}$。因此，我们选择 $\Psi$ 使其满足以下矩阵同调方程

$$\left[\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\mathscr{D}\,,\,\Psi\right]+\mathbf{P_N}\mathscr{R}=\lfloor\mathbf{P_N}\mathscr{R}\rfloor, \tag{7.59}$$

其中，$\lfloor\mathrm{P_N}\mathscr{R}\rfloor$ 是矩阵算子$\mathrm{P_N}\mathscr{R}$ 的对角部分，其定义见（2.32）—（2.33），即

$$\lfloor\mathbf{P_N}\mathscr{R}\rfloor=\begin{pmatrix}\lfloor P^1_N\mathscr{R}_1\rfloor & 0\\ 0 & \lfloor P^1_N\mathscr{R}_2\rfloor\end{pmatrix}.$$

矩阵方程（7.59）等价于以下四个标量同调方程

$$\begin{cases}\left[\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_1+\mathscr{D}_1\,,\,\Psi_1\right]=\lfloor P^1_N\mathscr{R}_1\rfloor-P^1_N\mathscr{R}_1,\\ \left[\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_2+\mathscr{D}_2\,,\,\Psi_2\right]=\lfloor P^1_N\mathscr{R}_2\rfloor-P^1_N\mathscr{R}_2,\\ \big(\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_1+\mathscr{D}_1\big)\Psi_3-\Psi_3\big(\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_2+\mathscr{D}_2\big)=-P^2_N\mathscr{R}_3,\\ \big(\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_2+\mathscr{D}_2\big)\Psi_4-\Psi_4\big(\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_1+\mathscr{D}_1\big)=-P^2_N\mathscr{R}_4.\end{cases} \tag{7.60}$$

正如我们将看到的，通过从与非共振条件相关的某个康托型集合中选取适当的参数（$b$，$\omega$），这些方程可以求解。我们先来看关于 $\Psi_1$ 和 $\Psi_2$ 的对角方程，它们可以用类似的方法处理。固定 $k\in\{1,2\}$，接下来我们要解方程

$$\left[\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_k+\mathscr{D}_k\,,\,\Psi_k\right]=\lfloor P^1_N\mathscr{R}_k\rfloor-P^1_N\mathscr{R}_k.$$

这将通过使用我们算子的傅里叶展开来完成。首先注意，与 (7.54)-(7.56) 类似，条件 $\Psi_k=\Pi^{\perp}_k\Psi_k\Pi^{\perp}_k$ 等价于说 $\Psi_k$ 的傅里叶系数满足

$$\forall(l,l_0)\in(\mathbb{Z}^d)^2,\quad \forall j\text{ or }j_0\in\overline{\mathbb{S}}_{0,k},\quad (\Psi_k)^{l,j}_{l_0,j_0}=0. \tag{7.61}$$

经过直接计算可得

$$\forall(l_0,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}),\quad \left[\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^{\perp}_k,\Psi_k\right]\mathbf{e}_{l_0,j_0}=\mathrm{i}\sum_{(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})}(\Psi_k)^{l,j}_{l_0,j_0}\,\omega\cdot(l-l_0)\,\mathbf{e}_{l,j}$$

并利用 (7.53)

$$\forall(l_0,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}),\quad [\mathscr{D}_k,\Psi_k]\mathbf{e}_{l_0,j_0}=\mathrm{i}\sum_{(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})}(\Psi_k)^{l,j}_{l_0,j_0}\big(\mu_{j,k}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}(b,\omega)\big)\mathbf{e}_{l,j}.$$

因此，$\Psi_k$ 是 (7.59) 的解，当且仅当对于任意的 $(l_0,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ k})$，

$$\sum_{(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})}(\Psi_k)^{l,j}_{l_0,j_0}\Big(\omega\cdot(l-l_0)+\mu_{j,k}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}(b,\omega)\Big)\mathbf{e}_{l,j}=-\sum_{\substack{(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})\\ \langle l-l_0,j-j_0\rangle\leqslant N\\ (l,j)\neq(l,j_0)}}r^j_{j_0,k}(b,\omega,l-l_0)\mathbf{e}_{l,j}.$$

通过识别可推得，对于任意 $(l,l_0,j,j_0)\in(\mathbb{Z}^d)^2\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2$，，若 $\langle l-l_0,j-j_0\rangle>N$，则 $(\Psi_k)^{l\,j}_{l_0}$ ,, $_{j_0}=0$；否则有

$$(\Psi_k)^{l,j}_{l_0,j_0}\Big(\omega\cdot(l-l_0)+\mu_{j,k}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}(b,\omega)\Big)=\begin{cases}-r^j_{j_0,k}(b,\omega,l-l_0), & \text{if }(l,j)\neq(l_0,j_0),\\ 0, & \text{if }(l,j)=(l_0,j_0).\end{cases}$$

因此，我们有 $\Psi_k$ 是一个时间托普利兹算子，具有 $(\Psi_k)^j_{j_0}(l-l_0) \triangleq (\Psi_k)^{l\,j}_{l_0\,,,j_0\circ}$ 此外，对于 $(l,j,j_0) \in \mathbb{Z}^d \times (\mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2$，若 $\langle l, j-j_0\rangle \leqslant N$，则有

$$(\Psi_k)^j_{j_0}(b,\omega,l) = \begin{cases} \frac{-r^j_{j_0,k}(b,\omega,l)}{\omega\cdot l+\mu_{j,k}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}(b,\omega)}, & \text{if } (l,j)\neq(0,j_0), \\ 0, & \text{if } (l,j)=(0,j_0), \end{cases} \tag{7.62}$$

只要分母非零即可。通过从以下集合中选取合适的参数值 $(b,\omega)$，即可保证这一点

$$\mathcal{O}_k = \bigcap_{\substack{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times\left(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}\right)^2 \\ |l|\leqslant N \\ (l,j)\neq(0,j_0)}} \left\{(b,\omega)\in\mathcal{O} \quad \text{s.t.} \quad |\omega\cdot l+\mu_{j,k}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}(b,\omega)| > \tfrac{\gamma\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}\right\}.$$

这一限制避免了共振，并确保恒等式 (7.62) 有定义。现在，我们将利用由 $\chi\in C^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ 定义的截断函数，将 $\Psi_k$ 扩展到整个集合 $\mathcal{O}$，其中

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \geqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{if } |x| \leqslant \frac{1}{3}. \end{cases} \tag{7.63}$$

于是，通过按 (7.61) 定义傅里叶系数，并令 $(l,j,j_0) \in \mathbb{Z}^d \times (\mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,\ k})^2$，其中 $\langle l, j-j_0\rangle \leqslant N$，即可得到 $\Psi_k$ 的扩展，仍记为 $\Psi_{k\circ}$

$$(\Psi_k)^j_{j_0}(b,\omega,l) = \begin{cases} -\varrho^j_{j_0,k}(b,\omega,l)\ r^j_{j_0,k}(b,\omega,l), & \text{if} \quad (l,j)\neq(0,j_0), \\ 0, & \text{if} \quad (l,j)=(0,j_0), \end{cases} \tag{7.64}$$

with

$$\varrho^j_{j_0,k}(b,\omega,l) \triangleq \frac{\chi\left((\omega\cdot l+\mu_{j,k}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}(b,\omega))(\gamma\langle j-j_0\rangle)^{-1}\langle l\rangle^{\tau_2}\right)}{\omega\cdot l+\mu_{j,k}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}(b,\omega)}. \tag{7.65}$$

扩展 (7.64) 是光滑的，并且当参数取自 $\mathcal{O}_k$. 时与 (7.62) 一致。此外，将 (7.64)、(7.65)、(7.55) 和 (7.53) 合并可得

$$(\Psi_k)^j_{j_0}(l)\in\mathbb{R} \qquad \text{and} \qquad (\Psi_k)^{-j}_{-j_0}(-l) = (\Psi_k)^j_{j_0}(l).$$

因此，定义 2.1 意味着 $\Psi_k$ 是一个实的、保持可逆性的时间托普利兹算子。现在转向 $\Psi_3$ 和 $\Psi_4$ 在 (7.60) 中满足的反对角方程，它们可统一写成以下形式。固定 $\ell\in\{3,4\}$，则所关注的两个方程可写为

$$\big(\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^\perp_{\ell-2}+\mathscr{D}_{\ell-2}\big)\Psi_\ell - \Psi_\ell\big(\omega\cdot\partial_\varphi\Pi^\perp_{5-\ell}+\mathscr{D}_{5-\ell}\big) = -P_N^2\mathscr{R}_\ell. \tag{7.66}$$

首先注意，与 (7.54)-(7.57) 类似，条件 $\Psi_\ell = \Pi^\perp_{\ell-2}\Psi_\ell\Pi^\perp_{5-\ell}$ 意味着 $\Psi_\ell$ 的傅里叶系数满足

$$\forall (l,l_0)\in(\mathbb{Z}^d)^2, \quad \forall j\in\overline{\mathbb{S}}_{0,\ell-2} \text{ or } j_0\in\overline{\mathbb{S}}_{0,5-\ell}, \quad (\Psi_\ell)^{l,j}_{l_0,j_0}=0. \tag{7.67}$$

易得，$\Psi_\ell$ 是（7.66）的解，当且仅当对于任意 $(l_0,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ 5-\ell})$,

$$\sum_{(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ell-2})} (\Psi_\ell)^{l,j}_{l_0,j_0}\Big(\omega\cdot(l-l_0)+\mu_{j,\ell-2}(b,\omega)-\mu_{j_0,5-\ell}(b,\omega)\Big)\mathbf{e}_{l,j}$$
$$= -\sum_{\substack{(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ell-2}) \\ \langle l-l_0,j,j_0\rangle\leqslant N}} r^j_{j_0,\ell}(b,\omega,l-l_0)\mathbf{e}_{l,j}.$$

通过辨认，我们推得，对于任意 $(l,l_0,j,j_0)\in(\mathbb{Z}^d)^2\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ \ell-2})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ 5-\ell})$，若 $\langle l-l_0,j,j_0\rangle>N$，则 $(\Psi_\ell)^{l\,j}_{l_0\,,\ \ ,\ j_0}=0$，否则我们有

$$(\Psi_\ell)^{l,j}_{l_0,j_0}\Big(\omega\cdot(l-l_0)+\mu_{j,\ell-2}(b,\omega)-\mu_{j_0,5-\ell}(b,\omega)\Big)=-r^j_{j_0,\ell}(b,\omega,l-l_0).$$

因此，我们有 $\Psi_\ell$ 是一个时间托普利兹算子，具有 $(\Psi_\ell)^j_{j_0}(l-l_0)\triangleq(\Psi_\ell)^{l\,j}_{l_0\,,\,,j_{0\infty}}$ 此外，对于 $(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ell-2})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,5-\ell})$，其中 $\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N$，可得

$$(\Psi_\ell)^j_{j_0}(b,\omega,l)=\frac{-r^j_{j_0,\ell}(b,\omega,l)}{\omega\cdot l+\mu_{j,\ell-2}(b,\omega)-\mu_{j_0,5-\ell}(b,\omega)}\tag{7.68}$$

前提是分母非零。通过从以下集合中选取参数 $(b,\omega)$ 的合适取值，即可保证这一点

$$\mathcal{O}_{1,2}=\bigcap_{\substack{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2})\\ \langle l,j,j_0\rangle\leqslant Nn}}\Big\{(b,\omega)\in\mathcal{O}^{\gamma,\tau_1}_{\infty,n}(i_0)\quad\text{s.t.}\quad\big|\omega\cdot l+\mu_{j,1}(b,\omega)-\mu_{j_0,2}(b,\omega)\big|>\tfrac{\gamma}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}\Big\}.$$

这意味着恒等式 (7.68) 定义良好。现在，通过按 (7.67) 定义傅里叶系数，可得到 $\Psi_\ell$ 的扩展，仍记为 $\Psi_\ell$；对于 $(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ell-2})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,5-\ell})$，其中 $\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N$，

$$(\Psi_\ell)^j_{j_0}(b,\omega,l)=-\varrho^j_{j_0,\ell}(b,\omega,l)\ r^j_{j_0,\ell}(b,\omega,l)\tag{7.69}$$

with

$$\varrho^j_{j_0,\ell}(b,\omega,l)\triangleq\frac{\chi\big((\omega\cdot l+\mu_{j,\ell-2}(b,\omega)-\mu_{j_0,5-\ell}(b,\omega))\gamma^{-1}\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}\big)}{\omega\cdot l+\mu_{j,\ell-2}(b,\omega)-\mu_{j_0,5-\ell}(b,\omega)},\tag{7.70}$$

其中 $\chi$ 是在 (7.63) 中引入的截断函数。延拓 (7.69) 是光滑的，并且当参数取值于 $\mathcal{O}_{1,2}$ 时与 (7.68) 一致。此外，将 (7.69)、(7.70)、(7.55) 和 (7.53) 合并可得

$$(\Psi_\ell)^j_{j_0}(l)\in\mathbb{R}\qquad\text{and}\qquad(\Psi_\ell)^{-j}_{-j_0}(-l)=(\Psi_\ell)^j_{j_0}(l).$$

因此，定义 2.1 表明 $\Psi_\ell$ 是一个实的、保持可逆性的时间托普利兹算子。现在考虑，

$$\mathscr{D}_{\rm next}\triangleq\mathscr{D}+\lfloor\mathbf{P_N}\mathscr{R}\rfloor,\qquad\mathscr{R}_{\rm next}\triangleq\Phi^{-1}\big(-\Psi\lfloor\mathbf{P_N}\mathscr{R}\rfloor+\mathbf{P_N^\perp}\mathscr{R}+\mathscr{R}\Psi\big)\tag{7.71}$$

and

$$\mathscr{L}_{\rm next}\triangleq\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\mathscr{D}_{\rm next}+\mathscr{R}_{\rm next}.$$

回顾一下，$\mathscr{D}$、$\mathscr{R}$ 和 $\Psi$ 分别满足局部化性质 (7.53)、(7.54) 和 (7.58)。容易验证，该性质在复合与相加运算下保持不变，因此可得

$$\Pi^\perp_{\mathbb{S}_0}\mathscr{D}_{\rm next}\Pi^\perp_{\mathbb{S}_0}=\mathscr{D}_{\rm next}\qquad\text{and}\qquad\Pi^\perp_{\mathbb{S}_0}\mathscr{R}_{\rm next}\Pi^\perp_{\mathbb{S}_0}=\mathscr{R}_{\rm next}.$$

因此，限制在康托集上时

$$\mathcal{O}^\gamma_{\rm next}\triangleq\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2\cap\mathcal{O}_{1,2},$$

上述构造意味着

$$\mathscr{L}_{\rm next}=\Phi^{-1}\mathscr{L}\Phi.$$

为结束这一步 KAM 步骤，我们现在给出一些定量估计，以证明该方案的收敛性。为此，我们假设以下估计成立。

$$\forall k\in\{1,2\},\quad\forall(j,j_0)\in(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2,\quad\max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}\\ |\alpha|\in[\![0,q]\!]}}\sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\Big|\partial^\alpha_{b,\omega}\Big(\mu_{j,k}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}(b,\omega)\Big)\Big|\leqslant C|j-j_0|\tag{7.72}$$

and

$$\forall (j,j_0)\in(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2}),\quad \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}\\ |\alpha|\in[\![0,q]\!]}}\sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\left|\partial^{\alpha}_{b,\omega}\Big(\mu_{j,1}(b,\omega)-\mu_{j_0,2}(b,\omega)\Big)\right|\leqslant C\langle j,j_0\rangle. \quad (7.73)$$

记

$$A^{k,k'}_{l,j,j_0}(b,\omega)\triangleq\omega\cdot l+\mu_{j,k}(b,\omega)-\mu_{j_0,k'}(b,\omega),\quad a_{l,j,j_0}\triangleq(\gamma\langle j-j_0\rangle)^{-1}\langle l\rangle^{\tau_2},\quad \widetilde{a}_{l,j,j_0}\triangleq\gamma^{-1}\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}.$$

于是，我们可以写成

$$\begin{aligned}\forall k\in\{1,2\},\quad \varrho^{j}_{j_0,k}(b,\omega,l)&=a_{l,j,j_0}\widehat{\chi}\left(a_{l,j,j_0}A^{k,k}_{l,j,j_0}(b,\omega)\right),\\ \forall \ell\in\{3,4\},\quad \varrho^{j}_{j_0,\ell}(b,\omega,l)&=\widetilde{a}_{l,j,j_0}\widehat{\chi}\left(\widetilde{a}_{l,j,j_0}A^{\ell-2,5-\ell}_{l,j,j_0}(b,\omega)\right),\end{aligned}$$

whe**re** $\widehat{\chi}(x)$ $^{\chi_{(x)\ x}}$ 具有有界导数。假设 (7.72)-(7.73) 蕴含

$$\forall\,(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2,\quad \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}\\ |\alpha|\in[\![0,q]\!]}}\sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\left|\partial^{\alpha}_{b,\omega}A^{k,k}_{l,j,j_0}(b,\omega)\right|\leqslant C\langle l,j-j_0\rangle$$

and

$$\forall\,(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ell-2})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,5-\ell}),\quad \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}\\ |\alpha|\in[\![0,q]\!]}}\sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\left|\partial^{\alpha}_{b,\omega}A^{\ell-2,5-\ell}_{l,j,j_0}(b,\omega)\right|\leqslant C\langle l,j,j_0\rangle.$$

应用引理 2.1-(iv)，对于任意满足 $|\alpha|\in[\![0、\ q]\!]$的 $\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}$，我们得到

$$\begin{aligned}\forall k\in\{1,2\},\quad \sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\left|\partial_{b,\omega}\varrho^{j}_{j_0,k}(b,\omega,l)\right|&\leqslant C\gamma^{-(|\alpha|+1)}\langle l,j-j_0\rangle^{\tau_2|\alpha|+\tau_2+|\alpha|},\\ \forall \ell\in\{3,4\},\quad \sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\left|\partial_{b,\omega}\varrho^{j}_{j_0,\ell}(b,\omega,l)\right|&\leqslant C\gamma^{-(|\alpha|+1)}\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2|\alpha|+\tau_2+|\alpha|}.\end{aligned}$$

与命题 6.5], 类似，利用莱布尼茨法则可得

$$\forall k\in\{1,2\},\quad \|\Psi_k\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{O-d},s}\leqslant C\gamma^{-1}\|P^1_N\mathscr{R}_k\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{O-d},s+\tau_2q+\tau_2}, \quad (7.74)$$

$$\forall \ell\in\{3,4\},\quad \|\Psi_\ell\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},s}\leqslant C\gamma^{-1}\|P^2_N\mathscr{R}_\ell\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\text{I-D},s+\tau_2q+\tau_2}. \quad (7.75)$$

结合 (7.74)、(7.75)、(2.34) 和推论 2.1，我们得到

$$\begin{aligned}|||\Psi|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}&\leqslant C\gamma^{-1}\,|||\,\mathbf{P_N}\mathscr{R}|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\tau_2q+\tau_2}\\ &\leqslant C\gamma^{-1}N^{\tau_2q+\tau_2}\,|||\,\mathscr{R}\,|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\,. \end{aligned}\quad (7.76)$$

现在假设满足以下小性条件

$$\gamma^{-1}N^{\tau_2q+\tau_2}\,|||\,\mathscr{R}|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}\leqslant C\varepsilon_0. \quad (7.77)$$

结合（7.76）和（7.77），我们得到

$$|||\,\Psi|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}\leqslant C\varepsilon_0. \quad (7.78)$$

我们推 出，当 $\varepsilon_0$ 足够小时，算子 $\Phi$ 可逆，其逆为 y

$$\Phi^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Psi^n\triangleq\mathrm{Id}+\Sigma.$$

根据推论 2.1-(ii)、(7.76) 和 (7.78)，可得

$$\begin{aligned}|||\Sigma|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}&\leqslant|||\Psi\,|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C\,|||\,\Psi|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0}\right)^n\right) \quad (7.79)\\ &\leqslant C\,\gamma^{-1}N^{\tau_2q+\tau_2}\,|||\,\mathscr{R}\,|||^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s}\,. \quad (7.80)\end{aligned}$$

特别地，(7.77) 蕴含

$$|||\,\Sigma|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \leqslant C\gamma^{-1}N^{\tau_2 q+\tau_2}\,|||\,\mathscr{R}|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \leqslant C\varepsilon_0. \tag{7.81}$$

(7.71) 中的第二个恒等式也可写为

$$\mathscr{R}_{\mathrm{next}} = \mathbf{P}_{\mathbf{N}}^{\perp}\mathscr{R} + \Phi^{-1}\mathscr{R}\Psi - \Psi\,\lfloor \mathbf{P}_{\mathbf{N}}\mathscr{R}\rfloor + \Sigma\big(\mathbf{P}_{\mathbf{N}}^{\perp}\mathscr{R} - \Psi\,\lfloor \mathbf{P}_{\mathbf{N}}\mathscr{R}\rfloor\big).$$

因此，由推论 2.1-(ii)、(7.79)、(7.78) 和 (7.81) 可得，

$$\begin{aligned}|||\mathscr{R}_{\mathrm{next}}|||_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \leqslant |||\mathbf{P}_{\mathbf{N}}^{\perp}\mathscr{R}\,|||_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + C\,|||\,\Sigma\,|||_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\Big(|||\mathbf{P}_{\mathbf{N}}^{\perp}\mathscr{R}\,|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + |||\,\Psi\,|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\,|||\mathscr{R}|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\Big)\\ + C\left(1+|||\Sigma|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\right)\left(|||\Psi\,|||_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\,|||\mathscr{R}\,|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + |||\,\Psi\,|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\,|||\mathscr{R}|||_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\right).\end{aligned} \tag{7.82}$$

利用推论 2.1-(i)、(7.76)、(7.77)、(7.78)、(7.80)、(7.81) 和 (7.82)，对于所有 $S \geqslant \overline{s} \geqslant s \geqslant s$，我们有 $_0$，

$$|||\,\mathscr{R}_{\mathrm{next}}|||_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \leqslant N^{s-\overline{s}}\,|||\,\mathscr{R}\,|||_{\overline{s}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + C\gamma^{-1}N^{\tau_2 q+\tau_2}\,|||\,\mathscr{R}\,|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}\,|||\mathscr{R}\,|||_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}}. \tag{7.83}$$

