arXiv:2302.01355v2 [quant-ph] 1 Dec 2023

混沌多体量子系统中的电荷全计数统计

Ewan McCulloch, [1,2] Jacopo De Nardis, [3] Sarang Gopalakrishnan, [2] 和 Romain Vasseur[1]
[1] *Department of Physics, University of Massachusetts, Amherst, MA 01003, USA*
[2] *Department of Electrical and Computer Engineering,Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA*
[3] *Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation, CNRS UMR 8089, CY Cergy Paris Université, 95302 Cergy-Pontoise Cedex, France*

我们研究了 $U(1)$ 对称随机酉电路中的电荷输运全计数统计。我们考虑一种初始混合态，其制备时系统左右两半之间存在化学势不平衡，并研究典型电路中穿过中心键的电荷转移涨落。利用有效副本统计力学模型，以及在格点希尔伯特空间维数较大时有效的、映射到涌现经典随机过程的方法，我们证明，长时间下电荷转移涨落趋近于对称排斥过程的涨落，并伴有次领先的 $t^{-1/2}$ 量子修正。我们结合经典非平衡系统的涨落流体力学和宏观涨落理论讨论这些结果，并通过直接的矩阵乘积态计算检验我们的预测。

引言 ——一般多体量子系统的长时间动力学预计可由有效的经典理论描述。从纯初态出发，混沌系统的局域性质会迅速热化：局域算符的期望值可由一个有效的吉布斯系综描述，其中温度等拉格朗日乘子随空间变化。随后从局域平衡态演化至全局平衡的过程，则由经典的流体力学方程描述。然而，量子模拟器平台的出现，例如冷原子 [1–14], 囚禁离子 [15–17]或超导阵列 [18–21] ，使人们不仅能够测量局域期望值，也能够测量其完整的量子统计性质。在一般的混沌多体量子系统中，这类涨落是否存在涌现的经典描述，仍是一个开放问题。

考虑一个具有守恒电荷的一维量子系统，其中心键两侧存在畴壁化学势不平衡$\mu_L = -\mu_R = \mu$。通过测量系统右半部分在时刻 0 和 t的电荷，实验能够获得穿过中心键（从左向右）的电荷转移 Q 的“量子快照”。重复实验即可获取测量结果的完整分布 $P_t(Q)$。该分布的平均值可由流体力学描述——对于单个守恒电荷的情形，这一描述简化为扩散方程；而高阶累积量则刻画电流涨落以及电荷输运 [22–29]的全计数统计（FCS）。

计算多体量子系统中的全计数统计是一项艰巨的任务，目前仅在少数情况下得到了精确结果或平均场结果，尤以非相互作用费米子模型 [30–37], 可积系统 [38–49] 以及量子点/少量量子比特模型 [50–57]为代表。虽然目前尚无关于混沌多体量子系统的精确结果，但人们预计电荷电流涨落将遵循大偏差原理 [58–60]: 电荷转移的所有累积量都应随时间以相同方式缩放，正如 $\sqrt{t}$ 一维扩散系统中的情形。在具有守恒电荷的经典随机模型中，大偏差原理的出现可在一种称为宏观涨落理论（MFT）的通用框架内得到理解 [61]。MFT 是一种用于求解含噪扩散方程的工具箱；该方程通过在电流中加入噪声项，将流体动力学方程提升为非线性涨落流体动力学 理论而得到，其中噪声强度由涨落耗散定理决定。MFT 在描述经典随机系统方面非常成功，最近还被用于计算一种典型可积马尔可夫链——（简单）对称排斥过程（SEP）的全计数统计 [62, 63]。

量子系统具有内禀的量子涨落，因此自然会引发这样的疑问：它们是否能够由一种涌现的经典描述（例如 MFT）加以捕捉。在本文中，我们研究了一个扩散型混沌模型系综中的 FCS——具有守恒 $U(1)$ 电荷 [64, 65] 的随机幺正电路。具有守恒电荷的量子系统具有电流涨落和计数统计。尽管单个电路实现的量子多体动力学通常无法直接处理，但通过系综平均，我们将研究典型电路实现的动力学。在平均输运层面，已知这会产生一种经典随机过程描述 [64–67]。在本文中，我们证明，经典随机过程实际上描述了完整的（晚期时间）FCS，并量化了次主导修正。

为了捕捉单个电路实现中的典型电流涨落，必须在累积量层面进行电路平均，因为累积量是系统密度矩阵的多项式。这样，我们便将累积量计算问题映射为副本统计力学（SM）模型中的期望值问题。通过使用矩阵乘积态模拟 SM 的时间演化——

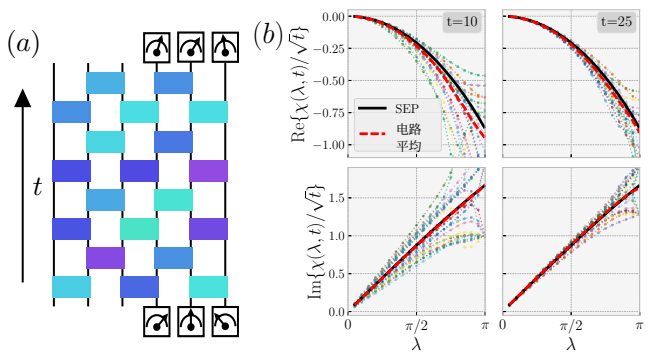


图1. (a) 在具有 $U(1)$ 守恒电荷的随机幺正电路中，测量跨越中心键的电荷转移的双时刻测量方案。在时刻 0 和 t 测量系统右半部分的电荷。(b) 对于不同的电路实现（多色曲线），时间演化块去卷积模拟给出的阶跃初态 ($\mu=\infty$) 在时刻 $t=10$ 和 $t=25$ 的累积量生成函数 $\chi(\lambda,\ t)$；35 个样本的电路平均累积量生成函数（红色虚线），以及 SEP 累积量生成函数 [69] 的晚时解析预测（黑色实线）。两幅全计数统计快照展示了全计数统计的自平均性；电路之间重标度累积量生成函数 $\chi/\sqrt{t}$ 的涨落按 $\mathcal{O}(1/t)$ [68] 衰减。

此外，通过引入耦合对称简单排斥过程链的有效随机模型，我们表明，高阶累积量的量子修正是次领先的。这使得晚时全计数统计与针对粗粒化电荷密度 $\rho(x,\ \tau)$ 的简单涨落流体力学相一致，其中空间和时间坐标 $x=j/\ell$ 与 $\tau=t/\ell^2$ 经过了重新缩放，

$$\partial_\tau\rho=-\partial_x j,\ j=-D(\rho)\partial_x\rho+\sqrt{\frac{2\sigma(\rho)}{\ell}}\xi, \qquad (1)$$

其中，$\xi(x,\ \tau)$ 是均值为零、方差为一的高斯白噪声，ℓ 是流体力学单元的尺寸，ρ 在这些单元上进行粗粒化。此方程唯一的微观输入是扩散常数$D(\rho)=1$ 和电导率 $\sigma(\rho)=D(\rho)\chi_s(\rho)$，其中$\chi_s(\rho)=\rho(1-\rho)$；这两个量刻画了随机量子电路和对称排斥过程（SEP）。式（1）中的噪声项由涨落耗散定理确定，以保持平衡电荷涨落，因此，该方程自然可作为随机量子电路的涨落流体力学理论。我们通过运用矩阵乘积态技术计算单个量子电路中的全计数统计 [68]（图1），将这一结果作为对有效随机理论的独立检验。我们的结果表明，即使在涨落层面，量子系统在长时间下也会涌现出“经典性”。

模型与测量方案- 我们研究一条一维链，其中每个格点由一个带电量子比特和一个中性量子位组成，前者的基底状态为 $|q=0,\ 1\rangle$，后者的维数为 d，因此单格点希尔伯特空间为 $\mathcal{H}_{\rm loc}\equiv\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^d$。系统通过按照砖墙式排列施加多层随机最近邻幺正门而演化（见图1）。这些幺正门守恒两个格点上的总荷，但除此之外均为哈尔随机的 [64, 65]。

幺正演化和投影测量使系统的电荷动力学产生电流涨落。我们将遵循图1中的双时刻投影测量方案 [70–75]，研究时间窗口 $[0,t]$ 内跨越中心键的电荷转移 Q：即在时刻 0 和 t 测量系统右半部分电荷的算符 $\hat{}\,Q_R$。对于这一测量设置，全计数统计由累积量生成函数 $\chi(\lambda)\equiv\log\langle e^{i\lambda Q}\rangle_t$ 描述，其中平均值 $\langle f(Q)\rangle_t=\sum_Q P_t(Q)f(Q)$ 是对测量方案重复执行所得的平均，而 $P_t(Q)$ 是测得电荷转移 Q 的概率。如图 [50]，所示，将 $P_t(Q)$ 写成玻恩概率的形式，就能将测量平均写成量子期望值 [68]

$$\langle e^{i\lambda Q}\rangle_t=\langle\mathcal{T}e^{i\lambda\Delta\hat{Q}_R}\rangle'\equiv\mathrm{Tr}\left[\mathcal{T}e^{i\lambda\Delta\hat{Q}_R}\hat{\rho}'\right], \qquad (2)$$

其中，$\Delta\hat{Q}_R\equiv\hat{Q}_R(t)-\hat{Q}_R(0)$，而 $\hat{Q}_R(t)\equiv U(t)\hat{Q}_RU(t)^\dagger$是经海森堡演化的电荷算符。量子动力学的非对易性要求使用时间排序 $\mathcal{T}$ [24, 76, 77]。密度矩阵 $\hat{\rho}'$通过量子通道 $\hat{\rho}'=\sum_q P_q\hat{\rho}P_q$与初态 $\hat{\rho}$ 相关，其中 P_q 是电荷扇区 $Q_R=q$上的投影算符。对于具有化学势不平衡的初态，$\hat{\rho}\propto\exp\left[\mu\hat{Q}_L-\mu\hat{Q}_R\right]$，我们只需令 $\hat{\rho}'=\hat{\rho}$。

众所周知，电路平均电荷动力学可映射为具有砖墙几何的离散时间对称简单排斥过程 [64, 65, 78]，即 $P_t(Q)=P_{t,\,\mathrm{SEP}}(Q)$，其中 O 表示对电路O 取平均——在电荷转移的电路平均矩中，所有量子涨落都消失了。为了描述典型量子电路中的全计数统计，我们关注自平均量，尤其是电荷转移的累积量。累积量与生成函数的关系为 $C_m(t)\equiv(-i\partial_\lambda)^m\chi(\lambda)|_{\lambda=0}$。为了计算第 n个累积量，我们引入一种常用的 n副本统计力学模型 [64, 79–84], ，将每个累积量表示为统计期望值。

映射到统计力学模型 - 通过电路平均，我们缩减了描述副本模型所需的状态空间。副本门 $\mathcal{U}\equiv U^{\otimes n}\otimes U^{*\otimes n}$ 的 Haar 平均投影到一个更小的状态空间，该空间中的状态仅由局域电荷自由度和一个置换自由度表征 $\sigma\in S_n$；后者定义了每个格点上 n 个副本之间的配对（具体而言，是共轭副本与非共轭副本之间的配对）。

