arXiv:2302.01383v3 [math.GN] 6 Nov 2023

数字拓扑中的极限集

Laurence Boxer *

摘要

冻结集和冷集作为数字拓扑中不动点理论的一部分被引入。本文将这些概念推广为 *limiting set*，并考察极限集的性质。

Key words and phrases：数字拓扑，数字图像，冻结集，冷集，极限集

MSC 2020 分类：54H30，54H25

1 引言

冻结集和冷集的研究（见定义 2.8 和 3.1）源于数字拓扑中的不动点理论。包括 [8, 9, 10, 12, 13, 14] 在内的论文研究了冻结集和冷集。

对于连续函数 $f : (X, \kappa) \to (X, \kappa)$ 和 $A \subset X$，对 $(A, f|_A)$ 施加比冻结集和冷集定义中更宽松的限制，仍可能对 f 产生有趣的限制。在本文中，我们研究了对 f 可移动 A 中任意元素的距离施加限制，如何有力地限制 f 可移动 X 中任意元素的距离。

2 预备知识

我们用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集，用 $\mathbb{N}^*$ 表示非负整数集。给定 a、$b \in \mathbb{Z}$、$a \le b$,

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{ z \in \mathbb{Z} \mid a \le z \le b \}.$$

对于有限集 X，记号 $\#X$ 表示 X 中不同元素的数量。

给定函数 $f : X \to Y$ 和 $A \subset X$，记号 $f|_A$ 表示将 f 限制到 A。此外，我们偶尔也会用记号 fx 来简写 $f(x)$。

*计算机与信息科学系，尼亚加拉大学，纽约州 14109，美国；以及纽约州立大学布法罗分校计算机科学与工程系，电子邮箱：boxer@niagara.edu

2.1 邻接关系

本节的大部分内容引自或改写自 [15]。

数字图像是一个有序对 (X,κ)，其中 $X \subset \mathbb{Z}^n$ 对于某个 n，且 κ 是 X 上的一种邻接关系。因此，(X,κ) 是一个图，其顶点集为 X，边集由 κ确定。通常，X 是有限的，不过也有论文讨论无限的 X，例如覆盖空间；我们将在第 9 节讨论无限的 X。通常，邻接关系反映了相邻点在 $\mathbb{Z}^n$ 中的某种“接近性”。当满足这些“通常”的条件时，可以将数字图像视为黑白“现实世界”数字图像的模型，其中黑点（前景）属于 X，白点（背景）属于 $\mathbb{Z}^n \setminus X$。

我们记作 $x \leftrightarrow_\kappa y$，或者当 κ 已知或无需提及 κ时记作 $x \leftrightarrow y$，以表示 x 和 y 是 κ-邻接的。记号 $x \leftrightarrows_\kappa y$，或者当 κ 已知时记作$x \leftrightarrows y$，表示 $x \leftrightarrow_\kappa y$ 或 $x = y$。

最常用的邻接关系是 c_u 邻接关系，其定义如下。设 $X \subset \mathbb{Z}^n$，且 $u \in \mathbb{N}$、$1 \le u \le n$。那么对于点

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \neq (y_1, \ldots, y_n) = y \text{ in } X$$

当且仅当 $x \leftrightarrow_{c_u} y$ 时，我们有

- 对于至多 u 个指标 i，有 $|x_i - y_i| = 1$，并且
- 对所有指标 j，$|x_j - y_j| \neq 1$ 都蕴含 $x_j = y_j$。

在低维空间中，c_u-邻接关系通常以一个点在该邻接关系中可拥有的相邻点数来命名。例如，

- 在 $\mathbb{Z}$ 中，c_1-邻接关系就是 2 邻接关系；
- 在 $\mathbb{Z}^2$, c_1-邻接关系中，c_1-邻接关系是 4 邻接关系，c_2-邻接关系是 8 邻接关系；
- 在 $\mathbb{Z}^3$, c_1-邻接关系中，c_1-邻接关系是 6 邻接关系，c_2-邻接关系是 18 邻接关系，而 c_3- 邻接关系是 26 邻接关系。

本文主要使用 c_1 和 c_n 邻接关系。

当我们讨论的数字图像被理解为 (X,κ) 时，使用以下记号。对于 $x \in X$,

$$N(x) = \{\, y \in X \mid y \leftrightarrow_\kappa x \,\},$$

$$N^*(x) = \{\, y \in X \mid y \leftrightarrows_\kappa x \,\} = N(x) \cup \{\, x \,\}.$$

定义 2.1。 [22] 设 $X \subset \mathbb{Z}^n$。 X 的边界为

$$Bd(X) = \{\, x \in X \mid \textit{there exists } y \in \mathbb{Z}^n \setminus X \textit{ such that } x \leftrightarrow_{c_1} y \,\}.$$

定义 2.2. 在 (X,κ) 中，从 $x \in X$ 到 $y \in X$、长度为 $=n$ 的数字 κ-路径 P，是 X 的一个子集 $P = \{\, x_i \,\}_{i=0}^n$，满足 $x_0 = x$, $x_{i-1} \leftrightarrow_\kappa x_i$，对于 $i = 1, \ldots, n$，以及 $x_n = y$。

2.2 数字连续函数

本节的大部分内容引自或改写自 [15]。我们用 id 或 id_X 表示恒等映射 $\mathrm{id}(x) = x$，对所有 $x \in X$ 均成立。

定义 2.3. [23, 5] 设 (X,κ) 和 (Y,λ) 为数字图像。函数 $f\colon X \to Y$ 称为 (κ,λ)-连续，或数字连续；当 κ 和 λ 已明确时，也简称为连续，若对于每个 κ-连通子集 X'（属于 X），$f(X')$ 都是 Y 的一个 λ-连通子集。如果 $(X,\kappa) = (Y,\lambda)$，我们将函数称为 κ-连续，作为“(κ,κ)-连续”的简写。

在 [16, 17] 中，类似的概念被称为浸入、渐变算子和渐变映射。

定理 2.4. [5] 数字图像 (X,κ) 与 (Y,λ) 之间的函数 $f\colon X \to Y$ 是 (κ,λ)-连续的，当且仅当对于每个 $x, y \in X$，若 $x \leftrightarrow_\kappa y$，则 $f(x) \leftrightarrows_\lambda f(y)$。

定理 2.5. [5] 设 $f\colon (X,\kappa) \to (Y,\lambda)$ 和 $g\colon (Y,\lambda) \to (Z,\mu)$ 是数字图像之间的连续函数。那么 $g \circ f\colon (X,\kappa) \to (Z,\mu)$ 连续。

函数 $f\colon (X,\kappa) \to (Y,\lambda)$ 是一个同构（在 [4] 中称为同胚），如果 f 是一个连续双射，且 f^{-1} 连续。