还可得

$$\begin{aligned}\partial_\theta\mathscr{R}_{\mathrm{next}} = \Phi^{-1}\Big(\mathbf{P}_{\mathbf{N}}^{\perp}\partial_\theta\mathscr{R} + \partial_\theta\mathscr{R}\Psi - \Psi\partial_\theta\lfloor \mathbf{P}_{\mathbf{N}}\mathscr{R}\rfloor - [\partial_\theta,\Psi]\lfloor \mathbf{P}_{\mathbf{N}}\mathscr{R}\rfloor\Big)\\ + [\partial_\theta,\Sigma]\Big(\mathbf{P}_{\mathbf{N}}^{\perp}\mathscr{R} + \mathscr{R}\Psi - \Psi\lfloor \mathbf{P}_{\mathbf{N}}\mathscr{R}\rfloor\Big).\end{aligned}$$

利用以下事实：对于任意标量算子 $T$，

$$\|[\partial_\theta,T]\|_{\text{O-d},s}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim \|T\|_{\text{O-d},s+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}, \qquad \|[\partial_\theta,T]\|_{\text{I-D},s}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim \|T\|_{\text{I-D},s+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}},$$

对于任意矩阵算子 $\mathbf{T}$，有

$$|||[\partial_\theta,\mathbf{T}]|||_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \lesssim |||\mathbf{T}\,|||_{s+1}^{q,\gamma,\mathfrak{m}}.$$

因此，类似于 (7.83)，对于任意 $s_0 \leqslant s \leqslant \overline{s} \leqslant S$，可得

$$\widehat{\delta}_{\mathrm{next}}(s) \leqslant N^{s-\overline{s}}\,\widehat{\delta}(\overline{s}) + C\gamma^{-1}N^{\tau_2 q+\tau_2+1}\widehat{\delta}(s_0)\widehat{\delta}(s), \tag{7.84}$$

其中

$$\widehat{\delta}(s) \triangleq \max\Big(\gamma^{-1}\,|||\,\partial_\theta\mathscr{R}|||_s^{q,\gamma,\mathfrak{m}},\,\delta(s)\Big).$$

▶ 初始化 现在，我们将检验 (7.34) 中的初始算子 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0$ 是否满足假设 (7.72)、(7.73) 和 (7.77)。由 (4.29)–(4.30) 显然可知

$$\forall k\in\{1,2\},\quad \forall (j,j_0)\in\mathbb{Z}^2,\quad \max_{q'\in[\![0,q]\!]}\sup_{b\in(b_*,b^*)}\left|\partial_b^{q'}\left(\Omega_{j,k}(b)-\Omega_{j_0,k}(b)\right)\right| \leqslant C\,|j-j_0|$$

and

$$\forall (j,j_0)\in\mathbb{Z}^2,\quad \max_{q'\in[\![0,q]\!]}\sup_{b\in(b_*,b^*)}\left|\partial_b^{q'}\left(\Omega_{j,1}(b)-\Omega_{j_0,2}(b)\right)\right| \leqslant C\,\langle j,j_0\rangle.$$

因此，我们由 (7.35)-(7.36) 推得，

$$\forall k\in\{1,2\},\quad \forall (j,j_0)\in\mathbb{Z}^2,\quad \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}\\ |\alpha|\in[\![0,q]\!]}}\sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\left|\partial_{b,\omega}^{\alpha}\left(\mu_{j,k}^{(0)}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}^{(0)}(b,\omega)\right)\right| \leqslant C\,|j-j_0|$$

and

$$\forall (j,j_0)\in\mathbb{Z}^2,\quad \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}\\ |\alpha|\in[\![0,q]\!]}}\sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\left|\partial_{b,\omega}^{\alpha}\left(\mu_{j,1}^{(0)}(b,\omega)-\mu_{j_0,2}^{(0)}(b,\omega)\right)\right| \leqslant C\,\langle j,j_0\rangle.$$

这证明了初始假设 (7.72)-(7.73)。现在我们聚焦于假设 (7.77)。后者由汇总 (7.38)、(7.43) 和 (7.42) 得到。事实上，

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}N_0^{\tau_2 q+\tau_2}\,|||\,\mathscr{R}_0\,|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} &\leqslant C\varepsilon\gamma^{-2}N_0^{\mu_2}\left(1+\|\mathfrak{I}_0\|_{s_h+\sigma_4}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right)\\ &\leqslant C\varepsilon_0.\end{aligned}$$

▶ KAM迭代。现在，我们将实施完整的KAM约化方案。给定 $m\in\mathbb{N}$，假设我们已经构造了一个线性算子

$$\mathscr{L}_m \triangleq \omega\cdot\partial_\varphi \mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\mathscr{D}_m+\mathscr{R}_m, \tag{7.85}$$

with

$$\mathscr{D}_m=\begin{pmatrix}\mathscr{D}_{m,1} & 0\\ 0 & \mathscr{D}_{m,2}\end{pmatrix},\qquad \mathscr{D}_{m,k}=\left(\mathrm{i}\mu_{j,k}^{(m)}\right)_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}},\qquad \mu_{-j,k}^{(m)}(b,\omega)=-\mu_{j,k}^{(m)}(b,\omega)$$

以及 $\mathscr{R}_m$ 一个零阶、实且可逆的时间托普利兹矩阵算子，满足 $\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}\mathscr{R}_m\Pi_{\overline{\mathbb{S}}_0}^{\perp}=\mathscr{R}_m$. 此外，假设条件 (7.72)、(7.73) 和 (7.77) 对 $\mathscr{D}_m$ 和 $\mathscr{R}_m$成立。注意，对于 $m=0$，我们取在 (7.34) 中定义的算子 $\mathscr{L}_0$。应用 KAM 步骤，我们可以构造一个线性可逆算子 $\Phi_m=\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\Psi_m$ 其中 $\Psi_m$ 属于 $\mathcal{O}$，使得限制在康托集上时

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_{m+1}^{\gamma}=&\bigcap_{\substack{k\in\{1,2\}\\ j,j_0\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}}\ \bigcap_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d\\ (l,j)\neq(0,j_0)\\ |l|\leqslant N_m}}\left\{(b,\omega)\in\mathscr{O}_m^{\gamma}\quad\text{s.t.}\quad\left|\omega\cdot l+\mu_{j,k}^{(m)}(b,\omega,i_0)-\mu_{j_0,k}^{(m)}(b,\omega,i_0)\right|>\tfrac{\gamma\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}\right\}\\ &\bigcap_{\substack{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2})\\ \langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_m}}\left\{(b,\omega)\in\mathscr{O}_m^{\gamma}\quad\text{s.t.}\quad\left|\omega\cdot l+\mu_{j,1}^{(m)}(b,\omega)-\mu_{j_0,2}^{(m)}(b,\omega)\right|>\tfrac{\gamma}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}\right\},\end{aligned} \tag{7.86}$$

算子 $\Psi_m$ 满足以下同调方程

$$\left[\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\mathscr{D}_m,\Psi_m\right]+\mathbf{P}_{\mathbf{N_m}}\mathscr{R}_m=\lfloor\mathbf{P}_{\mathbf{N_m}}\mathscr{R}_m\rfloor$$

因此，以下恒等式在 $\mathscr{O}_{m+1}^{\gamma}$中成立

$$\Phi_m^{-1}\mathscr{L}_m\Phi_m=\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\mathscr{D}_{m+1}+\mathscr{R}_{m+1}, \tag{7.87}$$

with

$$\mathscr{D}_{m+1}\triangleq\mathscr{D}_m+\lfloor\mathbf{P}_{\mathbf{N_m}}\mathscr{R}_m\rfloor\quad\text{and}\quad\mathscr{R}_{m+1}\triangleq\Phi_m^{-1}\left(-\Psi_m\lfloor\mathbf{P}_{\mathbf{N_m}}\mathscr{R}_m\rfloor+{\mathbf{P}_{\mathbf{N_m}}}^{\perp}\mathscr{R}_m+\mathscr{R}_m\Psi_m\right). \tag{7.88}$$

回忆一下，算子 $\lfloor\mathbf{P}_{\mathbf{N_m}}\mathscr{R}_m\rfloor$ 定义为

$$\lfloor\mathbf{P}_{\mathbf{N_m}}\mathscr{R}_m\rfloor=\begin{pmatrix}\lfloor P_{N_m}^1\mathscr{R}_{m,1}\rfloor & 0\\ 0 & \lfloor P_{N_m}^1\mathscr{R}_{m,2}\rfloor\end{pmatrix},$$

with

$$\lfloor P_{N_m}^1\mathscr{R}_{m,k}\rfloor=\left(\mathrm{i}r_{j,k}^{(m)}\right)_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}},\qquad r_{-j,k}^{(m)}(b,\omega)=-r_{j,k}^{(m)}(b,\omega).$$

注意，$r_{j\,k}^{(m)}$，的对称性条件是 $\mathscr{R}_m$. 可逆性的推论。根据构造，我们得到

$$\mu_{j,k}^{(m+1)}=\mu_{j,k}^{(m)}+r_{j,k}^{(m)}. \tag{7.89}$$

我们指出，采用针对 $\Psi_m$ 的这一扩展，可以扩展 $\mathscr{D}_{m+1}$ 和余项$\mathscr{R}_{m+1}$，前提是算子 $\mathscr{D}_m$ 和 $\mathscr{R}_m$ 在整个参数范围内都有定义。因此，(7.87) 右端定义的算子可以扩展到整个集合 $\mathcal{O}$，并将这一扩展记为 $\mathscr{L}_{m+1}$。也就是说，

$$\omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\mathscr{D}_{m+1}+\mathscr{R}_{m+1}\triangleq\mathscr{L}_{m+1}.$$

这使得我们能够通过归纳法在整个集合 $\mathcal{O}$上构造算子序列($\mathscr{L}_{m+1}$)。类似地，算子 $\Phi_m^{-1}\mathscr{L}_m\Phi_m$ 可以扩展到 $\mathcal{O}$ ，该扩展由 $\Phi_m^{\pm1}$的扩展所诱导。然而，按构造方式，恒等式 $\mathscr{L}_{m+1}=\Phi_m^{-1}\mathscr{L}_m\Phi_m$ 在(7.87)中的成立范围是康托集 $\mathcal{O}_{m+1}^{\gamma}$ ，在该集合之外则可能不成立。定义

$$\delta_m(s)\triangleq\gamma^{-1}\,|||\,\mathscr{R}_m\,|||_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\qquad\text{and}\qquad\widehat{\delta}_m(s)\triangleq\max\Big(\delta_m(s)\,,\,\gamma^{-1}\,|||\,\partial_\theta\mathscr{R}_m\,|||_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\Big).\tag{7.90}$$

假设以下估计成立

$$\forall\,(j,j_0)\in(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2,\quad\max_{|\alpha|\in[\![0,q]\!]}\sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\Big|\partial_{b,\omega}^{\alpha}\Big(\mu_{j,k}^{(m)}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}^{(m)}(b,\omega)\Big)\Big|\leqslant C\,|j-j_0|\tag{7.91}$$

and

$$\forall\,(j,j_0)\in(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2}),\quad\max_{|\alpha|\in[\![0,q]\!]}\sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\Big|\partial_{b,\omega}^{\alpha}\Big(\mu_{j,1}^{(m)}(b,\omega)-\mu_{j_0,2}^{(m)}(b,\omega)\Big)\Big|\leqslant C\,\langle j,j_0\rangle.\tag{7.92}$$

应用 KAM 步骤，由 (7.83) 和 (7.84) 可推出以下归纳公式，对任意 $s_0\leqslant s\leqslant\overline{s}\leqslant S$ 均成立，

$$\begin{aligned}\delta_{m+1}(s)&\leqslant N_m^{s-\overline{s}}\delta_m(\overline{s})+CN_m^{\tau_2q+\tau_2}\delta_m(s_0)\delta_m(s),\\ \widehat{\delta}_{m+1}(s)&\leqslant N_m^{s-\overline{s}}\,\widehat{\delta}_m(\overline{s})+CN_m^{\tau_2q+\tau_2+1}\widehat{\delta}_m(s_0)\widehat{\delta}_m(s).\end{aligned}$$

因此，类似于 [69,命题 6.5], ，根据我们对参数 (7.1) 的选择，可通过对 $m\in\mathbb{N}$ 进行归纳证明

$$\forall\,m\in\mathbb{N},\quad\delta_m(\overline{s}_l)\leqslant\delta_0(s_h)N_0^{\mu_2}N_m^{-\mu_2}\quad\text{and}\quad\delta_m(s_h)\leqslant\Big(2-\tfrac{1}{m+1}\Big)\,\delta_0(s_h),\tag{7.93}$$

and

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad\widehat{\delta}_m(s_0)\leqslant\widehat{\delta}_0(s_h)N_0^{\mu_2}N_m^{-\mu_2}\quad\text{and}\quad\widehat{\delta}_m(s_h)\leqslant\Big(2-\tfrac{1}{m+1}\Big)\,\widehat{\delta}_0(s_h).\tag{7.94}$$

注意，(7.93) 中的第一个条件结合 (7.52) 和 (7.42) 表明，对任意 $m$ ，（将 $\mathscr{R}$ 替换为 $\mathscr{R}_m$ ，并将 $N$ 替换为 $N_m$ 后，）小性条件 (7.77) 均成立。利用 $\mathscr{R}_{m,\,k}$ 的 Topeplitz 结构，并进行分部积分，由 (7.89) 可得

$$\begin{aligned}\Big\|\mu_{j,k}^{(m+1)}-\mu_{j,k}^{(m)}\Big\|^{q,\gamma}&=\big\|\big\langle P_{N_m}^1\mathscr{R}_{m,k}\mathbf{e}_{l,j}\,,\,\mathbf{e}_{l,j}\big\rangle_{L^2(\mathbb{T}^{d+1})}\big\|^{q,\gamma}\\&=\big\|\big\langle P_{N_m}^1\mathscr{R}_{m,k}\mathbf{e}_{0,j}\,,\,\mathbf{e}_{0,j}\big\rangle_{L^2(\mathbb{T}^{d+1})}\big\|^{q,\gamma}\\&=\tfrac{1}{|j|}\big\|\big\langle P_{N_m}^1\mathscr{R}_{m,k}\mathbf{e}_{0,j}\,,\,\partial_\theta\mathbf{e}_{0,j}\big\rangle_{L^2(\mathbb{T}^{d+1})}\big\|^{q,\gamma}\\&=\tfrac{1}{|j|}\big\|\big\langle P_{N_m}^1\partial_\theta\mathscr{R}_{m,k}\mathbf{e}_{0,j}\,,\,\mathbf{e}_{0,j}\big\rangle_{L^2(\mathbb{T}^{d+1})}\big\|^{q,\gamma}.\end{aligned}$$

因此，结合对偶论证以及 (7.90)、(7.94)、(7.51)、(7.43) 和推论 2.1-(iii)，可得

$$\begin{aligned}|j|\,\Big\|\mu_{j,k}^{(m+1)}-\mu_{j,k}^{(m)}\Big\|^{q,\gamma}&\leqslant\big\|\partial_\theta\mathscr{R}_m\mathbf{e}_{0,j}\big\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\,\langle j\rangle^{-s_0}\\&\leqslant C\,|||\,\partial_\theta\mathscr{R}_m\,|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\,\|\mathbf{e}_{0,j}\|_{H^{s_0}}\,\langle j\rangle^{-s_0}\\&\leqslant C\gamma\,\widehat{\delta}_0(s_h)N_0^{\mu_2}N_m^{-\mu_2}\\&\leqslant C\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{\mu_2}N_m^{-\mu_2}.\end{aligned}\tag{7.95}$$

现在我们将检查假设 (7.91) 和 (7.92) 是否满足下一步的要求。结合 (7.95) 与 (7.91)，我们推知，对于 $k\in\{1,2\}$ 和 $(j,j_0)\in(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\,k})^2$,

$$\max_{|\alpha|\in[\![0,q]\!]}\sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\Big|\partial_{b,\omega}^{\alpha}\Big(\mu_{j,k}^{(m+1)}(b,\omega)-\mu_{j_0,k}^{(m+1)}(b,\omega)\Big)\Big|\leqslant C\big(1+\varepsilon\gamma^{-1-q}N_0^{\mu_2}N_m^{-\mu_2}\big)\,|j-j_0|.$$

现在将 (7.95) 和 (7.92) 合并，对于 $(j,j_0)$，我们得到 $\in(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\,2})$,

$$\max_{|\alpha|\in[\![0,q]\!]}\sup_{(b,\omega)\in\mathcal{O}}\Big|\partial_{b,\omega}^{\alpha}\Big(\mu_{j,1}^{(m+1)}(b,\omega)-\mu_{j_0,2}^{(m+1)}(b,\omega)\Big)\Big|\leqslant C\big(1+\varepsilon\gamma^{-1-q}N_0^{\mu_2}N_m^{-\mu_2}\big)\,\langle j,j_0\rangle.$$

级数 $\sum N_m^{-\mu_2}$ 的收敛性意味着所需结果成立，其中常数 $C$ 关于 $m.$ 一致。这就完成了归纳论证。注意，界 (7.95) 意味着序列 $\left(\mu_{j,k}^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ 收敛到某个由下式给出的 $\mu_j^{(\infty)},\ _k \in W^q,\ _\infty,\ ^\gamma(\mathcal{O},\mathbb{C})$

$$\mu_{j,k}^{(\infty)} = \mu_{j,k}^{(0)} + \sum_{m=0}^{\infty}\left(\mu_{j,k}^{(m+1)} - \mu_{j,k}^{(m)}\right) \triangleq \mu_{j,k}^{(0)} + r_{j,k}^{(\infty)}, \tag{7.96}$$

其中（$\mu_{j\,k}^{(0)}$ , ）在命题 7.4 中引入，记为

$$\mu_{j,k}^{(0)}(b,\omega,i_0) = \Omega_{j,k}(b) + j\big(c_k(b,\omega,i_0) - \mathtt{v}_k(b)\big).$$

估计 (7.47) 直接由 (7.96) 和 (7.95) 得出。定义对角算子 $\mathscr{D}_{\infty,\ k}$，其作用于正规模态上为

$$\forall (l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}),\quad \mathscr{D}_{\infty,k}\mathbf{e}_{l,j} = \mathrm{i}\mu_{j,k}^{(\infty)}\mathbf{e}_{l,j}. \tag{7.97}$$

根据非对角范数的定义以及 (7.95)，我们得到

$$\|\mathscr{D}_{m,k} - \mathscr{D}_{\infty,k}\|_{\text{O-d},\mathtt{s}_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} = \sup_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}\left\|\mu_{j,k}^{(m)} - \mu_{j,k}^{(\infty)}\right\|^{q,\gamma} \leqslant C\,\gamma\,\delta_0(s_h)N_0^{\mu_2}N_m^{-\mu_2}. \tag{7.98}$$

考虑对角算子 $\mathscr{L}_\infty$、 $\omega\cdot\partial_\varphi \mathrm{I}_{\mathtt{m},\ \perp} + \mathscr{D}_\infty$，其中 $\mathscr{D}_\infty$ 在 (7.97) 中引入。对于任意 $m\in\mathbb{N}$，应用 (7.98) 和 (7.93) 可得

$$\begin{aligned}|||\mathscr{L}_m - \mathscr{L}_\infty|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} &\leqslant 2\max_{k\in\{1,2\}}\|\mathscr{D}_{m,k} - \mathscr{D}_{\infty,k}\|_{\text{O-d},s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + |||\mathscr{R}_m|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\\ &\leqslant C\,\gamma\,\delta_0(s_h)N_0^{\mu_2}N_m^{-\mu_2},\end{aligned}$$

其中 $\mathscr{L}_m$ 由 (7.85) 给出。因此，

$$\lim_{m\to\infty}|||\mathscr{L}_m - \mathscr{L}_\infty|||_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}} = 0.$$

现在我们定义连续变换的序列 $\left(\widehat{\Phi}_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ 如下

$$\widehat{\Phi}_0 \triangleq \Phi_0 \qquad \text{and} \qquad \forall m\geqslant 1,\quad \widehat{\Phi}_m \triangleq \Phi_0\circ\Phi_1\circ\ldots\circ\Phi_m. \tag{7.99}$$

恒等式 $\Phi_m = \mathrm{Id} + \Psi_m$ 给出

$$\widehat{\Phi}_{m+1} = \widehat{\Phi}_m + \widehat{\Phi}_m\Psi_{m+1}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$利用 (7.76) 和 (7.93)，通过完备性论证可知级数 $\sum(\Phi_{m+1}-\Phi_m)$ 收敛到一个 $\Phi_\infty$ 仍接近恒等映射、因此可逆的元素，并且满足

$$|||\ \Phi_\infty^{-1} - \widehat{\Phi}_n^{-1}\ |||_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + |||\ \Phi_\infty - \widehat{\Phi}_n|||_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \delta_0(s_h)N_0^{\mu_2}N_{n+1}^{-\mu_2} \tag{7.100}$$

以及 (7.45)。关于完整的计算过程（仅需针对混合范数作少许修改），请参阅 [69, 命题 6.5] 。根据构造 (7.99) 和 (7.87)，我们在 $\mathscr{O}_{n+1}^\gamma$ 中得到以下恒等式

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_n^{-1}\mathscr{L}_0\widehat{\Phi}_n &= \omega\cdot\partial_\varphi\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp} + \mathscr{D}_{n+1} + \mathscr{R}_{n+1}\\ &= \mathscr{L}_\infty + \mathscr{D}_{n+1} - \mathscr{D}_\infty + \mathscr{R}_{n+1}.\end{aligned}$$

暂且假设命题 7.5 中描述的集合 $\mathscr{O}^{\gamma,}{}_\infty{}^{\tau_1\ \tau_2}{}_{,,}(i_0)$ 满足相对于式 (7.86) 给出的中间康托集的如下包含性质，

$$\mathscr{O}_{\infty,n}^{\gamma;\tau_1,\tau_2}(i_0) \subset \bigcap_{m=0}^{n+1}\mathscr{O}_m^\gamma = \mathscr{O}_{n+1}^\gamma. \tag{7.101}$$