复制电路的电路平均等价于一个统计力学模型 [64, 66, 79–83, 85–

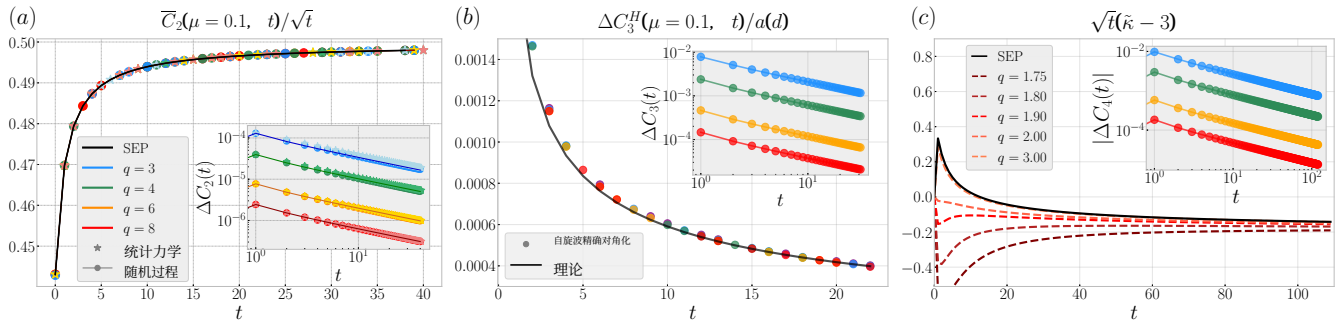


图 2. 对于不同局域希尔伯特空间维数 $q=3,4,6,8$ 的电荷守恒随机幺正电路，以及离散时间对称简单排斥过程，利用作用于统计力学传递矩阵的时间演化块去卷积计算得到的电路平均电荷转移累积量 C_n （v2）（1）：(a) 化学势不平衡为 $\mu=0.1$ 时的方差（主图），以及与对称排斥过程的差值（插图）；数据来自副本统计力学模型和有效随机过程；(b) 软化随机模型的三阶累积量（按链间耦合 $a(d)$ 重标度），其哈密顿量为 H_3 （见式（7））（主图），以及电路平均三阶累积量趋近对称排斥过程的情况（插图）；(c) 表征趋近高斯分布 $\kappa=3$ 的超额峰度代理量 $t^{-1/2}$ （主图），以及平衡态下电路平均四阶累积量趋近对称排斥过程的情况（插图）。

89] 其中置换自由度位于顶点上，而电荷构型位于边上。该统计力学模型的配分函数由对电荷构型和置换（与电荷相容）的求和给出，每条边都关联有相应的统计权重 [64, 66, 67]。

在 SM 模型中，$d\to\infty$ 将相邻的置换锁定在一起，并结合初始和最终边界条件 $\sigma_0=\sigma_t=\mathbb{1}$，$n$副本模型解耦为 n条彼此独立的离散时间 SEP 链。令 d 较大但有限，可以使不同的置换在动力学过程中出现；不同置换的畴之间的畴壁 σ 和 τ 每单位畴壁长度的能量代价为 $\mathcal{O}(|\sigma\tau^{-1}|\log(d))$（$|\sigma|$ 是 σ 与 1 之间的换位距离）。这构成了大-d 展开的基础，而下一节将重点讨论该展开。

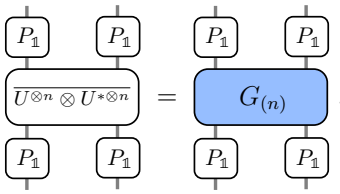
我们使用时间演化块解耦（TEBD）算法 [90–92]应用 $n=2$ SM 转移矩阵，并精确计算电荷转移方差，C_2，该方差表示为 SM 期望值。记 n副本期望值为 $\langle\cdot\rangle_{n\text{-rep}}$，并使用上标表示某个可观测量作用于哪个副本，方差可表示为

$$\overline{C_2}(t)=\langle\mathcal{T}\Delta\hat{Q}_R^{(1)2}-\Delta\hat{Q}_R^{(1)}\Delta\hat{Q}_R^{(2)}\rangle_{2-\text{rep}}. \tag{3}$$

使用最大键维数 $\chi=1500$，我们针对不同的初始化学势不平衡 μ以及局域希尔伯特空间维数 $q\equiv 2d=3$，4，6，8[93]，计算C_2。$\mu=0.1$ 的结果见图 2 第一幅图，$\mu=2$和 ∞ 的结果见补充材料 [68]。减去 $q=\infty$ 的方差（即 SEP 方差）后，我们分离出 C_2中的量子贡献，并将其称为 ΔC_2。我们发现，对于所有 q，这些量都按 $t^{-1/2}$ 衰减（见图 2 第一幅图的插图）。n-副本 SM 模型需要一个局域态空间的维数为 $2^n n!$ 因此，使用 TEBD 无法计算更高阶累积量。为了计算更高阶累积量，并从理论上解释在 $n=2$时趋近 SEP 的现象，我们针对副本 SM 模型中的电荷动力学，建立了一个有效的随机模型。

有效随机模型——在大 d极限下，SM 自由能的低能贡献来自稀疏构型：在“全为恒等置换”的背景中，分布着由单个置换组成的小区域。这些区域中最小的，也就是气泡，具有最低可能能量代价 $4\log(d)$。在砖墙电路图景中，只需在每个副本门 $\mathcal{U}$之间插入一个投影算符 $P_{\mathbb{1}}$，将其投影到恒等置换子空间，即可计数所有这些气泡构型。

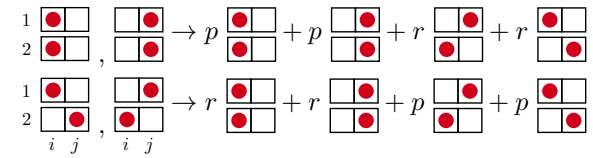
这样做之后，我们可以用一个门 $\overline{G}_{(n)}$替换 $\mathcal{U}$；该门仅探索 $\sigma=\mathbb{1}$ 子空间，但其电荷动力学 [68],经过了修改。



(4)

其结果是一个由n链梯描述的有效马尔可夫过程，每条链上都有硬核随机游走粒子，其跳跃率取决于其他链的局部占据情况。更具体地说，该模型是 n 离散时间 SEP 链，链之间存在成对的局部相互作用——当两条链在一对相邻格点上的电荷构型相同（不同）时，相互作用会使跃迁偏向于两条链具有相同（不同）构型的状态。转移矩阵由双站点算符的偶数层和奇数层乘积给出，

$T = T_E T_O$ 其中 $T_{E/O} = \prod_{j\in\text{偶数}/\text{奇数}} T_{j\text{层}j+1}$。用红点表示电荷，并聚焦于 $n = 2$ 副本（标记为 1、2），一对格点（i、j）上的修正跃迁为



(5)

其中跃迁概率为 $p = \frac{1+a}{4}$ 和 $r = \frac{1-a}{4}$ a d $= [4d^4 - 1]^{-1}$，满足 ( )。其余所有跃迁均与解耦的 SEP 链相同（电荷以概率 $1/2$ 跳跃）。马尔可夫过程的推导详见补充材料 [68]。

该有效模型继承了 SM 模型的 n 重 $SU(2)$ 不变性（每条链各有一个），因此每条链中的电荷基 $|Q = 0, 1)$ 都可以任意旋转（详情见补充材料）。选择一个旋转基底（$\{|\uparrow) \propto |0) + |1) \quad |\downarrow) \propto |0) - |1)\}$），第 n 阶累积量可以用 n 链转移矩阵 T_n 的矩阵元表示，其中初态和末态至多含有 n 个磁振子（翻转自旋）。这样一来，计算 C_n 的问题就简化为对一个 $L^n \times L^n$ 矩阵进行对角化。

结果 - 通过精确应用马尔可夫过程转移矩阵，我们计算了不同偏置下的二阶和三阶累积量，以及平衡态下的四阶累积量。我们发现，在所有情况下，有效演化都趋近于 SEP，如 $\Delta C_n \equiv C_n - C_n^{\text{SEP}} \sim a(d)t^{-1/2}$（见图 2 和 [68]中的插图）。方差数据表明，SM 模型与有效模型之间高度吻合。

在平衡态（无偏置，$\mu = 0$）下的混沌模型中，我们预期分布 $P_t(Q)$会在后期趋近于高斯分布。然而，即使在长时间后，对高斯性的偏离仍具有普适性，并且可由有效的经典随机模型描述——对于随机电路，该模型为 SEP。例如，利用 SEP 的标准结果 [69], ，我们发现，在半填充条件下，平均平衡态超额峰度以普适方式衰减：

$$\kappa - 3 = \frac{(4 - 3\sqrt{2})\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} + \dots \tag{6}$$

与 q的取值无关。对于分母中含有演化幺正算符的量（如峰度），电路平均需要用到副本技巧。为避免这一点，我们计算代理量 $\tilde{\kappa} \equiv \frac{\mu_4}{\sigma^4}$，分别对分子和分母取平均（其中$\mu_4$ 为四阶中心矩，σ 为标准差），并发现对于不同的 q，结果都以相同的普适方式趋近于高斯分布 $\kappa = 3$（图 2 的面板 3）。我们采用不符合物理实际的局域希尔伯特空间维数 q，以凸显不同模型间的差异。

有效哈密顿量 - 为了理解长时间下趋近对称排斥过程的过程，我们可以将有效 n-链马尔可夫过程映射为有效铁磁哈密顿量。我们通过软化传递矩阵 $T_n \to e^{-H_n}$ 来实现这一点。有效哈密顿量为

$$H_n \equiv \sum_j \sum_{\alpha=1}^{n} P_{j,j+1}^{(\alpha)} - a(d) \sum_j \sum_{\alpha<\beta} P_{j,j+1}^{(\alpha)} P_{j,j+1}^{(\beta)}, \tag{7}$$

其中，上标表示算符作用于哪条链，第二项则包含对不同链的链对求和。我们省略了次主导的$\mathcal{O}(1/d^8)$ 项。用海森堡自旋相互作用表示时，投影算符 P为$P_{j,j+1} = \frac{1}{4} - \boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{S}_{j+1}$。随后，虚时间动力学在晚期由式（7）的低能物理主导。我们采用标准自旋波方法 [68] 研究 $n = 2$ 的低能谱，并发现，在晚期，电荷转移方差的量子贡献为

$$\Delta C_2^H \approx \frac{a \tanh(\mu/2)^2}{16\sqrt{\pi t}}, \tag{8}$$

其中，上标 H 表示这一理论预测适用于具有虚时间哈密顿动力学 [68] 的连续时间随机模型。我们还考察了软化随机模型中的三阶累积量，数值计算和线性响应区间内的理论预测（$\mu \ll 1$ [68]）均显示出量子涨落熟悉的 $t^{-1/2}$ 衰减（图 2 的第 2 幅图）。基于幂次计数的简单重整化群（RG）论证可将这一普遍标度推广至高阶累积量：由于存在虚时间演化，长时间动力学由式（7）的低能性质控制。利用标准的自旋相干态路径积分技术，可以直接证明，以强度 a（d）耦合副本的微扰具有标度维数 $\Delta = 4$，因此在 RG 意义下是无关的。因此，在长时间尺度下，我们预期不同副本（SEP 链）实际上彼此解耦，从而 $\langle O\rangle_{n-\text{chain}} = \langle O\rangle_{\text{SEP}}$（$1 + \mathcal{O}(t^{-1})$）。

副本之间的渐近解耦还表明，长时间下电路间涨落受到抑制。为说明这一点，考虑一个 n 副本量 A（这可以是 $n = 1$ 的平均电荷转移，也可以是 $n = 2$ 的电荷转移方差），A 的电路平均可写为 $A = \langle X\rangle_{n\text{-chain}}$，其中 X 是作用于 n 个副本上的某个算符；而电路间涨落则由 $(A - A)^2 = \langle X \otimes X\rangle_{2n\text{-chain}} - \langle X\rangle_{n\text{-chain}}^2$ 控制。利用 SEP 链的渐近解耦，我们得到前述电路间涨落受到抑制的结论：$\text{Var}(A)/A^2 \sim t^{-1}$。因此，单个量子电路的全计数统计会趋近于 SEP 的预测，

$$\chi(\lambda)/\sqrt{t} = \overline{\chi(\lambda)}/\sqrt{t} + \mathcal{O}(1/t), \tag{9}$$

