arXiv:2302.01364v1 [math.OC] 2 Feb 2023

任意阶脉冲古德温振荡器中的周期 ⋆

Anton V. Proskurnikov [a], Håkan Runvik [b], Alexander Medvedev [b]

[a] *De*都灵理工大学电子与电信系，*10129*，意大利

[b]信息技术，乌普萨拉大学，*SE-752 37*，瑞典

摘要

本文研究连续部分为任意阶 m 的脉冲古德温振荡器（IGO）中周期解（即周期）的存在性。连续部分为三阶的原始 IGO 是一种混杂模型，描述了由三种物质组成的化学或生化系统，这些物质以其浓度表示，并按级联方式排列。链中的第一种物质通过脉冲反馈引入，其中脉冲频率和权重均由连续部分的测量输出调制。研究表明，在 IGO 满足标准假设的条件下，对于任意 $m \geq 1$ 的模型，也存在一个正周期解，且其最小周期内脉冲调制反馈触发一次。此外，本文证明，对于具有 $m \leq 10$ 的 IGO，该 1-周期具有唯一性；而对于 $m > 10$，在对频率调制函数施加温和假设的条件下，仍可保证唯一性。

关键词： 不连续控制，混杂与切换系统建模

1 引言

分析同时以快慢时间尺度（慢快系统）运行的系统动力学，是一个经典问题，并由此发展出了奇异摄动动力系统理论 [25]。快速动力学，即在较短时间内发生的快速演化，可以用有限或无限脉冲序列的作用来近似，从而导致（状态向量）跃变 [20]。随后，脉冲作用被建模为反馈过程或独立的离散过程，即马尔可夫链的一种实现。在前一种情况下，研究的是脉冲调制反馈 [11] 或事件触发控制 [15],；后一种情况则导向具有马尔可夫切换的混杂控制。

脉冲微分方程理论 [21]构成了脉冲系统分析与设计的数学基础。脉冲模型自然地出现在生物医学、机械、生态和环境应用中；凡是运用数学建模的科学领域，几乎都能看到它们的身影。捕食者—猎物模型（例如应用于害虫防治的模型）会利用脉冲信号来表示人类行为 [30]。由于状态变量和控制信号受到硬约束，非光滑力学中会出现脉冲（冲击）。文献 [24]列举了许多具有实际重要性的冲击机械系统实例，包括齿轮箱、铁路转向架和振动台。周期性药物治疗是脉冲动力系统的另一重要应用领域，其建模通常旨在优化治疗方案 [3]。脉冲反映了药物的给药方式，即通过注射或口服片剂制剂。若治疗需要模拟某种生理行为，药物也会以脉动模式给药。脉动式人工胰腺便是这一理念的典型例子。进餐期间，胰腺进行的生理调节会产生一系列胰岛素脉冲，其频率和幅度受血糖水平调节[1]。因此，人们对人工胰腺的脉冲控制越来越感兴趣 [18]。

脉冲系统具有非光滑动力学，因此可能呈现复杂的非线性行为。在脉冲调制反馈作用下，线性时不变（LTI）系统中可以观察到收敛于平衡点或振荡吸引子的解。后者可能对应持续的周期解或非周期解（混沌、准周期）。脉冲古德温振荡器（IGO） [22], [5] 是一种混合系统，它推广了

⋆ 本文未曾在其他地方发表或投稿。通讯作者：A.V. Proskurnikov。电子邮箱： anton.p.1982@ieee.org（Anton V. Proskurnikov）、hakan.runvik@it.uu.se（HåkanRunvik）、alexander.medvedev@it.uu.se（Alexander Medvedev）。

经典的连续古德温振荡器 [13]，其做法是用脉冲调制反馈取代原有的连续静态非线性反馈。IGO不存在平衡点，并且既存在高周期解，也存在混沌解和准周期解 [31]。

IGO 的初衷是将实验观察到的脉冲式内分泌调节原理 [26] 纳入一种广泛使用的生化振荡数学模型中。然而，IGO 也可以视为一种通用构造，用以说明在正（连续）线性时不变系统中，如何通过正值反馈实现持续振荡，而不受系统性质的影响。从这一角度来看，连续部分的动力学应尽可能不受限制。然而，先前有关 IGO 的研究仅涉及一阶 [32] 和三阶连续线性时不变动力学。对于后一种情况，研究还考虑了加入点时滞 [4]或分布时滞 [8] 后的连续动力学。

本文将 IGO 结构推广到阶数高于三阶的连续线性时不变模块。从应用角度来看，线性时不变模型的阶数是设计者可利用的一个自由度，用于简洁地描述模型的基本性质。因此，将模型阶数设为固定常数并不切实际。此外，当模型变量对应于物理或化学性质时，模型阶数由需要刻画其随时间演变的变量数量决定。显然，具体系统中动态相互作用的量的数量可能任意多。

持续的节律行为在自然界中无处不在[12]。将此类行为恰当地建模为动力系统的受扰周期解，还是混沌解，尚有争议。在 IGO 中，导致混沌的主要分岔机制是倍周期[31]。因此，周期解的存在性是 IGO 中的核心问题，因为它定义了 IGO 的基本功能。因此，本文关注最简单的一类周期解：在最短周期内，脉冲调制反馈中仅有一个脉冲，即一个 1-周期。

本文提出将 IGO 推广到连续部分阶数任意的模型 m，以下称为 IGO(m)。文献 [5] 已证明 IGO(3) 中 1-周期的存在性与唯一性。此外，文献 [32] 也证明了 IGO(1) 具有相同的性质。本文将这一结果推广到 IGO(m)，同时讨论周期的存在性与唯一性，这构成了本研究的主要贡献。

首先，我们证明 IGO(m) 至少存在一个 1-周期（定理1）。此外，这一性质适用于一大类具有赫尔维茨稳定且连续时间部分为正的脉冲系统（注 8）。

其次，我们证明，对于维数为 $m \leq 10$ 的情形，1-周期是唯一的（定理 2），从而推广了 [5] 中的定理1。正如第 4 节所述，这一推导并非轻而易举。它依赖于差商理论和 Opitz公式，后者可用于计算具有双对角结构的矩阵的解析函数。

第三，我们考察带有 $m \geq 11$ 的 IGO(m) 中 1-周期唯一性问题。令人意外的是，在这种情况下，唯一性可能不成立；第6节给出了一个此类例子。不过，若频率调制函数的导数不取异常大的值，则可以保证唯一性（定理 3）。

本文其余部分安排如下。简要介绍符号约定后，第 2 节引入 IGO(m) 模型。第 3 节阐述本文要解决的问题，即 IGO(m) 中 1-周期的存在性与唯一性。第 4 节给出这些问题的解，并在第 5 节另行给出证明。第6节展示一个具有三个不同 1-周期的 IGO(11) 示例。附录包含关于差商和 Opitz公式的必要信息（附录 A），以及一个技术引理的证明（附录 B）。

记号

符号 $\triangleq$以下表示“定义为”。

按照惯例，$\mathbb{R}$和 $\mathbb{R}_+$ 分别表示全体实数和非负实数的集合。维数为 m 的实向量空间记为 $\mathbb{R}^m$。我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示非负整数集合 $\{0, 1, \ldots\}$。

给定标量变量 $\xi \in \mathbb{R}$的函数 $f(\xi)$，我们用 $f'(\xi_0)$表示其在 $\xi = \xi_0$处的导数；$f_{(k)}(\xi)$表示 k阶导数。对于时间函数 $f(t)$，导数也可等价地表示为 $\dot{f}(t)$。对于映射 $Q: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$，符号 $Q'(x)$表示在 $x \in \mathbb{R}^m$处取值的雅可比矩阵。

2 脉冲 Goodwin 振荡器

考虑一个连续时间自治系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad y(t) = Cx(t) \tag{1}$$

其状态为 $x \in \mathbb{R}^m$，输出为 $y(t) \in \mathbb{R}$，状态空间矩阵的结构如下

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & -a_2 & 0 & \vdots \\ 0 & g_2 & -a_3 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & g_{m-1} & -a_m \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^\top. \quad (2)$$

假设 $a_i, i = 1, \dots, m$ 和 $g_i, i = 1, \dots, m-1$ 均为正数，则矩阵 A 既是 Hurwitz 矩阵，也是梅茨勒矩阵。

引入由以下递推关系生成的时刻无限序列 $t_n > 0, n \in \mathbb{N}_0$

$$t_{n+1} = t_n + T_n, \quad T_n = \Phi(y(t_n)). \quad (3)$$

系统 (1) 的状态向量在时刻 t_n 发生跃变，其规律为

$$x(t_n^+) = x(t_n^-) + \lambda_n B,\ \lambda_n = F(y(t_n)), \quad B^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