对于 $X \in \mathbb{Z}^n$，到 i^{th} 坐标的投影是函数 $p_i\colon X \to \mathbb{Z}$，定义如下

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i.$$

我们用 $C(X,\kappa)$ 表示 κ-连续函数 $f\colon X \to X$ 的集合。

定义 2.6. ([5]; 另见 [20]) 设 X 和 Y 是数字图像。设 $f, g : X \to Y$ 是 (κ,κ')-连续函数。假设存在一个正整数 m 和一个函数 $h\colon X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$，使得

- $for\ all\ x \in X,\ h(x,0) = f(x)\ and\ h(x,m) = g(x);$
- 对所有 $x \in X$，由下式定义的诱导函数 $h_x\colon [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$

$$h_x(t) \ = \ h(x,t)\ for\ all\ t \in [0,m]_{\mathbb{Z}}$$

是 (c_1,κ')–连续的。因此，h_x 是 Y 中的一条路径。

- 对所有 $t \in [0,m]_{\mathbb{Z}}$，由下式定义的诱导函数 $h_t\colon X \to Y$

$$h_t(x) \ = \ h(x,t)\ for\ all\ x \in X$$

是 (κ,κ')–连续的。

那么，h 是 f 与 g 之间的一个数字 (κ,κ')–同伦，并且 f 与 g 在 Y 中数字 (κ,κ')–同伦。

如果 $f \in C(X,\kappa)$ 满足 $f|_{f(X)} = \mathrm{id}_{f(X)}$，那么 f 是 X 的一个 $(\kappa$–$)$ 收缩，且 $f(X)$ 是 X 的一个 $(\kappa$–$)$ 缩回空间。

2.3 数字路径与简单闭曲线

根据定义 2.2 和定理 2.4，$\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset X$ 是从 x 到 y 的一条 κ-路径，当且仅当由 $f(i) = x_i$ 给出的函数 $f\colon [0,n]_{\mathbb{Z}} \to X$ 是 (c_1,κ)-连续的。这样的函数 f 也称为从 x 到 y 的一条 κ-路径。

如果 $i \neq j$ 蕴含 $x_i \neq x_j$ 是 (X,κ) 中的一条数字路径 P，则称 P 是从 $x \in X$ 到 $y \in X$的一条弧。

定义 2.7。 [19] 设 (X,κ) 是一个连通数字图像。(X,κ) 的最短路径度量为

$$d_{(X,\kappa)}(x,y) = \min\{length(P) \mid P是\ X\ 中从\ x到\ y\}的一条\ \kappa\text{-弧，其中}\ x,y \in X.$$

Let

$$N^*(x,m) = \{\, y \in X \mid d_{(X,\kappa)}(x,y) \leq m \,\}$$

注意 $N^*(x,1) = N^*(x)$。

设 (X,κ) 是一个有限连通数字图像。(X,κ) 的直径为

$$diam(X,\kappa) = \max\{\, d_{(X,\kappa)}(x,y) \mid x,y \in X \,\}.$$

由 n 个点组成的数字简单闭曲线是数字图像 (C_n,κ)，满足$C_n = \{\, c_i \,\}_{i=0}^{n-1}$，其中 $c_i \leftrightarrow_\kappa c_j$ 当且仅当 $i = (j \pm 1) \bmod n$。满足这些性质的索引称为圆周排序或圆周索引。通常，我们要求 $n \geq 4$。C_n 也可称为由 n 个点组成的圆。

设 q 和 q' 是 C_n 中两个不同的点。这些点在 C_n 中确定了从 q 到 q' 的两条不同的弧。如果其中一条弧比另一条短，则前者是 C_n 中从 q 到 q' 的唯一最短弧。

2.4 冻结集

定义 2.8。 [8] 设 (X,κ) 是一个数字图像。如果给定 $f \in C(X,\kappa)$，$A \subset \mathrm{Fix}(f)$ 蕴含 $f = \mathrm{id}_X$，则称 $A \subset X$ 是 (X,κ) 的冻结集。若冻结集 A 的任何真子集都不是 (X,κ) 的冻结集，则称 A 是极小的。

我们回顾以下内容。

命题 2.9. [15] 设 (X,κ) 是一个数字图像，且 $f \in C(X,\kappa)$。假设$x,x' \in \mathrm{Fix}(f)$ 满足：在 X中，从 x到x'存在唯一一条最短的 κ-路径 P。那么 $P \subset \mathrm{Fix}(f)$。

定理 2.10. [8]; [12] 中的修正后的证明 设 $X = \Pi_{i=1}^{n}[r_i,s_i]_{\mathbb{Z}}$。设 $A = \Pi_{i=1}^{n}\{r_i,s_i\}$。

- 设 $Y = \Pi_{i=1}^{n}[a_i,b_i]_{\mathbb{Z}}$ 满足：对于所有 i，都有 $[r_i,s_i] \subset [a_i,b_i]_{\mathbb{Z}}$。设 $f\colon X \to Y$是 c_1-连续的。如果 $A \subset \mathrm{Fix}(f)$，那么 $X \subset \mathrm{Fix}(f)$。
- A是 (X,c_1) 的一个冻结集，并且对于 $n \in \{1,2\}$ 而言是极小的。

定理 2.11. [8] 令 $n > 4$。令 x_i,x_j,x_k为 C_n的互异元素，且 C_n 是由这些点的点对所确定的唯一较短弧的并。令 $f \in C(C_n,\kappa)$。那么 $f = \mathrm{id}_{C_n}$当且仅当 $\{x_i,x_j,x_k\} \subset \mathrm{Fix}(f)$；即，$\{x_i,x_j,x_k\}$是 C_n的冻结集。此外，该冻结集是极小的。

3 n受限集

本节中，我们介绍极限集并探讨其一些基本性质。

3.1 定义和一般性质

冻结集和 s-冷集（后者将在下文定义）是本研究的动机。

定义 3.1. [8] 给定 $s \in \mathbb{N}^*$，若给定 $g \in C(X,\kappa)$ 满足 $g|_A = \mathrm{id}_A$ 时，对所有 $x \in X$，$d_{(X,\kappa)}(x, g(x))$ 都有 $\leq s$，则称 $A \subset X$ 是连通数字图像 (X,κ) 的 s-冷集。冷集是1-冷集。

s-冷集的概念是冻结集概念的推广，因为冻结集是0-冷集。接下来，我们介绍冷集的一种推广。

定义 3.2. 设 X 是一个 κ-连通数字图像。设 $f \in C(X,\kappa)$，且设$A \subset X$。设 $m, n \in \mathbb{N}^*$。若对所有 $x \in A$，都有 $d_{(X,\kappa)}(x, f(x)) \leq n$，则称 $f|_A$ 是一个 n-映射。若 $f|_X$ 是一个 n-映射，则称 f 是一个 n-映射。若对于所有 $f \in C(X,\kappa)$，$f|_A$ 是一个 m-映射意味着 f 是一个 n-映射，则称 A 是 (m,n)-极限集（相对于 (X,κ)），且 (X,κ) 是 (A,m,n)-受限的。若 A 的任一真子集 A' 都不是 (m,n)- 极限集（相对于 (X,κ)），则该集合是 (m,n)- 极限集（相对于 (X,κ)）中的极小集。