其中 $\overline{\chi}/\sqrt{t} \to \chi_{\text{SEP}}/\sqrt{t}$ 为 $t \to \infty$。为验证这一预测，我们计算了单个随机

量子电路在畴壁初态（$\mu=\infty$）下的全计数统计（FCS），采用标准计数场技术 [68] （图1）。我们发现，重标度后的累积量生成函数（CGF） $\chi(\lambda)/\sqrt{t}$ 确实具有自平均性，其涨落为 $\mathcal{O}(1/t)$，并且在长时间极限下确实趋近于对称排斥过程（SEP）的预测 [68]。

讨论 - 我们的主要结果是，在长时间尺度下，随机守恒电荷量子电路中的电荷转移涨落由一种有效的 SEP 随机模型控制：$C_n = C_n^{\mathrm{SEP}} + \mathcal{O}\big(t^{-1/2}\big)$。单个随机电路的完整累积量生成函数$\chi(\lambda) \approx \chi(\lambda)$ 因而在晚期必须与 SEP 的形式相同，即 $\chi(\lambda) \equiv \log\langle e^{i\lambda Q}\rangle \approx \chi_{\mathrm{SEP}}(\lambda)$。对称排斥过程的生成函数可通过可积性解析求得 [69]，其表达式为

$$\chi(\lambda) \approx \sqrt{t}F(\omega),\ F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\omega^n, \qquad (10)$$

其中 $\omega = \rho_L(e^{i\lambda}-1)+\rho_R(e^{-i\lambda}-1)+\rho_L\rho_R(e^{i\lambda}-1)(e^{-i\lambda}-1)$，$\rho_{L/R} = \frac{e^{\mu_{L/R}}}{1+e^{\mu_{L/R}}}$是系统左侧（$L$）和右侧（$R$）两半部分中初始时局域的电荷密度 [94]。近期研究表明，通过直接求解方程（1），也可以从 MFT [62] 得到相同的全计数统计。因此，我们的结果证实，随机量子电路单次实现的电流涨落可由简单的涨落流体动力学方程（1）描述。若要全面确立 MFT 对多体量子系统的适用性，考察具有更一般扩散常数 $D(\rho)$ 的电路系综将很有意义：对此，我们同样预期，它们可映射到类似于本文所发现的有效经典随机模型，且副本间耦合如（7）所示是无关的。我们将这类推广留待未来研究。

致谢- 我们感谢 Immanuel Bloch、Enej Ilievski、Vedika Khemani、Ziga Krajnik、Alan Morn- ingstar、Andrew Potter、Tomaz Prosen 和 Andrea De Luca 提供的有益讨论。本研究得到了欧洲研究委员会启动基金 101042293（HEPIQ）（J.D.N.）、美国国家科学基金会 NSF 项目 DMR-1653271（S.G.）和 DMR-2104141（E.M.）、美国能源部科学办公室基础能源科学项目早期职业奖 DE-SC0019168（R.V.），以及阿尔弗雷德·P·斯隆基金会通过斯隆研究奖学金（R.V.）的支持。

[1] A. Mazurenko、C. S. Chiu、G. Ji、M. F. Parsons、M. Kan´asz-Nagy、R. Schmidt、F. Grusdt、E. Demler、D. Greif 和 M. Greiner，《自然》（伦敦）**545**，462（2017年）。[2] C. Gross 和 I. Bloch，《科学》**357**，995（2017年）。[3] W. S. Bakr、J. I. Gillen、A. Peng、S. F¨olling 和 M. Greiner，《自然》（伦敦）**462**，74（2009年），arXiv:0908.0174 [凝聚态物理·量子气体]。

[4] S. Hofferberth, I. Lesanovsky, T. Schumm, A. Imambekov, V. Gritsev, E. Demler 和 J. Schmiedmayer，《自然·物理》4, 489 (2008)。[5] C. Weitenberg, M. Endres, J. F. Sherson, M. Cheneau, P. Schauß, T. Fukuhara, I. Bloch 和 S. Kuhr，《自- 然》（伦敦）471, 319 (2011)，arXiv:1101.2076 [凝聚态物理·量子气体]。[6] A. Bohrdt, S. Kim, A. Lukin, M. Rispoli, R. Schittko, M. Knap, M. Greiner 和 J. L´eonard，《物理评论快报》127, 150504 (2021)，arXiv:2012.11586 [凝聚态物理·量子- 气体]。[7] M. F. Parsons, A. Mazurenko, C. S. Chiu, G. Ji, D. Greif 和 M. Greiner，《科学》353, 1253 (2016)，arXiv:1605.02704 [凝聚态物理·量子气体]。[8] T. A. Hilker, G. Salomon, F. Grusdt, A. Omran, M. Boll, E. Demler, I. Bloch 和 C. Gross，《科学》357, 484 (2017)，arXiv:1702.00642 [凝聚态物理·量子气体]。[9] D. Mitra, P. T. Brown, E. Guardado-Sanchez, S. S. Kon- dov, T. Devakul, D. A. Huse, P. Schauß 和 W. S. Bakr，《自然·物理》**14**, 173 2018 1705 02039 ( ), [ ] arXiv: . 凝聚态物理·量子气体 .[10] E. Haller, J. Hudson, A. Kelly, D. A. Cotta, B. Peaude- cerf, G. D. Bruce 和 S. Kuhr，《自然·物理》11, 738 (2015)，arXiv:1503.02005 [凝聚态物理·量子气体]。[11] J. F. Sherson, C. Weitenberg, M. Endres, M. Cheneau, I. Bloch 和 S. Kuhr，《自然》（伦敦）467, 68 (2010)，arXiv:1006.3799 [凝聚态物理·量子气体]。[12] I. Bloch, J. Dalibard 和 S. Nascimb`ene，《自然·物理》8, 267 (2012)。[13] H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Omran, H. Pichler, S. Choi, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin，《自然》（伦- 敦）551, 579 (2017)，arXiv:1707.04344 [量子物理]。[14] D. Wei, A. Rubio-Abadal, B. Ye, F. Machado, J. Kemp, K. Srakaew, S. Hollerith, J. Rui, S. Gopalakrishnan, N. Y. Yao, I. Bloch 和 J. Zeiher，《科学》376, 716 (2022)。[15] R. Islam, E. E. Edwards, K. Kim, S. Korenblit, C. Noh, H. Carmichael, G. D. Lin, L. M. Duan, C. C. Joseph Wang, J. K. Freericks 和 C. Monroe，《自然通讯》2, 377 (2011)，arXiv:1103.2400 [量子物理]。[16] J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V. Gorshkov, Z. X. Gong 和 C. Monroe，《自然》（伦敦）551, 601 (2017)，arXiv:1708.01044 [量子物理]。[17] M. G¨arttner, J. G. Bohnet, A. Safavi-Naini, M. L. Wall, J. J. Bollinger 和 A. M. Rey，《自然·物理》13, 781 (2017)，arXiv:1608.08938 [量子物理]。[18] C. Song, K. Xu, W. Liu, C.-p. Yang, S.-B. Zheng, H. Deng, Q. Xie, K. Huang, Q. Guo, L. Zhang, P. Zhang, D. Xu, D. Zheng, X. Zhu, H. Wang, Y. A. Chen, C. Y. Lu, S. Han 和 J.-W. Pan，《物理评论快报》119, 180511 (2017)，arXiv:1703.10302 [量子物理]。[19] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. S. L. Brandao, D. A. Buell, *et al.*，《自然》（伦敦）574, 505 (2019)，arXiv:1910.11333 [量子物理]。[20] A. Blais, A. L. Grimsmo, S. M. Girvin 和 A. Wall- raff，《现代物理评论》93, 025005 (2021)，arXiv:2005.12667 [量子物理]。[21] G. Wendin，《物理学进展报告》80, 106001 (2017)，arXiv:1610.02208 [量子物理]。[22] L. S. Levitov 和 G. B. Lesovik，《苏联实验与理论物理通讯》58, 230 (1993)。