这里，$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是已知函数。在脉冲控制系统中 [11], ，它们通常分别称为频率调制函数和幅值调制函数。将跃变视为事件，脉冲反馈 (3)、(4) 可视为自触发 [15]控制器，因为系统在时刻 t_n的输出唯一确定了后续跃变时刻 t_{n+1}。

当 $m = 3$时，模型 (1)-(4) 称为脉冲古德温振荡器 (IGO) [6]。下文将讨论连续部分 (1) 的任意阶 mIGO 的一般化，即 IGO(m)。

请注意，为保证混合系统（1）–（4）存在唯一解，Φ, F通常不必连续。不过，为证明周期解的存在性，我们将假设它们连续。按照 [5]，我们还假设

$$0 < \Phi_1 \le \Phi(y) \le \Phi_2,\ 0 < F_1 \le F(y) \le F_2\ \forall y \ge 0, \quad (5)$$

其中，Φ_1、Φ_2、F_1、F_2 为正常数。T 蕴含 IGO 的若干重要性质，这些性质可采用与 $m = 3$ [5,31] 情形类似的方法证明。具体而言，对于任意阶 m，IGO(m) 也是一个正系统，即对于正初始条件 $\forall i : x_i(0) > 0$，解在 $\forall i$ 上保持为正：$x_i(t) > 0$。此外，一个解 $x(t)$ $t \in [0, \infty)$ 满足如下最终界

$$V_i \le \liminf_{t\to\infty} x_i(t) \le \limsup_{t\to\infty} x_i(t) \le H_i, \quad (6)$$

$$V_1 = \frac{F_1}{e^{a_1\Phi_2} - 1},\ H_1 = \frac{F_2}{1 - e^{-a_1\Phi_1}}, \quad V_i = \frac{g_{i-1}}{a_i} V_{i-1},\ H_i = \frac{g_{i-1}}{a_i} H_{i-1},\ \forall i = 2, \dots, m. \quad (7)$$

本文关注满足以下条件的周期解：$x(t + T) = x(t)$，其中 $T > 0$。对于这类解，可以省略式（6）中的 lim inf 和 lim sup。

受其在内分泌反馈调节中的应用启发，[5]对 IGO 的频率和幅值调制函数施加了额外的单调性限制。具体而言，假设 Φ 是非递减的，且 F 是非递增的。这些假设与实验观察到的睾酮（Te）调节中脉冲调制反馈回路的行为一致 [19,29]。Te 浓度降低会同时提高促性腺激素释放激素脉冲的频率和幅值，进而刺激 Te 的生成。事实上，正如本文将要证明的，周期解的存在性并不需要单调性假设。此外，我们将证明一种称为 1-周期的特定周期解总是存在。与此同时，在一定条件下，单调性有助于证明 1-周期解的唯一性。

3 问题表述：1-周期

文献 [5] 确立了 IGO(3) 的一项基本性质：它总是具有唯一的周期解，该解在（最小）周期 $T > 0$ 内仅有一次跃变，即一个*1*-周期。于是，(3) 变为

$$t_{n+1} = t_n + T, \quad \Phi(y(t_n)) = T, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

采用记号 $X_n = x(t_n^-)$，IGO(m) 的返回映射 $X_{n+1} = Q(X_n)$（其中 $n = 0,\ 1,\ \dots$）由 [5,7] 给出

$$Q(x) = e^{\Phi(Cx)A}(x + F(Cx)B), \quad x \in \mathbb{R}^m_+. \quad (8)$$

如 [5,7], 所示，一个 1-周期对应于映射 Q 的一个不动点。对于这样的点 $x_* = Q(x_*)$，相应的 1-周期可求得为

$$x(t) = e^{(t-t_n)A}(x_* + F(Cx_*)B), \quad t \in (t_n, t_{n+1}), \quad X_n = x_*,\ x(t_n^+) = x_* + F(Cx_*)B, \quad t_{n+1} = nT, \quad T = \Phi(Cx_*), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (9)$$

鉴于 IGO(m) 的正性，可行的 1-周期对应于不动点 $x_* \in \mathbb{R}^m_+$；对于这样的解，周期解 (9) 将保持在 $\mathbb{R}^m_+$ 中。

本文探讨可行（正）不动点的存在性与唯一性问题：

问题 A. *IGO(m)*是否总是存在可行的 *1*-周期？等价地，对应映射 Q是否有不动点 $x_* = Q(x_*) \in \mathbb{R}^m_+$?

下文的定理1针对任意的 m，对问题 A 给出了肯定的回答。这种存在性实际上对更一般的一类脉冲系统也成立（注 8）。

于是自然会产生一个问题：IGO(m)可能有多少个不同的 1-周期?

问题 B. *IGO(m)*的可行 *1*-周期（等价地， Q的 $x_* \in \mathbb{R}^m_+$ 不动点）是否唯一?

文献 [5,中已证明的 IGO(3) 的 1-周期唯一性，在本文定理 2 中推广到了 $m \leq 10$。然而，对于 $m = 11$，可能存在参数值 a_i， $g_i > 0$ 以及函数 F， Φ，使得相应的 IGO 有三个不同的 1-周期。多个 1-周期虽然极为罕见，但确实存在。正如定理 2 和定理 3 所示，通过限制 Φ' 或使脉冲足够稀疏，即对 Φ_1 设置下界，总能确保唯一性。

4 主要结果

本节陈述本文的主要结果，为问题 A 和问题 B 提供完整解，并将其表述为定理1至定理 3。相关证明分别汇总于第 5 节。

Problem A: Existence of 1-cycles in IGO(m)

所谓的"周期方程" [5] 刻画了（8）中引入的 Q的可行不动点

$$y = R(y) \triangleq F(y)C(e^{-\Phi(y)A} - I)^{-1}B, \quad y \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

由于根据（5）， Φ（y） > 0 对于 $y \geq 0$ 成立，且 A 是 Hurwitz 的，因此（10）中的逆矩阵是良定义的。

注意，对于 $x \in \mathbb{R}^m_+$，方程 Q（x） $= x$ 可以等价地写成

$$x = F(Cx)(e^{-\Phi(Cx)A} - I)^{-1}B, \tag{11}$$

因此， $y = Cx$ 满足（10）。反过来，如果 y 是方程（10）的一个根，那么 $x = F$（y） $(e^{-\Phi(y)A} - I)^{-1}B$满足（11），从而推出 Q（x） $= x_\circ$ 然而，这样的向量 x 为正并非显而易见，而定理1下面的一条结论保证了这一点。

定理1 对于参数 a_1、…、 $a_m > 0$、 g_1、…、 $g_{m-1} > 0$ 以及满足(5)的连续 函数 Φ、 F的所有取值，以下陈述均成立：

(1) 定义于(10) 中的函数 $R(\cdot)$ 在 $[0, \infty)$上是一致严格为正且有界的；*(2)* 方程(10) 至少有一个解；其所有解对于 $y > 0$ 均严格为正；*(3)* 对于(10)的每个解，向量 $x = F(y)(e^{-\Phi(y)A} - I)^{-1}B$ 是返回映射(8)的正不动点；

因此，*IGO(m)* 始终至少有一个正的 *1*-周期。

值得注意的是，定理1 并未对 F 和 Φ 施加任何单调性限制。正如后文所示（注 8），该定理可推广到一大类具有正且稳定的连续时间部分 (1) 的脉冲系统；这些系统的矩阵 A， B， C在结构上可能与 (2) 不同。

问题 *B*：*IGO(m)* 中 *1*-周期的唯一性

文献 [5, 中的定理 1]给出了一个优雅的结果：在 $m = 3$ 的情况下，方程 (10) 的解是唯一的，因为函数 R 在 $[0, \infty)$ 上非增。这一单调性性质在 [5] 中通过对 $m = 3$ 运用 Jensen 不等式得以证明；如下文所示，该性质对 $1 \leq m \leq 10$ 仍然成立。

定理 2 对于所有 $1 \leq m \leq 10$、正参数值 a_i、 $g_i > 0$，以及满足 (5) 的连续非增函数 F 和非减函数 Φ ，在 (10) 中定义的函数 R 在 $[0, \infty)$ 上非增。特别地，(10) 有唯一的正解，相应的 *IGO(m)* 也有唯一的 *1*-周期。