注 3.3. 以下结论显而易见：

- $f \in C(X,\kappa)$ 是0-映射，当且仅当 $f = \mathrm{id}_X$。因此，根据定义 2.8 和 3.2，(X,κ) 是 $(A, 0, 0)$-受限的，当且仅当 A 是 (X,κ) 的冻结集。
- 更一般地，(X,κ) 是 $(A, 0, s)$-受限的，当且仅当 A 是 (X,κ) 的 s-冷集。
- $f \in C(X,\kappa)$ 是1-映射，当且仅当每个 $x \in X$ 都是 f 的近似不动点，即 $f(x) \leftrightarrows_\kappa x$。因此，$(X,\kappa)$ 是 $(A, 1, 1)$-受限的，当且仅当对于每个 $f \in C(X,\kappa)$，$f|_A$ 是1-映射意味着每个 $x \in X$ 都是 f 的近似不动点。
- 如果 X 是有限且 κ-连通的，那么对于$0 \leq m \leq diam(X,\kappa)$和每个非空的 $A \subset X$，X是$(A, m, diam(X,\kappa))$-受限的。
- 如果 $f \in C(X,\kappa)$满足 $f|_A$ 是一个 m-映射且 $A' \subset A$，那么 $f|_{A'}$ 是一个m-映射。
- 如果(X,κ)是(A, m_0, n_0)-受限的，$0 \leq m_1 \leq m_0$，且 $n_0 \leq n_1$，那么(X,κ)是(A, m_1, n_1)-受限的。
- 如果 $f_i \in C(X,\kappa)$分别是 n_i映射，且 $i \in \{1, 2\}$，那么 $f_2 \circ f_1$是一个$(n_1 + n_2)$-映射。

例3.4. $\{0\}$是关于$([0,1]_{\mathbb{Z}}, c_1)$的极小$(0, 1)$-极限集，但不是$(0, 0)$-极限集。

证明. 这两个断言都可由以下观察得出：若 $f:[0,1]_{\mathbb{Z}} \to [0,1]_{\mathbb{Z}}$ 是函数 $f(x) = 0$, 则 $f \in C([0,1]_{\mathbb{Z}}, c_1)$。 □

或许可以这样理解具有 (A,m,n)-受限性质的重要性。如果 n 远小于 $diam(X,\kappa)$，且 $f|_A$ 是一个m-映射，那么 (X,κ) 为 (A,m,n)-受限意味着 f 是一个 n-映射，因此 f 对 X 中的任何点的移动都不会太大。或许因此， X 和$f(X)$会彼此相似，不过这种结论也可能因主观判断而有例外。

下面的结果推广了这样一个事实（可由定理 2.10 的第二部分推得）：数字区间端点构成该区间的冻结集。

命题 3.5。设 $X = [a,b]_{\mathbb{Z}}$。设 $m \in \mathbb{N}^*$。设 $A = \{a, b\}$。则 (X, c_1) 是 (A,m,m)-受限的。此外， A 是极小的，当且仅当 $b - a > m$。

证明。设 $f \in C(X, c_1)$，使得 $f|_A$ 是一个 m-映射。令 $x \in X$, $a < x < b$。

- 假设 $f(x) > x + m$。由于 $f(a) \leq a + m$，我们有

$$f(x) - f(a) > x + m - (a + m) = x - a,$$

这与 f 的连续性相矛盾。

- 若 $f(x) < x - m$，同样会得到矛盾。

因此，必有 $|f(x) - x| \leq m$，所以 f 是一个 m-映射。

给定 $f_a, f_b : X \to X$，定义为 $f_a(x) = a$, $f_b(x) = b$。它们是 c_1-连续的 $(b-a)$-映射，满足 $f_a|_{\{a\}}$ 是一个 0-映射，因此也是一个 m-映射；而 $f_b|_{\{b\}}$ 是一个 0-映射，因此也是一个 m-映射。

- 如果 $b - a > m$，那么 A 是极小的，因为 f_a 和 f_b 不是 m-映射。
- 如果 $diam(X, c_1) = b - a \leq m$，那么 $C(X, c_1)$ 的每个成员都是 m-映射，因此 A 不是极小的。

□

我们有如下结果。

命题 3.6. 设 (X,κ) 是一个连通数字图像，并且对于某些 $\emptyset \neq A \subset X$ 和 $0 \leq m \leq n$，它是 (A,m,n)-受限的。那么 A 是 (X,κ) 的一个 n-冷集。

证明。设 $f \in C(X,\kappa)$ 使得 $f|_A = \mathrm{id}_A$。那么 $f|_A$ 是一个 0-映射，因而是一个m-映射。因此， f 是一个 n-映射。断言得证。 □

命题 3.7. [8] 设 $m, n \in \mathbb{N}$。设 $X = [0,m]_{\mathbb{Z}} \times [0,n]_{\mathbb{Z}}$。设 $A \subset Bd(X)$ 满足： $Bd(X)$ 中任意两个 c_1-相邻的元素都不属于 $Bd(X) \setminus A$。那么 A 是 (X, c_2) 的 1-冷集。

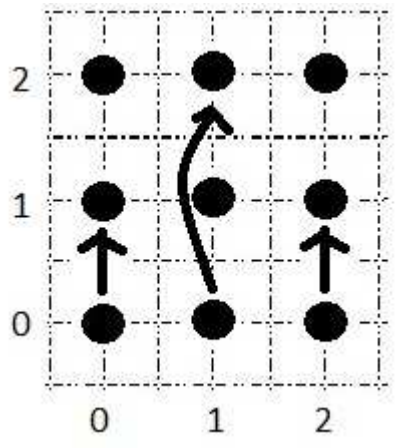


图1： $X = [0,2]^2_{\mathbb{Z}}$。 f： $X \to X$ 通过箭头展示了未被 f 固定的点如何映射。

$f(0,0) = (0,1), f(1,0) = (1,2), f(2,0) = (2,1)$.
这是例3.8中的函数。容易看出， $f \in C(X, c_2)$ 和 f 是一个 2-映射，尽管对于角点集 A（(X, c_2) 的一个 1-冷集）， $f|_A$ 是一个 1-映射。