[23] H. Lee, L. S. Levitov 和 A. Y. Yakovets, 《物理评论B》51, 4079 (1995)。[24] L. S. Levitov, H. Lee 和 G. B. Lesovik, 《数学物理学杂志》37, 4845 (1996), arXiv:cond- mat/9607137 [凝聚态物理]。[25] D. A. Ivanov, H. W. Lee 和 L. S. Levitov, 《物理评论B》56, 6839 (1997), arXiv:cond-mat/9501040 [凝聚态物理]。[26] W. Belzig 和 Y. V. Nazarov, 《物理评论快报》87, 197006 2001( ), arXiv:cond-mat/0012112 [凝聚态物理·超导]。[27] J. B ¨ **88**, 197001 2002 orlin, W. Belzig 和 C. Bruder, 《物理评论快报》( ), arXiv:cond-mat/0201579 [凝聚态物理·超导]。[28] L. S. Levitov 和 M. Reznikov, 《物理评论B》70, 115305 (2004), arXiv:cond-mat/0111057 [凝聚态物理·介观物理]。[29] V. Beaud, G. M. Graf, A. V. Lebedev 和 G. B. Lesovik, 《统计物理学杂志》153, 177 (2013), arXiv:1303.4661 [凝聚态物理·介观物理]。[30] K. Najafi 和 M. A. Rajabpour, 《物理评论B》96, 235109 (2017), arXiv:1710.08814 [凝聚态物理·强关联电子系统]。[31] S. Groha, F. Essler 和 P. Calabrese, SciPost Physics 4, 043 (2018), arXiv:1803.09755 [凝聚态物理·统计力学]。[32] D. Bernard 和 T. Jin, 《数学物理通讯》384, 1141 (2021), arXiv:2006.12222 [数学物理]。[33] D. Bernard 和 T. Jin, 《物理评论快报》123, 080601 (2019), arXiv:1904.01406 [凝聚态物理·统计力学]。[34] J. M. Hickey, S. Genway, I. Lesanovsky 和 J. P. Gar- rahan, 《物理评论B》87, 184303 (2013)。[35] K. Sch¨ onhammer, 《物理评论B》75, 205329 (2007), arXiv:cond-mat/0701620 [凝聚态物理·介观物理]。[36] D. Bernard, F. H. L. Essler, L. Hruza 和 M. Medenjak, SciPost Phys. 12, 042 (2022)。[37] L. Hruza 和 D. Bernard, arXiv预印本, arXiv:2204.11680 (2022), arXiv:2204.11680 [凝聚态物理·统计力学]。[38] S. Gopalakrishnan, A. Morningstar, R. Vasseur 和 V. Khemani, arXiv预印本, arXiv:2203.09526 (2022), arXiv:2203.09526 [凝聚态物理·统计力学]。[39] J.-M. St´ ephan 和 F. Pollmann, 《物理评论B》95, 035119 (2017), arXiv:1608.06856 [凝聚态物理·强关联电子系统]。[40] D. Bernard 和 B. Doyon, 《统计力学杂志：理论与实验》2016, 064005 (2016)。[41] A. Bastianello 和 L. Piroli, 《统计力学杂志：理论与实验》11, 113104 (2018), arXiv:1807.06869 [凝聚态物理·统计力学]。[42] J. Myers, M. J. Bhaseen, R. J. Harris 和 B. Doyon, arXiv预印本, arXiv:1812.02082 (2018), arXiv:1812.02082 [凝聚态物理·统计力学]。[43] P. Calabrese, M. Collura, G. Di Giulio 和 S. Mur- ciano, 《欧洲物理快报》129, 60007 (2020), arXiv:2002.04367 [凝聚态物理·统计力学]。[44] J. De Nardis, S. Gopalakrishnan 和 R. Vasseur, arXiv预印本, arXiv: 2212 03696 2022 2212 03696 。[ ] ( ), arXiv: . 凝聚态物理·量子气体 .[45] ˇZ. Krajnik, J. Schmidt, V. Pasquier, E. Ilievski 和 T. Prosen, 《物理评论快报》128, 160601 (2022), arXiv:2201.05126 [凝聚态物理·统计力学]。[46] ˇ Z. Krajnik, E. Ilievski 和 T. Prosen, 《物理评论快报》128, 090604 (2022), arXiv:2109.13088 [凝聚态物理·统计- 力学]。[47] ˇZ. Krajnik, J. Schmidt, V. Pasquier, T. Prosen 和 E. Ilievski, arXiv预印本, arXiv:2208.01463 (2022), arXiv:2208.01463 [凝聚态物理·统计力学]。[48] B. Doyon, G. Perfetto, T. Sasamoto 和 T. Yoshimura, arXiv预印本, arXiv:2206.14167（2022）, arXiv:2206.14167 [cond-mat.stat-mech]。[49] B. Bertini、P. Calabrese、M. Collura、K. Klobas 和 C. Rylands, arXiv预印本, arXiv:2212.06188（2022）, arXiv:2212.06188 [cond-mat.stat-mech]。[50] G.-M. Tang 和 J. Wang, 《物理评论B》90, 195422（2014）, arXiv:1407.7362 [cond-mat.stat-mech]。[51] S. Pilgram 和 M. B¨uttiker, 《物理评论B》67, 235308（2003）, arXiv:cond-mat/0302138 [cond-mat.mes-hall]。[52] A. A. Clerk, 《物理评论A》84, 043824（2011）, arXiv:1106.0276 [cond-mat.mes-hall]。[53] S. T. Carr、D. A. Bagrets 和 P. Schmitteckert, 《物理评论快报》107, 206801（2011）。[54] M. Ridley、V. N. Singh、E. Gull 和 G. Cohen, 《物理评论B》97, 115109（2018）, arXiv:1801.05010 [cond- mat.mes-hall]。[55] M. Kilgour、B. K. Agarwalla 和 D. Segal, 《化学物理学杂志》150, 084111（2019）, arXiv:1812.03044 [cond-mat.stat-mech]。[56] A. Erpenbeck、E. Gull 和 G. Cohen, 《物理评论B》103, 125431 2021 2010（）, arXiv: .03487 [cond-mat.mes-hall]。[57] M. Popovic、M. T. Mitchison、A. Strathearn、B. W. Lovett、J. Goold 和 P. R. Eastham, PRX Quantum 2, 020338（2021）, arXiv:2008.06491 [quant-ph]。[58] H. Touchette, 《物理学报告》478, 1（2008）。[59] H. Touchette 和 R. J. Harris, arXiv预印本, arXiv:1110.5216（2011）, arXiv:1110.5216 [cond-mat.stat- mech]。[60] A. Lazarescu, 《物理学A：数学与理论》48, 503001（2015）, arXiv:1507.04179 [cond-mat.stat- mech]。[61] L. Bertini、A. De Sole、D. Gabrielli、G. Jona-Lasinio 和 C. Landim, 《现代物理评论》87, 593（2015）, arXiv:1404.6466 [cond-mat.stat-mech]。[62] K. Mallick、H. Moriya 和 T. Sasamoto, 《物理评论快报》129, 040601（2022）, arXiv:2202.05213 [cond- mat.stat-mech]。[63] R. Dandekar 和 K. Mallick, 《物理学A：数学与理论》 **55**, 435001 2022 2207 11242 （）, [ ] arXiv: . cond-mat.stat-mech 。[64] T. Rakovszky、F. Pollmann 和 C. W. von Keyserlingk, 《物理评论X》 **8**, 031058 2018 1710 09827 （）, [ ] arXiv: . cond-mat.stat-mech 。[65] V. Khemani、A. Vishwanath 和 D. A. Huse, 《物理评论X》8，031057（2018）。[66] U. Agrawal、A. Zabalo、K. Chen、J. H. Wilson、A. C. Potter、J. H. Pixley、S. Gopalakrishnan 和 R. Vasseur, 《物理评论X》 **12**, 041002 2022 2107 10279 （）, [ ] arXiv: . cond-mat.dis-nn 。[67] F. Barratt、U. Agrawal、S. Gopalakrishnan、D. A. Huse、R. Vasseur 和 A. C. Potter, 《物理评论快报》129，120604 2022 2111（）, arXiv: .09336 [quant-ph]。[68] 详情请参阅在线补充材料。[69] B. Derrida 和 A. Gerschenfeld, 《统计物理学杂志》136，1（2009）, arXiv:0902.2364 [cond-mat.stat- mech]。[70] J. Kurchan, arXiv预印本, cond-mat/0007360（2000）, arXiv:cond-mat/0007360 [cond-mat.stat-mech]。[71] H. Tasaki, arXiv预印本, cond-mat/0009244（2000）, arXiv:cond-mat/0009244 [cond-mat.stat-mech]。[72] M. Esposito、U. Harbola 和 S. Mukamel, 《现代物理评论》81，1665（2009）, arXiv:0811.3717 [cond- mat.stat-mech]。[73] M. Campisi , P. Talkner , 和 P. H¨anggi , 《物理评论E》**83** ,

041114 (2011)，arXiv:1101.2404 [cond-mat.stat-mech]。[74] M. Campisi、P. H¨anggi 和 P. Talkner，《现代物理评论》**83**，771 (2011)，arXiv:1012.2268 [cond- mat.stat-mech]。[75] P. Talkner 和 P. Hanggi，arXiv预印本，arXiv:0705.1252 (2007)，arXiv:0705.1252 [cond-mat.stat- mech]。[76] Y. V. Nazarov，arXiv预印本，cond-mat/9908143 (1999)，arXiv:cond-mat/9908143 [cond-mat.mes-hall]。[77] Y. V. Nazarov 和 M. Kindermann，《欧洲物理学杂志B》 **35**，413 2003 0107133 ( )，[ ] arXiv:cond-mat/ cond-mat.mes-hall。[78] D. A. Rowlands 和 A. Lamacraft，《物理评论B》**98**，195125 2018 1806 ( )，arXiv: .01723 [cond-mat.stat-mech]。[79] A. Nahum、S. Vijay 和 J. Haah，《物理评论X》**8**，021014 2018 1705 ( )，arXiv: .08975 [cond-mat.str-el]。[80] T. Zhou 和 A. Nahum，《物理评论B》**99**，174205 (2019)，arXiv:1804.09737 [cond-mat.stat-mech]。[81] R. Vasseur、A. C. Potter、Y.-Z. You 和 A. W. W. Lud-wig，《物理评论B》 **100**, 134203 2019 1807 07082 ( )，arXiv: . [ ] cond-mat.stat-mech。[82] C.-M. Jian、Y.-Z. You、R. Vasseur 和 A. W. W. Lud-wig，《物理评论B》 **101**, 104302 2020 1908 08051 ( )，arXiv: . [ ] cond-mat.stat-mech。[83] Y. Bao、S. Choi 和 E. Altman，《物理评论B》**101**，104301 2020 1908 ( )，arXiv: .04305 [cond-mat.stat-mech]。[84] A. C. Potter 和 R. Vasseur，“混合量子电路中的纠缠动力学”，载于 *Entanglement in Spin Chains: From Theory to Quantum Technology Applications*，由 A. Bayat、S. Bose 和 H. Johannes-son 编（施普林格国际出版，Cham，2022），第 211–249.[85] Y. Li、R. Vasseur、M. P. A. Fisher 和 A. W. W. Ludwig，arXiv预印本，arXiv:2110.02988（2021年），arXiv:2110.02988 [cond-mat.stat-mech]。[86] M. P. A. Fisher、V. Khemani、A. Nahum 和 S. Vijay，arXiv预印本，arXiv:2207.14280（2022年），arXiv:2207.14280 [量子物理]。[87] B. C. Dias、D. Perkovic、M. Haque、P. Ribeiro 和 P. A. McClarty，arXiv预印本，arXiv:2208.13861（2022年），arXiv:2208.13861 [量子物理]。[88] A. J. Friedman、A. Chan、A. De Luca 和 J. T. Chalker，《物理评论快报》 **123**, 210603 2019 1906 07736 ( )，[ ] arXiv: 。cond-mat.stat-mech。[89] H. Singh、B. A. Ware、R. Vasseur 和 A. J. Friedman，《物理评论快报》 **127**, 230602 2021 2108 02205 ( )，[ ] arXiv: 。cond-mat.stat-mech。[90] G. Vidal，《物理评论快报》**91**，147902（2003年）。[91] G. Vidal，《物理评论快报》**93**，040502（2004年）。[92] 物理学年鉴**326**，96（2011年），2011年1月特刊。[93] 这组局域希尔伯特空间维数对应的量子比特维数为 $d = 1.5$，2，3，4。在 SM 模型中，d 只是一个参数，不必是物理量（整数）。[94] 这一结果适用于连续时间SEP，而非离散时间变体。不过，由于两者具有相同的扩散常数ρD（ $\sigma\ \rho\ =$ $\rho\ 1-\rho$ [61] ）$= 1$ 和电导率（） （），因此它们具有相同的全计数统计。[95] M. C. Ba ˜ **123**, nuls 和 J. 200601 2019 P. Garrahan，《物理评论快报》（）。[96] L. Causer、M. C. Ba˜nuls 和 J. P. Garrahan，《物理评论快报》**128**，090605（2022年）。

补充材料：混沌多体量子系统中的电荷全计数统计

Ewan McCulloch, [1,2] Jacopo De Nardis, [3] Sarang Gopalakrishnan, [2]
RomainVasseur[11] *Department of Physics*、 *University of Massachusetts*、 *Amherst*、
MA 01003、 *USA*[2] *Department of Electrical and Computer Engineering*、
Princeton University Princeton NJ 08544 USA 、 、 、 、 *CNRS UMR 8089*、
[3] *Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation*
CY Cergy Paris Université、 *95302 Cergy-Pontoise Cedex*、 *France*

量子力学系统中的全计数统计

全计数统计最初被引入，用于刻画介观导体中的电流涨落 [22, 24–28]。在本附录中，我们讨论如何将其推广至一般量子力学系统。具体而言，我们将严格遵循文献 [50] ，并使用双时刻投影测量协议定义全计数统计。在双时刻测量方案中，我们首先在时间 0 测量一个感兴趣的物理量——例如系统右侧的电荷 q ——然后在时间 t 再次测量。将这些测量结果出现的概率记为 $P(q_0, q_t)$，矩生成函数 $Z(t, \lambda)$ 定义为电荷转移概率 $P_t(Q)$ 的傅里叶变换 $= \sum_{q_0, q_t} P(q_0, q_t)\delta_{q_t - q_0, Q}$，其中电荷在时间窗口 $[0, t]$ 内从左向右转移 Q。

$$Z(t, \lambda) = \sum_Q e^{i\lambda Q} P_t(Q). \tag{S1}$$

由此生成函数，我们还可以通过以下关系得到累积量生成函数 $\chi(t, \lambda)$,

$$\chi(t, \lambda) \equiv \log(Z(t, \lambda)). \tag{S2}$$

累积量 ts C_m 随后可通过对计数场 λ求 $\chi(t, \lambda)$ 的导数来计算,

$$C_m(t) \equiv (-i\partial_\lambda)^m \chi(t, \lambda)|_{\lambda=0}. \tag{S3}$$

前几个累积量为:

$$C_1(t) = \langle Q \rangle_t, \quad C_2(t) = \langle (Q - \langle Q \rangle_t)^2 \rangle_t, \quad C_3(t) = \langle (Q - \langle Q \rangle_t)^3 \rangle_t, \tag{S4}$$