若将条件 $m \leq 10$ 替换为不等式，这些结论仍然成立

$$\frac{m-1}{\min_i a_i} \leq \Phi_1. \tag{12}$$

在第 5 节中，我们将证明，对于 $m = 11$ ，一般无法保证 1-周期的唯一性，并且可能存在至少有三个不同 1-周期的 IGO(11)。第 6 节中的数值示例要求函数 Φ 在某些点具有非常大的导数（这也违反了 (12)）。通过限制 Φ'过大，可以保证阶为 $m \geq 11$ 时的唯一性，如下一个定理所述。

回顾黎曼 ζ-函数

$$\zeta(s) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}, \quad s > 1. \tag{13}$$

定理 3 考虑一个 *IGO(m)*， $m \geq 11$，其调制函数 Φ、 F 分别为非递增函数和非递减函数。另假设 Φ、 F绝对连续，并且对每个 $y > 0$，均有

$$\Phi'(y) \leq \frac{C_m}{g_1 \dots g_{m-1} F(0)}, \; C_m \triangleq \frac{(2\pi)^m}{2(m-1)\zeta(m)}. \tag{14}$$

那么，函数 $y - R(y)$ 在 $\mathbb{R}_+$上严格递增，方程 (10) 只有一个解，因此 *IGO(m)* 有唯一的 *1*-周期。

序列 $\zeta(m)$ $m = 1, 2, \ldots$递减，且$\zeta(m) \geq 1$。因此，对于所有 $m \geq 11$，$\zeta(m) \leq \zeta(11) \approx 1.005$，所以 C_m 会随着 $m \to \infty$呈指数增长。使用 Matlab 进行数值计算可得 $C_{11} \approx 3.01 \cdot 10^7$、$C_{12} \approx 1.72 \cdot 10^8$、$C_{13} \approx 9.91 \cdot 10^8$。因此，当 m 较大时，条件 (14) 的限制并不严格，但仍无法完全取消（参见第6节中的例子）。

讨论

值得注意的是，定理1–定理 3 均不要求非线性函数 F, Φ 处处可微。对于定理 3，我们只需要绝对连续性，这可以确保在几乎每个点 $y \in \mathbb{R}_+$) 处都存在 $\Phi'(y)$ $F'(y)$。如果 F 和 Φ 在 (10) 中不动点 $y_* = R(y_*)$ 附近连续可微，则可以考察相应 1-周期的（局部指数）轨道稳定性（参见 [7], , 其中给出了相关稳定性定义）。具体而言，由映射 Q 的不动点定义的 1-周期（如定理 1所述）轨道稳定，当且仅当雅可比矩阵 $Q'(x_*)$ 是舒尔稳定的 [7, 定理 3]。显然，$Q'(x_*)$ 完全由连续部分 (2) 的参数以及数值 $F(y_*)$ $\Phi(y_*)$ $F'(y_*)$ $\Phi'(y_*)$ 确定。

需要注意的是， [5], 中证明定理1的方法虽然对 $m = 3$ 得出了定理1和定理 2的结果，但由于以下几个原因，并不适用于一般的IGO(*m*)。首先， [5] 中的存在性和唯一性都是由函数 R的单调性推导出来的；然而，如上所证，若无额外假设，该单调性对 $m > 10$ 并不成立，但定理1（1-周期的存在性）仍然有效。其次，证明这一单调性的方法，是基于 $m = 3$ 情形下 $R(y)$及其导数 $R'(y)$的解析表示；该表示是在 [5, 定理 1] 的证明中通过直接计算 [1] 得到的。在本文所考察的一般情形中，这两个函数是利用Opitz公式和差商方法（附录 A）计算的，而 [5]并未采用这些工具。第三，导数 $R'(y)$的闭式表示使得我们能够借助Jenssen不等式推导其正性。据我们所知，这一技巧无法应用于 $m > 3$。因此，本文虽然沿用与 [5], 相同的推理思路，却通过运用另一套数学工具，大幅推广了后者的结果。

[1] 事实上， [5] 采用了一项建模假设，即 a_1, a_2, a_3 两两不同；本文不再采用这一假设。

5 证明与辅助结果

本节概述第 4 节中各定理的证明，并确立一些必要的辅助技术性结论，这些结论或许也适用于其他场合。

5.1 引理与定理*1*的证明

回顾一下，如果矩阵的所有元素（分别地，所有非对角元素）均为非负 ，则称该矩阵为非负矩阵（分别地，梅茨勒矩阵）。因此，如果 M 是梅茨勒矩阵，那么当 $n \in \mathbb{R}$足够大时， $M + nI$ 是非负矩阵。

按照 [17], , 我们引入非负方阵 $B = (b_{ij})_{i,\ j \in I}$的图 $\Gamma(B)$。在该图中，节点与指标集 I 中的元素一一对应；当且仅当 $b_{ij} > 0$时，存在一条有向弧$(i,\ j)$。正对角元素表示自环弧。对于每个 $k = 1, 2, \ldots$，矩阵 B^k有一个正元素$(B^k)_{ij} > 0$ ，当且仅当 $\Gamma(B)$包含一条长度为 k 、连接 i 和 j 的有向游走（该游走可以包含自环弧，也可以多次经过某些顶点）。我们可以将图的定义形式化地推广到梅茨勒方阵：给定这样的矩阵 $A = (a_{ij})_{i,\ j \in I}$，当且仅当 $a_{ij} > 0$时，我们连接两个节点 i, $j \in I$。

定理1的证明基于以下正性结果。

引理4 对于任意 *Metzler* 矩阵和赫尔维茨矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 矩阵值函数 $\Theta(\xi) = (e^{-\xi A} - I)^{-1}$存在，并且对所有 $\xi > 0$ 均为非负，且对角元素严格为正 $\Theta_{ii}(\xi) > 0$ $i = 1, \ldots, n$。每个非对角元素 $\Theta_{ij}(\xi)$ $i \neq j$ 为正，当且仅当图 $\Gamma[A]$ 中存在一条从 i 到 j的路径；否则，$\Theta_{ij}(\xi) \equiv 0$。

证明。 首先注意，矩阵指数

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$$

非负矩阵 B 的也是非负矩阵。此外，$(e^B)_{ij} > 0$ 当且仅当 $i = j$ 或从 i 到 j 的有向游走存在于 $\Gamma(B)$ 中。

对于任意的 $\xi \in \mathbb{R}$， A 和 $A + \xi I$的图可能仅在是否存在自环弧方面有所不同，而自环弧不会影响连通性。因此，当且仅当两个节点 i 和 $j \neq i$在 $\Gamma(A)$中由一条有向游走连接时，它们也在 $\Gamma(A+\xi I)$中由这样的游走连接。取足够大的 $\xi > 0$，矩阵 $A + \xi I$ 便是非负的。因此，对于所有 i, j，$(e^A)_{ij} = e^{-\xi}(e^{A+\xi I})_{ij}$ 均为非负；当且仅当 $i = j$ 或存在一条游走从 i 通向 j时，它为正

在 $\Gamma(A)$ 中。若 $\xi > 0$，则对 $e^{\xi A}$ 也有相同结论，因为矩阵 ξA 对任意 $\xi > 0$ 都是 Hurwitz 矩阵和梅茨勒矩阵，且与 A具有相同的图。

注意到 $e^{\xi A}$ 的特征值为 $e^{\xi\lambda_j(A)}$，其中 $\lambda_j(A)$ 是 A 的特征值，因此可得指数矩阵 $e^{\xi A}$ 的谱半径为 $\rho(e^{\xi A}) = \max_j |e^{\lambda_j(A)}| = e^{\max_j \operatorname{Re}\lambda_j(A)} < 1$。因此

$$\Theta(\xi) = e^{\xi A}(I - e^{\xi A})^{-1} = e^{\xi A}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{\xi A})^k = \sum_{k=1}^{\infty}(e^{\xi A})^k$$

对所有 $\xi > 0$都有定义且为非负。此外，$\Theta_{ij}(\xi) > 0$ 当且仅当 $i = j$ 或 i 可通过 $\Gamma(A)$ 中的一条游走连接到 j（否则，所有加项的 (i, j) 项均为零），由此完成证明 □

推论5 设 $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ 是 *Hurwitz* 矩阵和 *Metzler* 矩阵，且 b、c 是与 A维数相同的两个非负列向量。那么，对所有 $\xi > 0$，$c^\top\Theta(\xi)b > 0$ 成立，当且仅当存在指标 i、$j \in I$，使得元素 $c_i > 0$、$b_j > 0$，以及 $i = j$ 或 $\Gamma(A)$ 包含一条从 i 到 j 的有向游走。若不满足后一条件，则 $c^\top\Theta(\xi)b \equiv 0$。