因此，将限制施加于 $\mathcal{O}^{\gamma,\infty^{\tau_1,\tau_2}_{n,*}}(i_0)\subset\mathcal{O}^{\gamma}_{n+1}$ 后，我们得到

$$\begin{aligned}\Phi_\infty^{-1}\mathscr{L}_0\Phi_\infty&=\mathscr{L}_\infty+\left(\mathscr{D}_{n+1}-\mathscr{D}_\infty+\mathscr{R}_{n+1}\right)\Pi^{\perp}_{\overline{\mathbb{S}}_0}\\&\quad+\Phi_\infty^{-1}\mathscr{L}_0\left(\Phi_\infty-\widehat{\Phi}_n\right)+\left(\Phi_\infty^{-1}-\widehat{\Phi}_n^{-1}\right)\mathscr{L}_0\widehat{\Phi}_n\\&\triangleq\mathscr{L}_\infty+\mathscr{E}_n^1.\end{aligned}$$

估计 (7.48) 是结合 (7.90)、(7.93)、(7.51)、(7.45) 和 (7.43)，利用 (2.34)、引理 2.3-(ii)-(iii)、(7.98)、(7.40) 及 (7.100) 得到的。现在只需证明 (7.101)。通过对 $m$ 进行有限归纳并固定 $n$ 即可完成证明。首先，根据定义有 $\mathcal{O}^{\gamma,\ \infty^{\tau_1,\tau_2}_{n,*}}(i_0)\subset\mathcal{O}$，$\mathcal{O}^{\gamma}_0$. 现在假设 $\mathcal{O}^{\gamma,\ \infty^{\tau_1,\tau_2}_{n,*}}(i_0)\subset\mathcal{O}^{\gamma}_m$ 对 $m\leqslant n$ 成立，接下来证明

$$\mathcal{O}^{\gamma,\tau_1,\tau_2}_{\infty,n}(i_0)\subset\mathcal{O}^{\gamma}_{m+1}. \tag{7.102}$$

设 $(b,\omega)\in\mathcal{O}^{\gamma,\ \infty^{\tau_1,\tau_2}_{n,*}}(i_0)$。对于满足 $0\leqslant\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_m$ 的 $(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ 1})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ 2})$，由三角不等式、(7.98)、(7.42) 和 (7.52) 可得

$$\begin{aligned}\left|\omega\cdot l+\mu^{(m)}_{j,1}(b,\omega)-\mu^{(m)}_{j_0,2}(b,\omega)\right|&\geqslant\left|\omega\cdot l+\mu^{(\infty)}_{j,1}(b,\omega)-\mu^{(\infty)}_{j_0,2}(b,\omega)\right|-2\max_{k\in\{1,2\}}\sup_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}\left\|\mu^{(m)}_{j,k}-\mu^{(\infty)}_{j,k}\right\|^{q,\gamma}\\&\geqslant\tfrac{2\gamma}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}-2C\gamma\delta_0(s_h)N_0^{\mu_2}N_m^{-\mu_2}\\&\geqslant\tfrac{\gamma}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}\left(2-2C\gamma\varepsilon_0\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2-\mu_2}\right).\end{aligned}$$

因此，当 $\varepsilon_0$ 足够小时，由 (7.42)（这意味着 $\mu_2\geqslant\tau_2$）可得

$$\left|\omega\cdot l+\mu^{(m)}_{j,1}(b,\omega)-\mu^{(m)}_{j_0,2}(b,\omega)\right|>\tfrac{\gamma}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}.$$

现在对于 $k\in\{1,2\}$ 且 $(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2$ 满足 $(l,j)\neq(0,j_0)$ 且 $|l|\leqslant N_m$ 时，可得

$$\begin{aligned}\left|\omega\cdot l+\mu^{(m)}_{j,k}(b,\omega)-\mu^{(m)}_{j_0,k}(b,\omega)\right|&\geqslant\left|\omega\cdot l+\mu^{(\infty)}_{j,k}(b,\omega)-\mu^{(\infty)}_{j_0,k}(b,\omega)\right|-2\sup_{j\in\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}\left\|\mu^{(m)}_{j,k}-\mu^{(\infty)}_{j,k}\right\|^{q,\gamma}\\&\geqslant\tfrac{2\gamma\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}-2C\gamma\delta_0(s_h)N_0^{\mu_2}N_m^{-\mu_2}\\&\geqslant\tfrac{\gamma\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}\left(2-2C\gamma\varepsilon_0\langle l\rangle^{\tau_2-\mu_2}\right).\end{aligned}$$

因此，取 $\varepsilon_0$ 足够小，可得 $k\in\{1,2\}$,

$$\left|\omega\cdot l+\mu^{(m)}_{j,k}(b,\omega)-\mu^{(m)}_{j_0,k}(b,\omega)\right|>\tfrac{\gamma\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}.$$

因此，$(b,\omega)\in\mathcal{O}^{\gamma}_{m+1}$，这就证明了 (7.102)。

(ii) 从 (7.18) 和 (7.39) 出发并取 $\mathtt{p}=4\tau_2q+4\tau_2.$，通过与上述类似的归纳过程，可以得到估计 (7.49) 和 (7.50)。更多细节请参阅 [69, 命题 6.5]。

□

本节最后给出法向方向上线性化算子近似右逆的有效构造。由于我们已经构造出一个带有傅里叶乘子项的对角算子 $\mathscr{L}_\infty$，问题便化为两个相互解耦的标量问题。因此，稍作调整后，我们可以照搬 [69, 命题 6.6] 中的证明，得到以下结果。

命题 7.6. 设 $(\gamma,q,d,\tau_1,s_0,\mu_2,s_h,S,\mathtt{m})$ 满足 (2.2)–(2.3)、(7.3) 和 (7.42)–(7.43)。存在 $\sigma_5$，$\sigma_5(\tau_1,\tau_2,q,d)\geqslant\sigma_4$，使得若

$$\|\mathfrak{I}_0\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_h+\sigma_5}\leqslant1, \tag{7.103}$$

则以下断言成立。

(i) 考虑命题 7.5 中定义的算子 $\mathscr{L}_\infty$，则存在一族定义于 $\mathcal{O}$ 的线性算子 $(\mathtt{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足以下估计

$$\forall s\in[s_0,S],\quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mathtt{T}_n\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\gamma^{-1}\|\rho\|_{s+\tau_1 q+\tau_1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}$$

并且对于康托集中的任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$\Lambda_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1}(i_0)\triangleq\bigcap_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{S}_0^c\\|l|\leqslant N_n}}\left\{(b,\omega)\in\mathcal{O}\quad\text{s.t.}\quad\left|\omega\cdot l+\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_0)\right|>\tfrac{\gamma\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}\right\},$$

我们有

$$\mathscr{L}_\infty\mathtt{T}_n=\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\mathscr{E}_n^2,$$

*with*

$$\forall s_0\leqslant s\leqslant\overline{s}\leqslant S,\quad\|\mathscr{E}_n^2\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim N_n^{s-\overline{s}}\gamma^{-1}\|\rho\|_{s+1+\tau_1 q+\tau_1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.$$

(ii) 存在一族线性算子 $(\widehat{\mathtt{T}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足

$$\forall\, s\in[s_0,S],\quad\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\widehat{\mathtt{T}}_n\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\gamma^{-1}\left(\|\rho\|_{s+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\mathfrak{I}_0\|_{s+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_{s_0+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right)$$

并且在康托集中

$$\mathtt{G}_n(\gamma,\tau_1,\tau_2,i_0)\triangleq\mathcal{O}_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1}(i_0)\cap\mathcal{O}_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1,\tau_2}(i_0)\cap\Lambda_{\infty,n}^{\gamma,\tau_1}(i_0),\tag{7.104}$$

我们有

$$\widehat{\mathcal{L}}\,\widehat{\mathtt{T}}_n=\mathbf{I}_{\mathtt{m},\perp}+\mathtt{E}_n,$$

其中 $\mathtt{E}_n$ 满足以下估计

$$\begin{aligned}\forall\, s\in[s_0,S],\quad\|\mathtt{E}_n\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim N_n^{s_0-s}\gamma^{-1}\Big(\|\rho\|_{s+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\varepsilon\gamma^{-2}\|\mathfrak{I}_0\|_{s+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_{s_0+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\Big)\\+\varepsilon\gamma^{-3}N_0^{\mu_2}N_{n+1}^{-\mu_2}\|\rho\|_{s_0+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.\end{aligned}$$

回顾一下，$\widehat{\mathcal{L}}$、$\mathcal{O}^{\gamma,\tau_1}_{\infty,n}(i_0)$ 以及 $\mathcal{O}^{\gamma,\tau_1,\tau_2}_{\infty,n}(i_0)$ 分别由命题 7.1、7.2 和 7.5 给出。(iii) 在康托集 $\mathtt{G}_n(\gamma,\tau_1,\tau_2,i_0)$ 中，我们有如下分解

$$\widehat{\mathcal{L}}=\widehat{\mathtt{L}}_n+\widehat{\mathtt{R}}_n,\qquad\text{with}\qquad\widehat{\mathtt{L}}_n\widehat{\mathtt{T}}_n=\mathrm{Id}\qquad\text{and}\qquad\widehat{\mathtt{R}}_n=\mathtt{E}_n\widehat{\mathtt{L}}_n,$$

其中，算子 $\widehat{\mathtt{L}}_n$ 和 $\widehat{\mathtt{R}}_n$ 定义于 $\mathcal{O}$ 中，并满足以下估计

$$\begin{aligned}&\forall s\in[s_0,S],\quad\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\widehat{\mathtt{L}}_n\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim\|\rho\|_{s+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\varepsilon\gamma^{-2}\|\mathfrak{I}_0\|_{s+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}},\\&\forall s\in[s_0,S],\quad\|\widehat{\mathtt{R}}_n\rho\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim N_n^{s_0-s}\gamma^{-1}\left(\|\rho\|_{s+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\varepsilon\gamma^{-2}\|\mathfrak{I}_0\|_{s+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_{s_0+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right)\\&\qquad\qquad+\varepsilon\gamma^{-3}N_0^{\mu_2}N_{n+1}^{-\mu_2}\|\rho\|_{s_0+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathtt{m}}.\end{aligned}$$

# 8 拟周期解的构造

在本节最后，我们构造方程 (5.11) 的一个非平凡解。该构造分为两步。首先，我们实施 Nash-Moser 迭代；当参数 $(b,\omega)$ 属于一个适当的博雷尔集时，可以找到一个解。该集合由以下康托集取交得到：这些康托集是为了在该过程的每一步中对正规模态上的线性化算子求逆所需的。随后，我们对频率进行刚性化处理，以得到原问题的一个解，其中 $\alpha=-\mathrm{J}^{\omega_{\mathrm{Eq}}(b)}$。由此得到一个用 $b$ 描述的最终集合，我们需要估计其勒贝格测度。事实上，我们证明当参数 $\varepsilon$ 趋于零时，该集合的测度渐近地趋于满测度。

## 8.1 Nash-Moser 迭代

在这里，我们实施 Nash-Moser 方案，从而找到以下方程的一个解：

$$\mathcal{F}(i,\alpha,b,\omega) \triangleq \mathcal{F}(i,\alpha,b,\omega,\varepsilon) = 0,$$

其中 $\mathcal{F}$ 如 (5.11) 所示。该方法是经典方法，已在多篇论文中使用，例如参见[4, 5, 14]。近似解的迭代构造总结于下述命题中。证明对 [19, 59, 69]中给出的证明略作修改而成。

命题 8.1.（Nash-Moser方案）
设 $(\tau_1,\tau_2,q,d,s_0)$ 满足 (2.2)–(2.3)，且 $\mathtt{m} \geqslant \mathtt{m}^*$，其中 $\mathtt{m}^*$ 由推论 4.1 定义。我们考虑以下参数

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{a} &=& \tau_2+3 \\ \mu_1 &=& 3q(\tau_2+3)+6\overline{\sigma}+6 \\ a_1 &=& 6q(\tau_2+3)+12\overline{\sigma}+15 \\ a_2 &=& 3q(\tau_2+3)+6\overline{\sigma}+9 \\ \mu_2 &=& 2q(\tau_2+3)+5\overline{\sigma}+7 \\ s_h &=& s_0+4q(\tau_2+3)+9\overline{\sigma}+11 \\ \kappa_1 &=& 2s_h-s_0 \end{array}\right. \tag{8.1}$$

其中数值 $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}(\tau_1,\tau_2,d)$ 是定理 6.1 给出的正则性总损失。存在$C_*>0$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得对任意 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$，我们施加将 $\gamma$ 和 $N_0$ 与 $\varepsilon$联系起来的约束，

$$0<a<\tfrac{1}{\mu_2+q+2}, \qquad \gamma \triangleq \varepsilon^a, \qquad N_0 \triangleq \gamma^{-1}. \tag{8.2}$$

令 $n\in\mathbb{N}$. 我们引入有限维子空间 $E_{n,\,\mathtt{m}}$ 定义如下：

$$E_{n,\mathtt{m}} \triangleq \Big\{ \mathfrak{I}=(\Theta,I,z)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbf{H}^\infty_{\perp,\mathtt{m}} \quad \text{s.t.} \quad \Theta=\Pi_{N_n}\Theta, \quad I=\Pi_{N_n}I \quad \text{and} \quad z=\Pi_{N_n}z \Big\},$$

其中 $\Pi_{N_n}$ 是通过 (2.6) 定义的投影算子。于是，以下性质成立。

$(\mathcal{P}1)_n$ 存在一个 $q$ 次可微映射

$$\begin{array}{rccl} \mathtt{W}_n: & \mathcal{O} & \to & E_{n-1,\mathtt{m}}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d+1} \\ & (b,\omega) & \mapsto & \big(\mathfrak{I}_n, \alpha_n-\mathtt{J}\omega, 0\big) \end{array}$$

满足 $\mathtt{W}_0=0$，且对于 $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\|\mathtt{W}_n\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+\overline{\sigma}} \leqslant C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{q\overline{a}}. \tag{8.3}$$

我们令

$$\mathtt{U}_0 \triangleq \Big((\varphi,0,0),\mathtt{J}\omega,(b,\omega)\Big) \tag{8.4}$$

且对于 $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathtt{U}_n \triangleq \mathtt{U}_0+\mathtt{W}_n \qquad \text{and} \qquad \mathtt{H}_n \triangleq \mathtt{U}_n-\mathtt{U}_{n-1},. \tag{8.5}$$

*Then*

$$\forall s\in[s_0,S], \quad \|\mathtt{H}_1\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_s \leqslant \tfrac{1}{2}C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{q\overline{a}}, \tag{8.6}$$

$$\forall\, 2\leqslant m\leqslant n, \quad \|\mathtt{H}_m\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_0+\overline{\sigma}} \leqslant C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_{m-1}^{-a_2}, \tag{8.7}$$

$$\forall n\geqslant 2, \quad \|\mathtt{H}_n\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s_h+\overline{\sigma}} \leqslant C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_{n-1}^{-a_2}. \tag{8.8}$$

$(\mathcal{P}2)_n$ 集合

$$i_n \triangleq (\varphi,0,0)+\mathfrak{I}_n, \qquad \gamma_n \triangleq \gamma(1+2^{-n})\in[\gamma,2\gamma]. \tag{8.9}$$

环面 $i_n$ 是可逆且具有 $\mathtt{m}$ 重对称性，也就是说

$$\mathfrak{S}i_n(\varphi)=i_n(-\varphi) \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{T}_{\mathtt{m}}i_n(\varphi)=i_n(\varphi), \tag{8.10}$$

其中 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{T}_{\mathtt{m}}$ 如 (5.12)-(5.13) 所示。另定义

$$\mathtt{A}_0^\gamma \triangleq \mathcal{O} \qquad and \qquad \mathtt{A}_{n+1}^\gamma \triangleq \mathtt{A}_n^\gamma \cap \mathtt{G}_n(\gamma_{n+1}, \tau_1, \tau_2, i_n)$$

其中，$\mathtt{G}_n(\gamma_{n+1}, \tau_1, \tau_2, i_n)$由 (7.104) 给出。考虑开集

$$\forall \mathtt{v} > 0, \quad \mathrm{O}_n^{\mathtt{v}} \triangleq \Big\{(b,\omega) \in \mathcal{O} \quad \text{s.t.} \quad \mathtt{dist}\big((b,\omega), \mathtt{A}_n^{2\gamma}\big) < \mathtt{v} N_n^{-\overline{a}}\Big\}, \qquad \mathtt{dist}(x, \mathtt{A}) \triangleq \inf_{y \in \mathtt{A}} \|x - y\|.$$

于是我们得到以下估计

$$\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}} \triangleq \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d+1} \\ |\alpha| \leqslant q}} \gamma^{|\alpha|} \sup_{(b,\omega) \in \mathrm{O}_n^{2\gamma}} \|\partial_{(b,\omega)}^\alpha \mathcal{F}(\mathtt{U}_n)(b,\omega,\cdot)\|_{H_{\mathtt{m}}^{s_0-|\alpha|}} \leqslant C_* \varepsilon N_{n-1}^{-a_1}. \tag{8.11}$$

$(\mathcal{P}3)_n$ 我们有如下高正则性范数增长

$$\|\mathtt{W}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \leqslant C_* \varepsilon \gamma^{-1} N_{n-1}^{\mu_1}. \tag{8.12}$$

证明。我们紧密沿用 [69, 命题 7.1]。首先注意，初始猜测 $\mathtt{U}_0$ 与一个可逆平坦环面相关联，并且根据 (5.11) 和引理 5.2，满足以下估计，其中某个充分大的常数为 $C_*$

$$\forall s \geqslant 0, \quad \|\mathcal{F}(\mathtt{U}_0)\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \leqslant C_* \varepsilon. \tag{8.13}$$

性质 $(\mathcal{P}1)_0$, $(\mathcal{P}2)_0$ 和 $(\mathcal{P}3)_0$ 由 $N_{-1} = 1$ 和 $\mathrm{O}_0^\gamma = \mathcal{O}$ 立即得到，并通过设定 $\mathtt{W}_0 = 0$. 得出。现在，我们转向归纳步骤。固定 $n \in \mathbb{N}^*$，并假设对于任意 $\ell \in [\![0, n]\!]$.，$(\mathcal{P}1)_\ell$、$(\mathcal{P}2)_\ell$ 和 $(\mathcal{P}3)_\ell$ 均成立。目的是验证这些性质在阶数 $n+1$ 时也成立。记

$$L_n \triangleq L_n(b,\omega) \triangleq d_{i,\alpha}\mathcal{F}(i_n\big(b,\omega), \alpha_n(b,\omega), (b,\omega)\big)$$

$\mathcal{F}$ 在状态（$i_n$， $\alpha_n$）处的线性化算子。正如我们稍后将看到的，下一近似 $\mathtt{U}_{n+1}$可以通过为 $L_n$构造一个可逆且 $\mathtt{m}$ 重保持的近似右逆来获得，这正是定理 6.1 的研究内容。为了应用这一结果并得到关于 $\mathtt{U}_{n+1}$的一些界，我们首先需要建立一些与小性条件及某些康托集包含关系相关的中间结果。

▶ 小量性／有界性。首先注意到，（8.1）蕴含（7.42）。因此，为了应用定理 6.1，我们需要验证小量性（7.43）和有界性（6.30）性质。根据（8.2），对 $\varepsilon$ 作充分小的选择，对于某个先验固定的 $\varepsilon_0 > 0$，可得

$$\varepsilon \gamma^{-2-q} N_0^{\mu_2} = \varepsilon^{1-a(\mu_2+q+2)} \leqslant \varepsilon_0, \tag{8.14}$$

这正是（7.43）。现在，由于根据（8.1） $\kappa_1 = 2s_h - s_0$，于是由引理 2.1-(v) 中的插值不等式，对于 $n \geqslant 2$，我们有

$$\|\mathtt{H}_n\|_{s_h+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \left(\|\mathtt{H}_n\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\mathtt{H}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8.15}$$

将性质 (8.12) 应用于指标 $n$ 和 $n-1$，可得

$$\begin{aligned}
\|\mathtt{H}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} &= \|\mathtt{U}_n - \mathtt{U}_{n-1}\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \\
&= \|\mathtt{W}_n - \mathtt{W}_{n-1}\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \\
&\leqslant \|\mathtt{W}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \|\mathtt{W}_{n-1}\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \\
&\leqslant 2C_* \varepsilon \gamma^{-1} N_{n-1}^{\mu_1}.
\end{aligned}$$

将最后一个估计与 (8.7) 一并代入 (8.15)，得到

$$\forall n \geqslant 2, \quad \|\mathtt{H}_n\|_{s_h+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} \leqslant C C_* \varepsilon \gamma^{-1} N_{n-1}^{\frac{1}{2}(\mu_1 - a_2)}. \tag{8.16}$$

注意到 (8.1) 特别蕴含 $a_2 \geqslant \mu_1 + 2$. 因此，由 (8.2)、(8.6) 和 (8.16)，可推得

$$\begin{aligned}\|\mathtt{W}_n\|_{s_h+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} &\leqslant \|\mathtt{H}_1\|_{s_h+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} + \sum_{k=2}^{n} \|\mathtt{H}_k\|_{s_h+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \\ &\leqslant \tfrac{1}{2} C_* \varepsilon \gamma^{-1} N_0^{q\overline{a}} + C N_0^{-1} C_* \varepsilon \gamma^{-1} \\ &\leqslant C_* \varepsilon^{1-a(1+q\overline{a})}.\end{aligned}$$

注意到 (8.1) 和 (8.2) 给出了 $a \leqslant \frac{1}{2(1+q\overline{a})}$，因此，取足够小的 $\varepsilon$，并令 $\overline{\sigma} \geqslant \sigma_5$ 满足命题（7.6）中的条件 $\sigma_5$，即可得到

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{I}_n\|_{s_h+\sigma_5}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} &\leqslant \|\mathtt{W}_n\|_{s_h+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathfrak{m}} \\ &\leqslant C_* \varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant 1,\end{aligned} \tag{8.17}$$