其中 $\langle f(Q) \rangle_t \equiv \sum_Q P_t(Q) f(Q)$。

现在我们将生成函数与量子期望值联系起来。为此，我们在时刻 0 和 t 实施投影测量，分别使用投影算符 P_{q_0} 和 P_{q_t}。于是，对于时刻 0 的给定初态 $|\psi\rangle$ ，测量结果 q_0 和 q_t 的玻恩概率为

$$P(q_0, q_t) = \langle \psi | P_{q_0} U(0, t) P_{q_t} U(t, 0) P_{q_0} | \psi \rangle , \tag{S5}$$

其中 U为幺正演化算符。推广到混合初态 ρ, $P(q_0, q_t)$ 时， P可表示为

$$P(q_0, q_t) = \mathrm{Tr} \left[\rho P_{q_0} U(0, t) P_{q_t} U(t, 0) P_{q_0} \right]. \tag{S6}$$

生成函数 $Z(t, \lambda)$ 可表示为

$$Z(t, \lambda) = \sum_{q_0, q_t} e^{i\lambda(q_t - q_0)} \mathrm{Tr} \left[\rho P_{q_0} U(0, t) P_{q_t} U(t, 0) P_{q_0} \right]. \tag{S7}$$

ˆ将 Q_R 记作系统右半部分的电荷算符，生成函数可改写为

$$\begin{aligned} Z(t, \lambda) &= \sum_{q_0, q_t} \mathrm{Tr} \left[\rho P_{q_0} e^{-i\lambda \hat{Q}_R} U(0, t) P_{q_t} e^{i\lambda \hat{Q}_R} U(t, 0) P_{q_0} \right], \\ &= \mathrm{Tr} \left[\rho' e^{-i\lambda \hat{Q}_R} U(0, t) e^{i\lambda \hat{Q}_R} U(t, 0) \right], \end{aligned} \tag{S8}$$

其中我们使用了完备性 $\sum_q P_q = \mathbb{1}$ 并定义了 $\rho' = \sum_q P_q \rho P_q$。注意，由于 $\sum_q P_q \rho P_q$ 是一个完全正迹保持映射，ρ' 仍然是一个有效的混合态。采用记号 $\langle\cdot\rangle' = \mathrm{Tr}\,[\rho'\cdot]$，并定义海森堡演化算符 $Q_R(t) = U(0,\ t) Q_R U(t,\ 0)$，我们可以将 $Z(t,\ \lambda)$写成更紧凑的形式，

$$Z(t,\lambda) = \langle \mathcal{T} e^{i\lambda \Delta \hat{Q}_R(t)} \rangle', \tag{S9}$$

其中 $\Delta \hat{Q}_R(t) = \hat{Q}_R(t) - \hat{Q}_R(0)$，且 $\mathcal{T}$是时间排序算符。现在可以将累积量表示为量子期望值，

$$C_1(t) = \langle \Delta \hat{Q}_R(t) \rangle', \quad C_2(t) = \langle \mathcal{T} (\Delta \hat{Q}_R(t) - \langle \Delta \hat{Q}_R(t) \rangle')^2 \rangle', \quad C_3(t) = \langle \mathcal{T} (\Delta \hat{Q}_R(t) - \langle \Delta \hat{Q}_R(t) \rangle')^3 \rangle'. \tag{S10}$$

映射到统计力学模型

对系统演化幺正算符的多项式量进行电路平均时，例如纠缠熵，必须使用复制希尔伯特空间，$\mathcal{H}^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}^{*\otimes n}$。电路平均会自然地将随机幺正电路模型映射到副本统计力学模型 [64, 79–81, 83, 85–87], ，其每个格点上的局域自由度为局域荷 $q_m \in \{0, 1\}, m = 1,\ \cdots,\ n$，以及置换自由度 $\sigma \in S_n$。置换自由度定义了 n 份 $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ 与 n 份 $\mathcal{H}^*_{\mathrm{loc}}$之间的配对，其中$\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ 是底层电路中的单格点希尔伯特空间。用量子电路的单格点基态表示，统计力学局域态为

$$|q_1, \cdots, q_n; \sigma\rangle \equiv \sum_{\substack{a_1,\cdots,a_n \\ a_m \in \mathcal{H}_{q_m}}} \left| a_1 \cdots a_n a^*_{\sigma(1)} \cdots a^*_{\sigma(n)} \right\rangle, \tag{S11}$$

其中，$\mathcal{H}_q \subset \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ 表示电荷为 q 的局域荷扇区，而记号 a^* 用于区分复共轭副本 $\mathcal{H}^*_{\mathrm{loc}}$中的状态。计算SM转移矩阵的核心对象是复制双格点门的电路平均 $\overline{U^{\otimes n} \otimes U^{*\otimes n}}$，其一般形式为：

$$\overline{U^{\otimes n} \otimes U^{*\otimes n}} = \sum_{\sigma,\tau \in S_n} \sum_{Q_1,\cdots Q_n} W_{\sigma,\tau}(\{Q_m\}) \, |\{Q_m\}; \sigma\rangle \langle \{Q_m\}; \tau| \,, \tag{S12}$$

其中，$Q_m = q_m + q'_m$ 表示第 m个副本中两个格点上的总荷，而状态 $|\{Q_m\};\ \sigma\rangle$ 可用局部SM态表示为：

$$|\{Q_m\}; \sigma\rangle = \sum_{\substack{q_1 \cdots q_n \\ q'_1 \cdots q'_n}} \left(\prod_m \delta_{q_m + q'_m, Q_m} \right) |\{q_m\}; \sigma\rangle \otimes |\{q'_m\}; \sigma\rangle \,. \tag{S13}$$

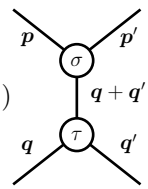
The 函数$W_{\sigma,\ \tau}(\{Q_m\})$已在文献 [64] 中针对 $n = 2$ 明确计算，结果为：

$$W_{\mathbb{1},\mathbb{1}} = W_{\times,\times} = [d_{Q_1} d_{Q_2} - \delta_{Q_1,Q_2}]^{-1}, \quad W_{\mathbb{1},\times} = W_{\times,\mathbb{1}} = -\delta_{Q_1,Q_2} [d_{Q_1} (d^2_{Q_1} - 1)]^{-1}, \tag{S14}$$

其中 $d_0 = d_2 = d^2$ 和 $d_1 = 2d^2$，且$\mathbb{1}$和 $\times$ 分别表示恒等置换和交换置换。

文献 [66], 讨论了一般的 n副本情形，现将其概述如下。令 $\boldsymbol{q} \equiv (q_1,\ \cdots,\ q_n)$和$\boldsymbol{q}' \equiv (q'_1,\ \cdots,\ q'_n)$分别表示两个格点输入腿上各副本的电荷向量，令 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 表示输出腿上的电荷，则可将 $U^{\otimes n} \otimes U^{*\otimes n}$ 写成张量图：

$$\overline{U^{\otimes n} \otimes U^{*\otimes n}} = \sum_{\sigma,\tau \in S_n} \sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} \delta(\sigma\tau^{-1} \in \mathrm{Stab}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}')) \delta_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'} \mathrm{Wg}(\sigma\tau^{-1}) \tag{S15}$$



其中，$\mathrm{Stab}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}') = S_{n_0} \times S_{n_1} \times S_{n_2}$ 是电荷构型 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}'$的稳定子群，$n_Q$用于计数电荷 Q 在 $\boldsymbol{Q} = (Q_1,\ \cdots,\ Q_n)$ 中出现的次数。函数 $\mathrm{Wg}(\sigma) = \prod_{Q=0}^{2} d_Q^{n_Q} \mathrm{Wg}^{d_Q}(\sigma_Q)$是不同电荷扇区中 Weingarten 函数的乘积，其中 σ_Q 是电荷扇区 Q 上的置换

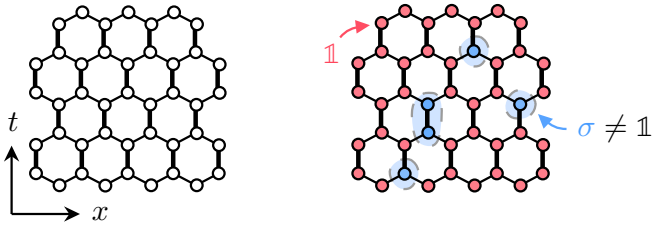
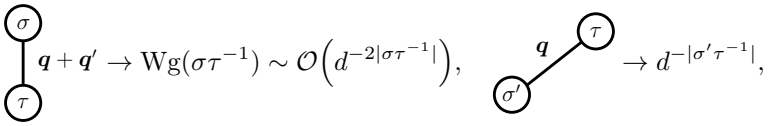


图 S1。（左）通过电路平均复制电路所生成的统计力学模型，定义在各向异性的六角晶格上，边承载电荷自由度，顶点承载置换自由度。（右）在大 d 极限下，非恒等置换的小型畴的稀疏构型主导统计力学配分函数。

由 σ 实现，且 $d_0 = d_2 = d^2$ 和 $d_1 = 2d^2$。该张量的各条腿携带电荷指标 $\boldsymbol{q}$，顶点携带置换 σ。这自然导出一个定义在图 S1 所示各向异性六角晶格上的 SM 模型，其中有两类边，与非对称情形 [79, 80, 82, 85, 87]类似。

该模型的配分函数由对每条边上的电荷构型，以及每个顶点处与电荷相容的置换求和得到；竖直边和对角边具有以下相应的权重，

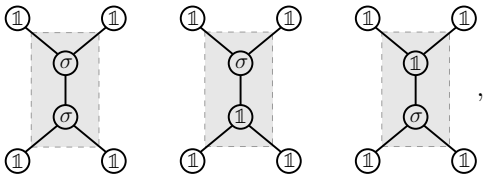


(S16)

其中 $|\sigma|$ 是 σ （相对于 1）的换位距离。在 $d \to \infty$ 极限下，Weingarten 函数将流入和流出的置换 $\sigma = \tau$锁定在一起。结合初始和最终边界条件 $\sigma_0 = \sigma_t = \mathbb{1}$，置换自由度便完全冻结，而 n副本模型则解耦为 n 个相互独立的离散时间对称排斥过程链，描述电荷自由度。令 d 取较大但有限的值，可使不同置换在动力学过程中出现；不同置换 σ 与 τ 之间的畴壁每单位长度具有 $\mathcal{O}(|\sigma\tau^{-1}|\log(d))$的能量代价。

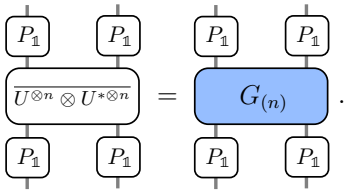
大 d 下的有效随机模型

当 d 较大时，SM 配分函数的主导贡献来自“全恒等”构型，即在每个顶点处，副本都按照恒等置换配对。次为重要的贡献来自恒等背景中的稀疏构型，其中包含由单次换位形成的小区域（见图 S1）。最小的区域代价最低，其自由能贡献为 $4\log(d)$，如下所示：



(S17)

其中，σ 是仅涉及两个副本的对换，阴影区域表示双格点门。在砖墙电路图景中，也可以通过在每条腿上插入投影算符 $P_{\mathbb{1}}$，将其投影到恒等配对空间；等价地，也可以用状态 $|\boldsymbol{q};\ \mathbb{1}\rangle$收缩这些腿，从而计算这些小域的贡献。这样做之后，我们可以将$U^{\otimes n} \otimes U^{*\otimes n}$替换为一个门 $G_{(n)}$，它只在 $\sigma = \mathbb{1}$ 子空间中演化，但其电荷动力学经过了修改，



(S18)