证明。注意到 $c^\top\Theta(\xi)b = \sum_{i,\ j} c_i\Theta_{ij}(\xi)b_j$。对于$\xi > 0$，后一个和式中的所有加项均为非负，因此 $c^\top\Theta(\xi)b \geq 0$。后一个不等式严格成立，当且仅当至少有一个加项为正 $c_i\Theta_{ij}(\xi)b_j > 0$；而这当且仅当 c_i，$b_j > 0$ 且 $\Theta_{ij}(\xi) > 0$ 时才可能成立。由引理 4 □即可得出结论

推论6 对于(2) 中的矩阵 A 和(4)中的列向量 B，列向量$(e^{-\xi A} - I)^{-1}B$ 在 $\xi > 0$时为正。

证明。图 $\Gamma(A)$包含一条单向链 $n \to (n-1) \to \ldots \to 1$，这是由不等式$g_i > 0\,\forall i$可知的。因此，每个节点 $i = 2, \ldots, n$ 都通过一条有向游走与 1 相连。将推论5应用于 A, $b = B$以及坐标向量 $c = e_1$，$e_2, \ldots, e_n$，可得 $(e^{-\xi A} - I)^{-1}B$ 的所有元素在 $\xi > 0$ □时均为正

定理*1*的证明

现在，证明定理1的断言所需的全部辅助结果均已具备。

推论 6 $r\ \xi = C\ e^{-\xi A} -$ 保证函数 $(I)^{-1}B$ (r) 对 $\xi > 0$ 为正。此外，(ξ) 在每个点 $\xi \in (0, \infty)$ 处连续。注意，由于 (10)，$R(y) = F(y)r(\Phi(y))$。根据 (5)，对于每个 $y \geq 0$，有

$$0 < F_1 \min_{\xi\in[\Phi_1,\Phi_2]} r(\xi) \leq R(y) \leq F_2 \max_{\xi\in[\Phi_1,\Phi_2]} r(\xi) < \infty,$$

其中，最小值和最大值根据魏尔斯特拉斯极值定理均存在。这证明了定理中的陈述 (1)。

回顾 F，Φ 假定为连续的，$y - R(y)$是在 $\mathbb{R}_+$ 上的连续函数，在 $y = 0$ 处取负值，并且当 y 足够大时取正值。由介值定理，陈述（2）现在是直接的。回顾 $F(y) \geq F_1 > 0$ □，陈述（ 3 ）由推论 6 得出。

注释 7 定理1的证明实际上表明，(10)的所有根都属于如下闭区间

$$F_1 \min_{\xi\in[\Phi_1,\Phi_2]} r(\xi) \leq y = R(y) \leq F_2 \max_{\xi\in[\Phi_1,\Phi_2]} r(\xi).$$

进而，可以利用(17)和第5.2节中的引理 10所给出的 r 的显式表示来估计最小值和最大值。这有助于例如采用二分法对(10)进行数值求解。为简洁起见，这里省略技术细节。

注 8 定理1可以推广到比矩阵结构由 (2) 指定的范围更广的一类脉冲系统 (1)、(3)、(4)，从而保证其中存在一个 1-周期。对于任意 Hurwitz 梅茨勒矩阵 A 和列向量 B，只要图 $\Gamma(A)$ 的每个节点 i 要么对应于 $B_i > 0$，要么通过一条路径连接到某个满足 $B_j > 0$的节点 j，推论6仍然成立。在这种情况下，陈述 (1)–(3) 仍然成立。

注 9 还需注意，假设 F, Φ 连续且 (5) 成立，那么只要 A 是 Hurwitz 梅茨勒矩阵，且 B, C 非负，映射 Q 就存在一个非负不动点（不过其分量可能为零）。事实上，推论5指出，要么$r(\xi) > 0\,\forall\xi > 0$，要么 $r(\xi) \equiv 0$ （在这个退化情形下，输出 $y(t)$ 与输入 $u(t)$ 解耦）。在前一种情形下，定理1的陈述 (1) 和陈述 (2) 成立；在后一种情形下，周期方程 $y = R(y)$ 有唯一解 $y = 0$。在这两种情形下，向量 $x = F(y)(e^{-\Phi(y)A} - I)^{-1}B$ 都是映射 Q 的非负不动点（引理4）。

5.2 定理 *2*–定理 *3* 的引理和证明

在本小节中，我们大量使用差商（DD）和 Opitz公式（见附录 A，其中总结了必要的背景知识）。

给定区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 以及 k+1 个点 x_0，……，x_k，$k \in \mathbb{N}_0$，$f[x_0, \ldots, x_k]$ 表示在 x_0，……，x_k处取值的k阶差商（简称 k-DD）。

在当前语境中，k-差商的一条有用性质是以下均值定理的推广。

引理 10 *[9, 节 8]* 设 $f:\ I \to \mathbb{R}$ 在 I 上 k次可微，且令 $x_0, \ldots, x_k \in I$。那么存在一点 $\bar{x} \in [\text{最小值}_i x_i, \text{最大值}_i x_i]$，使得

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}). \tag{15}$$

代入 $x_0 = \ldots = x_k = \xi$，于是有

$$f[\underbrace{\xi, \ldots, \xi}_{k+1}] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)\ \forall \xi \in I. \tag{16}$$

考虑函数

$$r(\xi) \triangleq C(e^{-\xi A} - I)^{-1} B.$$

引理 11 给出了 $r(\xi)$ 及其导数用差商表示的形式。这些结果对于证明定理 2 和定理 3 至关重要。

引入两个辅助函数

$$\varphi(x) = 1/(e^x - 1), \quad \psi(x) = -x\varphi'(x) = xe^x/(e^x - 1)^2.$$

Opitz公式（附录 A，公式 A.6）得出以下结果。

引理 11 考虑状态空间矩阵 (2)，并令$\bar{g} = g_1 \ldots g_{m-1} > 0$。那么，对于所有 $\xi > 0$，函数$r(\xi)$ 及其导数可表示为

$$r(\xi) = (-\xi)^{m-1} \bar{g} \varphi[\xi a_1, \ldots, \xi a_m], \tag{17}$$
$$r'(\xi) = (-\xi)^{m-2} \bar{g} \psi[\xi a_1, \ldots, \xi a_m]. \tag{18}$$

证明。

步骤 1: 令 $\bar{g}_i \triangleq g_1 \ldots g_{i-1}$ 对于 $i = 2, \ldots, m$, (因此, $\bar{g}_m = \bar{g}$), 且 $\bar{g}_1 \triangleq 1$。首先注意到

$$A = S\Lambda S^{-1}, \quad S = \mathrm{diag}(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \ldots, \bar{g}_m).$$

矩阵 Λ 是一个双对角矩阵，其主对角线上的特征值为$-a_i$, $i = 1, \ldots, m$，下方对角线上的元素均为 1。可以验证

$$CS = \bar{g}_m C = \bar{g} C, \quad S^{-1} B = \bar{g}_1 B = B.$$

步骤 2: 因此a_1对于在特征值 $= Sf\ \Lambda\ S^{-1} \quad Cf\ A\ B\ =\ \bar{g} f\ \Lambda_{m\,1}$,, 邻域内解析的函数 f，有 $f(A)$ ( ) ，此外，( ) ( ). （下标表示矩阵$f(\Lambda)$ 的 $(m,\ 1)$ 项）。根据 (A.6)，可得

$$Cf(A)B = \bar{g} f[-a_1, \ldots, -a_m].$$

于是由引理 18 可知

$$Cf(-\xi A)B = Cf_{-\xi}(A)B = (-\xi)^{m-1} \bar{g} f[\xi a_1, \ldots, \xi a_m],$$

(与引理 18 一致, $f_{-\xi}(x) = f(-\xi x)$)。

步骤 3: 注意到 $r(\xi) = C\varphi(-\xi A)B$，即可轻松得到等式 (17)。为证明 (18)，回顾一下，对于任意可微的可逆矩阵函数 X，有 $(X(\xi)^{-1})' = -X(\xi)^{-1} X'(\xi) X(\xi)^{-1}$。因此，

$$\frac{d}{d\xi}(e^{-\xi A} - I)^{-1} = (e^{-\xi A} - I)^{-1} A e^{-\xi A} (e^{-\xi A} - I)^{-1} = \\ = Ae^{-\xi A}(e^{-\xi A} - I)^{-2} = (-\xi)^{-1} \psi(-\xi A).$$