这对应于 (7.103)。适当增大 $\overline{\sigma}$ 的值后，我们总可以假设 $s_0 + \overline{\sigma} \geqslant \overline{s}_h + \sigma_4$，其中 $\overline{s}_h$ 和 $\sigma_4$ 分别由 (7.1) 和命题 7.5 给出。因此，(8.7) 得出 (8.8)。

▶ 集合的包含关系。(8.14) 和 (8.17) 的性质使我们可以应用定理 6.1。因此，在当前步骤，我们可以约化线性化算子 $L_n$。于是，对于 $\ell \leqslant n+1$ 和 $\gamma \in (0,1)$，集合 $\mathtt{A}_\ell^\gamma$ 是良定义的。接下来，我们要验证一些适当的包含关系，这些关系是稍后在所构造的康托集之外定义相关量的延拓所必需的。更确切地说，我们将验证以下内容

$$\mathtt{A}_{n+1}^{2\gamma} \subset \mathtt{O}_{n+1}^{4\gamma} \subset \left(\mathtt{A}_{n+1}^{\gamma} \cap \mathtt{O}_{n}^{2\gamma}\right).$$

显然，根据构造，第一个包含关系是显然的。因此，我们只需证明最后一个包含关系。注意，根据构造，$\mathtt{A}_{\ell+1}^{2\gamma} \subset \mathtt{A}_{\ell}^{2\gamma}.$。于是，对于 $(b,\omega) \in \mathtt{O}_{\ell+1}^{4\gamma}$，有

$$\begin{aligned}\mathtt{dist}\big((b,\omega), \mathtt{A}_\ell^{2\gamma}\big) &\leqslant \mathtt{dist}\big((b,\omega), \mathtt{A}_{\ell+1}^{2\gamma}\big) \\ &< 4\gamma N_{\ell+1}^{-\overline{a}} = 4\gamma N_\ell^{-\overline{a}} N_0^{-\frac{1}{2}\overline{a}} \\ &< 2\gamma N_\ell^{-\overline{a}}.\end{aligned}$$

只要 $2N_0^{-\frac{1}{2}\overline{a}} < 1$，最后一个估计就成立；这是根据 (8.2) 取 $\varepsilon$ 足够小得到的。因此，我们已经证明

$$\forall \ell \in [\![0,n]\!], \quad \mathtt{O}_{\ell+1}^{4\gamma} \subset \mathtt{O}_{\ell}^{2\gamma}. \tag{8.18}$$

现在，我们对 $\ell$ 进行归纳，证明以下包含关系

$$\forall \ell \in [\![0,n+1]\!], \quad \mathtt{O}_{\ell}^{4\gamma} \subset \mathtt{A}_{\ell}^{\gamma}. \tag{8.19}$$

由于 $\mathtt{O}_0^{4\gamma} = \mathcal{O} = \mathtt{A}_0^{\gamma}.$，$\ell = 0$ 的情形显然成立。现在假设 (8.19) 对某些 $\ell \in [\![0,n]\!]$ 成立，并检验下一阶 $\ell+1.$ 时的包含性质 (8.19)。结合 (8.18) 和 (8.19)，可得

$$\mathtt{O}_{\ell+1}^{4\gamma} \subset \mathtt{O}_{\ell}^{2\gamma} \subset \mathtt{O}_{\ell}^{4\gamma} \subset \mathtt{A}_{\ell}^{\gamma}.$$

因此，尚需验证

$$\mathtt{O}_{\ell+1}^{4\gamma} \subset \mathtt{G}_\ell\Big(\gamma_{\ell+1}, \tau_1, \tau_2, i_\ell\Big).$$

设 $(b,\omega) \in \mathtt{O}_{\ell+1}^{4\gamma}$，则根据构造，可找到 $(b',\omega') \in \mathtt{A}_{\ell+1}^{2\gamma}$，使得

$$\mathtt{dist}\left((b,\omega),(b',\omega')\right) < 4\gamma N_{\ell+1}^{-\overline{a}}. \tag{8.20}$$

我们先证明 $(b,\omega) \in \mathcal{O}^{\gamma_{\ell+1},\infty}{}_{\ell}^{\tau_1}(i_\ell)$。对于所有 $k \in \{1,2\}$ 以及满足 $|l| \leqslant N_\ell$ 的 $(l,j) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_{\mathfrak{m}} \setminus \{(0,0)\}$，由三角不等式和柯西-施瓦茨不等式，并结合 (8.20) 以及事实 $(b',\omega') \in \mathcal{O}^{2\gamma_{\ell+1},\infty}{}_{\ell}^{\tau_1}(i_\ell)$，可得：

$$\begin{aligned}|\omega\cdot l + j c_k(b,\omega,i_\ell)| &\geqslant \left|\omega'\cdot l + j c_k(b',\omega',i_\ell)\right| - |\omega-\omega'||l| - |j|\left|c_k(b,\omega,i_\ell) - c_k(b',\omega',i_\ell)\right| \\ &> \tfrac{4\gamma_{\ell+1}^{v} 2^v \langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}} - 4\gamma N_{\ell+1}^{1-\overline{a}} - \langle j\rangle \left|c_k(b,\omega,i_\ell) - c_k(b',\omega',i_\ell)\right|.\end{aligned}$$

现在，由中值定理和 $\mathsf{O}_{\ell+1}^{4\gamma}$ 的定义可得

$$\left|c_k(b,\omega,i_\ell)-c_k(b',\omega',i_\ell)\right|\leqslant CN_{\ell+1}^{-\overline{a}}\|c_k(i_\ell)\|^{q,\gamma}.$$

由（7.12），我们推得

$$\begin{aligned}\|c_k(i_\ell)\|^{q,\gamma}&\leqslant\|c_k(i_\ell)-\mathtt{v}_k\|^{q,\gamma}+\|\mathtt{v}_k\|^{q,\gamma}\\&\leqslant C.\end{aligned}$$

结合前两个估计可得

$$\left|c_k(b,\omega,i_\ell)-c_k(b',\omega',i_\ell)\right|\leqslant C\gamma\gamma^{-1}N_{\ell+1}^{-\overline{a}}\leqslant C\gamma N_{\ell+1}^{1-\overline{a}}.$$

因此，利用 $\gamma_\ell\geqslant\gamma$ 和 $\upsilon\in$ （0, 1）这两个事实，我们得到

$$\begin{aligned}|\omega\cdot l+jc_k(b,\omega,i_\ell)|&>\tfrac{4\gamma_{\ell+1}^{\upsilon}2^{\upsilon}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}-C\gamma\langle j\rangle N_{\ell+1}^{1-\overline{a}}\\&\geqslant\tfrac{4\gamma_{\ell+1}^{\upsilon}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}\left(2^{\upsilon}-CN_{\ell+1}^{\tau_1+1-\overline{a}}\right).\end{aligned}$$

特别地，我们对参数（8.1）和（2.2）的选择意味着

$$\overline{a}=\tau_2+3\geqslant\tau_1+2.\tag{8.21}$$

因此，取足够大的 $N_0$ ，我们得到

$$2^{\upsilon}-CN_{\ell+1}^{\tau_1+1-\overline{a}}\geqslant2^{\upsilon}-CN_0^{-1}>1,$$

这进而意味着

$$|\omega\cdot l+jc_k(b,\omega,i_\ell)|>\tfrac{4\gamma_{\ell+1}^{\upsilon}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}.$$

这证明了 $(b,\omega)\in\mathcal{O}^{\gamma_{\ell+1},\infty}\ell^{\tau_1},(i_\ell)$。现在，我们来验证 $(b,\omega)\in\mathcal{O}^{\gamma_{\ell+1},\infty}\ell^{\tau_1\,\tau_2}{}_{,,}(i_\ell)$。对所有 $k\in\{1,2\}$ 以及 $(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2$ 且满足 $|l|\leqslant N_\ell$ 的情形，利用三角不等式和柯西-施瓦茨不等式，以及 (8.20) 和 $(b',\omega')\in\mathcal{O}^{2\gamma_{\ell+1},\infty}\ell^{\tau_1\,\tau_2}{}_{,,}(i_\ell)$ 这一事实

$$\begin{aligned}\left|\omega\cdot l+\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)\right|&\geqslant\left|\omega'\cdot l+\mu_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)-\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|-|\omega-\omega'||l|\\&\quad-\left|\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)+\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)-\mu_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|\\&>\tfrac{4\gamma_{\ell+1}\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}-4\gamma N_{\ell+1}^{1-\overline{a}}\\&\quad-\left|\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)+\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)-\mu_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|.\end{aligned}$$

由 (7.46) 可知，扰动特征值具有以下结构

$$\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)=\mu_{j,k}^{(0)}(b,\omega,i_\ell)+r_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell).\tag{8.22}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\left|\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)+\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)-\mu_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|\\&\leqslant\left|\mu_{j,k}^{(0)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,k}^{(0)}(b,\omega,i_\ell)+\mu_{j_0,k}^{(0)}(b',\omega',i_\ell)-\mu_{j,k}^{(0)}(b',\omega',i_\ell)\right|\\&\quad+\left|r_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-r_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|+\left|r_{j_0,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-r_{j_0,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|.\end{aligned}$$

中值定理、(8.20) 以及 $\mathsf{O}_{\ell+1}^{4\gamma}$ 的定义表明

$$\left|\mu_{j,k}^{(0)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,k}^{(0)}(b,\omega,i_\ell)+\mu_{j_0,k}^{(0)}(b',\omega',i_\ell)-\mu_{j,k}^{(0)}(b',\omega',i_\ell)\right|\leqslant\gamma CN_{\ell+1}^{1-\overline{a}}\langle j-j_0\rangle.\tag{8.23}$$

类似地，特别利用 (7.47)、(8.14) 以及 $\mathsf{O}_{\ell+1}^{4\gamma}$ 的定义，我们得到

$$\left|r_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-r_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|\leqslant C\gamma N_{\ell+1}^{-\overline{a}}\varepsilon\gamma^{-2}\leqslant\gamma CN_{\ell+1}^{1-\overline{a}}\langle j-j_0\rangle. \tag{8.24}$$

汇总上述不等式，并利用 $|l|\leqslant N_\ell$ 和 $\gamma_{\ell+1}\geqslant\gamma$ 这一事实，我们得到

$$\left|\omega\cdot l+\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)\right|\geqslant\tfrac{\gamma_{\ell+1}\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}\left(4-CN_{\ell+1}^{\tau_2+1-\overline{a}}\right).$$

根据选择（8.21），如果 $N_0$ 足够大，则可得

$$CN_{\ell+1}^{\tau_2+1-\overline{a}}\leqslant CN_0^{-1}<1,$$

这进而意味着

$$\left|\omega\cdot l+\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)\right|>\tfrac{2\gamma_{\ell+1}\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}.$$

对于所有满足 $\in\mathbb{Z}^d\times$ 的 $(l,j,j_0)$，其中 $(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2})$，且 $\underset{\tau_1}{}\underset{\tau_2}{}\langle l$、$j$、$j_0\rangle\leqslant N_\ell$，利用三角不等式和柯西-施瓦茨不等式，以及（8.20）和 $(b',\omega')\in\mathscr{O}^{2\gamma_{\ell+1},\infty\,\ell}{}_{,,}(i_\ell)$ 这一事实

$$\begin{aligned}\left|\omega\cdot l+\mu_{j,1}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,2}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)\right|&\geqslant\left|\omega'\cdot l+\mu_{j,1}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)-\mu_{j_0,2}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|-|\omega-\omega'||l|\\&\quad-\left|\mu_{j,1}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,2}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)+\mu_{j_0,2}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)-\mu_{j,1}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|\\&>\tfrac{4\gamma_{\ell+1}}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}-4\gamma N_{\ell+1}^{1-\overline{a}}\\&\quad-\left|\mu_{j,1}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,2}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)+\mu_{j_0,2}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)-\mu_{j,1}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|.\end{aligned}$$

与（8.23）和（8.24）类似，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\mu_{j,1}^{(0)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,2}^{(0)}(b,\omega,i_\ell)+\mu_{j_0,2}^{(0)}(b',\omega',i_\ell)-\mu_{j,1}^{(0)}(b',\omega',i_\ell)\right|&\leqslant\gamma CN_{\ell+1}^{1-\overline{a}}\langle j,j_0\rangle\leqslant\gamma CN_{\ell+1}^{2-\overline{a}},\\\left|r_{j,1}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-r_{j,1}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|+\left|r_{j_0,2}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-r_{j_0,2}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|&\leqslant\gamma CN_{\ell+1}^{1-\overline{a}}\langle j,j_0\rangle\leqslant\gamma CN_{\ell+1}^{2-\overline{a}}.\end{aligned}$$

因此，

$$\left|\omega\cdot l+\mu_{j,1}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,2}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)\right|\geqslant\tfrac{\gamma_{\ell+1}}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}\left(4-CN_{\ell+1}^{\tau_2+2-\overline{a}}\right).$$

根据 (8.21) 的选择，若 $N_0$ 足够大，则可得

$$CN_{\ell+1}^{\tau_2+2-\overline{a}}\leqslant CN_0^{-1}<1,$$

进而

$$\left|\omega\cdot l+\mu_{j,1}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j_0,2}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)\right|>\tfrac{2\gamma_{\ell+1}}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}.$$

这证明了 $(b,\omega)\in\mathscr{O}^{\gamma_{\ell+1},\infty\,\ell}{}_{,,}(i_\ell)$。还需验证 $(b,\omega)\in\Lambda^{\gamma_{\ell+1},\infty\,\ell}{}_{,}(i_\ell)$。对于所有 $k\in\{1,2\}$ 以及满足 $|l|\leqslant N_\ell$ 的 $(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})$，由三角不等式和柯西-施瓦茨不等式，结合 (8.20) 以及 $(b',\omega')\in\Lambda^{2\gamma_{\ell+1},\infty\,\ell}{}_{,}(i_\ell)$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}\left|\omega\cdot l+\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)\right|&\geqslant\left|\omega'\cdot l+\mu_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|-|\omega-\omega'||l|-\left|\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_k)-\mu_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|\\&>\tfrac{2\gamma_{\ell+1}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}-4\gamma N_\ell N_{\ell+1}^{-\overline{a}}-\left|\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|\\&>\tfrac{2\gamma_{\ell+1}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}-4\gamma N_{\ell+1}^{1-\overline{a}}-\left|\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|.\end{aligned}$$

由中值定理和 $\mathsf{O}_{\ell+1}^{4\gamma}$ 的定义可得

$$\begin{aligned}\left|\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)-\mu_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right|&\leqslant|(b,\omega)-(b',\omega')|\gamma^{-1}\|\mu_{j,k}^{(\infty)}(i_\ell)\|^{q,\gamma}\\&\leqslant 4N_{\ell+1}^{-\overline{a}}\|\mu_{j,k}^{(\infty)}(i_\ell)\|^{q,\gamma}.\end{aligned}$$

现在，根据三角不等式

$$\forall j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,k}, \quad \|\mu_{j,k}^{(\infty)}(i_\ell)\|^{q,\gamma} \leqslant \|\mu_{j,k}^{(\infty)}(i_\ell) - \Omega_{j,k}\|^{q,\gamma} + \|\Omega_{j,k}\|^{q,\gamma}.$$

由 (4.73) 可知，对所有 $|j| \geqslant \mathtt{m}^*$,

$$\|\Omega_{j,k}\|^{q,\gamma} \leqslant C|j|.$$

此外，(7.46)、(7.35)、(7.36) 和 (7.47) 蕴含

$$\forall j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,k}, \quad \|\mu_{j,k}^{(\infty)}(i_\ell) - \Omega_{j,k}\|^{q,\gamma} \leqslant C|j|.$$

综合前面的三个估计可得

$$\forall j \in \mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,k}, \quad \|\mu_{j,k}^{(\infty)}(i_\ell)\|^{q,\gamma} \leqslant C|j|.$$

因此，我们有

$$\left|\mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell) - \mu_{j,k}^{(\infty)}(b',\omega',i_\ell)\right| \leqslant C\langle j\rangle N_{\ell+1}^{-\overline{a}} \leqslant C\gamma\langle j\rangle N_{\ell+1}^{1-\overline{a}}.$$

利用 $|l| \leqslant N_\ell \leqslant N_{\ell+1}$ 和 $\gamma_{\ell+1} \geqslant \gamma$，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\omega\cdot l + \mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)\right| &\geqslant \tfrac{2\gamma_{\ell+1}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}} - C\gamma\langle j\rangle N_{\ell+1}^{1-\overline{a}} \\ &\geqslant \tfrac{\gamma_{\ell+1}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}\left(2 - CN_{\ell+1}^{\tau_1+1-\overline{a}}\right).\end{aligned}$$

现在，我们将 $N_0$ 取为充分大，使得

$$CN_{\ell+1}^{\tau_1+1-\overline{a}} \leqslant CN_0^{-1} < 1,$$

然后

$$\left|\omega\cdot l + \mu_{j,k}^{(\infty)}(b,\omega,i_\ell)\right| > \tfrac{\gamma_{\ell+1}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}.$$

这表明，$(b,\omega) \in \Lambda^{\gamma_{\ell+1}}{}_{,\infty}{}^{\ell}{}^{\tau_1}$, $(i_\ell)$，最后 $(b,\omega) \in \mathsf{G}_\ell\big(\gamma_{\ell+1},\tau_1,\tau_2,i_\ell\big)$. 因此 $(b,\omega) \in \mathsf{A}_{\ell+1}^{\gamma}$. 由此完成了 (8.19) 的归纳证明。

▶ 下一近似的构造。我们的下一个任务是构造下一近似解，记为 $\mathtt{U}_{n+1}$. 注意，根据定理 6.1，性质 (8.14) 和 (8.17) 允许构造线性化算子 $L_n$. 的可逆近似右逆 $\mathtt{T}_n$ , $\mathtt{T}_n(b,\omega)$。回顾一下，算子 $\mathtt{T}_n$ 在整个参数集合 $\mathcal{O}$ 上都有定义，并且根据 (6.31)，满足以下驯性估计

$$\forall s \in [s_0, S], \quad \|\mathtt{T}_n\rho\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}} \lesssim \gamma^{-1}\left(\|\rho\|_{s+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}} + \|\mathfrak{I}_n\|_{s+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\rho\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right). \tag{8.25}$$

此外，将其限制在 $\mathsf{G}_n(\gamma_{n+1},\tau_1,\tau_2,i_n)$ 上时，它是 $L_n$ 的一个近似右逆。更准确地说，根据 (6.32)，我们在 $\mathsf{G}_n(\gamma_{n+1},\tau_1,\tau_2,i_n)$ 中有

$$L_n\mathtt{T}_n - \mathrm{Id} = \mathcal{E}_1^{(n)} + \mathcal{E}_2^{(n)} + \mathcal{E}_3^{(n)}, \tag{8.26}$$

其中，右端的误差项满足估计式 (6.33)、(6.34) 和 (6.35)。下一近似定义如下：

$$\widetilde{\mathtt{U}}_{n+1} \triangleq \mathtt{U}_n + \widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}, \qquad \widetilde{\mathtt{H}}_{n+1} \triangleq (\widehat{\mathfrak{I}}_{n+1}, \widehat{\alpha}_{n+1}, 0) \triangleq -\mathbf{\Pi}_{N_n}\mathtt{T}_n\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) \in E_{n,\mathtt{m}} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d+1},$$

其中投影算子 $\mathbf{\Pi}_{N_n}$ 及其正交补定义为

$$\mathbf{\Pi}_{N_n}(\mathfrak{I},\alpha,0) = (\Pi_{N_n}\mathfrak{I},\alpha,0) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{\Pi}_{N_n}^{\perp}(\mathfrak{I},\alpha,0) = (\Pi_{N_n}^{\perp}\mathfrak{I},0,0). \tag{8.27}$$

然后，应用泰勒公式可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\widetilde{\mathtt{U}}_{n+1}) &= \mathcal{F}(\mathtt{U}_n) - L_n\mathbf{\Pi}_{N_n}\mathrm{T}_n\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) + Q_n\\ &= \mathcal{F}(\mathtt{U}_n) - L_n\mathrm{T}_n\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) + L_n\mathbf{\Pi}^{\perp}_{N_n}\mathrm{T}_n\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) + Q_n\\ &= \mathcal{F}(\mathtt{U}_n) - \Pi_{N_n}L_n\mathrm{T}_n\Pi_n\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) + (L_n\mathbf{\Pi}^{\perp}_{N_n} - \Pi^{\perp}_{N_n}L_n)\mathrm{T}_n\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) + Q_n\\ &= \Pi^{\perp}_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) - \Pi_{N_n}(L_n\mathrm{T}_n - \mathrm{Id})\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) + (L_n\mathbf{\Pi}^{\perp}_{N_n} - \Pi^{\perp}_{N_n}L_n)\mathrm{T}_n\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) + Q_n, \quad (8.28)\end{aligned}$$

其中 $Q_n$ 表示由下式给出的二次部分

$$Q_n = \mathcal{F}(\mathtt{U}_n + \widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}) - \mathcal{F}(\mathtt{U}_n) - L_n\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}. \quad (8.29)$$

~现在，我们将证明，在适当延拓 $\mathrm{U}_{n+1}$ 为 $\mathrm{U}_{n+1}|_{\mathrm{O}^{2\gamma}_{n+1}}$. 的情况下，(8.11) 阶数为 $n+1$。这分两步完成。第一步是证明

$$\|\mathcal{F}(\widetilde{\mathtt{U}}_{n+1})\|^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{4\gamma}_{n+1}}_{s_0} \leqslant C_*\varepsilon N_n^{-a_1}. \quad (8.30)$$

第二步是构造 $\mathrm{U}_{n+1}$ 的经典延拓，使其满足所需的估计 (8.11)。➢ (8.30) 的证明。我们估计 (8.28) 右端的四项中的每一项。先从第一项开始。应用引理 2.1-(i)，并利用包含关系 (8.18)，可得

$$\|\Pi^{\perp}_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{4\gamma}_{n+1}}_{s_0} \leqslant N_n^{s_0-\kappa_1}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{2\gamma}_{n}}_{\kappa_1}. \quad (8.31)$$