在给出 $G_{(n)}$的显式表达式之前，我们先调整局部 SM 态的记号，使其对应恒等置换。定义状态 $|q\rangle\!\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{a\in\mathcal{H}_q}|aa^*\rangle \in \mathcal{H}_{\rm loc}\otimes\mathcal{H}_{\rm loc}^*$，即可写为 $|\boldsymbol{q};\ \mathbb{1}\rangle = d^{n/2}\,|q_1\rangle\!\rangle\otimes\cdots\otimes|q_n\rangle\!\rangle$。我们还定义以下两个投影算符 P 和 K：

$$P \equiv \frac{1}{2}\big[\,|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle\,\big]\big[\,\langle 0|\langle 1| - \langle 1|\langle 0|\,\big],\ K \equiv \mathbb{1} - P = |0\rangle|0\rangle\langle 0|\langle 0| + |1\rangle|1\rangle\langle 1|\langle 1| + \frac{1}{2}\big[\,|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle\,\big]\big[\,\langle 0|\langle 1| + \langle 1|\langle 0|\,\big]. \tag{S19}$$

用上标标明投影算符作用于哪个副本后，门 $G_{(n)}$ 可写为

$$G_{(n)} = \prod_{\alpha=1}^{n} K^{(\alpha)} + a(d)\sum_{\alpha<\beta} P^{(\alpha)}P^{(\beta)}\prod_{\gamma\neq\alpha,\beta} K^{(\gamma)} + \mathcal{O}\big(d^{-8}\big), \tag{S20}$$

其中 $a(d) = [4d^4-1]^{-1}$。

推导概要

为了解释这一结果，我们将平均门与恒等配对空间中的 SM 态相乘。我们考虑一个恒等置换态，其输入腿（每个格点各一条）上的电荷分别为 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{q}'$，且总荷 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'$ 满足 $Q_m \le Q_{m+1}$；也就是说，该电荷构型中的副本已经按相同电荷扇区归为各组。平均门随后显然可分解为 $U^{\otimes n}\otimes U^{*\otimes n}\,|\boldsymbol{q};\ \mathbb{1}\rangle\,|\boldsymbol{q}';\ \mathbb{1}\rangle = \prod_{Q=0}^{2} U_Q^{\otimes n_Q}\otimes U_Q^{*\otimes n_Q}\,|\boldsymbol{q};\ \mathbb{1}\rangle\,|\boldsymbol{q}';\ \mathbb{1}\rangle$。

对于电荷扇区 $Q=0,\ 2$，所有腿上的电荷都是固定的（每个副本中每个格点上的电荷都相同）。从状态中去掉电荷标签，仅保留置换标签后，平均后的 Q-扇区门可写成简单形式，

$$\overline{U_Q^{\otimes n_Q}\otimes U_Q^{*\otimes n_Q}} = \sum_{\sigma_Q,\tau_Q\in S_{n_Q}} \mathrm{Wg}_{d_Q}(\sigma_Q\tau_Q^{-1})\,|\sigma_Q\rangle\langle\tau_Q|\,. \tag{S21}$$

现在注意，恒等置换状态是本征值为 1 的特征向量，因为它对应于在同一副本中将每个酉算符与其共轭收缩：

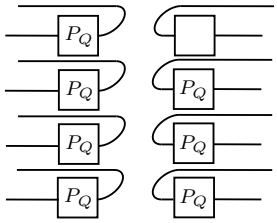
$$\overline{U_Q^{\otimes n_Q}\otimes U_Q^{*\otimes n_Q}}\,|\mathbb{1}\rangle = |\mathbb{1}\rangle\,. \tag{S22}$$

加回电荷标签后，$U_Q^{\otimes n_Q}\otimes U_Q^{*\otimes n_Q}$ 在恒等子空间上的限制为

$$\Big(\overline{U_Q^{\otimes n_Q}\otimes U_Q^{*\otimes n_Q}}\Big)_{\mathbb{1}} = d_Q^{-n_Q}\,|(Q,\cdots,Q);\mathbb{1}\rangle\langle(Q,\cdots,Q);\mathbb{1}|\,. \tag{S23}$$

这也可以用张量图表示为，

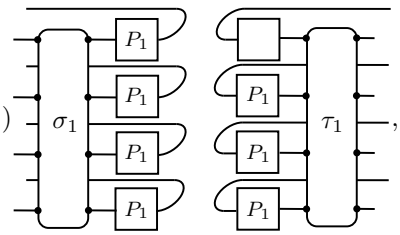
$$\Big(\overline{U_Q^{\otimes n_Q}\otimes U_Q^{*\otimes n_Q}}\Big)_{\mathbb{1}} = d_Q^{-n_Q}$$



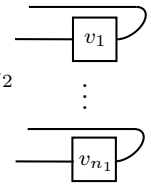
其中 P_Q 是电荷扇区 Q上的投影算符。

现在我们转向 $Q=1$扇区，并再次利用张量图将 $U_1^{\otimes n_1}\otimes U_1^{*\otimes n_1}$写为

$$\overline{U_1^{\otimes n_1}\otimes U_1^{*\otimes n_1}} = \sum_{\sigma_1,\tau_1\in S_{n_1}} \mathrm{Wg}_{d_1}(\sigma_1\tau_1^{-1})$$



其中， P_1 是投影到 $Q=1$ 子空间的投影算符。将其投影到恒等置换子空间，比前几种情况更复杂。与 $Q=0,2$ 扇区不同，后者在两个格点上的电荷构型没有选择余地，而 $Q=1$ 扇区则有选择余地。具体而言，每个副本中两个格点各自允许的电荷态为 $(q,q')=(0,1)$ 和 $(1,0)$。恒等置换子空间（在 $Q=1$扇区中）由以下状态 $|\boldsymbol{v}\rangle$ 张成，其图示定义如下，

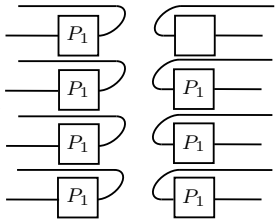
$$|\boldsymbol{v}\rangle \equiv d_1^{-n_1/2}$$ 

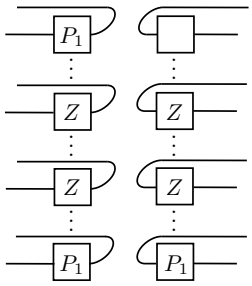
(S26)

其中， $v_i\in\{P_1,Z\}$ 是投影到电荷构型（q、q'）$=(0,1)$和$(1,0)$上的投影算符之和， $P_1=P_{01}+P_{10}$和 $Z=P_{01}-P_{10}$。将 $\left(U_1^{\otimes n_1}\otimes U_1^{*\otimes n_1}\right)_{\mathbb{1}}$ 限制在恒等置换空间后，可用这些状态表示为，

$$\left(\overline{U_1^{\otimes n_1}\otimes U_1^{*\otimes n_1}}\right)_{\mathbb{1}}=\sum_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}}C_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}}\,|\boldsymbol{v}\rangle\langle\boldsymbol{w}|\,. \tag{S27}$$

为了确定系数$C_{\boldsymbol{v}、\boldsymbol{w}}$，我们用 $|\boldsymbol{w}\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{v}|$收缩式 (S25) 中的张量图。不难验证，选择 $\boldsymbol{w}=$（P_1、$\cdots$、P_1）实际上是$U_1^{\otimes n_1}\otimes U_1^{*\otimes n_1}$的本征态，其本征值为 1；任何含有奇数个 Z的状态都会被湮灭，这是由于 Z 的无迹性以及 Z 是一个对合（在张量图中，不可避免地会有奇数个 Z出现在同一个环上）。因此，我们只需考虑至少含有两个 Z的 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$。对于此类状态，只有 $\boldsymbol{v}$ 中仅含有两个 Z 插入项的对角矩阵元$C_{\boldsymbol{v}、\boldsymbol{v}}$ 会在 $\mathcal{O}\left(d^{-4}\right)$处作出贡献；其他所有矩阵元均为 $\mathcal{O}\left(d^{-8}\right)$。具体而言，对于在副本 α 和 β中插入了Z的状态 $\boldsymbol{v}$，我们得到$C_{\boldsymbol{v}、\boldsymbol{v}}\approx d_Q^{-2}$，其中领先阶贡献来自 $\sigma_1=\tau_1=T_{\alpha、\beta}$（副本 α 和 β的对换）。对于 $n=2$，该矩阵元可精确计算为$C_{\boldsymbol{v}、\boldsymbol{v}}=a$（$d$）。对于$\mathcal{O}$（$a$（$d$））， 限制在恒等子空间后可得，

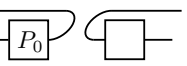
$$\left(\overline{U_1^{\otimes n_1}\otimes U_1^{*\otimes n_1}}\right)_{\mathbb{1}}=d_1^{-n_1}$$ 

$$+a(d)d_1^{-n_1}\sum_{\alpha<\beta}$$ 

$$+\mathcal{O}\left(a(d)^2d_1^{-n_1}\right). \tag{S28}$$

最后倒数第二步是注意到，式 (S19) 中定义的投影算符 P 和 K 具有以下图示形式

$P=d_1^{-1}$ 

，　$K=d_0^{-1}$ 

$+d_1^{-1}$ 

$+d_2^{-1}$ 

. (S29)

最后一步是对所有电荷扇区构型求和（而不是对我们最初考虑的有序构型求和）。这样便可得到式 (S20) 中定义的门 $G_{(n)}$。

$n=2$ 复制随机模型的跃迁概率

对于 $n=2$ 随机模型，一对相邻格点 x 和 y 由 $G_{(2)}$ 更新，其跃迁概率如下所示。对于电荷扇区（Q_1，Q_2）$\neq(1,1)$中的状态，跃迁为

$$\begin{aligned}
&|q_1,q_2\rangle_x\,|q_1,q_2\rangle_y\to|q_1,q_2\rangle_x\,|q_1,q_2\rangle_y\,,\\
&|q_1,q_2\rangle_x\,|q_1,\overline{q}_2\rangle_y\to\frac{1}{2}\left(|q_1,0\rangle_x\,|q_1,1\rangle_y+|q_1,1\rangle_x\,|q_1,0\rangle_y\right),\\
&|q_1,q_2\rangle_x\,|\overline{q}_1,q_2\rangle_y\to\frac{1}{2}\left(|0,q_2\rangle_x\,|1,q_2\rangle_y+|1,q_2\rangle_x\,|0,q_2\rangle_y\right),
\end{aligned} \tag{S30}$$

对于 $q_1,\ q_2 \in \{0,1\}$，且其中 $\overline{q} \equiv 1-q$。对于电荷扇区（$Q_1,\ Q_2$）$=(1,\ 1)$，我们发现跃迁被参数 $a(d)$按以下方式修正，

$$\begin{aligned}
|q,q\rangle_x |\overline{q},\overline{q}\rangle_y &\to \frac{1+a}{4}\left(|0,0\rangle_x |1,1\rangle_y + |1,1\rangle_x |0,0\rangle_y\right) + \frac{1-a}{4}\left(|0,1\rangle_x |1,0\rangle_y + |1,0\rangle_x |0,1\rangle_y\right) \\
|q,\overline{q}\rangle_x |\overline{q},q\rangle_y &\to \frac{1+a}{4}\left(|0,1\rangle_x |1,0\rangle_y + |1,0\rangle_x |0,1\rangle_y\right) + \frac{1-a}{4}\left(|0,0\rangle_x |1,1\rangle_y + |1,1\rangle_x |0,0\rangle_y\right).
\end{aligned} \tag{S31}$$

自旋波分析

n 副本随机模型在转移矩阵 T_n 的作用下演化，该转移矩阵由一层“偶-奇”和一层“奇-偶”双站点门组成 $G_{(n)}$（式 (S20)）。在 n 副本模型中，两个按时间排序的可观测量 $A(t)B(0)$ 的期望值可以视为复制算符空间中可观测量之间的向量重叠，

$$\langle A(t)B(0)\rangle_{n\text{-replica}} \equiv \langle A|\, T_n^t \left|B\rho^{\otimes n}\right\rangle. \tag{S32}$$