请注意，检验集合 A 是否具有 n-冷性的假设（即 $f|_A$ 是一个 0-映射），比检验 (A, m, n)-受限性的假设（即$f|_A$ 是一个 m-映射）更严格。因此，命题 3.6 的逆命题并非总是成立，这或许并不令人意外，下面的例子将对此加以说明。

例3.8。令 $X = [0,2]^2_{\mathbb{Z}}$。令

$$A = \{ (0,0), (0,2), (2,0), (2,2) \} \subset X.$$

根据命题 3.7， A 对于（X， c_2）是 1-冷的，即（X， c_2）是（A，0，1）-受限的。然而，（X， c_2）不是（A，1，1）-受限的。

证明。令 f： $X \to X$ 为函数（见图1）

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{if } y > 0; \\ (x,1) & \text{if } (x,y) \in \{ (0,0), (2,0) \}; \\ (1,2) & \text{if } (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

容易看出， $f \in C$（X， c_2），且 $f|_A$ 是一个 1-映射，但 f 不是 1-映射，因为 $d_{(X,c_2)}((1,0), f(1,0)) = 2$。 □

我们证明，（A， m， n）-受限性是一个同构不变量。

定理3.9. 设 $F: (X, \kappa) \to (Y, \lambda)$ 是连通数字图像的一个同构。设 $\emptyset \neq A \subset X$。设 m, $n \in \mathbb{N}^*$。若 (X, κ) 是 (A, m, n)-受限的，则 (Y, λ) 是 $(F(A), m, n)$-受限的。此外，若 A 是 (m, n)-极限集（针对 (X, κ)）中的一个极小集，则 $F(A)$ 是 (Y, λ) 的一个极小 (m, n)-极限集。

证明. 设 $f \in C\ Y\ \lambda$ $f|_{F(A)}$ m 2 5 $G =$(,), 使得 是一个 -映射。 $F^{-1} \circ f \circ F \in C\ X\ \kappa$ 根据定理 . , (,)。

令 $a \in A$。那么

$$m \geq d_{(Y,\lambda)}(Fa, fFa) = d_{(X,\kappa)}(F^{-1}Fa, F^{-1}fFa) = d_{(X,\kappa)}(a, Ga);$$

也就是说， $G|_A$ 是一个 m-映射。因此， G 是一个 n-映射。

令 $y = F(x)$ 为 Y 中的任意一点。那么

$$d_{(Y,\lambda)}(y, f(y)) = d_{(X,\kappa)}(F^{-1}(y), F^{-1}(f(y))) =$$

$$d_{(X,\kappa)}(F^{-1}(F(x)), F^{-1}(f(F(x)))) = d_{(X,\kappa)}(x, G(x)) \leq n.$$

因此， f 是一个 n-映射。

若 A 是极小的，假设 $F(A)$ 不是。则存在 $F(A)$ 的一个真子集 B，使得 B 是 (m,n)-极限集，对应于 (Y,λ)。那么 $F^{-1}(B)$ 是 A 的一个真子集，并且根据上文，它是 (m,n)- 极限集，对应于 (X,κ)。这与 A 的极小性矛盾，由此可知 B 是极小的。 □

定理 3.10. 设 $\emptyset \neq A \subset X$ 对于连通数字图像 (X,κ)。设 $k \in \mathbb{N}^*$。假设对于每个 $x \in X$，都存在 $a_x \in A$，使得 $d_{(X,\kappa)}(x, a_x) \leq k$。假设 $f \in C(X,\kappa)$。若 $f|_A$ 是一个 m-映射，则 f 是一个 $(m+2k)$-映射。

证明。给定 $x \in X$，令 f 和 a_x 如上所述。于是

$$d_{(X,\kappa)}(x, f(x)) \leq d_{(X,\kappa)}(x, a_x) + d_{(X,\kappa)}(a_x, f(a_x)) + d_{(X,\kappa)}(f(a_x), f(x)) \leq$$

$$k + m + k = m + 2k.$$

断言得证。 □

推论 3.11。设 $\emptyset \neq A \subset X$ 是连通数字图像 (X,κ) 的一个 $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$。假设对每个 $x \in X$，都存在 $a_x \in A$，使得 $d_{(X,\kappa)}(x, a_x) \leq k$。那么 (X,κ) 是 $(A, m, m+2k)$-受限的。

证明。这由定理 3.10 得出。 □

回顾一下，如果给定 $x \in X$，存在 $a \in A$ 使得 $x \leftrightarrows_\kappa a$，那么 A 是 (X,κ) 的支配集。

推论 3.12。设 A 是连通数字图像 (X,κ) 的支配集。

- 假设 $f \in C(X,\kappa)$。若 $f|_A$ 是一个 m-映射，则 f 是一个 $(m+2)$-映射。
- 若对于每个 $f \in C(X,\kappa)$， $f|_A$ 都是一个 m-映射，则 (X,κ) 是 $(A, m, m+2)$-受限的。

证明。取定理 3.10 和推论 3.11 中的 $k = 1$，即可得到这些断言。 □

如下所示，一般而言，我们不能在定理 3.10 或推论 3.11 中用 $m+1$ 替换 $m+2$。

例 3.13. 设 $X = [-1,1]_{\mathbb{Z}}$。那么 $A = \{0\}$ 支配 (X, c_1)，并且容易看出，函数 $f(x) = |x|$ 属于 $C(X, c_1)$，其中 $f|_A$ 是一个 0-映射，但 f 是一个不是 1-映射的 2-映射。

3.2 直径

引理 3.14. 设 Y 是连通数字图像 (X,κ) 的一个 κ-连通子集。设 $y_0, y_1 \in Y$。那么

$$d_{(Y,\kappa)}(y_0, y_1) \geq d_{(X,\kappa)}(y_0, y_1).$$

证明。我们有 $d_{(Y,\kappa)}(y_0, y_1) = length(P)$，其中 P 是从 y_0 到 y_1 的 Y 中的最短 κ-路径。由于 $P \subset X$，结论得证。 □

以下内容表明，引理 3.14 中的不等式可能是严格不等式。

例 3.15。设 (X,κ)、$X = \{p_i\}_{i=0}^{m}$ 是一个具有 $m+1$ 个点的数字简单闭曲线，这些点按圆周指标编号为 $m \geq 4$。设 $Y = X \setminus \{p_0\}$。则

$$d_{(Y,\kappa)}(p_1, p_m) = m - 1 > 2 = d_{(X,\kappa)}(p_1, p_m).$$

定理 3.16。设 (X,κ) 是一个有限连通数字图像。设 $f\colon X \to X$ 是一个 m-映射。考虑不等式

$$diam(f(X)) \geq diam(X) - 2m \tag{1}$$

如果使用 $d_{(X,\kappa)}$ 或使用 $d_{(f(X),\kappa)}$ 计算 $diam(X)$，则不等式 (1) 成立。

证明。由于 X 是有限的，$diam(X) = M < \infty$。因此，存在 x、$y \in X$以及一条从 x 到 y、长度为 M 的 κ-路径 P，位于 X 中。我们有

$$\begin{aligned} M = d_{(X,\kappa)}(x,y) &\leq d_{(X,\kappa)}(x, f(x)) + d_{(X,\kappa)}(f(x), f(y)) + d_{(X,\kappa)}(f(y), y) \\ &\leq m + d_{(X,\kappa)}(f(x), f(y)) + m, \qquad \text{or} \\ M - 2m &\leq d_{(X,\kappa)}(f(x), f(y)). \end{aligned}$$