现在，泰勒公式结合 (5.11)、引理 5.2、(8.13) 和 (8.5) 可得

$$\begin{aligned}\forall s \geqslant s_0, \quad \|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{2\gamma}_{n}}_{s} &\leqslant \|\mathcal{F}(\mathtt{U}_0)\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s} + \|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) - \mathcal{F}(\mathtt{U}_0)\|^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{2\gamma}_{n}}_{s}\\ &\lesssim \varepsilon + \|\mathtt{W}_n\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{s+\overline{\sigma}}. \quad (8.32)\end{aligned}$$

此外，由 (8.12)、(6.20) 和 (8.2) 可得

$$\begin{aligned}\varepsilon + \|\mathtt{W}_n\|^{q,\gamma,\mathtt{m}}_{\kappa_1+\overline{\sigma}} &\leqslant \varepsilon\left(1 + C_*\gamma^{-1}N_{n-1}^{\mu_1}\right)\\ &\leqslant 2C_*\varepsilon N_n^{\frac{2}{3}\mu_1+1}. \quad (8.33)\end{aligned}$$

将 (8.32) 和 (8.33) 代入 (8.31)，可得

$$\|\Pi^{\perp}_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{4\gamma}_{n+1}}_{s_0} \lesssim C_*\varepsilon N_n^{s_0+\frac{2}{3}\mu_1+1-\kappa_1}. \quad (8.34)$$

下面继续讨论第二项。根据（8.19），我们有以下包含关系

$$\mathrm{O}^{4\gamma}_{n+1} \subset \mathtt{A}^{\gamma}_{n+1} \subset \mathtt{G}_n\Big(\gamma_{n+1}, \tau_1, \tau_2, i_n\Big).$$

因此，分解（8.26）在 $\mathrm{O}^{4\gamma}_{n+1}$ 上成立，我们可以写成

$$\Pi_{N_n}(L_n\mathrm{T}_n - \mathrm{Id})\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n) = \mathfrak{E}_{1,n} + \mathfrak{E}_{2,n} + \mathfrak{E}_{3,n},$$

其中对任意 $k \in \{1,2,3\}$,

$$\mathfrak{E}_{k,n} \triangleq \Pi_{N_n}\mathcal{E}^{(n)}_k\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n).$$

因此，我们需要估计每一个误差项 $\mathfrak{E}_{k,\ n}$。我们先从 $\mathfrak{E}_{1,\ n}$ 开始，为此需要以下插值型不等式

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|^{\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{2\gamma}_{n}}_{q,s_0+\overline{\sigma}} &\leqslant \|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|^{\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{2\gamma}_{n}}_{q,s_0+\overline{\sigma}} + \|\Pi^{\perp}_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|^{\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{2\gamma}_{n}}_{q,s_0+\overline{\sigma}}\\ &\leqslant N_n^{\overline{\sigma}}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|^{\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{2\gamma}_{n}}_{q,s_0} + N_n^{s_0-\kappa_1}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|^{\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}^{2\gamma}_{n}}_{q,\kappa_1+\overline{\sigma}}. \quad (8.35)\end{aligned}$$

现在，将 (8.32) 和 (8.33) 合并起来，我们得到

$$\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}} \leqslant C_*\varepsilon N_n^{\overline{\sigma}+\frac{2}{3}\mu_1+1}. \tag{8.36}$$

结合 (6.33)、(8.35)、(8.3)、(8.14) 和 (8.36)，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{E}_{1,n}\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}} &\lesssim \gamma^{-1}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\left(1+\|\mathfrak{I}_n\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right)\\ &\lesssim \gamma^{-1}N_n^{\overline{\sigma}}\left(N_n^{\overline{\sigma}}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}+N_n^{s_0-\kappa_1}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\right)\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\left(1+\|\mathtt{W}_n\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right)\\ &\lesssim C_*\varepsilon\left(N_n^{2\overline{\sigma}-\frac{4}{3}a_1}+N_n^{s_0+2\overline{\sigma}+\frac{2}{3}\mu_1+1-\frac{2}{3}a_1-\kappa_1}\right).\end{aligned} \tag{8.37}$$

对于 $\mathfrak{E}_{2,\ n}$，我们应用 $\mathtt{b}=\kappa_1-s_0$ 的 (6.34)，并利用 (8.14)、(8.11) 和 (8.12)，从而得到

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{E}_{2,n}\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}} &\lesssim \gamma^{-1}N_n^{s_0-\kappa_1}\left(\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}+\varepsilon\|\mathfrak{I}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\right)\\ &\lesssim \gamma^{-1}N_n^{s_0-\kappa_1}\left(\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}+\varepsilon N_n^{\overline{\sigma}}\|\mathtt{W}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\right)\\ &\lesssim C_*\varepsilon N_n^{s_0+\overline{\sigma}+\frac{2}{3}\mu_1+2-\kappa_1}+C_*\varepsilon N_n^{s_0+\overline{\sigma}+\frac{2}{3}\mu_1+2-\frac{2}{3}a_1-\kappa_1}\\ &\lesssim C_*\varepsilon N_n^{s_0+\overline{\sigma}+\frac{2}{3}\mu_1+2-\kappa_1}.\end{aligned} \tag{8.38}$$

类似地，将 (6.35)、(6.20)、(8.2) 和 (8.14) 结合起来，可得

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{E}_{3,n}\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}} &\lesssim N_n^{s_0-\kappa_1}\gamma^{-2}\left(\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}+\varepsilon\gamma^{-2}\|\mathfrak{I}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\right)\\ &\quad+\varepsilon\gamma^{-4}N_0^{\mu_2}N_n^{-\mu_2}\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\\ &\lesssim C_*\varepsilon\left(N_n^{s_0+\overline{\sigma}+\frac{2}{3}\mu_1+2-\kappa_1}+N_n^{\overline{\sigma}+1-\mu_2-\frac{2}{3}a_1}\right).\end{aligned} \tag{8.39}$$

综合 (8.37)、(8.38) 和 (8.39)，我们推得

$$\|\Pi_{N_n}(L_n\mathrm{T}_n-\mathrm{Id})\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}} \leqslant CC_*\varepsilon\left(N_n^{2\overline{\sigma}-\frac{4}{3}a_1}+N_n^{s_0+2\overline{\sigma}+\frac{2}{3}\mu_1+1-\kappa_1}+N_n^{\overline{\sigma}+1-\mu_2-\frac{2}{3}a_1}\right). \tag{8.40}$$

对于 $n=0$，由 (8.13)、(8.14) 以及对前述计算稍作修改，可得

$$\begin{aligned}\|\Pi_{N_0}(L_0\mathrm{T}_0-\mathrm{Id})\Pi_{N_0}\mathcal{F}(\mathtt{U}_0)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_1^{4\gamma}} &\leqslant \|\mathfrak{E}_{1,0}\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\mathfrak{E}_{2,0}\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\mathfrak{E}_{3,0}\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\\ &\lesssim \varepsilon^2\gamma^{-1}+\varepsilon\gamma^{-1}+\left(\varepsilon\gamma^{-2}N_0^{s_0-\kappa_1}+\varepsilon^2\gamma^{-4}\right)\\ &\lesssim \varepsilon\gamma^{-2}.\end{aligned} \tag{8.41}$$

现在，我们来估计 (8.28) 中第三项对应的量。根据 (6.1)，对于 $\widehat{\ }\qquad\widehat{\ }\quad\widehat{\ }\ \widehat{\ }\mathtt{H}=(\mathfrak{I},\widehat{\alpha})$，其中 $\mathfrak{I}=(\Theta,I,\widehat{z})$，有

$$L_n\mathtt{H}=\omega\cdot\partial_\varphi\widehat{\mathfrak{I}}-(0,0,\mathcal{J}\mathbf{L}_0(b)\widehat{z})-\varepsilon d_iX_{\mathcal{P}_\varepsilon}(i_n)\widehat{\mathfrak{I}}-(\mathtt{J}\widehat{\alpha},0,0). \tag{8.42}$$

现在，由 (8.27) 以及 $\omega\cdot\partial_\varphi$ 和 $\mathcal{J}\mathrm{L}_0(b)$ 为对角形式这一事实可得

$$\left(L_n\mathbf{\Pi}_{N_n}^{\perp}-\Pi_{N_n}^{\perp}L_n\right)\mathtt{H}=-\varepsilon[d_iX_{\mathcal{P}_\varepsilon}(i_n),\Pi_{N_n}^{\perp}]\widehat{\mathfrak{I}}.$$

结合引理 5.2-(ii)、引理 2.1-(i) 和 (8.18)，我们推得

$$\left\|\left(L_n\mathbf{\Pi}_{N_n}^{\perp}-\Pi_{N_n}^{\perp}L_n\right)\mathtt{H}\right\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\lesssim\varepsilon N_n^{s_0-\kappa_1}\left(\|\widehat{\mathfrak{I}}\|_{\kappa_1+1}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}+\|\mathfrak{I}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\widehat{\mathfrak{I}}\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\right).$$

因此，

$$\left\|\left(L_n\mathbf{\Pi}_{N_n}^{\perp}-\Pi_{N_n}^{\perp}L_n\right)\mathrm{T}_n\Pi_n\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\right\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\lesssim\varepsilon N_n^{s_0-\kappa_1}\|\mathrm{T}_n\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{\kappa_1+1}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}$$
$$+\varepsilon N_n^{s_0-\kappa_1}\|\mathfrak{I}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\mathrm{T}_n\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+1}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}.$$

现在，利用 (8.25)、(8.18)、引理 2.1-(i)、索博列夫嵌入、(8.14) 和 (8.2)，我们得到

$$\begin{aligned}&\left\|\left(L_n\mathbf{\Pi}_{N_n}^{\perp}-\Pi_{N_n}^{\perp}L_n\right)\mathrm{T}_n\Pi_n\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\right\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\\&\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{s_0-\kappa_1}\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}+1}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}+\|\mathfrak{I}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\\&\quad+\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{s_0-\kappa_1}\|\mathfrak{I}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\left(\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}+1}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}+\|\mathfrak{I}_n\|_{s_0+\overline{\sigma}+1}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\right)\\&\lesssim\varepsilon N_n^{s_0+2-\kappa_1}\left(\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}+\|\mathtt{W}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\right).\end{aligned}$$

此外，由引理 2.1-(ii)、(8.11) 和 (6.20)，我们得到

$$\begin{aligned}\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}&\leqslant N_n^{\overline{\sigma}}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\\&\leqslant C_*\varepsilon N_n^{\overline{\sigma}}N_{n-1}^{-a_1}\\&\leqslant C_*\varepsilon N_n^{\overline{\sigma}-\frac{2}{3}a_1}.\end{aligned}$$

结合 (8.1)、(8.36) 和 (8.12)，我们推得

$$\|(L_n\mathbf{\Pi}_n^{\perp}-\Pi_n^{\perp}L_n)\mathrm{T}_n\Pi_n\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\leqslant CC_*\varepsilon N_n^{s_0+\overline{\sigma}+\frac{2}{3}\mu_1+3-\kappa_1}.\tag{8.43}$$

(8.28) 中还剩下二次项。再利用泰勒公式和 (8.29)，可得

$$Q_n=\int_0^1(1-t)d_{i,\alpha}^2\mathcal{F}(\mathtt{U}_n+t\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1})[\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1},\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}]dt.$$

现在，由 (8.42) 和引理 5.2-(iii)，可得

$$\|Q_n\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\lesssim\varepsilon\left(1+\|\mathtt{W}_n\|_{s_0+2}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_{s_0+2}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\right)\left(\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_{s_0+2}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\right)^2.\tag{8.44}$$

注意，(8.32)、(8.2) 和 (8.3) 蕴含

$$\gamma^{-1}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\leqslant 1.\tag{8.45}$$

综合（8.18）、（8.19）、（8.25）、（8.32）和（8.45），可得对所有 $s\in[s_0,S]$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}&=\|\mathbf{\Pi}_{N_n}\mathrm{T}_n\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\\&\lesssim\gamma^{-1}\left(\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}+\|\mathfrak{I}_n\|_{s+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\Pi_{N_n}\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\right)\\&\lesssim\gamma^{-1}\left(N_n^{\overline{\sigma}}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}+N_n^{2\overline{\sigma}}\|\mathfrak{I}_n\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\right)\\&\lesssim\gamma^{-1}N_n^{2\overline{\sigma}}\left(\varepsilon+\|\mathtt{W}_n\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m}}\right).\end{aligned}\tag{8.46}$$

同理，由 (8.25)、(8.18)、(8.3)、(8.14) 和 (8.11)，可得

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}&\lesssim\gamma^{-1}N_n^{\overline{\sigma}}\|\mathcal{F}(\mathtt{U}_n)\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_n^{2\gamma}}\\&\lesssim C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{\overline{\sigma}}N_{n-1}^{-a_1}.\end{aligned}\tag{8.47}$$

对于充分小的 $\varepsilon$，由 (8.3) 和 (8.47) 可得

$$\begin{aligned}\|\mathtt{W}_n\|_{s_0+2}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_{s_0+2}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}&\leqslant C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{q\overline{a}}+N_n^2\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\\&\leqslant 1+C\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{\overline{\sigma}+2}N_{n-1}^{-a_1}\\&\leqslant 1+C\varepsilon\gamma^{-1}N_{n-1}^{3+\frac{3}{2}\overline{\sigma}-a_1}.\end{aligned}$$

但（8.1）特别给出 $a_1\geqslant 3+\frac{3}{2}\overline{\sigma}$. 因此,

$$\|\mathtt{W}_n\|_{s_0+2}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_{s_0+2}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\leqslant 2. \tag{8.48}$$

因此，将（8.48）和（8.47）代入（8.44），并利用（8.2）和（8.14），得到 t

$$\begin{aligned}\|Q_n\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}&\lesssim\varepsilon\left(\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_{s_0+2}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\right)^2\\&\leqslant\varepsilon N_n^4\left(\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\right)^2\\&\lesssim\varepsilon C_*N_n^{2\overline{\sigma}+4}N_{n-1}^{-2a_1}.\end{aligned}$$

利用（6.20），最终得到对于 $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\|Q_n\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathcal{O}_{n+1}^{4\gamma}}\leqslant CC_*\varepsilon N_n^{2\overline{\sigma}+4-\frac{4}{3}a_1}. \tag{8.49}$$

至于 $n=0$，我们回到（8.46）和（8.13），得到对所有 $s\in[s_0,S]$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathtt{H}}_1\|_s^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_1^{4\gamma}}&\lesssim\gamma^{-1}\|\Pi_0\mathcal{F}(\mathtt{U}_0)\|_{s+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\\&\lesssim C_*\varepsilon\gamma^{-1}.\end{aligned} \tag{8.50}$$

最后，不等式（8.49）对于 $n=0$ 变为,

$$\|Q_0\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_0^{4\gamma}}\lesssim C_*\varepsilon^3\gamma^{-2}. \tag{8.51}$$

将（8.34）、（8.40）、（8.43）和（8.49）代入（8.28），得到对于 $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\|\mathcal{F}(\widetilde{\mathtt{U}}_{n+1})\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\leqslant CC_*\varepsilon\left(N_n^{s_0+2\overline{\sigma}+\frac{2}{3}\mu_1+1-\kappa_1}+N_n^{\overline{\sigma}+1-\mu_2-\frac{2}{3}a_1}+N_n^{2\overline{\sigma}+4-\frac{4}{3}a_1}\right).$$

现在，我们在 (8.1) 中对参数的选取意味着

$$s_0+2\overline{\sigma}+\tfrac{2}{3}\mu_1+2+a_1\leqslant\kappa_1,\qquad\overline{\sigma}+\tfrac{1}{3}a_1+2\leqslant\mu_2,\qquad 2\overline{\sigma}+5\leqslant\tfrac{1}{3}a_1.$$

因此，当 $N_0$ 足够大时，也就是说，当 $\varepsilon$ 足够小时，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们可以得到:

$$\max\left(CN_n^{s_0+2\overline{\sigma}+\frac{2}{3}\mu_1+1-\kappa_1},CN_n^{\overline{\sigma}+1-\mu_2-\frac{2}{3}a_1},CN_n^{2\overline{\sigma}+4-\frac{4}{3}a_1}\right)\leqslant\tfrac{1}{3}N_n^{-a_1}, \tag{8.52}$$

这又意味着 $n\in\mathbb{N}^*$. 的 (8.30)。至于 $n=0$ 的情形，将 (8.34)、(8.41)、(8.43) 和 (8.51) 代入 (8.28), 可得

$$\|\mathcal{F}(\widetilde{\mathtt{U}}_1)\|_{q,s_0}^{\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_1^{4\gamma}}\leqslant CC_*\varepsilon\left(N_0^{s_0+2\overline{\sigma}+\frac{3}{2}\mu_1+1-\kappa_1}+\varepsilon\gamma^{-2}+\varepsilon^2\gamma^{-2}\right).$$

因此，利用 (8.52) 以及 (8.2) 和 (8.1) 蕴含 $0<a<\frac{1}{2+a_1}$. 这一事实，再令 $\varepsilon$ 足够小，我们可得

$$C\left(\varepsilon\gamma^{-2}+\varepsilon^2\gamma^{-2}\right)\leqslant\tfrac{2}{3}N_0^{-a_1}.$$

因此，对于 $n=0.$，(8.30) 也成立

$\rightsquigarrow$ 延拓的构造。接下来的目标是构造 $\mathrm{H}_{n+1}$ 在整个参数集合 $\mathcal{O}$ 上的延拓，同时仍满足良好的衰减性质。为此，我们引入以下截断函数 $\chi_{n+1}\in C^{\infty}\big(\mathcal{O},[0,1]\big)$，定义为

$$\chi_{n+1}=\begin{cases}1 & \text{in } \mathrm{O}_{n+1}^{2\gamma}\\ 0 & \text{in } \mathcal{O}\setminus \mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}\end{cases}$$

并且满足

$$\forall \alpha\in\mathbb{N}^d,\quad |\alpha|\in[\![0,q]\!],\quad \|\partial_{b,\omega}^{\alpha}\chi_{n+1}\|_{L^{\infty}(\mathcal{O})}\lesssim \big(\gamma^{-1}N_n^{\overline{a}}\big)^{|\alpha|}. \tag{8.53}$$

$\tilde{}$因此，我们可以如下定义 $\mathrm{H}_{n+1}$ 对 $\mathrm{H}_{n+1}$ 的延拓

$$\mathtt{H}_{n+1}\triangleq\begin{cases}\chi_{n+1}\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1} & \text{in } \mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma},\\ 0 & \text{in } \mathcal{O}\setminus \mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}.\end{cases} \tag{8.54}$$

我们还定义

$$\mathtt{W}_{n+1}\triangleq \mathtt{W}_n+\mathtt{H}_{n+1},\qquad \mathtt{U}_{n+1}\triangleq \mathtt{U}_0+\mathtt{W}_{n+1}=\mathtt{U}_n+\mathtt{H}_{n+1}. \tag{8.55}$$

可以观察到，限制在 $\mathrm{O}_{n+1}^{2\gamma}$上时，我们有

$$\mathtt{H}_{n+1}=\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1},\qquad \mathtt{U}_{n+1}=\widetilde{\mathtt{U}}_{n+1}\qquad\text{and}\qquad \mathcal{F}(\mathtt{U}_{n+1})=\mathcal{F}(\widetilde{\mathtt{U}}_{n+1}).$$

最后一个恒等式结合 (8.30) 以及 $\mathrm{O}_{n+1}^{2\gamma}\subset\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}$ 这一事实，可推出 (8.11)。现在，引理 2.1 中的乘积法则结合 (8.54) 和 (8.53)，给出以下估计

$$\forall s\geqslant s_0,\quad \|\mathtt{H}_{n+1}\|_{s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\lesssim N_n^{q\overline{a}}\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_{s}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}. \tag{8.56}$$

然后，综合 (8.56) 和 (8.47)，可得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\|\mathtt{H}_{n+1}\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}&\leqslant CN_n^{q\overline{a}+\overline{\sigma}}\|\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}\|_{s_0}^{q,\gamma,\mathtt{m},\mathrm{O}_{n+1}^{4\gamma}}\\&\leqslant CC_*\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{q\overline{a}+2\overline{\sigma}-\frac{2}{3}a_1}.\end{aligned}$$

约束 条件 (8.1) 特别推出 $a_2=\frac{2}{3}a_1-q\overline{a}-2\overline{\sigma}-1\geqslant 1$，当 $\varepsilon$ 足够小时，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathtt{H}_{n+1}\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}&\leqslant CN_0^{-1}C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{-a_2}\\&\leqslant C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{-a_2}.\end{aligned} \tag{8.57}$$

对于情形 $n=0$，结合 (8.56) 和 (8.50)，并令 $C_*$ 足够大，可得

$$\|\mathtt{H}_1\|_{s}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\leqslant\tfrac{1}{2}C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{q\overline{a}}. \tag{8.58}$$

综合 (8.5)、(8.58) 和 (8.57)，我们推出

$$\begin{aligned}\|\mathtt{W}_{n+1}\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}&\leqslant\|\mathtt{H}_1\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+\sum_{k=2}^{n+1}\|\mathtt{H}_k\|_{s_0+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\\&\leqslant\tfrac{1}{2}C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{q\overline{a}}+CN_0^{-1}C_*\varepsilon\gamma^{-1}\\&\leqslant C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{q\overline{a}}.\end{aligned}$$

这就证明了 (8.3) 在阶数 $n+1.$ 处成立。现在将 (8.46)、(8.56) 和 (8.12) 合并，得到 yi eld

$$\begin{aligned}\|\mathtt{W}_{n+1}\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}&\leqslant\|\mathtt{W}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}+CN_n^{q\overline{a}}\|\mathtt{H}_{n+1}\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\\&\leqslant C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_{n-1}^{\mu_1}+CC_*\gamma^{-1}N_n^{q\overline{a}+2\overline{\sigma}}\big(\varepsilon+\|\mathtt{W}_n\|_{\kappa_1+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\big)\\&\leqslant CC_*\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{q\overline{a}+2\overline{\sigma}+1+\frac{2}{3}\mu_1}.\end{aligned}$$