T在我们的随机模型中，电路平均方差 $\overline{C_2} \equiv \overline{\langle \Delta Q^2\rangle} - \langle \Delta Q\rangle^2$ 为

$$\overline{C}_2 = \langle \Delta\hat{Q}_R^{(1)2}\rangle_{1\text{-replica}} - \langle \Delta\hat{Q}_R^{(1)}\Delta\hat{Q}_R^{(2)}\rangle_{2\text{-replica}}. \tag{S33}$$

第一项与 SEP 预测完全一致，因为它只是单副本量。还要注意，展开 $\Delta Q_R = Q_R(t) - Q_R(0)$ 后，所有包含一个或更少 $Q_R(t)$ 因子的项，都会与 SEP 预测 C_2^{SEP} 对应表达式中的同类项相消。与 SEP 的差异因此为

$$\begin{aligned}
\Delta C_2 \equiv C_2^{\mathrm{SEP}} - \overline{C}_2 &= \langle \Delta\hat{Q}_R^{(1)}\Delta\hat{Q}_R^{(2)}\rangle_{2\text{-replica}} - \langle \Delta\hat{Q}_R^{(1)}\rangle^2_{1\text{-replica}} \\
&= \left\langle \hat{Q}_R, \hat{Q}_R\right| \left(T_2(t) - T_1^{(1)}(t)T_1^{(2)}(t)\right) |\rho,\rho\rangle .
\end{aligned} \tag{S34}$$

其中 $|a,\ b\rangle = \left|a^{(1)}b^{(2)}\right\rangle$。定义旋转基底 $|\uparrow\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$，$|\downarrow\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$（其中状态 $|0\rangle$ 和$|1\rangle$ 在前一附录中已有介绍）。利用这些状态，我们可以将局域电荷算符 Q_x 写作$|Q_x\rangle = \frac{\sqrt{2}^{2L}}{2}(|\mathsf{GS}_0\rangle - |x\rangle)$，其中 $|\mathsf{GS}_0\rangle = |\uparrow\cdots\uparrow\rangle$ 是自旋“向上”极化态，而 $|x\rangle = |\uparrow\cdots\uparrow\downarrow_x\uparrow\cdots\uparrow\rangle$ 是在格点 x 处有一个自旋翻转的状态。于是，系统左右两半的电荷算符分别为 $|Q_R\rangle = \frac{\sqrt{2}^{2L}}{2}\left(\frac{L}{2}|\mathsf{GS}_0\rangle - |r\rangle\right)$ 和 $|Q_L\rangle = \frac{\sqrt{2}^{2L}}{2}\left(\frac{L}{2}|\mathsf{GS}_0\rangle - |l\rangle\right)$，其中$|r\rangle = \sum_{x\in右}|x\rangle$，而$|l\rangle = \sum_{x\in左}|x\rangle$。根据这些定义，我们写出

$$\Delta C_2 = \frac{2^L}{4}\langle r,r|\left(T_2(t) - T_1^{(1)}(t)T_1^{(2)}(t)\right)|\rho,\rho\rangle . \tag{S35}$$

每个副本中翻转自旋的数目分别由转移矩阵守恒。这使我们能够选取初态中每个副本都恰有一个翻转自旋的分量，

$$\Delta C_2 = \left(\frac{\tanh(\mu/2)}{2}\right)^2 \langle r,r|\left(T_2(t) - T_1^{(1)}(t)T_1^{(2)}(t)\right)|l-r,l-r\rangle . \tag{S36}$$

有效随机模型的每条链都具有全局 $SU(2)$ 不变性；对于每条链分别独立定义的特定填充取值，模型只有一个稳态（定义填充时，每条链上的自旋都可以具有独立取向的 z 轴）。这个稳态是每条链中特定自旋扇区（填充）内所有自旋构型的等权组合。例如，如果某条链的态是铁磁海森堡模型的基态，即 $|\mathsf{GS}_1\rangle = |l\rangle + |r\rangle$，那么这条链就会变得惰性，不会与其他链发生相互作用。因此，对于任意 $|\psi\rangle$，$(T_2(t) - T_{(1)1}(t)T_{(2)1}(t))\ |\mathsf{GS}_1,\ \psi\rangle = (T_{(2)1}(t) - T_{(2)1}(t))\ |\mathsf{GS}_1,\ \psi\rangle = 0$。我们利用这一事实将 $|l-r,\ l-r\rangle$ 替换为 $4\,|l,\ l\rangle$，得到

$$\Delta C_2 = \tanh\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 M(t), \quad M(t) \equiv \langle r,r|\left(T_2(t) - T_1^{(1)}(t)T_1^{(2)}(t)\right)|l,l\rangle . \tag{S37}$$

类似的步骤使我们能够将任意累积量表示为少磁振子态之间的简单重叠。一般而言，第 n 个累积量可表示为状态之间的重叠，其中 n 个磁振子分布在 n-链随机模型的 n 条链上。

有效哈密顿量

通过软化离散时间随机模型中的门 T_n，我们考虑具有有效哈密顿量 $T_n^t \to T_n(t) \equiv e^{-tH_n}$ 的连续时间随机过程。软化这些门的方法是取 $K \to e^{-\varepsilon P}$ 和 $P^{(\alpha)} P^{(\beta)} \to \varepsilon P^{(\alpha)} P^{(\beta)}$，并仅保留 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 项，

$$G_{(n),x,y} \to \mathbb{1} - \varepsilon\left(\sum_{\alpha} P_{x,y}^{(\alpha)} - a(d)\sum_{\alpha<\beta} P_{x,y}^{(\alpha)} P_{x,y}^{(\beta)}\right) \approx e^{-\varepsilon\left(\sum_{\alpha} P_{x,y}^{(\alpha)} - a(d)\sum_{\alpha<\beta} P_{x,y}^{(\alpha)} P_{x,y}^{(\beta)}\right)}. \tag{S38}$$

有效哈密顿量随后给出为

$$H_n = \sum_j \sum_{\alpha} P_{j,j+1}^{(\alpha)} - a(d)\sum_j \sum_{\alpha<\beta} P_{j,j+1}^{(\alpha)} P_{j,j+1}^{(\beta)}. \tag{S39}$$

离散时间过程的稳态是有效哈密顿量 H_n 的基态。通过研究 H_2 的低能性质，我们将确定电荷转移方差C_2的长时间行为。利用有效哈密顿量演化，将 (S37) 写成 ΔC_2，可得

$$\Delta C_2^H = \tanh\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 M(t), \quad M(t) \equiv \langle r, r| \left(e^{-tH_2} - e^{-t(H_1^{(1)}+H_2^{(1)})}\right) |l, l\rangle . \tag{S40}$$

限制在每条链中各有一个翻转自旋的子空间内（我们将其称为 $1+1$ 空间），哈密顿量 H_2 变为

$$H_{2,1+1} = \frac{1}{2}\sum_{x,y} \left[(|x,y\rangle - |x+1,y\rangle)(\langle x,y| - \langle x+1,y|) + (|x,y\rangle - |x,y+1\rangle)(\langle x,y| - \langle x,y+1|)\right] - \sum_x a\,|v_x\rangle\langle v_x|, \tag{S41}$$

其中 $|v\rangle = \frac{1}{2}(|x,\ x\rangle - |x+1,\ x\rangle - |x,\ x+1\rangle + |x+1,\ x+1\rangle)$。只有当每条链中的翻转自旋相距 $|x-y| \le 1$ 时，链间相互作用才会被激活。这意味着，低能相互作用是磁振子（自旋波），它们在各自的链中独立传播，只有在经历接触相互作用时才会相互作用。在质心系中，这种相互作用表现为原点处的散射势。因此，哈密顿量的本征态是散射态；在热力学极限下，它们的能量与无散射杂质模型中的能量相同。容易验证，具有动量 $(k_1,\ k_2)$、$|k_1,\ k_2\rangle - |k_2,\ k_1\rangle$ 的反对称散射态是 $H_{2,\ 1+1}$ 的本征态，其本征值为 $E_2(k_1,\ k_2) = 2 - \cos(k_1) - \cos(k_2) = E_1(k_1) + E_1(k_2)$。反对称散射态也是不含链间相互作用项的哈密顿量的本征态，因此，式 (S40) 中来自这些状态的贡献相互抵消。将对称散射本征态分别标记为 $|k_1,\ k_2\rangle'_+$ 和 $|k_1,\ k_2\rangle_+$，其中前者对应含散射杂质的哈密顿量，后者对应不含散射杂质的哈密顿量，我们写成

$$M(t) = \frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2\in L}\sum_{y_1,y_2\in L}\sum_{k_1,k_2} e^{-tE(k_1,k_2)}\left(\psi'_+(k_1,k_2;y_1,y_2)\psi'_+(k_1,k_2;x_1,x_2)^* + \psi_+(k_1,k_2;y_1,y_2)\psi_+(k_1,k_2;x_1,x_2)^*\right), \tag{S42}$$

其中，因子 $1/2$ 用于处理动量重复计数，而 $\psi'_+(k_1,\ k_2;x_1,\ x_2) = \langle x_1,\ x_2|k_1,\ k_2\rangle_+$ 和$\psi_+(k_1,\ k_2;x_1,\ x_2) = \langle x_1,\ x_2|k_1,\ k_2\rangle_+$ 具有如下形式

$$\psi'_+(k_1,k_2;x_1,x_2) = \frac{1}{L}e^{ip(x_1+x_2)}\phi'_+(p,k;x_2-x_1), \quad \phi'_+(p,k;r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ik|r|} + e^{i\theta(p,k)-ik|r|} + \alpha(p,k)\delta(r)\right), \tag{S43}$$

其中 $p = k_1 + k_2$ 和 $k = k_2 - k_1$。在不存在散射势时，散射相移 $\theta(p,\ k)$ 和原点处的函数 $\alpha(p,\ k)$ 均为零。为确定 θ 和 α，我们利用 $H_{2,\ 1+1}$ 在 p中为对角矩阵这一事实。定义实空间差分坐标 $r = x_2 - x_1$后，总动量 p 扇区的哈密顿量为

$$H_p = \sum_r \left(2\,|r\rangle\langle r| - h\,|r\rangle\langle r+1| - h\,|r+1\rangle\langle r|\right) - \frac{a}{4}\left(2h\,|0\rangle - |1\rangle - |-1\rangle\right)\left(2h\,\langle 0| - \langle 1| - \langle -1|\right), \tag{S44}$$

其中 $h(p) \equiv \cos(p)$。使用试探形式 $|k\rangle'_+ = \frac{1}{L}\sum_r \phi'_+(p,\ k;r)\,|r\rangle$，其中 $\phi'_+(p,\ k;r)$ 由公式（S43）给出，我们发现，在小动量下，散射相移和 α 为

$$e^{i\theta} \approx \frac{(2+a)k - ia(k^2-p^2)^2/4}{(2+a)k + ia(k^2-p^2)^2/4}, \quad \mathrm{Re}\{\alpha\} \approx -\frac{a}{2}\left(p^2-k^2\right), \quad \mathrm{Im}\{\alpha\} \sim ik. \tag{S45}$$

将求和转换为积分，然后利用 $e^{-tE(k_1,k_2)}$ 会抑制所有大动量贡献这一事实，在小动量下展开， $E(k_1,\ k_2) = 2(1 - \cos(p)\cos(k)) \approx p^2 + k^2$，并将动量积分的范围扩展至 $(-\infty,\ \infty)$，我们得到

$$M(t) = \frac{1}{16\pi^2}\int_L d^2x \int_R d^2y \int dk\ dp\ e^{-t(p^2+k^2)} e^{ipw} \left(\phi'_+(p,k;\Delta_y)\phi'_+(p,k;\Delta_x)^* + \phi_+(p,k;\Delta_y)\phi_+(p,k;\Delta_x)^*\right), \quad \text{(S46)}$$