Hence, $r'(\xi) = (-\xi)^{-1} C\psi(-\xi A)B$, entailing (18) □

引入阶为 [28,27] $s \in \mathbb{R}$的多重对数函数

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^s}, \quad z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \tag{19}$$

可以验证, $\varphi(y) = -1 + 1/(1 - e^{-y}) = \mathrm{Li}_0(e^{-y})$, 并通过对 k进行归纳,

$$\varphi^{(k)}(y) = (-1)^k \mathrm{Li}_{-k}(e^{-y}). \tag{20}$$

注 12 注意，对于 z 取 (0，1) 中的实数时，$\mathrm{Li}_s(z) > 0$ 。因此，等式 (20) 表明 φ 是完全单调 [23]: $(-1)^k \varphi^{(k)}(y) > 0$ 对所有 y >0 都成立。与推论6一致，借助 (17) 和 (15)，对于任意阶 m 以及参数 a_i, $g_i > 0$的任意取值, $r(\xi) > 0$ 对所有 $\xi > 0$ 都成立。

如下文引理 14 所示，函数 ψ 并非不完全单调，因此 (18) 无法用于证明对所有 $\xi > 0$, $r'(\xi) < 0$ 。然而，当阶 m 较低时，导数 $r'(\xi)$ 确实保号，这使得我们能够证明定理 2。为给出精确表述，我们陈述一个推论。

推论 13 若对所有 $\zeta > 0$, $(-1)^{m-1}\psi^{(m-1)}(\zeta) > 0$, 则 $r' < 0$ （即 r 递减）于$(0, \infty)$上成立。更一般地，只要$(-1)^{m-1}\psi^{(m-1)}(\zeta) > 0$ 对 $\zeta \in (\xi_0 \text{最小值}_i a_i, \xi_1 \text{最大值}_i a_i)$成立， r 就在任意区间(ξ_0, ξ_1) 上递减。

证明。由（18）和（15）（应用于 $k = m - 1$）可立即得证。□

例如，推论 13 表明，对于 $m = 3$，函数r 是递减的，因为 ψ 是凸的 [5]。

导数 $\psi^{(k)}$ 及其估计

事实上，函数 ψ 的导数也与多重对数函数 (19) 密切相关，以下引理对此作了总结。

引理 14 对于每个 $k = 1$、2、...，均有

$$\Psi_k(x) \triangleq (-1)^k \psi^{(k)}(x) = \\ = x\mathrm{Li}_{-k-1}(e^{-x}) - k\mathrm{Li}_{-k}(e^{-x}), \tag{21}$$

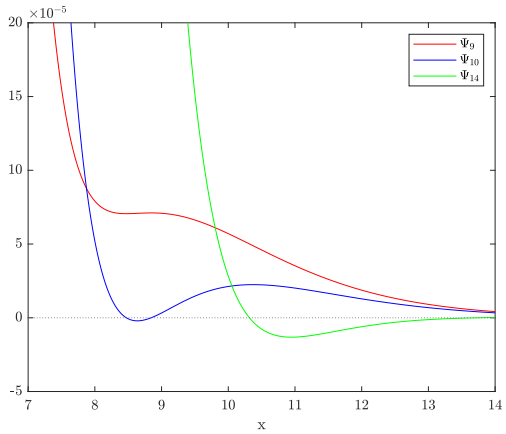
其中 Ψ_k 具有以下性质：

(i) $\Psi_k(x) > 0$ 当 $0 \le x < \bar{x}(k) \triangleq 2\pi / \sqrt[k+1]{2k\zeta(k+1)}$时；(ii) $\Psi_k(x) > 0$ 当 $x \ge k$ 时；(iii) 若 $k \le 9$，则对所有 $x > 0$，$\Psi_k(x) > 0$；(iv) 一般而言，以下不等式成立

$$\Psi_k(x) \ge -2k\frac{k!}{(2\pi)^{(k+1)}}\zeta(k+1) \quad \forall x \ge 0, \tag{22}$$

其中 ζ 是黎曼 ζ-函数(13)；(v) 然而，Ψ_{10} 在某些点$x > 0$处取负值。

引理 14 的证明相当技术性，详见附录 B。数值模拟表明，事实上，Ψ_k 对于所有 $k > 9$ 均为负。图 1 展示了 Ψ_9（为正）以及可能取负值的函数 Ψ_{10}，Ψ_{14} 的行为。



$k = 9$，10、14 时 $\Psi_k(x)$ 的图像。

结合中值公式（引理 10）与 (18) 和 (22)，可立即得到以下推论。

推论 15 对于每个 $\xi > 0$，导数 $r'(\xi)$ 满足以下上界

$$r'(\xi) < \frac{\bar{g}}{C_m}, \tag{23}$$

其中 C_m 定义于 (14)。

如第 4 节所述，C_m^{-1} 随着 $m \to \infty$ 指数衰减。然而，(23) 的右侧为正；对于 IGO(m) 的某些参数，$m \ge 11$，r' 可能取正值。在这种情况下，IGO 可能具有多个 1-周期（第6节）。

定理 *2* 的证明

若 $m \le 10$，引理 14 表明，对于所有 $\xi > 0$，$(-1)^{m-1}\psi^{(m-1)}(\xi) = \Psi_{m-1}(\xi) > 0$；一般而言，$\Psi_{m-1}(\xi) > 0$ 对于 $\xi \ge m - 1$ 成立。应用推论 13，可证明 $r(\cdot)$ 在区间（ρ，∞）上递减，其中

$$\rho \triangleq \begin{cases} 0, & 1 \le m \le 10, \\ \frac{m-1}{\min_i a_i}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

当 $1 \le m \le 10$ 或不等式（12）成立时，显然，对于所有 $y \in \mathbb{R}_+$，$\Phi(y) > \rho$。回顾一下，Φ，F分别是非递减和非递增的，因此，$R(y) = r(\Phi(y))F(y)$ 是一个非递增函数，这意味着方程（10）在 $\mathbb{R}_+$ 上只有一个解，因此 IGO(m) 有一个唯一的 1-周期 □

定理 *3* 的证明

定理 3由推论 15可直接得出。事实上，可微（因此局部 Lipschitz）的连续函数与绝对连续函数的复合 $r(\Phi(y))$ 是绝对连续的，并且有

$$\frac{d}{dy}r(\Phi(y)) = r'(\Phi(y))\Phi'(y) < \frac{1}{F(0)},$$

根据 (14) 和 (23)，对几乎所有 $y > 0$ 均成立。函数 $R(y) = r(\Phi(y))F(y)$ 现在也是绝对连续的，因为它是两个绝对连续函数的乘积。回想一下，$F'(y) \le 0$ 对几乎所有 $y > 0$ 均成立，因此 $(y - R(y))' = 1 - r'(\Phi(y))\Phi'(y)F(y) - r(\Phi(y))F'(y) > 0$，所以 $y - R(y)$ 在 (0，∞) 上递增。这里，我们用到了对所有 $y > 0$ □，$0 \le F(y) \le F(0)$ 这一事实

6 具有多个 1-周期的 IGO 示例。

在本小节中，对于每个满足 $\Psi_{m-1}(v_0) < 0$ 在某点 v_0 处的 m m，我们构造至少具有三个不同 1- 周期的 IGO。这例如适用于 $m = 11$ （引理 14）。

令$\Phi_{\sigma,\ y_*}$ 为方差为 σ^2 、期望为 y_*的高斯密度分布函数，即

$$\Phi_{\sigma,y_*}(y) \triangleq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(s-y_*)^2}{2\sigma^2}} ds.$$

对于每个 $\sigma > 0$，都有$0 < \Phi_{\sigma,\ y_*}(y_*) = 1/2 < \Phi_{\sigma,\ y_*}(\infty) = 1$；此外，$\Phi_{\sigma,\ y_*}$ 严格递增。根据构造，导数

$$\Phi'_{\sigma,y_*}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-y_*)^2}{2\sigma^2}}$$

在 $y = y_*$ 处取得其最大值 $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$。

以下引理确立了多个 1-周期的存在性。

引理 16 取数 $y_* > 0$、 $\sigma > 0$，并令 $v_0 > 0$ 为满足 $\Psi_{m-1}(v_0) < 0$ 的点。定义具有以下参数的 *IGO(m)*：