由 (8.1) 可得 $q\overline{a}+2\overline{\sigma}+2=\frac{\mu_1}{3}$，这意味着当 $\varepsilon$ 足够小时，我们有

$$\begin{aligned}\|\mathtt{W}_{n+1}\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{\kappa_1+\overline{\sigma}}&\leqslant CN_0^{-1}C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{\mu_1}\\&\leqslant C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{\mu_1}.\end{aligned}$$

这就证明了 (8.12) 在阶数 $n+1$. 下成立

➢ 该方案保持可逆性的性质。由 $(\mathcal{P}2)_n$可知，环面 $i_n$ 是可逆的。注意到，投影算子 $\Pi_{N_n}$ 关于傅里叶模态对称，因此保持可逆性。现在利用算子 $\mathtt{T}_n$ 和 $\Pi_{N_n}$ 的可逆性$\widehat{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，可知 $\mathtt{H}_{n+1}$ 的环面分量 $\mathfrak{I}_{n+1}$ 是可逆的。由于截断函数 $\chi_{n+1}$ 仅依赖于变量 $(b,\omega)$，因此 $\mathtt{H}_{n+1}$的环面分量 $\mathfrak{I}_{n+1}$ 也保持可逆性。考察 (8.55) 的第一分量，可得

$$i_{n+1}=i_n+\mathfrak{I}_{n+1}.$$

因此，可逆性 (8.10) 在阶数 $n+1$ 下也成立。 □

在对内部半径 $b$施加某些限制的条件下，前述迭代过程收敛，并可求得我们问题的一个非平凡可逆拟周期解。更确切地说，有如下结果。

推论 8.1. 存在 $\varepsilon_0>0$，使得对所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，以下断言均成立。存在一个 $q$ 次可微函数

$$\begin{array}{rccl}\mathtt{U}_\infty: & \mathcal{O} & \to & \Big(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbf{H}^{s_0}_{\perp,\mathfrak{m}}\Big)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d+1}\\ & (b,\omega) & \mapsto & \big(i_\infty(b,\omega),\alpha_\infty(b,\omega),(b,\omega)\big)\end{array}$$

使得在由以下方式定义的康托集 $\mathtt{G}^\gamma_\infty$ 上的限制为

$$\mathtt{G}^\gamma_\infty\triangleq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathtt{A}^\gamma_n,\tag{8.59}$$

我们有

$$\forall(b,\omega)\in\mathtt{G}^\gamma_\infty,\quad\mathcal{F}\big(\mathtt{U}_\infty(b,\omega)\big)=0.\tag{8.60}$$

环面 $i_\infty$是 $\mathfrak{m}$ 重且可逆的。向量 $\alpha_\infty\in W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O},\mathbb{R}^d)$ 满足

$$\alpha_\infty(b,\omega)=\mathtt{J}\omega+\mathrm{r}_\varepsilon(b,\omega),\qquad\|\mathrm{r}_\varepsilon\|^{q,\gamma}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{q\overline{a}}.\tag{8.61}$$

此外，存在一个 $q$ 次可微函数 $b\in(b_*,b^*)\mapsto\omega(b,\varepsilon)$，由以下关系隐式定义

$$\alpha_\infty\big(b,\omega(b,\varepsilon)\big)=-\mathtt{J}\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\tag{8.62}$$

*with*

$$\omega(b,\varepsilon)=-\omega_{\mathrm{Eq}}(b)+\bar{r}_\varepsilon(b),\qquad\|\bar{r}_\varepsilon\|^{q,\gamma}\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{q\overline{a}},\tag{8.63}$$

使得

$$\forall b\in\mathcal{C}^\varepsilon_\infty,\quad\mathcal{F}\Big(\mathtt{U}_\infty\big(b,\omega(b,\varepsilon)\big)\Big)=0,\tag{8.64}$$

其中

$$\mathcal{C}^\varepsilon_\infty\triangleq\Big\{b\in(b_*,b^*)\quad\text{s.t.}\quad\big(b,\omega(b,\varepsilon)\big)\in\mathtt{G}^\gamma_\infty\Big\}.\tag{8.65}$$

证明。由 (8.5) 和 (8.57) 可推得

$$\|\mathtt{W}_{n+1}-\mathtt{W}_n\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0}=\|\mathtt{H}_{n+1}\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0}\leqslant\|\mathtt{H}_{n+1}\|^{q,\gamma,\mathfrak{m}}_{s_0+\overline{\sigma}}\leqslant C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_n^{-a_2}.$$

因此，序列 $(\mathtt{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，我们记为

$$\mathtt{W}_\infty\triangleq\lim_{n\to\infty}\mathtt{W}_n\triangleq(\mathfrak{I}_\infty,\alpha_\infty-\mathtt{J}\omega,0,0),\qquad\mathtt{U}_\infty\triangleq\big(i_\infty,\alpha_\infty,(b,\omega)\big)=\mathtt{U}_0+\mathtt{W}_\infty.$$

$i_\infty$ 的可逆性和 m 重性质由 (8.10) 中的逐点极限得到。现在，当 $\varepsilon$ 足够小时，我们由 (8.11) 得到 (8.60)。恒等式 (8.61) 由前面的构造得出，相应的估计则通过对 (8.3) 取极限得到。我们回顾一下，开集$\mathcal{O}$ 在 (7.3)-(7.4) 中定义为

$$\mathcal{O} = (b_*, b^*) \times \mathscr{U}, \qquad \mathscr{U} = B(0, R_0), \qquad \omega_{\mathrm{Eq}}\big([b_*, b^*]\big) \subset B\big(0, \tfrac{R_0}{2}\big).$$

根据 (8.61)，对于任意 $b \in (b_*, b^*)$，映射 $\omega \in \mathscr{U} \mapsto \alpha_\infty(b, \omega) \in \alpha_\infty(b, \mathscr{U})$ 都是可逆的，这意味着

$$\widehat{\omega} = \alpha_\infty(b, \omega) = \mathtt{J}\omega + \mathrm{r}_\varepsilon(b, \omega) \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = \alpha_\infty^{-1}(b, \widehat{\omega}) = \mathtt{J}\widehat{\omega} + \widehat{\mathrm{r}}_\varepsilon(b, \widehat{\omega}).$$

特别地,

$$\widehat{\mathrm{r}}_\varepsilon(b, \widehat{\omega}) = -\mathtt{J}\mathrm{r}_\varepsilon(b, \omega).$$

接着，对前一个关系求导并利用 (8.61)，得到

$$\|\widehat{\mathrm{r}}_\varepsilon\|^{q,\gamma} \lesssim \varepsilon\gamma^{-1} N_0^{q\overline{a}}. \tag{8.66}$$

最后，若记

$$\omega(b, \varepsilon) \triangleq \alpha_\infty^{-1}(b, -\mathtt{J}\omega_{\mathrm{Eq}}(b)) = -\omega_{\mathrm{Eq}}(b) + \overline{\mathrm{r}}_\varepsilon(b), \qquad \overline{\mathrm{r}}_\varepsilon(b) \triangleq \widehat{\mathrm{r}}_\varepsilon\big(b, -\mathtt{J}\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\big),$$

那么特别地有 (8.62)，而估计 (8.63) 可由 (8.66) 得出。此外，结合 (8.60)、(8.62) 和 (8.65)，等式 (8.64) 成立。推论 8.1 的证明至此完成。 □

## 8.2 最终康托集的测度

在最后这一节中，我们验证由 (8.65) 给出的变量 $b$ 中的最终康托集 $\mathcal{C}_\infty^\varepsilon$ 是一个具有正测度的集合，从而证明我们的问题存在非平凡的拟周期解。实际上，我们证明 $\mathcal{C}_\infty^\varepsilon$ 的测度与 $(b^* - b_*)$ 相差不超过 $\varepsilon$。其中一个主要的技术工具是下述 R¨ussmann 引理 [93, 定理 17.1]。

引理 8.1. 设 $q_0 \in \mathbb{N}^*$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.。令 $f \in C^{q_0}([a, b], \mathbb{R})$ 满足

$$\inf_{x\in[a,b]} \max_{k\in[\![0,q_0]\!]} |f^{(k)}(x)| \geqslant \beta.$$

那么，存在 $C = C(a, b, q_0, \|f\|_{C^{q_0}([a,b],\ \mathbb{R})}) > 0$，使得

$$\Big|\big\{x \in [a, b] \quad \text{s.t.} \quad |f(x)| \leqslant \alpha\big\}\Big| \leqslant C\frac{\alpha^{\frac{1}{q_0}}}{\beta^{1+\frac{1}{q_0}}},$$

其中，记号 $|A|$ 表示给定可测集合 $A$.的勒贝格测度

我们的主要结果陈述如下命题。

命题 8.2. 设 $q_0$ 如引理 4.8 中所定义，并假设 (8.1) 和 (8.2) 在$q = q_0 + 1$. 下成立。再假设满足以下附加条件

$$\tau_1 > dq_0, \qquad \tau_2 > \tau_1 + dq_0, \qquad \upsilon \triangleq \frac{1}{q_0 + 3}. \tag{8.67}$$

那么存在 $C > 0$ 使得

$$(b^* - b_*) - C\varepsilon^{\frac{a\upsilon}{q_0}} \leqslant \big|\mathcal{C}_\infty^\varepsilon\big| \leqslant b^* - b_*.$$

证明。恒等式 (8.65) 和 (8.59) 给出了最终康托集的如下分解

$$\mathcal{C}_\infty^\varepsilon = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n^\varepsilon, \qquad \text{where} \qquad \mathcal{C}_n^\varepsilon \triangleq \Big\{ b\in(b_*,b^*) \quad \text{s.t} \quad \big(b,\omega(b,\varepsilon)\big)\in \mathtt{A}_n^\gamma \Big\}, \tag{8.68}$$

其中 $\mathtt{A}_n^\gamma$ 和 $\omega(b,\varepsilon)$ 如命题 8.1 和 (8.63) 中所述。我们可以写成

$$(b_*,b^*)\setminus \mathcal{C}_\infty^\varepsilon = \big((b_*,b^*)\setminus \mathcal{C}_0^\varepsilon\big) \sqcup \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \big(\mathcal{C}_n^\varepsilon \setminus \mathcal{C}_{n+1}^\varepsilon\big). \tag{8.69}$$

首先，我们来证明

$$(b_*,b^*)\setminus \mathcal{C}_0^\varepsilon = \varnothing, \qquad \text{i.e.} \qquad \mathcal{C}_0^\varepsilon = (b_*,b^*). \tag{8.70}$$

为此，注意到 (8.63) 和 (8.2) 蕴含

$$\sup_{b\in(b_*,b^*)} \big|\omega(b,\varepsilon)+\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\big| \leqslant \|\overline{\mathtt{r}}_\varepsilon\|^{q,\gamma} \leqslant C\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{q\overline{a}} = C\varepsilon^{1-a(1+q\overline{a})}.$$

但 (8.1) 和 (8.2) 特别给出

$$0<a<\frac{1}{1+q\overline{a}}.$$

因此，根据 (7.4)，当 $\varepsilon$ 充分小时，我们可以确保

$$\forall b\in(b_*,b^*), \quad \omega(b,\varepsilon)\in\mathscr{U}=B(0,R_0).$$

根据 $\mathtt{A}_0^\gamma$ 和 $\mathcal{O}$ 的构造，我们推出 (8.70)。回到 (8.69)，可得

$$\begin{aligned}\Big|(b_*,b^*)\setminus\mathcal{C}_\infty^\varepsilon\Big| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\Big|\mathcal{C}_n^\varepsilon\setminus\mathcal{C}_{n+1}^\varepsilon\Big| \\ &\triangleq \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}_n.\end{aligned} \tag{8.71}$$

采用命题 7.5 和 7.4 中的记号，我们将状态 $i_n$ 处与约化线性化算子相关的扰动频率记为

$$\begin{aligned}\mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon) &\triangleq \mu_{j,k,n}^{(\infty)}\big(b,\omega(b,\varepsilon),i_n\big) \\ &= \Omega_{j,k}(b)+jr_{k,n}^{(0)}(b,\varepsilon)+r_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon),\end{aligned} \tag{8.72}$$

其中

$$r_{k,n}^{(0)}(b,\varepsilon) \triangleq \mathtt{c}_{k,n}(b,\varepsilon)-\mathtt{v}_k(b), \qquad \mathtt{c}_{k,n}(b,\varepsilon)\triangleq \mathtt{c}_k\big(b,\omega(b,\varepsilon),i_n\big), \qquad r_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\triangleq r_{j,k}^{(\infty)}\big(b,\omega(b,\varepsilon),i_n\big).$$

现在，根据 (8.68) 和命题 7.2、7.5 和 7.6，根据构造可知，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_n^\varepsilon\setminus\mathcal{C}_{n+1}^\varepsilon = &\bigcup_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\{(0,0)\}\\|l|\leqslant N_n}} \mathcal{R}_{l,j}^{(0,k)}(i_n)\cup \bigcup_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})\\|l|\leqslant N_n}} \mathcal{R}_{l,j}^{(1,k)}(i_n) \\ \cup &\bigcup_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2\\\langle l\rangle\leqslant N_n\\(l,j)\neq(0,j_0)}} \mathcal{R}_{l,j,j_0}^{k}(i_n)\cup \bigcup_{\substack{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2})\\\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_n}} \mathcal{R}_{l,j,j_0}^{1,2}(i_n),\end{aligned} \tag{8.73}$$

其中，我们用 $k\in\{1,2\}$ 表示，

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{l,j}^{(0,k)}(i_n) &\triangleq \Big\{ b\in\mathcal{C}_n^\varepsilon \quad \text{s.t.} \quad \Big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+j\mathtt{c}_{k,n}(b,\varepsilon)\Big| \leqslant \tfrac{4\gamma_{n+1}^{\upsilon}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}\Big\}, \\ \mathcal{R}_{l,j,j_0}^{k}(i_n) &\triangleq \Big\{ b\in\mathcal{C}_n^\varepsilon \quad \text{s.t.} \quad \Big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-\mu_{j_0,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big| \leqslant \tfrac{2\gamma_{n+1}\langle j-j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}\Big\}, \\ \mathcal{R}_{l,j,j_0}^{1,2}(i_n) &\triangleq \Big\{ b\in\mathcal{C}_n^\varepsilon \quad \text{s.t.} \quad \Big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu_{j,1,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-\mu_{j_0,2,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big| \leqslant \tfrac{2\gamma_{n+1}}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}\Big\}, \\ \mathcal{R}_{l,j}^{(1,k)}(i_n) &\triangleq \Big\{ b\in\mathcal{C}_n^\varepsilon \quad \text{s.t.} \quad \Big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big| \leqslant \tfrac{\gamma_{n+1}\langle j\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}\Big\}.\end{aligned}$$

由于

$$W^{q,\infty,\gamma}(\mathcal{O},\mathbb{C})\hookrightarrow C^{q-1}(\mathcal{O},\mathbb{C})\qquad\text{and}\qquad q=q_0+1,$$

可得，对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 以及任意满足 $\in\{1,2\}^2$的 $(k,\ell)$，曲线具有 $C^{q_0}$正则性

$$\begin{aligned}
&b\mapsto\omega(b,\varepsilon)\cdot l+j\mathsf{c}_{k,n}(b,\varepsilon), && (l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\backslash\{(0,0)\},\\
&b\mapsto\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu^{(\infty)}_{j,k,n}(b,\varepsilon)-\mu^{(\infty)}_{j_0,\ell,n}(b,\varepsilon), && (l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ell}),\\
&b\mapsto\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu^{(\infty)}_{j,k,n}(b,\varepsilon), && (l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k}).
\end{aligned}$$

因此，结合引理 8.1 和引理 8.4，可得对所有 $n\in\mathbb{N}$ ，

$$\begin{aligned}
\forall|j|\leqslant C_0\langle l\rangle,\qquad &\left|\mathcal{R}^{(0,k)}_{l,j}(i_n)\right|\lesssim\gamma^{\frac{\upsilon}{q_0}}\langle j\rangle^{\frac{1}{q_0}}\langle l\rangle^{-1-\frac{\tau_1+1}{q_0}},\\
\forall|j|\leqslant C_0\langle l\rangle,\qquad &\left|\mathcal{R}^{(1,k)}_{l,j}(i_n)\right|\lesssim\gamma^{\frac{1}{q_0}}\langle j\rangle^{\frac{1}{q_0}}\langle l\rangle^{-1-\frac{\tau_1+1}{q_0}},\\
\forall|j-j_0|\leqslant C_0\langle l\rangle,\qquad &\left|\mathcal{R}^{k}_{l,j,j_0}(i_n)\right|\lesssim\gamma^{\frac{1}{q_0}}\langle j-j_0\rangle^{\frac{1}{q_0}}\langle l\rangle^{-1-\frac{\tau_2+1}{q_0}},\\
&\left|\mathcal{R}^{1,2}_{l,j,j_0}(i_n)\right|\lesssim\gamma^{\frac{1}{q_0}}\langle l,j,j_0\rangle^{-1-\frac{\tau_2+1}{q_0}}.
\end{aligned}\tag{8.74}$$

我们首先估计 (8.71) 中定义的 $\mathcal{S}_0$ 和 $\mathcal{S}_1$ 的测度。由于引理 8.2 的证明后文得到的估计 (8.80) 的有效范围，这些量的估计无法像其他项那样进行。根据引理 8.3，我们有一些显然的包含关系，因此对于 $n\in\{0,1\}$，可写为：

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n\lesssim&\sum_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\backslash\{(0,0)\}\\|j|\leqslant C_0\langle l\rangle,|l|\leqslant N_n}}\left|\mathcal{R}^{(0,k)}_{l,j}(i_n)\right|+\sum_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})\\|j|\leqslant C_0\langle l\rangle,|l|\leqslant N_n}}\left|\mathcal{R}^{(1,k)}_{l,j}(i_n)\right|\\
&+\sum_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2\\|j-j_0|\leqslant C_0\langle l\rangle,|l|\leqslant N_n\\(l,j)\neq(0,j_0),\min(|j|,|j_0|)\leqslant c_2\gamma_1^{-\upsilon}\langle l\rangle^{\tau_1}}}\left|\mathcal{R}^{k}_{l,j,j_0}(i_n)\right|+\sum_{\substack{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2})\\\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_n}}\left|\mathcal{R}^{1,2}_{l,j,j_0}(i_n)\right|.
\end{aligned}\tag{8.75}$$

将 (8.74) 代入 (8.75)，可得对于 $n\in\{0,1\}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n\lesssim&\gamma^{\frac{\upsilon}{q_0}}\sum_{\substack{(l,j)\in\mathbb{Z}^{d+1}\\|j|\leqslant C_0\langle l\rangle}}\langle j\rangle^{\frac{1}{q_0}}\langle l\rangle^{-1-\frac{\tau_1+1}{q_0}}+\gamma^{\frac{1}{q_0}}\sum_{\substack{(l,j)\in\mathbb{Z}^{d+1}\\|j|\leqslant C_0\langle l\rangle}}\langle j\rangle^{\frac{1}{q_0}}\langle l\rangle^{-1-\frac{\tau_1+1}{q_0}}\\
&+\gamma^{\frac{1}{q_0}}\sum_{\substack{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^{d+2}\\|j-j_0|\leqslant C_0\langle l\rangle\\\min(|j|,|j_0|)\leqslant c_2\gamma_1^{\upsilon}\langle l\rangle^{\tau_1}}}\langle j-j_0\rangle^{\frac{1}{q_0}}\langle l\rangle^{-1-\frac{\tau_2+1}{q_0}}+\gamma^{\frac{1}{q_0}}\sum_{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^{d+2}}\langle l,j,j_0\rangle^{-1-\frac{\tau_2+1}{q_0}}.
\end{aligned}$$

注意，条件 $|j-j_0|\leqslant C_0\langle l\rangle$ 和 $\min(|j|,|j_0|)\leqslant c_2\gamma_1^{-\upsilon}\langle l\rangle^{\tau_1}$ 蕴含

$$\max(|j|,|j_0|)\leqslant\min(|j|,|j_0|)+|j-j_0|\leqslant c_2\gamma_1^{-\upsilon}\langle l\rangle^{\tau_1}+C_0\langle l\rangle\lesssim\gamma^{-\upsilon}\langle l\rangle^{\tau_1}.\tag{8.76}$$

因此，我们有

$$\max_{n\in\{0,1\}}\mathcal{S}_n\lesssim\gamma^{\frac{1}{q_0}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\langle l\rangle^{-\frac{\tau_1}{q_0}}+\gamma^{-\upsilon}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\langle l\rangle^{\tau_1-1-\frac{\tau_2}{q_0}}+\sum_{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^{d+2}}\langle l,j,j_0\rangle^{-1-\frac{\tau_2+1}{q_0}}\right)+\gamma^{\frac{\upsilon}{q_0}}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\langle l\rangle^{-\frac{\tau_1}{q_0}}.\tag{8.77}$$

注意到 (8.67) 意味着

$$\min\left(\tfrac{\upsilon}{q_0}\,\tfrac{1}{q_0}-\upsilon\right)=\tfrac{\upsilon}{q_0}.$$

现在，(8.67) 中对 $\tau_1$ 和 $\tau_2$ 的约束使得 (8.77) 中的级数收敛，从而得到

$$\max_{n\in\{0,1\}} \mathcal{S}_n \lesssim \gamma^{\min\left(\frac{\upsilon}{q_0},\frac{1}{q_0}-\upsilon\right)} = \gamma^{\frac{\upsilon}{q_0}}. \tag{8.78}$$

现在我们来估计由 (8.71) 定义的 $n\geqslant 2$ 的 $\mathcal{S}_n$。利用引理 8.2 和引理 8.3，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_n \lesssim & \sum_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\{(0,0)\}\\|j|\leqslant C_0\langle l\rangle, N_{n-1}<|l|\leqslant N_n}} \left|\mathcal{R}^{(0,k)}_{l,j}(i_n)\right| + \sum_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})\\|j|\leqslant C_0\langle l\rangle, N_{n-1}<|l|\leqslant N_n}} \left|\mathcal{R}^{(1,k)}_{l,j}(i_n)\right| \\ & + \sum_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2\\|j-j_0|\leqslant C_0\langle l\rangle, N_{n-1}<|l|\leqslant N_n\\(l,j)\neq(0,j_0), \min(|j|,|j_0|)\leqslant c_2\gamma_{n+1}^{-\upsilon}\langle l\rangle^{\tau_1}}} \left|\mathcal{R}^{k}_{l,j,j_0}(i_n)\right| + \sum_{\substack{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2})\\N_{n-1}<\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_n}} \left|\mathcal{R}^{1,2}_{l,j,j_0}(i_n)\right|.\end{aligned}$$