根据引理 3.14，可得

$$M - 2m \leq diam_{(X,\kappa)}(f(X)) \leq diam_{(f(X),\kappa)}(f(X)).$$

□

3.3 超空间度量

豪斯多夫度量 [21] 常用于衡量度量空间中两个对象的位置相似程度。给定度量空间 (X,d) 的非空子集 A 和 B，基于 d、用于衡量 A 与B之间距离的豪斯多夫度量 $H_d(A,B)$，是满足以下条件的最小 $\varepsilon \geq 0$：给定 $a \in A$ 和 $b \in B$，存在$a' \in A$ 和 $b' \in B$，使得

$$\max\{d(a,b'), d(a',b)\} \leq \varepsilon.$$

Borsuk 连续性度量 [2, 3] 基于度量 d，现已作如下调整以适用于数字拓扑 [11]。对于连通的（X，κ）中的数字图像 Y_0 和 Y_1，连续性度量 δ_d（Y_0，Y_1）是满足以下条件的数$t > 0$ 的最大下界：存在 κ-连续映射 f：$Y_0 \to Y_1$ 和 g：$Y_1 \to Y_0$，使得

$$d_{(X,\kappa)}(x, f(x)) \leq t \text{ for all } x \in Y_0 \text{ and } d_{(X,\kappa)}(y, g(y)) \leq t \text{ for all } y \in Y_1.$$

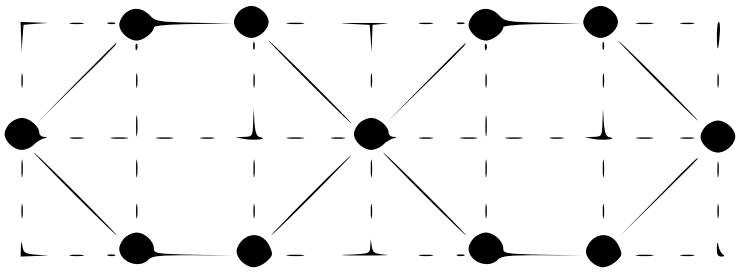


图2： [15]的图1所示数字图像。 [15] 的例3.11表明，该图像在采用 c_2 邻接关系时是刚性的。

命题3.17。 [11] 设有限数字图像（X， κ）和（Y， κ）属于 $\mathbb{Z}^n$ ，且 d 是 $\mathbb{Z}^n$ 的度量，则 H_d（X， Y） $\leq \delta_d$（X， Y）。

定理3.18。设 (X,κ) 是有限连通数字图像。设 $f \in C(X,\kappa)$ 是一个 m-映射。那么

$$H_{d_{(X,\kappa)}}(X, f(X)) \leq \delta_{d_{(X,\kappa)}}(X, f(X)) \leq m.$$

证明。 $H_{d_{(X,\kappa)}}(X, f(X)) \leq \delta_{d_{(X,\kappa)}}(X, f(X))$ 由命题3.17得出。设 $x \in X$，并设 $y = f(x) \in f(X)$。根据 f的选取， $d_{(X,\kappa)}(x, y) \leq m$。

令 g： $f(X) \to X$ 为包含函数 $g(y) = y$。显然， g 是一个0-映射，因此也是一个 m-映射。断言得证。 □

3.4 刚性图像

定义3.19。 [18] 如果数字图像 (X,κ) 中，$C(X,\kappa)$ 的唯一一个与 id_X 同伦的元素是 id_X，则称该数字图像为刚性的。

刚性数字图像的一个例子见图2。

命题3.20。设 (X,κ) 是一个刚性的连通数字图像。那么，在 $C(X,\kappa)$ 中，除 id_X 外，不存在其他 1-映射。

证明。设 f 是 $C(X,\kappa)$ 中的一个 1-映射。则函数h： $X \times [0,1]_{\mathbb{Z}} \to X$ 定义如下:

$$h(x,0) = x, \quad h(x,1) = f(x)$$

显然，它是从 id_X 到 f的一个同伦。由定义3.19可知， $f = \mathrm{id}_X$。

□

4 树

在本节中，(T,κ) 是一棵有限树， A 是 T 中度为 1 的顶点集合，也就是说，对于 $a \in T$， $\#N(a) = 1$ 当且仅当 $a \in A$。

定理 4.1. 当 $\#T > 1$ 时，$[8]$ A 是 (T, κ) 的极小冻结集。

定理 4.2. 设 (T, κ) 是一棵有限树，且 A 是 T 中度为 1 的成员集合。则对于 $m \in \{0, 1\}$，A 是 (m, m)-极限集。对于 $m = 1$，A 是极小的，当且仅当 $\#T \neq 2$。

证明. 显然，当 $\#T = 1$ 时，$A = \emptyset$ 是 (0,0)-极限集。由定理 4.1，当 $\#T > 1$ 时，A 是 (0,0)-极限集。接下来我们证明 A 是 (T, κ) 的 (1,1)-极限集。

设 $x \in X$, $f \in C(T, \kappa)$，使得 $f|_A$ 是一个 1-映射。我们证明该假设

$$d_{(T,\kappa)}(x, f(x)) > 1 \tag{2}$$

会导致矛盾。

存在 $y_0, y_1 \in A$，使得在 T 中，从 y_0 到 y_1 的唯一最短 κ-路径 P 包含 $\{x, f(x)\}$。

令 $p : [0, k]_{\mathbb{Z}} \to P$ 为一个同构，且 $p(0) = y_0$ 和 $p(k) = y_1$。由于 $y_0, y_1 \in A$，我们必有 $\{f(y_0), f(y_1)\} \subset P$。由于 $f|_A$ 是一个 1-映射，

$$f(y_0) \in \{y_0 = p(0), p(1)\}, \qquad f(y_1) \in \{y_1 = p(k), p(k-1)\}$$

设 $x = p(t)$、$f(x) = p(t')$。

- 假设 $t \leq t'$。由 (2)，$t' > t + 1$，以及 $d_{(T,\kappa)}(y_0, x) = t$。于是

$$d_{(T,\kappa)}(f(x), f(y_0)) \geq t' - 1 > t + 1 - 1 = t = d_{(T,\kappa)}(x, y_0),$$