- 满足 (5) 的非增可微函数 F；
- $\Phi = \Phi_{\sigma,y_*}$ （该函数在 $\mathbb{R}$ 上严格递增）；
- $a_1 = \ldots = a_m = a \triangleq v_0/\Phi_{\sigma,\ y_*}(y_*) = 2v_0$;
- 最后， g_1、……、 $g_{m-1} > 0$ 满足 [2]

$$\bar{g} = (-1)^{(m-1)} \frac{2^{m-1}(m-1)!y_*}{\varphi^{(m-1)}(v_0)F(y_*)}. \qquad (24)$$

因此，当 $\sigma > 0$足够小时，这个 *IGO* 至少具有三个不同的正 *1*-周期。

证明。 结合式 (17) 和式 (16)，可得

$$r(\Phi(y_*)) = \frac{(-1)^{(m-1)}\Phi(y_*)^{m-1}\bar{g}}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(a(\sigma)\Phi(y_*)) =$$
$$= \frac{(-1)^{(m-1)}\bar{g}}{2^{m-1}(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(v_0) = \frac{y_*}{F(y_*)}.$$

回顾 $R(y) = r(\Phi(y))F(y)$，可证明$R(y_*) = y_*$。

沿用上述定理 3 证明中的论证，可得

$$(y - R(y))'|_{y=y_*} = 1 - \underbrace{r'(\Phi(y_*))\Phi'(y_*)F(y_*)}_{P_1} - \underbrace{r(\Phi(y_*))F'(y_*)}_{P_2}.$$

由式 (17) 和式 (24) 可知， P_2 与 σ无关，仅由 y_* 和 F 决定：

$$P_2 = \frac{y_*F'(y_*)}{F(y_*)}.$$

[2] 由于注 12，(24) 的右端为正。

回忆 $\Phi'(y_*) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$，并应用 (18)，

$$P_1 = r'(\Phi(y_*))\Phi'(y_*)F(y_*) =$$
$$= \frac{(-1)^{m-2}\bar{g}\Phi(y_*)^{m-2}\psi^{(m-1)}(a(\sigma)\Phi(y_*))\Phi'(y_*)F(y_*)}{(m-1)!} =$$
$$= -\frac{\bar{g}F(y_*)\Psi_{m-1}(v_0)}{2^{m-2}(m-1)!\sigma\sqrt{2\pi}} =$$
$$= \frac{2(-1)^{m-1}y_*}{\varphi^{(m-1)}(v_0)} \frac{(-\Psi_{m-1}(v_0))}{\sigma\sqrt{2\pi}} > 0.$$

注意到，对于较小的$\sigma > 0$， P_1 可以任意大；特别地，可以选择 $\sigma > 0$ ，使得 $1 - R'(y_*) < 0$。由于 $y_* - R(y_*) = 0$，因此存在 $\varepsilon \in (0, y_*)$，使得

$$y - R(y) > 0, \quad y \in (y_* - \varepsilon, y_*),$$
$$y - R(y) < 0, \quad y \in (y_*, y_* + \varepsilon).$$

另一方面，当 $y \to 0+$ 时， $y - R(y) < 0$ ，且 $y - R(y) \to +\infty$ ，当 $y \to \infty$ 时（见定理1的证明）。因此，(10) 至少还有两个解 $y_1 \in (0, y_*)$和 $y_2 \in (y_*, \infty)$。根据定理1， y_1, y_*, y_2对应于IGO □的三个互不相同的1-周期

注17 有人可能会猜测，多个1-周期的存在是由特征值 $a_i = a = 2v_0$的重数造成的，但事实并非如此。引理16中的构造可以推广到 a_i 彼此足够接近但两两不同的情形。为简洁起见，此处不再赘述。

6.1 数值示例

现在通过 Matlab 中的计算，对 IGO构造方法在引理 16 中的应用进行数值演示，以证明阶为$m = 11$ 的 IGO 存在多个 1-周期。设 $y_* = 2$, $\sigma = 2 \cdot 10^{-4}$, $F(y) = 1$ (常数)且 $v_0 = 8.64$，这对应于 $\Psi_{m-1}(v_0) = \Psi_{10}(v_0) < 0$。我们考虑矩阵 (2)，其中 $a_1 = \ldots = a_{11} = a = 17.28$ 和 $g_1 = \ldots = g_{10} = 22.6486$，根据 (20)，它们对应于以下数值

$$\bar{g} = 3.5515 \cdot 10^{13}, \quad P_1 = 1.1257, \quad P_2 = 0.$$

特别是

$$(y - R(y))'|_{y=y_*} = -0.1257,$$

这表明方程 $y - R(y) = 0$ 存在三个解 y_1, y_*, y_2，以及相应的三个 1-周期。数值计算得到 y_1, y_2 的值为

$$y_1 = 1.9998234, \quad y_2 = 2.0002739.$$

根据定理1，计算与 y_1, y_*, y_2 对应的 $Q(x)$ 的不动点，得到

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.00019 \\ 0.00216 \\ 0.01213 \\ 0.04535 \\ 0.12731 \\ 0.28635 \\ 0.53835 \\ 0.87280 \\ 1.25282 \\ 1.63477 \\ 1.99982 \end{bmatrix}, \; x_* = \begin{bmatrix} 0.00018 \\ 0.00200 \\ 0.01135 \\ 0.04287 \\ 0.12155 \\ 0.27608 \\ 0.52400 \\ 0.85724 \\ 1.24048 \\ 1.62906 \\ 2 \end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix} 0.00015 \\ 0.00178 \\ 0.01024 \\ 0.03927 \\ 0.11305 \\ 0.26064 \\ 0.50199 \\ 0.83277 \\ 1.22041 \\ 1.61921 \\ 2.00027 \end{bmatrix}.$$

相应 1-周期的稳定性由在不动点处计算得到的雅可比矩阵的施尔稳定性决定。

$$Q'(x) = e^{A\Phi(Cx)}(I + F'(Cx)BC) + \Phi'(Cx)AQ(x)C,$$

数值计算表明，所有三个 1-周期都不稳定，相应雅可比矩阵的谱半径为：

$$\rho(Q'(x_1)) = 68.64, \rho(Q'(x_*)) = 64.91, \rho(Q'(x_2)) = 58.47.$$

7 结论

本文研究了脉冲古德温振荡器（IGO）中周期解的一种特殊情形：在最小周期内，由脉冲调制反馈产生一个脉冲，即一个 1-周期。与文献中已确立的三阶动力学情形不同，IGO 的连续部分允许具有任意阶数。连续部分的结构仍假设为由一阶环节串联而成。本文证明，无论连续部分的阶数如何，IGO 中始终存在一个 1-周期。此外，当连续部分的阶数不超过十阶时，该 1-周期是唯一的。通过构造一个例子说明，对于更高阶的连续部分（例如十一阶），唯一性通常不成立。不过，通过限制 IGO 调制函数的斜率，甚至通过限制反馈脉冲足够稀疏，可以恢复 1-周期的唯一性。

参考文献

[1] L. Bally、H. Thabit 和 R. Hovorka。1型糖尿病闭环治疗——面向普通临床医生的介绍与评估。*BMC Med.*，15(1)，2017年1月。[2] I.S. Berezin 和 N.P. Zhidkov。计算方法，第1卷。Pergamon Press，1965年。[3] F. Cacace、V. Cusimano 和 P. Palumbo。应用于抗血管生成肿瘤治疗的最优脉冲控制。*IEEE*控制系统技术汇刊，28(1)：106–117，2020年1月。[4] A. Churilov、A. Medvedev 和 P. Mattsson。具有时滞的内分泌调节脉冲调制模型的周期解。*IEEE*自动控制汇刊，59(3)：728–733，2014年。