其中 $\Delta_x = x_2 - x_1$，同理有 Δ_y，且 $w = y_1 + y_2 - x_1 - x_2$。展开 ϕ'_+ 和 ϕ_+ 可得 $M(t) = M_1(t) + M_2(t) + M_3(t)$，其中每一项贡献为

$$M_i(t) = \frac{1}{32\pi^2}\int_L d^2x \int_R d^2y \int dk\ dp\ e^{-t(p^2+k^2)} e^{ipw} g_1(p,k,\Delta_x,\Delta_y), \quad \text{(S47)}$$

且其中的 g_i 为

$$g_1(p,k,\Delta_x,\Delta_y) = e^{ik(|\Delta_x|+|\Delta_y|)}(e^{-i\theta} - 1) + c.c, \quad \text{(S48)}$$

$$g_2(p,k,\Delta_x,\Delta_y) = \alpha^*\left(e^{ik|\Delta_x|} + e^{ik|\Delta_y|}\right)\delta(\Delta_x) + \alpha\left(e^{-ik|\Delta_x|} + e^{-ik|\Delta_y|}\right)\delta(\Delta_y), \quad \text{(S49)}$$

$$g_3(p,k,\Delta_x,\Delta_y) = |\alpha|^2\delta(\Delta_x)\delta(\Delta_y). \quad \text{(S50)}$$

接下来，我们将动量重标度为 $p \to p' = p\sqrt{t}$ 和 $k \to k' = k\sqrt{t}$，并将位置重标度为 $x_i \to x'_i = x_i/\sqrt{t}$ 和 $y_i \to x'_i = y_i/\sqrt{t}$。第三项贡献 $M_3(t)$ 是次领先阶，为 $\mathcal{O}(1/t)$；而贡献项 $M_1(t)$ 和 $M_2(t)$ 在 $1/t$ 的领先阶为

$$M_1(t) = -\frac{1}{32\pi^2\sqrt{t}}\int_L d^2x \int_R d^2y \int dk \int dp\ e^{-p^2-k^2-ipw}\frac{a(k^2-p^2)^2}{(2+a)k}\sin(k(|\Delta_x| + |\Delta_y|)), \quad \text{(S51)}$$

$$M_2(t) = \frac{1}{32\pi^2\sqrt{t}}\int_L d^2x \int_R d^2y \int dk \int dp\ e^{-p^2-k^2-ipw} 4\,\mathrm{Re}\{\alpha\}\cos(k|\Delta_x|)\delta(\Delta_y). \quad \text{(S52)}$$

舍弃 $\mathcal{O}(a^2)$ 项贡献后，这些积分中的每一个都等于 $a(d)/\left[16\sqrt{\pi t}\right]$。综合起来，累积量差 ΔC_2^H为

$$\Delta C_2^H(\mu,t) \approx \frac{a(d)\tanh(\mu/2)^2}{16\sqrt{\pi t}}. \quad \text{(S53)}$$

我们对这一结果进行了数值检验，发现其与理论预测高度吻合。

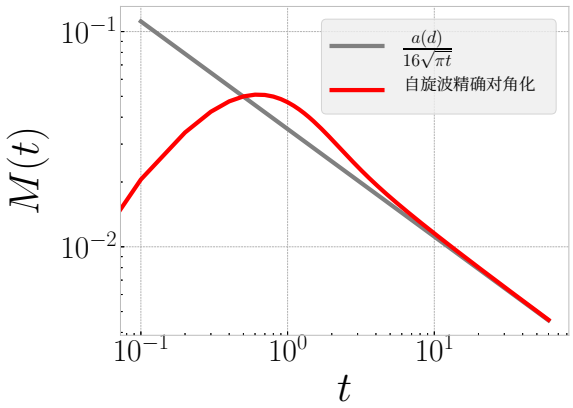


图 S2. $M(t) = \Delta C_2(t)/(a(d)\tanh(\mu)^2)$ 使用自旋波精确对角化数据进行数值计算（红色），其晚期行为由公式 (S53) 给出（灰色）。

在线性响应区间（$\mu \ll 1$）中，我们可以利用这一结果，得出 SEP 与有效随机模型在三阶累积量 $\Delta C_3^H(\mu,\ t)$ 上差异的理论预测，

$$\Delta C_3^H(\mu,t) \approx \frac{3\mu M(t)}{4} \approx \frac{3a(d)\mu}{64\sqrt{\pi t}}. \quad \text{(S54)}$$

从头算矩阵乘积态数值计算

我们使用矩阵乘积态技术，直接计算随机 $U(1)$量子电路各个实例的全计数统计，以验证有效统计模型的预测。为简便起见，我们重点考虑 $q = 2$ （量子比特）的情形。回顾一下，幺正演化由一系列呈砖墙式排列的 Haar 随机二量子比特守电荷门生成（在电荷基中表示 $|11\rangle$， $|10\rangle$， $|01\rangle$， $|00\rangle$）

$$U_{j,j+1}^{(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha_{j,t}+\psi_{j,t})}\sqrt{1-\xi_{j,t}} & e^{i(\alpha_{j,t}+\chi_{j,t})}\sqrt{\xi_{j,t}} & 0 \\ 0 & -e^{i(\alpha_{j,t}-\chi_{j,t})}\sqrt{\xi_{j,t}} & e^{i(\alpha_{j,t}-\psi_{j,t})}\sqrt{1-\xi_{j,t}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\rho_{j,t}} \end{pmatrix}, \tag{S55}$$

其中，变量 $\rho_{j,t}, \psi_{j,t}, \chi_{j,t}, \alpha_{j,t} \sim U(0, 2\pi)$ 和 $\xi_{j,t} \sim U(0, 1)$ 在空间和时间上都是随机的。为了计算全计数统计，我们引入一个“计数场” [50, 54–58, 72, 95, 96], ，并通过在中心键上作用的门的非对角元素中添加相位因子 $e^{\pm i\lambda/2}$ 来修改系统中的这些门，以追踪穿过该键的电荷转移：

$$U_{0,1}^{(t)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha_{0,t}+\psi_{0,t})}\sqrt{1-\xi_{0,t}} & e^{i(\alpha_{0,t}+\chi_{0,t})}\sqrt{\xi_{0,t}}e^{i\lambda/2} & 0 \\ 0 & -e^{i(\alpha_{0,t}-\chi_{0,t})}\sqrt{\xi_{0,t}}e^{-i\lambda/2} & e^{i(\alpha_{0,t}-\psi_{0,t})}\sqrt{1-\xi_{0,t}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\rho_{0,t}} \end{pmatrix}. \tag{S56}$$

将实现这一修改后电路、演化至时间 t的全局酉算符记为 $U(t, \lambda)$，则电荷转移的矩生成函数可由以下重叠计算得到

$$\langle e^{i\lambda Q}\rangle = \mathrm{Tr}\left(U^\dagger(t, -\lambda)U(t, \lambda)\rho_0\right), \tag{S57}$$

其中 ρ_0 是初始密度矩阵。（在平衡态和半填充条件下，我们有 $\rho_0 = \mathbb{1}/2^L$。）我们使用标准的矩阵乘积态技术，并采用时间演化块解耦算法计算时间演化，从而求得式（S57）。我们取键维数 $\chi = 2000$ ，计算各个电路实现的累积量生成函数，如图1所示；结果发现，围绕 SEP 累积量生成函数的电路间涨落会随时间推移而减小。这些偏差由量 $|\chi(\lambda, t) - \chi_{\mathrm{SEP}}(\lambda, t)|^2/t$描述，其中 χ_{SEP} 是渐近 SEP 累积量生成函数（式（10））。我们对计数场积分，得到衡量电路间涨落的单一指标。下方图 S3 展示了八个独立电路以及对 $n = 35$ 个电路实现取平均的结果，$\int d\lambda|\chi(\lambda, t) - \chi_{\mathrm{SEP}}(\lambda, t)|^2/t$。我们发现$t^{-2}$呈幂律衰减，这对应于累积量生成函数 $\overline{\chi(\lambda, t)}/\sqrt{t} \sim \chi_{\mathrm{SEP}}(\lambda, t)/\sqrt{t} + \mathcal{O}(1/t)$。

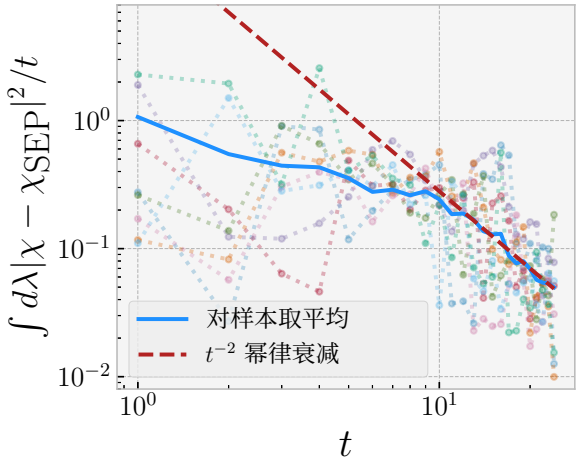


图 S3. 使用 TEBD 数值计算得到的单个电路（多色）以及对 35 个电路实现取平均（蓝色）的累积量生成函数的电路间涨落。

统计力学模型的补充数值数据

在本附录中，我们给出正文未展示的初始偏置对应的累积量数据，$\mu = 2, \infty$。我们采用时间演化块解耦算法（TEBD），取键维数 $\chi = 1000$ 和 $\chi = 1500$，应用 $n = 2$ 统计力学传递矩阵，发现其 $t^{-1/2}$ 趋近于 SEP 值（只要数据仍保持收敛）。我们还通过有效随机模型验证了这一结果，该模型与统计力学数据高度吻合。我们还使用随机模型计算了三阶累积量，同样发现其相对于 SEP 存在$t^{-1/2}$ 偏差。统计力学模型和随机模型的数据见图 S4。

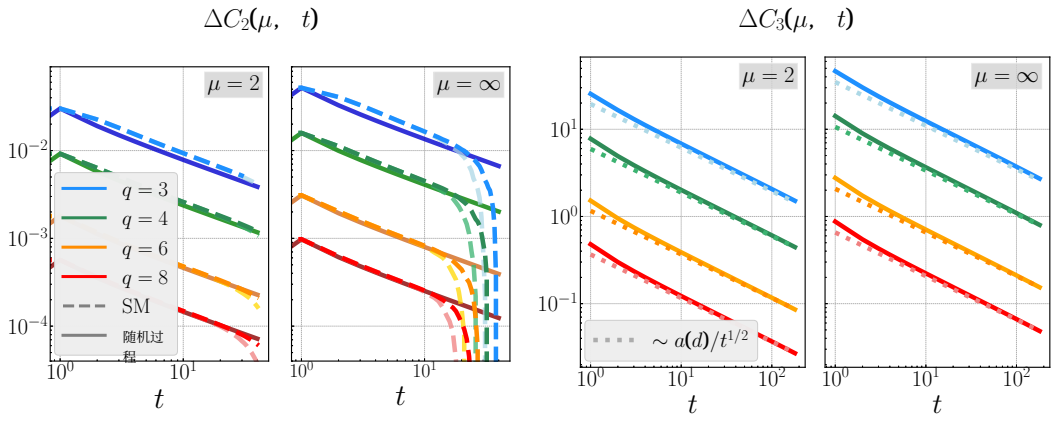


图 S4. 电路平均累积量 C_n(t) 向其对称排斥过程值的趋近情况：(a) $\Delta C_2(t)$ 的 $\mu = 2,\ \infty$ 数据，采用统计力学模型（虚线）和有效随机模型（粗线）；(b) $\Delta C_3(t)$ 的 $\mu = 2,\ \infty$ 数据，采用有效随机模型。