这不可能，因为 f 是连续的。

- 若 $t > t'$，也会得到类似的矛盾。

因此，f 是一个 1-映射，这证明了 A 是 (1, 1)-限制的。

假设 $\#T \neq 2$。如上所述，A 对于 $\#T = 1$是极小的。因此，设 $\#T > 2$。那么 $\#A > 1$，因为 (T, κ) 是一棵树。设 a 和 b 是 A的不同成员。设P是 T中从 a 到 b的唯一最短 κ- 路径。存在一个 (c_1, κ)- 同构 $p : [0, length(P)]_{\mathbb{Z}} \to P$，使得 $p(0) = a$。那么，由 $T \to T$定义的函数 f为

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \neq a; \\ p(2) & \text{if } x = a, \end{cases}$$

很容易看出它属于 $C(T, \kappa)$；而且 f是一个 2-映射。因此，$A \setminus \{a\}$ 不是一个 (1, 1)-极限集，所以 A是 (T, κ) 的一个极小 (1, 1)-极限集。

对于 $\#T = 2$, $A \neq \emptyset$，所以 A 不是极小的，因为在这种情况下，我们很容易看出$\emptyset$是 (T, κ) 的一个极小 (1, 1)-极限集。 □

5 边平行于坐标轴的矩形

本节中，我们考察形式为 $[a, b]_{\mathbb{Z}} \times [c, d]_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^2$ 的数字矩形的极限集。

5.1 c_1 (A, m, m)-受限矩形

定理 5.1. 设 $X = [0, j]_{\mathbb{Z}} \times [0, k]_Z$。设 A 为 X 的角点集合，即，

$$A = \{ (0, 0),\ (0, k),\ (j, 0),\ (j, k) \}.$$

于是，对所有 $m \in \mathbb{N}^*$，(X, c_1) 都是 (A, m, m)-受限的。

证明。设 $f \in C(X, c_1)$，使得 $f|_A$ 是一个 m-映射。假设存在一个 $(a, b) \in X$，使得

$$d_{(X,c_1)}((a, b), f(a, b)) > m \tag{3}$$

首先考虑 f 将 (a, b) 从角点 $(0, 0)$ 移开的情形，即 $p_1(f(a, b)) \geq a$, $p_2(f(a, b)) \geq b$。由 (3) 可得

$$p_1(f(a, b)) - a + p_2(f(a, b)) - b > m,$$

so

$$\begin{aligned} d_{(X,c_1)}((a, b), (0, 0)) = a + b < p_1(f(a, b)) + p_2(f(a, b)) - m \leq \\ p_1(f(a, b)) + p_2(f(a, b)) - [p_1(f(0, 0)) + p_2(f(0, 0))] \\ = d_{(X,c_1)}(f(a, b), f(0, 0)). \end{aligned}$$

这不可能，因为 f 是连续的。

对以下每种情形，也可以作类似的论证。

- f从角点（$j, 0$）向外移动（a, b），即，

  $$p_1(f(a, b)) \leq a,\ \ p_2(f(a, b)) \geq b.$$

  这里得到 $d_{(X,c_1)}(f(a, b)\ f(j, 0)) > d_{(X,c_1)}((a, b), (j, 0))$。与上文一样，后者矛盾。

- f从角点（$0, k$）向外移动（a, b），即，

  $$p_1(f(a, b)) \geq a,\ \ p_2(f(a, b)) \leq b.$$

  这里得到 $d_{(X,c_1)}(f(a, b)\ f(0, k)) > d_{(X,c_1)}((a, b), (0, k))$。与上文一样，后者矛盾。

- f 从角点（j, k）向外移动（a, b），即，

  $$p_1(f(a, b)) \leq a,\ \ p_2(f(a, b)) \leq b.$$

  这里得到 $d_{(X,c_1)}(f(a, b)\ f(j, k)) > d_{(X,c_1)}((a, b), (j, k))$。与上文一样，后者矛盾。

由于每种情况都会导致矛盾，因此断言得证。 □

5.2 $c_n(A, m, m)$-受限 n-立方体

定理 5.2. 设 $X = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]_{\mathbb{Z}}$。令 A 为 X 的角点集合，即 $A = \prod_{i=1}^{n}\{a_i, b_i\}$。设 $m > 0$。设 $f \in C(X, c_n)$，使得 $f|_A$ 是 m-受限的。那么 f 是 m-受限的。因此，(X, c_n) 是 (A, m, m)-受限的。

证明。否则，对于某个 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, $d_{(X,c_n)}(x, f(x)) > m$。于是，对于某个指标 i, $|x_i - p_i(f(x))| > m$。如定理 5.1 的证明所示，这会导致矛盾。结论得证。 □

命题 5.3. [8] 设 $X = \prod_{i=1}^{n}[0, m_i]_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^n$，其中 $m_i > 1$ 对所有 i都成立。设 $A \subset Bd(X)$满足 A 在 $Bd(X)$ 中不是 c_n-支配的。那么 A 不是 (X, c_n) 的冷集。

注记 5.4. 我们不能在定理 5.2 中将 0 作为 m 的取值，因为根据命题 5.3，如果对于某个指标 i，有 $b_i - a_i > 2$，那么 A 不是冷集，因此也不是 (X, c_n) 的冻结集。

6 简单闭曲线

我们研究数字简单闭曲线的极限集。在本节中，C_v 是一条数字简单闭曲线（由 v 个点构成的圈）：$C_v = \{x_i\}_{i=0}^{v-1}$，其中 $v \geq 4$ 满足 C_v 中的元素按圆周顺序编了索引。

对于 $v \geq 4$，我们定义

$$D(v) = \begin{cases} \frac{v-2}{4} - 1 & \text{if } v-2 \text{ is a multiple of 4;} \\ \lfloor \frac{v-2}{4} \rfloor & \text{if } v-2 \text{ is not a multiple of 4.} \end{cases}$$

对于 $0 \leq d < v$，我们称由下式给出的函数 r_d： $C_v \to C_v$

$$r_d(x_i) = x_{(i+d) \mod v}$$

是一个旋转。

由 $f(x_i) = x_{(v-i) \text{ 模 } v}$ 给出的函数 f： $C_v \to C_v$ 称为翻转映射。旋转和翻转映射都是（C_v, κ）的同构。

定理 6.1. [15] 设 $f \in C(C_v, \kappa)$。那么

- f 不是满射，或者
- f 是一个旋转，或者
- f 是翻转映射与旋转的复合。

定理 6.2. [6] 设 f: $C_v \to \mathbb{Z}$ 是 (κ, c_1)-连续的。假设 v 是偶数。如果f 不是满射，则存在 $x_u \in C_v$ 使得 $f(x_u) \leftrightarrows_{c_1} f(x_{u+v/2})$。