[5] A. Churilov、A. Medvedev 和 A. Shepeljavyi. 男性非基础睾酮调节的脉冲调制反馈数学模型. *Automatica*, 45(1):78–85, 2009年. [6] A. Churilov、A. Medvedev 和 Zh. T. Zhusubaliyev. 大时滞脉冲 Goodwin 振荡器：周期振荡、双稳态与吸引子. 非线性分析：混合系统, 21:171–183, 2016年.[7] Alexander N. Churilov. 具有线性连续时间部分的脉冲系统周期解的轨道稳定性.*AIMSMathematics*, 5(1):96–110, 2020年.[8] A.N. Churilov 和 A. Medvedev. 具有分布时滞的脉冲 Goodwin 振荡器的离散时间映射. *Math.Control Signals Syst.*, 28(9), 2016年.[9] Carl de Boor. 差商. *Surveys inApproximationTheory*, 1:46–69, 2005年.[10] J. Eller. 关于友矩阵的函数. *Linear Algebraand its Applications*, 96:191–210, 1987年.[11]A. Kh. Gelig 和 A. N. Churilov. 非线性脉冲调制系统的稳定性与振荡. Birkhäuser, 波士顿, 1998年.[12]Leon Glass 和 Michael C. Mackey. 从时钟到混沌：生命的节律. 普林斯顿大学出版社, 1988年.[13]B. C. Goodwin. 酶控制过程中的振荡行为. 载于 G. Weber 编, 酶调节进展, 第3卷, 第425–438页. Pergamon, 牛津, 1965年.[14] Izrail Solomonovich Gradshteyn 和 Iosif Moiseevich Ryzhik.积分、级数与乘积表. Academic press, 2014年.[15]W.P.M.H. Heemels、K.H. Johansson 和 P. Tabuada. 事件触发控制与自触发控制导论. 载于第*51*届*IEEE*决策与控制会议论文集, 第3270–3285页, 毛伊岛, 夏威夷, 2012年12月10–13日.[16]Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson. 矩阵分析专题. 剑桥大学出版社, 1991年.[17]Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson. 矩阵分析. 剑桥大学出版社, 第2版, 2012年.[18]Mingzhan Huang、Jiaxu Li、Xinyu Song 和 Hongjian Guo. 胰岛素脉冲注射建模：迈向人工胰腺. *SIAMJournalon Applied Mathematics*, 72(5):1524–1548, 2012年.[19]D. M. Keenan 和 J. D. Veldhuis. 人类男性下丘脑-垂体-睾丸间质细胞轴中时滞反馈的生物数学模型. *Amer.J.Physiology.Endocrinologyand Metabolism*, 275(1):E157–E176, 1998年.[20]N. N. Krasovskii 和 E. A. Lidskii. 含跳变参数系统中控制器的解析设计. 自动化与远程控制, 22:1021–1025, 1961年.[21]V. Lakshmikantham、D. D. Bainov 和 P. S. Simeonov.脉冲微分方程理论. 世界科学出版社, 新加坡, 1989年.[22] A. Medvedev、A. Churilov 和 A. Shepeljavyi. 睾酮调节的数学模型. 载于 信息学中的随机优化, 第2期, 第147–158页. 圣彼得堡国立大学, 2006年. 俄文.[23]Kenneth S. Miller 和 Stefan G. Samko. 完全单调函数. *Integr. Transf.and Spec. Funct.*, 12(4):389–402, 2001年.[24]K. Popp. 非光滑机械系统. 应用数学与力学杂志, 64(5):765–772, 2000年。

[25]D. R. Smith. 奇异摄动理论：应用导论. 剑桥大学出版社, 剑桥, 1985年.[26] J.J. Walker、J. R. Terry、K. Tsaneva-Atanasova、S.P. Armstrong、C.A. McArdle 和 S. L. Lightman. 脉冲式激素分泌的编码与解码机制. *J Neuroendocrinol.*, 22(12):1226–1238, 2010年12月.[27]Chun-Fu Wei 和 Bai-Ni Guo. 与指数函数及其导数相关函数的完全单调性. 载于 *Abstract and Applied Analysis*, 第2014卷. Hindawi, 2014年。

[28]David C . Wood. 多重对数函数的计算 . 技术报告，肯特大学计算实验室，英国坎特伯雷肯特大学，1992年6月。

[29]F. C. W. Wu、D. C. Irby、I. J. Clarce、J. T. Cummins 和 D. M. de Kretse。促性腺激素释放激素脉冲频率调节对下丘脑/垂体断连公羊的黄体生成素、卵泡刺激素和睾酮的影响。生殖生物学, 37(10)：501–505，1987年。

[30] Shuwen Zhang 和 Daniel Dawes。脉冲驱动下两种食物链系统中的混沌。混沌、孤子与分形, 24(1)：73–83，2005年。

[31]Zh. T. Zhusubaliyev、A. Churilov 和 A. Medvedev。非基础性睾酮调节脉冲模型中的分岔现象。混沌，22 11，2012年 1 013121 1 013121 ( )：−−−。

[32] Zh . T. Zhusubaliyev, A . Churilov, 和 A . Medvedev . 具有脉冲反馈的标量线性连续系统中的复杂动力学与混沌。载于 *2012*年美国控制会议论文集，第2419–2424页，加拿大蒙特利尔，2012年6月27日至29日。

A 差商与 Opitz 公式

差商（DD）广泛应用于数值分析，并在本文中用于计算矩阵函数。这里我们回顾差商的一些基本性质，更多细节请参阅 [2,9,16] 。

差商的定义

在本节中，我们讨论函数 $f\colon I\to\mathbb{R}$，其中 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是某个区间（可能是开区间）。对于这样的函数，在一列两两不同的点 $x_0,\ \ldots,\ x_k\in I$处，其 k 阶差商（简称 k 阶差商）的标准定义如下。我们将 0 阶差商形式化定义为 $f[x_0]\triangleq f(x_0)$，随后将 1 阶差商定义为

$$f[x_0,x_1]\triangleq\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

对于 $k\geq 2$，k 阶差商通过递归构造为

$$f[x_0,\ldots,x_k]=\frac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}. \quad (A.1)$$

k-差商的一种等价且更简洁的定义基于插值多项式的概念，它可以写成拉格朗日形式或牛顿形式。根据定义，在点 $x_0,\ \ldots\ldots,\ x_k$（其中 $x_i\neq x_j\,\forall i\neq j$）处的 f 插值多项式是满足以下条件的（唯一）$L=L_{f,\ x_0,\ldots\ldots,\ x_k}$ 次多项式： $\leq k$ ，使得所有 x_i 都是方程的根

$$L(x)=f(x). \quad (A.2)$$

可以证明 [2] ， L可表示为

$$L_{f,x_0,\ldots,x_k}(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\ldots + f[x_0,x_1,\ldots,x_k]\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j), \quad (A.3)$$

称为插值多项式的牛顿形式。这由此引出对 k-差商 $f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$的另一种定义，即插值多项式的最高次项 （次数为 k）系数。

如果 f 在 I上 k 次可微，那么后一种方法可以定义任意 序列 $x_0,\ \ldots\ldots,\ x_k$的 k-差商。如果某个数 ξ在该序列中（$1\leq s\leq k$）出现 s次，那么 ξ 是（A.2）的一个重数为 s的根： $L^{(p)}(\xi)=f^{(p)}(\xi)\quad p=0,\ \ldots\ldots,\ s-1$.采用这种约定后，插值多项式仍唯一确定 [2], ，因此其最高次项系数 $f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$ 是定义良好的。

例： 如果 $x_0=\ldots=x_k=\xi$，那么插值多项式无非就是泰勒和

$$L(x)=\sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(\xi)}{j!}(x-\xi)^j, \quad (A.4)$$

其最高次项系数为

$$f[\xi,\ldots,\xi]=f^{(k)}(\xi)/k!.$$

差商的技术性质

在接下来的小节中，我们将使用差商的以下简单性质。

引理 18 （缩放）给定函数 $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$和一个数 $\xi\neq 0$，记作 $f_\xi(x)\triangleq f(\xi x)$。那么

$$f_\xi[x_0,\ldots,x_k]=\xi^k f[\xi x_0,\ldots,\xi x_k].$$

证明。 注意，若 $L(x)=L_{f,\ x_0,\ \ldots\ldots,\ x_k}$ 是 f 的插值多项式，则 $L(\xi x)$ 是 f_ξ 的插值多项式。回顾一下，$f_\xi[x_0,\ldots,x_k]$和 $f[x_0,\ldots,x_k]$ 分别是 $L(\xi x)$、 $L(x)$ 的最高次项系数，由此可得所需关系 □

最后，我们注意到差商关于 f 线性依赖，也就是说，对于定义在 $(a,\ b)$ 上的两个函数 $f_1,\ f_2$ 以及两个系数 $\alpha_1,\ \alpha_2$，有 $(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)[x_0,\dots,x_k]=\alpha_1 f_1[x_0,\dots,x_k]+\alpha_2 f_2[x_0,\dots,x_k]$。

矩阵函数与 *Opitz*公式

设 $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{C}$ 是一个包含矩阵 A 的特征值 λ_j 的开单连通集，并且 $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在 $\mathcal{D}$上全纯。那么，对于任意一条沿逆时针方向 [16,环绕所有 λ_j 的简单闭曲线$\Gamma\subset\mathcal{D}$，2],第 6 节。

$$f(A)\triangleq\frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma}f(z)(zI-A)^{-1}dz. \tag{A.5}$$