与 (8.76) 类似，我们有如下推论

$$\Big(\min(|j|,|j_0|)\leqslant c_2\gamma_{n+1}^{-\upsilon}\langle l\rangle^{\tau_1} \quad\text{and}\quad |j-j_0|\leqslant C_0\langle l\rangle\Big) \quad\Rightarrow\quad \max(|j|,|j_0|)\lesssim \gamma^{-\upsilon}\langle l\rangle^{\tau_1}.$$

因此，由 (8.74) 可得，对任意 $n\geqslant 2$

$$\mathcal{S}_n \lesssim \gamma^{\frac{1}{q_0}}\left(\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d\\|l|>N_{n-1}}}\langle l\rangle^{-\frac{\tau_1}{q_0}} + \gamma^{-\upsilon}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d\\|l|>N_{n-1}}}\langle l\rangle^{\tau_1-1-\frac{\tau_2}{q_0}} + \sum_{\substack{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^{d+2}\\\langle l,j,j_0\rangle>N_{n-1}}}\langle l,j,j_0\rangle^{-1-\frac{\tau_2+1}{q_0}}\right) + \gamma^{\frac{\upsilon}{q_0}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d\\|l|>N_{n-1}}}\langle l\rangle^{-\frac{\tau_1}{q_0}}.$$

由此可知，通项为 $\mathcal{S}_n$ 的级数收敛，并且

$$\sum_{n=2}^{\infty}\mathcal{S}_n \lesssim \gamma^{\frac{\upsilon}{q_0}} = \varepsilon^{\frac{a\upsilon}{q_0}}. \tag{8.79}$$

将 (8.78) 和 (8.79) 代入 (8.71)，得到

$$\left|(b_*,b^*)\setminus\mathcal{C}^{\varepsilon}_{\infty}\right| \lesssim \varepsilon^{\frac{a\upsilon}{q_0}}.$$

这就证明了命题 8.2。 □

现在我们证明命题 8.2 的证明中用到的引理 8.2 和引理 8.3。引理 8.2. 设 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ 和 $k\in\{1,2\}.$，则以下结论成立。

(i) 对于 $(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}$，其中 $(l,j)\neq(0,0)$ 且 $|l|\leqslant N_{n-1}$，我们得到 $\mathcal{R}^{(0,k)}_{l,j}(i_n)=\varnothing$. (ii) 对于 $(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})$，其中 $|l|\leqslant N_{n-1}$，我们得到 $\mathcal{R}^{(1,k)}_{l,j}(i_n)=\varnothing$.(iii) 对于 $(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2$，其中 $|l|\leqslant N_{n-1}$ 且 $(l,j)\neq(0,j_0)$，我们得到 $\mathcal{R}^{k}_{l,j,j_0}(i_n)=\varnothing$.(iv) 对于 $(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2})$，其中 $\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_{n-1}$，我们得到 $\mathcal{R}^{1,2}_{l,j,j_0}(i_n)=\varnothing$. (v) 对任意 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{\varepsilon}_n\setminus\mathcal{C}^{\varepsilon}_{n+1} = & \bigcup_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\{(0,0)\}\\N_{n-1}<|l|\leqslant N_n}}\mathcal{R}^{(0,k)}_{l,j}(i_n)\cup\bigcup_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})\\N_{n-1}<|l|\leqslant N_n}}\mathcal{R}^{(1,k)}_{l,j}(i_n) \\ & \cup\bigcup_{\substack{k\in\{1,2\}\\(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,k})^2\\N_{n-1}<|l|\leqslant N_n\\(l,j)\neq(0,j_0)}}\mathcal{R}^{k}_{l,j,j_0}(i_n)\cup\bigcup_{\substack{(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,1})\times(\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,2})\\N_{n-1}<\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_n}}\mathcal{R}^{1,2}_{l,j,j_0}(i_n).\end{aligned}$$

证明。注意到，(v) 由 (8.73) 以及 (i)、(ii)、(iii) 和 (iv) 立即可得。(i)、(ii) 和 (iii) 可仿照 [69, 引理 7.1-(i)-(ii)-(iii)]，基于以下由 (8.8) 得到的估计加以证明。

$$\begin{aligned}\forall n\geqslant 2,\qquad \|i_n-i_{n-1}\|_{\overline{s}_h+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}&\leqslant\|\mathtt{U}_n-\mathtt{U}_{n-1}\|_{\overline{s}_h+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\\&\leqslant\|\mathtt{H}_n\|_{\overline{s}_h+\overline{\sigma}}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\\&\leqslant C_*\varepsilon\gamma^{-1}N_{n-1}^{-a_2}.\end{aligned}\tag{8.80}$$

我们指出，对 (8.67) 中 $\upsilon$ 所作的必要约束出现在略去的证明中。现在还需证明点 (iv)。

(iv) 设 $(l,j,j_0)\in\mathbb{Z}^d\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ 1})\times(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}}\setminus\overline{\mathbb{S}}_{0,\ 2})$，使得 $\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_{n-1}$。只需证明

$$\mathcal{R}_{l,j,j_0}^{1,2}(i_n)\subset\mathcal{R}_{l,j,j_0}^{1,2}(i_{n-1}).$$

事实上，如果该包含关系成立，那么根据构造

$$\mathcal{R}_{l,j,j_0}^{1,2}(i_n)\subset\big(\mathcal{C}_n^{\varepsilon}\setminus\mathcal{C}_{n+1}^{\varepsilon}\big)\cap\big(\mathcal{C}_{n-1}^{\varepsilon}\setminus\mathcal{C}_n^{\varepsilon}\big)=\varnothing.$$

取 $b\in\mathcal{R}^{1,\ l,\ j,\ j_0}_{2}(i_n)\subset\mathcal{C}_n^{\varepsilon}\subset\mathcal{C}_{n-1}^{\varepsilon}$。回到 (8.73)，由三角不等式可得

$$\Big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu_{j,1,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-\mu_{j_0,2,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big|\leqslant\tfrac{2\gamma_{n+1}}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}+\varrho_{j,j_0,n}(b,\varepsilon),\tag{8.81}$$

其中

$$\varrho_{j,j_0,n}(b,\varepsilon)\triangleq\Big|\mu_{j,1,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-\mu_{j_0,2,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-\mu_{j,1,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)+\mu_{j_0,2,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big|.$$

利用分解 (8.72)，我们得到

$$\begin{aligned}\varrho_{j,j_0,n}(b,\varepsilon)\leqslant{}&|j|\Big|r_{1,n}^{(0)}(b,\varepsilon)-r_{1,n-1}^{(0)}(b,\varepsilon)\Big|+|j_0|\Big|r_{2,n}^{(0)}(b,\varepsilon)-r_{2,n-1}^{(0)}(b,\varepsilon)\Big|\\&+\Big|r_{j,1,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-r_{j,1,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big|+\Big|r_{j_0,2,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-r_{j_0,2,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big|.\end{aligned}\tag{8.82}$$

将（7.36）与（8.80）、（8.2）以及 $\sigma_4\geqslant\sigma_3$ 这一事实结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}\Big|r_{1,n}^{(0)}(b,\varepsilon)-r_{1,n-1}^{(0)}(b,\varepsilon)\Big|+\Big|r_{2,n}^{(0)}(b,\varepsilon)-r_{2,n-1}^{(0)}(b,\varepsilon)\Big|&\lesssim\varepsilon\|i_n-i_{n-1}\|_{\overline{s}_h+\sigma_3}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\\&\lesssim\varepsilon^2\gamma^{-1}N_{n-1}^{-a_2}\\&\lesssim\varepsilon^{2-a}N_{n-1}^{-a_2}.\end{aligned}\tag{8.83}$$

同理，将（7.47）与（8.80）和（8.2）结合起来，可推出

$$\begin{aligned}\Big|r_{j,1,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-r_{j,1,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big|+\Big|r_{j_0,2,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-r_{j_0,2,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big|&\lesssim\varepsilon\gamma^{-1}\|i_n-i_{n-1}\|_{\overline{s}_h+\sigma_4}^{q,\gamma,\mathtt{m}}\\&\lesssim\varepsilon^2\gamma^{-2}N_{n-1}^{-a_2}\\&\lesssim\varepsilon^{2(1-a)}\langle l,j,j_0\rangle N_{n-1}^{-a_2}.\end{aligned}\tag{8.84}$$

将（8.83）和（8.84）代入（8.82），得到

$$\varrho_{j,j_0,n}(b,\varepsilon)\lesssim\varepsilon^{2(1-a)}\langle l,j,j_0\rangle N_{n-1}^{-a_2}.\tag{8.85}$$

现在结合（8.81）、（8.85）以及 $\gamma_{n+1}=\gamma_n-\varepsilon^a2^{-n-1}$ 这一事实，我们得到

$$\Big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu_{j,1,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-\mu_{j_0,2,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big|\leqslant\tfrac{2\gamma_n}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}-\varepsilon^a2^{-n}\langle l,j,j_0\rangle^{-\tau_2}+C\varepsilon^{2(1-a)}\langle l,j,j_0\rangle N_{n-1}^{-a_2}.$$

将约束 $\langle l,j,j_0\rangle\leqslant N_{n-1}$ 加入后，我们得到

$$-\varepsilon^a2^{-n}\langle l,j,j_0\rangle^{-\tau_2}+C\varepsilon^{2(1-a)}N_{n-1}^{-a_2}\leqslant\varepsilon^a2^{-n}\langle l,j,j_0\rangle^{-\tau_2}\Big(-1+C\varepsilon^{2-3a}2^nN_{n-1}^{-a_2+\tau_2+1}\Big).$$

注意，我们对参数 (8.1) 和 (8.2) 的选择特别给出

$$a_2 > \tau_2 + 1 \qquad \text{and} \qquad a < \tfrac{2}{3}\cdot$$

因此，只要取 $\varepsilon$ 足够小，我们便可推得

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad -1 + C\varepsilon^{2-3a} 2^n N_{n-1}^{-a_2+\tau_2+1} \leqslant 0.$$

因此，

$$\left|\omega(b,\varepsilon)\cdot l + \mu_{j,1,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon) - \mu_{j_0,2,n-1}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\right| \leqslant \tfrac{2\gamma_n}{\langle l,j,j_0\rangle^{\tau_2}}\cdot$$

这意味着 $b \in \mathcal{R}^{1,\ l^{\ 2},\ j,\ j_0}(i_{n-1})$。引理 8.2 的证明至此完成。 □

下面的引理给出了时间与空间傅里叶模态之间的必要约束，使得 (8.73) 中的集合非空。

引理 8.3. 设 $k \in \{1,2\}$.。存在 $\varepsilon_0$，使得对于任意 $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ 和 $n \in \mathbb{N}$，以下断言均成立。

(i) 设 $(l,j) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \{(0,0)\}$.。若 $\mathcal{R}_l^{(0,k),\ j}(i_n) \neq \varnothing$，则 $|j| \leqslant C_0\langle l\rangle$.

(ii) 设 $(l,j) \in \mathbb{Z}^d \times \big(\mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,\ k}\big)$.若 $\mathcal{R}_l^{(1,k),\ j}(i_n) \neq \varnothing$，则 $|j| \leqslant C_0\langle l\rangle$.

(iii) 设 $(l,j,j_0) \in \mathbb{Z}^d \times (\mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,\ k})^2$.若 $\mathcal{R}_{l,\ j,\ j_0}^{k}(i_n) \neq \varnothing$，则 $|j - j_0| \leqslant C_0\langle l\rangle$.

(iv) 设 $(l,j,j_0) \in \mathbb{Z}^d \times (\mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,\ k})^2$.存在 $c_2 > 0$，使得若 $\min(|j|,|j_0|) \geqslant c_2\gamma_{n+1}^{-\upsilon}\langle l\rangle^{\tau_1}$，则

$$\mathcal{R}_{l,j,j_0}^{k}(i_n) \subset \mathcal{R}_{l,j-j_0}^{(0,k)}(i_n).$$

证明. (i) 注意到情形 $j = 0$ 是平凡的。现在，对于 $j \neq 0$，我们假设 $\mathcal{R}_l^{(0,\epsilon),\ j}(i_n) \neq \varnothing$. 于是，存在 $b \in (b_*, b^*)$ 使得

$$|\omega(b,\varepsilon)\cdot l + j\mathsf{c}_{k,n}(b,\varepsilon)| \leqslant \tfrac{4\gamma_{n+1}^{\upsilon}|j|}{\langle l\rangle^{\tau_1}}.$$

由三角不等式和柯西-施瓦茨不等式、(8.9)、(8.2)，以及 $(b,\varepsilon) \mapsto \omega(b,\varepsilon)$ 有界这一事实，我们可得

$$\begin{aligned} |\mathsf{c}_{k,n}(b,\varepsilon)||j| &\leqslant 4|j|\gamma_{n+1}^{\upsilon}\langle l\rangle^{-\tau_1} + |\omega(b,\varepsilon)\cdot l| \\ &\leqslant 4|j|\gamma_{n+1}^{\upsilon} + C\langle l\rangle \\ &\leqslant 8\varepsilon^{a\upsilon}|j| + C\langle l\rangle. \end{aligned} \tag{8.86}$$

现在，根据构造 (7.35)，我们可以写出

$$\mathsf{c}_{k,n}(b,\varepsilon) = \mathtt{v}_k(b) + r_{k,n}^{(0)}(b,\varepsilon).$$

注意，根据定义 (4.13)，我们有

$$\inf_{k\in\{1,2\}} \inf_{b\in(b_*,b^*)} \left|\mathtt{v}_k(b)\right| \geqslant \Omega.$$

结合 (7.12) 和命题 8.1-$(\mathcal{P}1)_n$，可得

$$\begin{aligned} \forall q' \in [\![0,q]\!], \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{b\in(b_*,b^*)} \left|\partial_b^{q'} r_{k,n}^{(0)}(b,\varepsilon)\right| &\leqslant \gamma^{-q'} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|r_{k,n}^{(0)}\|^{q,\gamma} \\ &\lesssim \varepsilon\gamma^{-q'} \\ &\lesssim \varepsilon^{1-aq'}. \end{aligned} \tag{8.87}$$

因此，取足够小的 $\varepsilon$ 即可得到

$$\inf_{k\in\{1,2\}}\inf_{n\in\mathbb{N}}\inf_{b\in(b_*,b^*)}|\mathsf{c}_{k,n}(b,\varepsilon)|\geqslant\frac{\Omega}{2}. \tag{8.88}$$

将 (8.88) 代入 (8.86) 得

$$\big(\tfrac{\Omega}{2}-8\varepsilon^{av}\big)|j|\leqslant C\langle l\rangle.$$

因此，取 $\varepsilon$ 足够小，可确保对于某个 $C_0>0.$，有 $|j|\leqslant C_0\langle l\rangle$

(ii) $j=0$ 的情形显然，因此我们只需考虑 $j\neq 0.$ 的情形。设 $\mathcal{R}_l^{(1,k)}$，$_j(i_n)\neq\varnothing.$ 那么，我们可以找到 $b\in(b_*,b^*)$，使得

$$\big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|\leqslant\tfrac{\gamma_{n+1}|j|}{\langle l\rangle^{\tau_1}}.$$

应用 三角不等式和柯西-施瓦茨不等式，再结合 (8.9) 和 (8.2)，可得

$$\begin{aligned}\big|\mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|&\leqslant\gamma_{n+1}|j|\langle l\rangle^{-\tau_1}+|\omega(b,\varepsilon)\cdot l|\\&\leqslant 2\varepsilon^a|j|+C\langle l\rangle.\end{aligned} \tag{8.89}$$

现在回到 (8.72) 中特征值的结构，再利用三角不等式，可推得

$$\big|\mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|\geqslant|\Omega_{j,k}(b)|-|j|\big|r_{k,n}^{(0)}(b,\varepsilon)\big|-\big|r_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|. \tag{8.90}$$

注意到 (7.47) 意味着

$$\begin{aligned}\forall q'\in[\![0,q]\!],\quad\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{b\in(b_*,b^*)}\sup_{j\in\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}\big|\partial_b^{q'}r_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|&\leqslant\gamma^{-q'}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\overline{\mathbb{S}}_{0,k}}\|r_{j,k,n}^{(\infty)}\|^{q,\gamma}\\&\lesssim\varepsilon\gamma^{-q'-1}\\&\lesssim\varepsilon^{1-a(q'+1)}.\end{aligned} \tag{8.91}$$

结合 (8.90)、引理 4.6-3、(8.87) 和 (8.91)，我们得到

$$\big|\mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|\geqslant\Omega|j|-C\varepsilon^{1-a}|j|. \tag{8.92}$$

将 (8.92) 代入 (8.89) 得到

$$\big(\Omega-C\varepsilon^{1-a}-2\varepsilon^a\big)|j|\leqslant C\langle l\rangle.$$

因此，取 $\varepsilon$ 足够小，我们得到 $|j|\leqslant C_0\langle l\rangle$，其中 $C_0>0.$

(iii) 注意到，对于 $j=j_0$，我们有 $\mathcal{R}_{l\,,j_0,j_0}^{k}(i_n)=\mathcal{R}_{l\,0}^{(0,k)}{}_{,}(i_n)$。因此，这种情形已在第一点中讨论过。于是，我们将考虑 $j\neq j_0.$。设 $\mathcal{R}_{l,j,j_0}(i_n)\neq\varnothing.$。我们可以找到 $b\in(b_*,b^*)$，使得

$$\big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-\mu_{j_0,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|\leqslant\tfrac{2\gamma_{n+1}|j-j_0|}{\langle l\rangle^{\tau_2}}.$$

再次利用三角不等式和柯西-施瓦茨不等式，以及 (8.9) 和 (8.2)，我们推得

$$\begin{aligned}\big|\mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-\mu_{j_0,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|&\leqslant2\gamma_{n+1}|j-j_0|\langle l\rangle^{-\tau_2}+|\omega(b,\varepsilon)\cdot l|\\&\leqslant2\gamma_{n+1}|j-j_0|+C\langle l\rangle\\&\leqslant4\varepsilon^a|j-j_0|+C\langle l\rangle.\end{aligned}$$

另一方面，由三角不等式、引理 4.6-5、(8.87) 和 (8.91)，当 $\varepsilon$ 充分小时可得

$$\begin{aligned}\big|\mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)-\mu_{j_0,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|&\geqslant|\Omega_{j,k}(b)-\Omega_{j_0,k}(b)|-\big|r_{k,n}^{(0)}(b,\varepsilon)\big||j-j_0|-\big|r_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|-\big|r_{j_0,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\big|\\&\geqslant\big(c-C\varepsilon^{1-a}\big)|j-j_0|\\&\geqslant\tfrac{c}{2}|j-j_0|.\end{aligned}$$

综合以上不等式可得

$$\big(\tfrac{c}{2}-4\varepsilon^a\big)|j-j_0|\leqslant C\langle l\rangle.$$

因此，当 $\varepsilon$ 足够小时，对于某个 $C_0>0.$，我们得到 $|j-j_0|\leqslant C_0\langle l\rangle$
(iv) 注意到， $j=j_0$ 的情形是显然的，因此我们可以将讨论限制在 $j\neq j_0.$ 的情形。现在，根据对称性 $\mu^{(\infty)}_{-j\,k\,,n}(b,\varepsilon)=-\mu^{(\infty)}_{j\,k\,n,}(b,\varepsilon)$，不失一般性地，我们可以假设 $0<j<j_0.$。取 $b\in\mathcal{R}^k_{l\,,j,j_0}(i_n)$。根据定义，我们有

$$\big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu^{(\infty)}_{j,k,n}(b,\varepsilon)\pm\mu^{(\infty)}_{j_0,k,n}(b,\varepsilon)\big|\leqslant\tfrac{2\gamma_{n+1}\langle j\pm j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}.\tag{8.93}$$

回顾 (4.13) 和 (4.29) 中关于 $j>0$ 的分解，

$$\begin{aligned}\mathtt{v}_k(b)&=\Omega+(2-k)\frac{1-b^2}{2},\\ \Omega_{j,k}(b)&=j\mathtt{v}_k(b)+\frac{(-1)^k}{2}+(-1)^{k+1}\mathtt{r}_j(b).\end{aligned}$$

因此，由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+(j\pm j_0)\mathtt{c}_{k,n}(b,\varepsilon)\big|\leqslant&\big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+\mu^{(\infty)}_{j,k,n}(b,\varepsilon)\pm\mu^{(\infty)}_{j_0,k,n}(b,\varepsilon)\big|+\tfrac12(1\pm1)\\&+\big|\mathtt{r}_j(b)\pm\mathtt{r}_{j_0}(b)\big|+\big|r^{(\infty)}_{j,k,n}(b,\varepsilon)\pm r^{(\infty)}_{j_0,k,n}(b,\varepsilon)\big|.\end{aligned}\tag{8.94}$$

首先，显然

$$1\pm1\leqslant\tfrac{\langle j\pm j_0\rangle}{j}.\tag{8.95}$$

其次，估计 (4.30) 特别意味着

$$\begin{aligned}\big|\mathtt{r}_j(b)\pm\mathtt{r}_{j_0}(b)\big|&\leqslant C\big(|j|^{-1}+|j_0|^{-1}\big)\\&\leqslant C\tfrac{\langle j\pm j_0\rangle}{j}.\end{aligned}\tag{8.96}$$

第三，估计 (7.47) 与 (8.2) 一起给出

$$\begin{aligned}\big|r^{(\infty)}_{j,k,n}(b,\varepsilon)\pm r^{(\infty)}_{j_0,k,n}(b,\varepsilon)\big|\leqslant&C\varepsilon^{1-a}\big(|j|^{-1}+|j_0|^{-1}\big)\\\leqslant&C\tfrac{\langle j\pm j_0\rangle}{j}.\end{aligned}\tag{8.97}$$