命题 6.3. 设 $f \in C(C_v, \kappa)$。假设 f 不是满射，且 v 为偶数。那么存在一个指标 j，使得 $d_{(C_v,\kappa)}(x_j, f(x_j)) \geq (v-2)/4$，因此 f不是一个$D(v)$-映射。

证明. 由于 f 不是满射且连续， $f(C_v)$ 与一个数字区间（κ, c_1）-同构。根据定理 6.2，存在 $x_u \in C_v$ ，使得 $f(x_u) \leftrightarrows_\kappa f(x_{u+v/2})$。因此

$$v/2 = d_{(C_v,\kappa)}(x_u, x_{u+v/2}) \leq$$
$$d_{(C_v,\kappa)}(x_u, f(x_u)) + d_{(C_v,\kappa)}(f(x_u)\ f(x_{u+v/2})) + d_{(C_v,\kappa)}(f(x_{u+v/2})\, x_{u+v/2}) \leq$$
$$d_{(C_v,\kappa)}(x_u, f(x_u)) + 1 + d_{(C_v,\kappa)}(f(x_{u+v/2}), x_{u+v/2})$$

or

$$\frac{v-2}{2} \leq d_{(C_v,\kappa)}(x_u, f(x_u)) + d_{(C_v,\kappa)}(f(x_{u+v/2}), x_{u+v/2})$$

Thus

$$\max\{\, d_{(C_v,\kappa)}(x_u, f(x_u)), d_{(C_v,\kappa)}(x_{u+v/2}, f(x_{u+v/2}))\,\} \geq \frac{v-2}{4} > D(v).$$

因此， f 不是一个 $D(v)$-映射。 □

命题 6.4. 当 $m_d = \min\{\, d, v-d\,\}$ 时，旋转 r_d 是一个 m_d-映射。事实上，对于所有指标 i，都有 $d_{(C_v,\kappa)}(x_i, r_d(x_i)) = m_d$。

证明。内容简单，留给读者完成。 □

定理 6.5. 设 $A = \{\, x_i, x_j, x_k\,\} \subset C_v$，其中 C_v 是由这些点对所确定的唯一较短弧的并集。（注意，根据定理 2.11， A 是 (C_v, κ) 的冻结集。）设 R_{ij} 是从 x_i 到 x_j 的唯一较短弧，R_{ik} 是从 x_i 到 x_k 的唯一较短弧， R_{jk} 是从 x_j 到 x_k 的唯一较短弧。令

$$0 \leq m \leq \min\{\, D(v),\ length(R_{ij})/2,\ length(R_{ik})/2,\ length(R_{jk})/2\,\}.$$

那么 (C_v, κ) 是 (A, m, m)-受限的。

证明。根据我们对 m 的选择以及命题 6.3， $C(C_v, \kappa)$ 中的每个 m-映射都是满射。

根据命题 6.4，如果 $f \in C(C_v, \kappa)$ 是旋转，且 $f|_A$ 是一个 m-映射，那么 f 是一个 m-映射。

令 ℓ 为 C_v, $g = \ell \circ r_d \colon C_v \to C_v$ 和 $g' = r_d \circ \ell \colon C_v \to C_v$ 的翻转映射。根据定理 2.5， $g, g' \in C(C_v, \kappa)$，且这些函数是同构，因此相对于 $d_{(C_v,\kappa)}$ 保距。令 $G \in \{\, g, g'\,\}$。

假设 $G(x_i) \in N^*(x_i, m)$。根据我们对 m 的选择以及 G 反向保向这一事实， $G(x_j) \notin N^*(x_j, m)$。类似地，如果 $G(x_j) \in N^*(x_j, m)$ 或 $G(x_k) \in N^*(x_k, m)$，那么 $G(x_i) \notin N^*(x_i, m)$。因此，$G$ 不是一个 m-映射。

由定理 6.1 可得，若 $f \in C(C_v, \kappa)$，且 $f|_A$ 是一个 m-映射，则 f 是一个旋转，也是一个 m-映射。因此，(C_v, κ) 是 $A(m, m)$-受限的。 □

7 极限集与收缩

我们将说明，若 X 和 Y 是有限连通数字图像，且 Y 是 X 的缩回空间，则 Y 的一个极限集也是 X 的一个极限集，尽管对应的 (m,n) 对未必相同。

定理 7.1. 设 $\emptyset \neq A \subset Y \subset X$，使得 (X,κ) 和 (Y,κ) 是有限且连通的，并且 Y 是 X 的 κ-缩回空间，其中收缩 $r \in C(X,\kappa)$ 是一个 ε-映射。设 $h = H_{d_{(X,\kappa)}}(X,Y)$。假设 Y 是 (A,m,n)-受限的。设 $f \in C(X.\kappa)$，使得 $f|_A$ 是 m-受限的。那么 f 是一个 $(n+2h+\varepsilon)$-映射；因此 (X,κ) 是 $(A,m,n+2h+\varepsilon)$-受限的。

证明。设 $f \in C(X,\kappa)$，使得 $f|_A$ 是一个 m-映射。那么给定 $a \in A$，存在一条从 a 到 $f(a)$ 的 κ-路径 $P \subset X$，其长度至多为 m。于是，$r \circ f|_Y \in C(Y,\kappa)$，且 $r(P)$ 是 Y 中从 $r(a) = a$ 到 $r(f(a))$ 的一条 κ-路径，其长度至多为 m。因此，$r \circ f|_A$ 是一个 m-映射，所以 $r \circ f|_Y$ 是一个 n-映射。

设 $x \in X$。存在 $y \in Y$，使得 $d(x,y) \leq h$。那么

$$d(x,f(x)) \leq d(x,y) + d(y,r(f(y))) + d(r(f(y)),r(f(x))) + d(r(f(x)),f(x))$$

$$\leq h + n + d(y,x) + \varepsilon \leq n + 2h + \varepsilon.$$

因此，f 是一个 $(n+2h+\varepsilon)$-映射；因此 (X,κ) 是 $(A,m,n+2h+\varepsilon)$-受限的。 □

定理 7.1 中的界 $n+2h+\varepsilon$ 通常并不紧，如下例所示。

例 7.2。设 (X,κ) 是一个有限的连通数字图像。设 $x_0 \in X$ 和 $A = Y = \{x_0\}$。设 $h = H_{d(X,\kappa)}(X,Y)$。显然，A 是 (Y,κ) 的冻结集，即 (Y,κ) 是 $(A,0,0)$-受限的。由于函数 $r\colon X \to X$ 由 $r(x) = x_0$ 给出，既是一个 h-映射，也是从 X 到 Y 的收缩，定理 7.1 蕴含 (X,κ) 是 $(A,0,3h)$-受限的。然而，正如注 3.3 所指出的，(X,κ) 是 $(A,0,h)$-受限的。