特别地，如果 S 是一个可逆矩阵，那么$f(SAS^{-1})=Sf(A)S^{-1}$。此外，对于任意两个函数$f,\ g$，矩阵 $f(A)$和 $g(A)$可交换。

现在考虑下面的双对角矩阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda_m\end{bmatrix}.$$

假设 f在 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$附近复解析，则矩阵 $f(\Lambda)$有一种优雅的表示，称为*Opitz*公式 [3] [10]。具体而言， $f(\Lambda)$是一个下三角矩阵，其元素为

$$(f(\Lambda))_{ij}=\begin{cases}f[\lambda_i,\dots,\lambda_j], & i\geq j,\\ 0, & i<j.\end{cases} \tag{A.6}$$

例如，左下角元素是函数 f的（$m-1$）阶差商，即 $f(\Lambda)_{m1}=f[\lambda_1,\dots,\lambda_m]$。

B 引理14的证明

为得到 Ψ_k 的表达式，注意到 $\psi(x)$ 可以表示为如下级数：

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}=-x\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)'=\\&=-x\Big(\sum_{j=0}^{\infty}e^{-jx}\Big)'=\sum_{j=0}^{\infty}xje^{-jx}=\sum_{j=1}^{\infty}xje^{-jx},\end{aligned}$$

[3] 通常，Opitz公式针对上三角双对角矩阵给出；下三角情形则很容易处理，因为注意到 $f(\Lambda^\top)=f(\Lambda^\top)^\top$。

这意味着可以得到第 k 阶导数的表达式

$$\begin{aligned}\psi^{(k)}(x)&=(-1)^k\sum_{j=1}^{\infty}j^k(xj-k)e^{-jx}=\\&=(-1)^k(x\mathrm{Li}_{-k-1}(e^{-x})-k\mathrm{Li}_{-k}(e^{-x})),\end{aligned}$$

从而得到（21）。

命题（ii）由 [27,定理 8]得出。

为证明命题（i）和（iv），我们需要一个阶为（$-k$）<0 [14, 9的多重对数函数的表示。553]

$$\mathrm{Li}_{-k}(e^{-x})=k!\sum_{l=-\infty}^{\infty}(2\pi li+x)^{-k-1},$$

这将导出 Ψ_k的另一种表示：

$$\begin{aligned}\Psi_k(x)&=x\mathrm{Li}_{-k-1}(e^{-x})-k\mathrm{Li}_{-k}(e^{-x})=\\&(k+1)!\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(2\pi li+x)^{-k-2}-kk!\sum_{l=-\infty}^{\infty}(2\pi li+x)^{-k-1}=\\&=k!\sum_{l=-\infty}^{\infty}((k+1)x(2\pi li+x)^{-k-2}-k(2\pi li+x)^{-k-1})=\\&=k!\sum_{l=-\infty}^{\infty}(2\pi li+x)^{-k-2}((k+1)x-k(2\pi li+x))=\\&=k!\Big(\frac{1}{x^{k+1}}+\underbrace{\sum_{\substack{l=-\infty\\ l\neq0}}^{\infty}\frac{x-2\pi kli}{(x+2\pi li)^{k+2}}}_{=h_k(x)}\Big).\end{aligned}$$

注意，对于每个 $x>0$，都有

$$\left|\frac{x-2\pi kli}{(x+2\pi li)^{k+2}}\right|\leq\frac{1}{|x+2\pi li|^{k+1}}\left|\frac{x-2\pi kli}{x+2\pi li}\right|,$$

其中这些乘数显然分别小于 $(2\pi|l|)^{-k-1}$ 和 k。由下述估计可直接得出陈述 (iv) 和式 (22)：

$$|h_k(x)|\leq2\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{x-2\pi kli}{(x+2\pi li)^{k+2}}\right|\leq\frac{2k}{(2\pi)^{k+1}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{k+1}}.$$

要证明命题（i），只需注意到 $x=\bar{x}(k)$ 是该方程的唯一正实数解

$$\frac{1}{x^{k+1}}-\frac{2k}{(2\pi)^{k+1}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{k+1}}=0;$$

显然， $\Psi_k(x) > 0$ ，因为 $0 < x < \bar{x}(k)$。

命题（iii）的证明方法类似，只需细化项 $h_k(x)$ 的估计。注意，对于 $k \leq 4$，由命题（i）和命题（ii）可推出命题（iii），因为 $\bar{x}(k) < k$。对于 $k = 5$、……、8，可以采用更精确的估计：

$$h_k(x) = \underbrace{\sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0,\pm 1}}^{\infty} \frac{x - 2\pi kli}{(x + 2\pi li)^{k+2}}}_{\tilde{h}_k(x)} + \\ + \frac{x - 2\pi ki}{(x + 2\pi i)^{k+2}} + \frac{x + 2\pi ki}{(x - 2\pi i)^{k+2}},$$

其中 $\tilde{h}_k(x)$ 的估计方法与 $h_k(x)$ 类似，即

$$|\tilde{h}_k(x)| \leq \frac{2k}{(2\pi)^{k+1}} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l^{k+1}} = \frac{2k(\zeta(k+1) - 1)}{(2\pi)^{k+1}}.$$

因此，可得到 Ψ_k 的如下估计：

$$\frac{\Psi_k(x)}{k!} \geq \frac{1}{x^{k+1}} - \frac{2k}{(2\pi)^{k+1}}(\zeta(k+1) - 1) + \\ + \frac{x - 2\pi ki}{(x + 2\pi i)^{k+2}} + \frac{x + 2\pi ki}{(x - 2\pi i)^{k+2}} = \\ = \frac{p_k(x)}{x^{k+1}(x^2 + 4\pi^2)^{k+2}},$$

其中 $p_k(x)$ 是一个次数为 $3k + 5$ 的多项式，满足 $p_k(0) = 4\pi^2 > 0$。为证明对于 $x > 0$， $\Psi_k(x) > 0$ ，根据命题（ii），只需检验 p_k在 $[0, k]$上没有实根。对于$k = 5$、……、8，确实如此，表 B.1 中报告了这一结果（根是使用 Matlab 通过数值方法求得的）；然而，对于 $k = 9$，这一条件不成立。

为证明 $k = 9$ 的命题（iii），需要对 h_k 作出更精细的估计，如下所示：

$$h_k(x) = \underbrace{\sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0,\pm 1,\pm 2}}^{\infty} \frac{x - 2\pi kli}{(x + 2\pi li)^{k+2}}}_{\bar{h}_k(x)} + \\ + \sum_{l=1}^{2} \frac{x - 2\pi kli}{(x + 2\pi li)^{k+2}} + \sum_{l=1}^{2} \frac{x + 2\pi kli}{(x - 2\pi li)^{k+2}},$$

其中 $\bar{h}_k(x)$ 可以类似于 h_k, h_k 进行估计：

$$|\bar{h}_k(x)| \leq \frac{2k}{(2\pi)^{k+1}} \sum_{l=3}^{\infty} \frac{1}{l^{k+1}} = \frac{2k(\zeta(k+1) - 1 - 2^{-k-1})}{(2\pi)^{k+1}}.$$

表 B.1 多项式 p_k（对于 $k = 5$，……，8）和 q_9 的实根。

k	实根
5	$\pm 9.563\ldots$
6	10.115……
7	$\pm 10.369\ldots$
8	10.291……
9	± 15.456……

这意味着对 Ψ_k进行更精细的估计：

$$\frac{\Psi_k(x)}{k!} \geq \frac{1}{x^{k+1}} - \frac{2k}{(2\pi)^{k+1}}(\zeta(k+1) - 1 - \frac{1}{2^{k+1}}) \\ + \frac{x - 2\pi ki}{(x + 2\pi i)^{k+2}} + \frac{x + 2\pi ki}{(x - 2\pi i)^{k+2}} \\ + \frac{x - 4\pi ki}{(x + 4\pi i)^{k+2}} + \frac{x + 4\pi ki}{(x - 4\pi i)^{k+2}} = \\ = \frac{q_k(x)}{x^{k+1}(4\pi^2 + x^2)^{k+2}(16\pi^2 + x^2)^{k+2}},$$

其中， $q_k(x)$ 是一个 $5k + 9$ 阶多项式，满足 $q_k(0) = (64\pi^2)^{k+2} > 0$。如表 B.1 所示， $q_9(x)$ 的实根位于区间 $(0, 9]$ 之外。

最后，可以通过在 Matlab 中计算多重对数函数来验证陈述 (v)：

$$\Psi_{10}(8.64) \approx -2.087496 \cdot 10^{-6} \square$$