综合 (8.93)、(8.94)、(8.95)、(8.96) 和 (8.97) 可得

$$\big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+(j\pm j_0)\mathtt{c}_{k,n}(b,\varepsilon)\big|\leqslant\tfrac{2\gamma_{n+1}\langle j\pm j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_2}}+C\tfrac{\langle j\pm j_0\rangle}{j}.$$

因此，利用假设 $j\geqslant\frac{C}{2}\gamma_{n+1}^{-\upsilon}\langle l\rangle^{\tau_1}$ 和 $\tau_2>\tau_1$，我们得到

$$\big|\omega(b,\varepsilon)\cdot l+(j\pm j_0)\mathtt{c}_{k,n}(b,\varepsilon)\big|\leqslant\tfrac{4\gamma_{n+1}^{\upsilon}\langle j\pm j_0\rangle}{\langle l\rangle^{\tau_1}}.$$

T这给出了所需结果，并完成了引理 8.3 的证明，尚需定义 $c_2$ 、 $\frac{C}{2}$ . □

下一个也是最后一个引理涉及由推论 8.1 给出的扰动频率向量 $\omega(b,\ \varepsilon)$ 的横截性。

引理 8.4. 设 $q_0$、 $C_0$ 和 $\rho_0$ 如引理 4.8 中所述。存在足够小的 $\varepsilon_0>0$ ，使得对任意 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ ，以下断言均成立。

(i) 对所有 $l\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$，我们有

$$\inf_{b\in[b_*,b^*]}\max_{q'\in[\![0,q_0]\!]}\big|\partial_b^{q'}\left(\omega(b,\varepsilon)\cdot l\right)\big|\geqslant\tfrac{\rho_0\langle l\rangle}{2}.$$

(ii) 对所有满足 $|j| \leqslant C_0\langle l\rangle$ 的 $(l,j) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \{(0,0)\}$，我们有

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \inf_{b\in[b_*,b^*]} \max_{q'\in[\![0,q_0]\!]} \left|\partial_b^{q'}\big(\omega(b,\varepsilon)\cdot l + jc_{k,n}(b,\varepsilon)\big)\right| \geqslant \tfrac{\rho_0\langle l\rangle}{2}.$$

(iii) 对所有满足 $|j| \leqslant C_0\langle l\rangle$ 的 $(l,j) \in \mathbb{Z}^d \times (\mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,\ k})$，我们有

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \inf_{b\in[b_*,b^*]} \max_{q'\in[\![0,q_0]\!]} \left|\partial_b^{q'}\Big(\omega(b,\varepsilon)\cdot l + \mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big)\right| \geqslant \tfrac{\rho_0\langle l\rangle}{2}.$$

(iv) 对所有满足 $|j-j_0| \leqslant C_0\langle l\rangle$ 的 $(l,j,j_0) \in \mathbb{Z}^d \times (\mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,\ k})^2$，我们有

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \inf_{b\in[b_*,b^*]} \max_{q'\in[\![0,q_0]\!]} \left|\partial_b^{q'}\Big(\omega(b,\varepsilon)\cdot l + \mu_{j,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon) - \mu_{j_0,k,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big)\right| \geqslant \tfrac{\rho_0\langle l\rangle}{2}.$$

(v) 对所有 $(l,j,j_0) \in \mathbb{Z}^d \times (\mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,\ 1}) \times (\mathbb{Z}_{\mathtt{m}} \setminus \overline{\mathbb{S}}_{0,\ 2})$，我们有

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \inf_{b\in[b_*,b^*]} \max_{q'\in[\![0,q_0]\!]} \left|\partial_b^{q'}\Big(\omega(b,\varepsilon)\cdot l + \mu_{j,1,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon) - \mu_{j_0,2,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big)\right| \geqslant \tfrac{\rho_0\langle l,j,j_0\rangle}{2}.$$

证明。点 (i)、(ii)、(iii) 和 (iv) 紧随 [69, 引理 7.3] 得出。通过微扰论证，可由引理 4.8-1-2-3-4 中证明的平衡横截条件得到这些估计。因此，只需证明点 (v)。

(v) 利用分解 (7.35)-(7.46)-(8.63)，结合 (8.87)、(8.91) 和引理 4.8-5，当 $\varepsilon$ 充分小时，我们得到

$$\begin{aligned}
\max_{q'\in[\![0,q_0]\!]} \left|\partial_b^{q'}\Big(\omega(b,\varepsilon)\cdot l\ + \mu_{j,1,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon) - \mu_{j_0,2,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big)\right| &\geqslant \max_{q'\in[\![0,q_0]\!]} \left|\partial_b^{q'}\Big(\omega_{\mathrm{Eq}}(b)\cdot l + \Omega_{j,1}(b) - \Omega_{j_0,2}(b)\Big)\right| \\
&\quad - \max_{q'\in[\![0,q]\!]} \left|\partial_b^{q'}\Big(\overline{\mathrm{r}}_\varepsilon(b)\cdot l + jr_{1,n}^{(0)}(b,\varepsilon) - j_0 r_{2,n}^{(0)}(b,\varepsilon) + r_{j,1,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon) - r_{j_0,2,n}^{(\infty)}(b,\varepsilon)\Big)\right| \\
&\geqslant \rho_0\langle l,j,j_0\rangle - C\varepsilon^{1-a(1+q+q\overline{a})}\langle l,j,j_0\rangle - C\varepsilon^{1-a(1+q)}\langle l,j,j_0\rangle \\
&\geqslant \tfrac{\rho_0\langle l,j,j_0\rangle}{2}.
\end{aligned}$$

引理 8.4 的证明到此结束。 □

# 参考文献


[1] T. Alazard, P. Baldi, 《重力毛细驻水波》, Archive for Rational Mechanics and Analysis 217 (2015), no. 3, 741–830。[2] W. Ao, J.Davila, M. Del Pino, M. Musso, J. Wei, 《广义无黏表面准地转方程的行波解与旋转解》, Transactions of the American Mathematical Society 374 (2021), no. 9, 6665–6689。[3] V. I. Arnold, 《经典力学与天体力学中运动稳定性问题的小除数》, Uspekhi Matematicheskikh Nauk 18 (1963), 91–192。[4] P. Baldi, M. Berti, E. Haus, R. Montalto, 《有限水深中的时间拟周期重力水波》, Inventiones Mathematicae 214 (2018), no. 2, 739–911。[5] P. Baldi, M. Berti, R. Montalto, 《艾里方程的拟线性与全非线性强迫扰动的KAM理论》, Mathematische Annalen 359 (2014), no. 1-2, 471–536。[6] P. Baldi, M. Berti, R. Montalto, 《KdV方程自治拟线性扰动的KAM理论》, Annales de l'Institut Henri Poincar´e Analyse Non-Lin´eaire 33 (2016), no. 6, 1589–1638。[7] P. Baldi, M. Berti, R. Montalto, 《mKdV方程自治拟线性扰动的KAM理论》, Bolletino dell'Unione Matematica Italiana 9 (2016), 143–188。

[8] P. Baldi, R. Montalto, 《三维准周期不可压欧拉流》, Advances in Mathe- matics 384 (2021), 107730。[9] D. Bambusi, M. Berti, E. Magistrelli, 《偏微分方程的退化KAM理论》, 《微分方程杂志》250 (2011), no. 8, 3379–3397。[10] M. Berti, 《偏微分方程的KAM理论》, 《理论与应用分析》35 (2019), no. 3, 235–267。[11] M. Berti, L. Biasco, M. Procesi, 《哈密顿导数波动方程的KAM理论》, Annales Scientifiques de l' ´Ecole Normale Sup´erieure Volume 4, 46 (2013), no. 2, 301–373。[12] M. Berti, L. Biasco, M. Procesi, 《可逆导数波动方程的KAM理论》, Archive for Rational Mechanics and Analysis 212 (2014), no. 3, 905–955。[13] M. Berti, P. Bolle, 《带乘性势的多维波动方程的Sobolev拟周期解》, Nonlinearity 25 (2012), no. 9, 2579–2613。[14] M. Berti, P. Bolle, 《KAM理论的纳什-莫泽方法》, 《菲尔兹研究所通讯》, 特刊《哈密顿偏微分方程及其应用》, (2015), 255–284。[15] M. Berti, L. Franzoi, A. Maspero, 《恒定涡量下的行进准周期水波》, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 240 ( 2021), 99–202。[16] M. Berti, L. Franzoi, A. Maspero, 《恒定涡量下的纯重力行进准周期水波》, arXiv:2101.12006。[17] M. Berti, Z. Hassainia, N. Masmoudi, 《时间准周期涡斑》, arXiv:2202.06215。[18] M. Berti, T. Kappeler, R. Montalto, 《KdV方程拟线性扰动的大型KAM环面》, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 239 (2021), 1395–1500。[19] M. Berti, R. Montalto, 《重力-毛细水波的拟周期驻波解》, MEMO, Volume 263, 1273, 《美国数学会回忆录》, ISSN 0065-9266, (2020)。[20] A. L. Bertozzi, P. Constantin, 《涡斑的整体正则性》, Communications in Mathe- matical Physics, 152 (1993), no. 1, 9–28。[21] J. Bourgain, 《格林函数估计：格点Schr ¨odinger算子及其应用》, An- nals of Mathematics Studies 158 (2005), 普林斯顿大学出版社，普林斯顿。[22] J. Bourgain, 《线性方程哈密顿扰动的拟周期解构造及其在非线性偏微分方程中的应用》, International Mathematics Research Notices (1994), no. 11, 21页。[23] J. Burbea, 《涡斑运动》, 《数学物理快报》6 (1982), no. 1, 1–16。[24] D. Cao, S. Lai, W. Zhan, 《二维不可压欧拉方程的行进涡对》, 《变分法与偏微分方程》60 (2021), no. 190。[25] D. Cao, G. Qin, W. Zhan, C. Zou, 《广义SQG方程的共旋与行波涡解的存在性和正则性》, 《微分方程杂志》299 (2021), 429–462。[26] D. Cao, J. Wan, G. Wang, W. Zhan, 《圆盘内平面欧拉方程的旋转涡斑》, 《微分方程杂志》275 (2021), 509–532。[27] A. Castro, D. C´ordoba, J. G´omez-Serrano, 《活性标量的匀速旋转解析整体涡斑解》, 《偏微分方程年刊》2 (2016), no. 1, 1–34。

[28] A. Castro, D. C´ordoba, J. G´omez-Serrano，广义表面准地转方程旋转整体解的存在性与正则性，Duke Mathematical Journal 165 (2016)，第 5 期，935–984.[29] J. Y. Chemin，不可压缩二维流体中几何结构的持久性，Annales de l'Ecole Normale Sup´erieure 26 (1993)，517–542.[30]J. Y. Chemin，不可压缩理想流体，Ast´erisque 230，法国数学会，(1995).[31] L. Chierchia, J. You，具有周期边界条件的一维非线性波动方程的 KAM 环面，《数学物理通讯》211 (2000)，497–525.[32] K. Choi, I. Jeong，开尔文波的稳定性与不稳定性，《变分法与偏微分方程》61 (2022)，第 6 期.[33] W. Craig, C. E. Wayne，牛顿法与非线性波动方程的周期解，Communications on Pure and Applied Mathematics 46 (1993)，1409–1498.[34] N. Crouseilles, E. Faou，二维欧拉方程的拟周期解，《渐近分析》81 (2013)，第 1 期，31–34.[35] T. Elgindi, I. Jeong，关于奇异涡斑，I：适定性问题，《美国数学会回忆录》283 (2023)，第 1400 号，1–102.[36] T. Elgindi, I. Jeong，关于奇异涡斑，II：长时间动力学，《美国数学会汇刊》373 (2020)，第 9 期，6757–6775.[37] F. de la Hoz, Z. Hassainia, T. Hmidi，广义表面准地转方程的双连通 V 态，Archive for Rational Mechanics and Analysis，220 (2016) 1209–1281.[38] F. de la Hoz, Z. Hassainia, T. Hmidi, J. Mateu，圆盘中定常涡斑的解析与数值研究，Analysis and PDE，9 (2015)，第 10 期.[39] R. de la Llave, Y. Sire，哈密顿偏微分方程中带须环面的后验 KAM 定理及其在某些不适定方程中的应用，Archive for Rational Mechanics and Analysis 231 (2019)，第 2 期，971–1044.[40] G. S. Deem, N. J. Zabusky，涡波：稳定"V 态"、相互作用、复现与破裂，《物理评论快报》40 (1978)，第 13 期，859–862.[41]D. G. Dritschel, T. Hmidi, C. Renault，浅水准地转方程的不完美分岔，Archive for Rational Mechanics and Analysis 231 (2019)，第 3 期，1853–1915.[42] L. H. Eliasson, B. Gr´ebert, S. Kuksin，非线性梁方程的 KAM，几何与泛函分析 26 (2016)，第 6 期，1588–1715.[43] L. H. Eliasson, S. B. Kuksin，非线性薛定谔方程的 KAM，《数学年刊》172 (2010)，371–435.[44] A. Enciso, D. Peralta-Salas, F. Torres de Lizaur，二维及更高维不可压缩欧拉方程的拟周期解，arXiv:2209.09812.[45] R. Feola, F. Giuliani, R. Montalto, M. Procesi，利用莫泽定理证明环面上一阶线性算子的可约性，泛函分析杂志 276 (2019)，第 3 期，932–970.[46] R. Feola, M. Procesi，全非线性受迫可逆薛定谔方程的拟周期解，《微分方程杂志》259 (2015)，第 7 期，3389–3447.

[47] E. Fraenkel，椭圆问题中最大值原理与对称性导论，剑桥大学出版社 128 (2000).[48] M. Gao, X. Yuan, J. Zhang，可逆偏微分方程的 KAM 环面，Nonlinearity 24 (2011)，1189–1228.[49] C. Garc´ıa，不可压缩流体模型中的卡门涡街，Nonlinearity，33 (2020)，第 4 期，1625–1676.[50] C. Garc´ıa，主动标量方程中的涡斑编舞运动，《非线性科学杂志》31 (2021)，第 75 号，1432–1467.[52] C. Garc`ıa, S. V. Haziot，共旋与反向旋转涡对的整体分岔，arXiv:2204.11327.[53] C. Garc´ıa, T. Hmidi, J. Soler，二维欧拉方程的非均匀旋转涡与周期轨道。Archive for Rational Mechanics and Analysis 238 (2020)，929–1085.[53] J. G´omez-Serrano, J. Park, J. Shi, Y. Yao，主动标量方程定常解与匀速旋转解的对称性，Duke Mathematical Journal 170 (2021)，第 13 期，2957–3038.[54] L. Godard-Cadillac, P. Gravejat, D. Smets，无黏表面准地转方程中具有 N 重对称性的共旋涡，arXiv:2010.08194.[55] S. M. Graff，哈密顿系统中双曲不变环面的延拓，Journal of Differential Equations 15 (1974)，1–69.[56] P. Gravejat, D. Smets，无黏表面准地转方程的光滑行波解，International Mathematics Research Notices (2019)，第 6 期，1744–1757.[57] Z. Hassainia, T. Hmidi，广义准地转方程的 V 态，《数学物理通讯》337 (2015)，第 1 期，321–377.[58] Z. Hassainia, T. Hmidi，欧拉方程的定常非对称涡对，American I nstitut of Mathematical Science，41 (2021)，第 4 期，1939–1969.[59]Z. Hassainia, T. Hmidi, N. Masmoudi，主动标量方程的 KAM理论，arXiv:2110.08615.[60] Z. Hassainia, N. Masmoudi, M. H. Wheeler，旋转涡斑的整体分岔，Communications on Pure and Applied Mathematics LXXIII (2020)，1933–1980.[61] Z. Hassainia, E. Roulley，边界效应对欧拉方程拟周期解存在性的影响，arXiv:2202.10053.[62] Z. Hassainia, M. Wheeler，主动标量方程的多极涡斑平衡态，SIAM Journal on Mathematical Analysis，54 (2022)，第 6 期，6054–6095.[63] T. Hmidi，旋转涡斑模型的平凡解，Journal of Evolution Equations 15 (2015)，第 4 期，801–816.[64] T. Hmidi, F. de la Hoz, J. Mateu, J. Verdera，平面欧拉方程的双连通 V 态，SIAM Journal on Mathematical Analysis 48 (2016)，第 3 期，1892–1928.[65] T. Hmidi, J. Mateu，基尔霍夫涡产生的旋转涡斑分岔，Discrete and Continuous Dynamical Systems 36 (2016)，第 10 期，5401–5422.[66] T. Hmidi, J. Mateu，旋转涡斑的退化分岔，《数学进展》302 (2016)，799–850.

[67] T. Hmidi, J. Mateu, 《主动标量方程的共转与反向旋转涡对的存在性》, 《数学物理通讯》350 (2017), 第 2 期, 699–747。[68] T. Hmidi, J. Mateu, J. Verdera, 《旋转涡斑的边界正则性》, Archive for Rational Mechanics and Analysis 209 (2013), 第 1 期, 171–208。[69] T. Hmidi, E. Roulley, 《准地转浅水方程的时间准周期涡斑》, arXiv:2110.13751。[70] T. Hmidi, L. Xue, Z. Xue, 《圆盘中广义表面准地转方程时间周期解的涌现》, arXiv:2210.08760。[71] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho M. C. and H. J. Nussenzveig Lopes, 《二维涡旋动力学的大时间行为》, 《物理学D：非线性现象》179 (2003) 153–160[72] D. Iftimie, T. C. Sideris and P. Gamblin, 《紧支撑平面涡量的演化》, 《偏微分方程通讯》24 (1999), 第 9–10 期, 1709–1730。[73] G. Iooss, P. Plotnikov, J. Toland, 《重力作用下无限深理想流体中的驻波》, Archive for Rational Mechanics and Analysis 177 (2005), 第 3 期, 367–478。[74] T. Kappeler, J. P¨oschel, 《KdV 与 KAM》, 施普林格, 柏林, (2003)。[75] G. Kirchhoff, 《数学物理学讲义》, 莱比锡, (1874)。[76] S. Kuksin, 《具有虚谱的无穷维线性系统的哈密顿扰动》, 《泛函分析及其应用》21 (1987), 第 3 期, 22–37, 95。[77] S. Kuksin, 《Korteweg-de Vries 型方程的一个 KAM 定理》, 《数学物理评论》10 (1998), 第 3 期, 1–64。[78] S. Kuksin, 《哈密顿偏微分方程分析》, 牛津数学讲座丛书及其应用, 第 19 卷, 牛津大学出版社, 牛津, (2000)。[79] A. N. Kolmogorov, 《哈密顿函数小幅变化下条件周期运动的持久性》, 《苏联科学院院刊》98 (1954), 527–530。[80] J. Liu, X. Yuan, 《具有无界扰动的哈密顿偏微分方程的一个 KAM 定理》, 《数学物理通讯》307 (2011), 629–673。[81] C. Marchioro, 《涡斑支撑增长的界》, 《数学物理通讯》164 (1994), 第 3 期, 507–524。[82] J. Moser, 《环域保面积映射的不变曲线》, 《哥廷根科学院学报：数学与物理类》(1962), 1–20。[83] J. Moser, 《拟周期运动的收敛级数展开》, 《数学年刊》169 (1967), 136–176。[84] J. Nash, 《C1等距嵌入》, 《数学年刊》60 (1954), 第 3 期, 383–396。[85] P. Plotnikov, J. Toland, 《驻水波的 Nash–Moser 理论》, Archive for Rational Mechanics and Analysis 159 (2001), 第 1 期, 1–83。[86]J. P¨oschel, 《哈密顿系统中的椭圆型低维环面》, 《数学杂志》202 (1989), 559–608。[87] J. P¨oschel, 《某些非线性偏微分方程的 KAM 定理》, 《比萨高等师范学校学报》23 (1996), 119–148。

[88] J. P¨oschel, 《非线性波动方程的拟周期解》, 《瑞士数学评论》71 (1996), 第 2 期, 269–296。[89] C. Procesi, M. Procesi, 《共振非线性薛定谔方程的 KAM 算法》, 《数学进展》 (2015), 399–470。[90] C. Renault, 《表面准地转方程的带孔相对平衡态》, 《微分方程杂志》 263 (2017), 第 1 期, 567–614。[91] E. Roulley, 《准地转浅水方程中的涡旋刚体运动》, 《渐近分析》 (2022)。[92]E. Roulley, 《接近兰金涡的周期与拟周期欧拉流》, arXiv:2208.13109。[93] H. R¨ussmann, 《非退化近可积哈密顿系统中的不变环面》, 《规则与混沌动力学》6 (2001), 第 2 期, 119–204。[94] B. Turkington, 《具有 n 重对称性的共转稳态涡旋流》, 《非线性分析：理论、方法与应用》9 (1985), 第 4 期, 351–369。[95] Y. Wang, X. Xu, M. Zhou, 《双重连通涡斑的退化分岔》, arXiv:2212.01869。[96] C. E. Wayne, 《通过 KAM 理论研究非线性波动方程的周期解与拟周期解》, 《数学物理通讯》127 (1990), 第 3 期, 479–528。[97] Y. Yudovich, 《理想不可压缩流体的非定常流》, 《苏联计算数学与数学物理》3 (1963), 1032–1066。[98] E. Zehnder, 《带有若干小除数应用的广义隐函数定理 I》, Communications on Pure and Applied Mathematics 28 (1975) 91–140。[99] E. Zehnder, 《带有若干小除数应用的广义隐函数定理 II》, Communications on Pure and Applied Mathematics 29 (1976), 49–111。

纽约大学阿布扎比分校研究所，纽约大学阿布扎比分校，邮政信箱129188，阿布扎比，阿拉伯联合酋长国。

电子邮件地址：zh14 @nyu.edu。

纽约大学阿布扎比分校研究所，纽约大学阿布扎比分校，邮政信箱129188，阿布扎比，阿拉伯联合酋长国。雷恩大学、法国国家科学研究中心、雷恩数学研究所——UMR 6625，法国雷恩F-35000。电子邮件地址：thmidi@univ-rennes1.fr。

SISSA国际高等研究学院，博诺梅亚街265号，34136，意大利的里雅斯特。电子邮件地址：eroulley@sissa.it。