8 笛卡尔积

本节讨论数字图像的笛卡尔积的极限集的基本性质。

给定数字图像或图 (X,κ) 和 (Y,λ)，由 κ 和 λ 在笛卡尔积 $X \times Y$ 上生成的正规乘积邻接关系 $NP(\kappa,\lambda)$（也称为强邻接 [25]）定义如下。

定义 8.1。 [1, 24] 令 $x,x' \in X$, $y,y' \in Y$。当且仅当以下条件成立时，(x,y) 和 (x',y') 在 $X \times Y$ 中是$NP(\kappa,\lambda)$-邻接的：

- $x = x'$ 且 y 且 y' 是 λ-邻接的；或
- x 且 x' 是 κ-邻接的，且 $y = y'$；或
- x 和 x' 是 κ-邻接的，y 和 y' 是 λ-邻接的。 □

定义 8.2。 [24, 7] 设 $u, v \in \mathbb{N}, 1 \leq u \leq v$。设 (X_i, κ_i) 为数字图像，$i \in \{1, \ldots, v\}$。设 $x_i, y_i \in X_i$, $x = (x_1, \ldots, x_v)$, $y = (y_1, \ldots, y_v)$。那么，如果至少有 1 个且至多有 u 个指标 i, $x_i \leftrightarrow_{\kappa_i} y_i$，而对于所有其他指标 j, $x_j = y_j$，则 $x \leftrightarrow y$在广义正规乘积邻接 $NP_u(\kappa_1, \ldots, \kappa_v)$ 下成立。

给定一组函数 $f_i : X_i \to Y_i$ for $1 \leq i \leq n$，乘积函数$\Pi_{i=1}^n f_i : \Pi_{i=1}^n X_i \to \Pi_{i=1}^n Y_i$ 为如下函数

$$\left(\Pi_{i=1}^n f_i\right)(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)), \text{ where } x_i \in X_i.$$

定理 8.3. [7] 设 $f_i : (X_i, \kappa_i) \to (Y_i, \lambda_i)$, $1 \leq i \leq v$。则乘积映射

$$\Pi_{i=1}^v f_i : (\Pi_{i=1}^v X_i, NP_v(\kappa_1, \ldots, \kappa_v)) \to (\Pi_{i=1}^v Y_i, NP_v(\lambda_1, \ldots, \lambda_v))$$

当且仅当每个 f_i 都连续时，才是连续的。

定理 8.4. 设 $X = \prod_{i=1}^v X_i$。设 $\kappa = NP_v(\kappa_1, \ldots, \kappa_v)$。设 $\emptyset \neq A \subset X$。对每个指标 i，设 $A_i = p_i(A)$。假设 (X, κ) 是 (A, m, n)-受限的。那么对每个指标 i，(X_i, κ_i) 都是 (A_i, m, n)- 受限的。

证明。假设 $f_i \in C(X_i, \kappa_i)$，且 $f_i|_{A_i}$ 是一个 m-映射。那么对每个$x_i \in A_i$，存在一条路径 $g_i : [0, m]_{\mathbb{Z}} \to X_i$，从 x_i 到 $f_i(x_i)$。考虑由下式给出的函数 $G : [0, m]_{\mathbb{Z}} \to X$

$$G(t) = (g_1(t), \ldots, g_v(t)).$$

显然， G 是(c_1, κ)-连续的。此外，由定理 8.3,

$$F = \prod_{i=1}^v f_i \in C(X, \kappa).$$

因此， G 是从$(x_1, \ldots, x_v) \in A$ 到 $F(x_1, \ldots, x_v)$的一条长度至多为 m 的 κ-路径。因此， $F|_A$ 是一个 m-映射。因此， F 是一个 n-映射。因此，给定 $x = (x_1, \ldots, x_v) \in X$，存在一条路径 $H : [0, n]_{\mathbb{Z}} \to X$，从 x 到 $F(x)$。那么 $p_i \circ H$ 是 X_i 中从 x_i 到 $f_i(x_i)$的一条长度至多为 n 的 κ_i-路径。断言得证。 □

9 无限 X

本节介绍无限数字图像的极限集的一些基本性质。

命题 9.1. 设 X 是 $\mathbb{Z}^n$的一个无限子集。那么对于 $1 \leq u \leq v$，任意m、 $n \in \mathbb{N}^*$以及任意有限 $A \subset X$，(X, c_u)都不是(A, m, n)-受限的。

证明。给定 $\mathbb{Z}^n$ 的任意有限子集 A，存在一个立方体 $Y = [-k, k]_{\mathbb{Z}}^v$，使得 $A \subset Y$。

令 $r_1:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 为该 c_1-收缩

$$r_1(x)=\begin{cases}-k & \text{if } x\le -k;\\ x & \text{if } -k\le x\le k;\\ k & \text{if } k\le x.\end{cases}$$

那么，函数 $r_v:\ X\to Y$ 定义为

$$r_v(x_1,\dots,x_v)=(r_1(x_1),\dots,r_1(x_v))$$

很容易看出是从 $\mathbb{Z}^n$ 到 Y的一个 c_u-收缩。因此， $r|_A$ 是一个 0-映射，故为一个 m-映射。

然而，由于 X 是无限的，而 Y 是有限的，对于任意给定的 $m\in\mathbb{N}^*$，存在$x\in X$，使得 Y 中的任何元素与 x 在 $d_{(X,c_u)}$ 度量下的距离都不小于 m 。断言得证。

□

例 9.2。设 $m\in\mathbb{N}$。集合

$$m\mathbb{Z}=\{\,x\in\mathbb{Z}\mid x=mk\ for\ some\ k\in\mathbb{Z}\,\}$$

是 $(\mathbb{Z},c_1)$ 的一个 (m,m)-极限集。

证明。若 $m=1$，则断言显然成立。因此我们假设 $m>1$。

令 $f\in C(\mathbb{Z},c_1)$，使得 $f|_{m\mathbb{Z}}$ 是一个 m-映射。令 $z\in\mathbb{Z}\setminus m\mathbb{Z}$。对于某些 $k\in Z$ 和 $q\in[1,m-1]_{\mathbb{Z}}$,

$$z=mk+q.$$

我们必须证明 $|f(z)-z|\ \le m$。假设这不成立。

若 $k\ge 0$，则按如下方式进行。

- 若 $f(z)-z>m$，则

$$f(z)>z+m=m(k+1)+q,$$

并且，由于 $f|_{m\mathbb{Z}}$ 是一个 m-映射， $f(mk)\le m(k+1)$，因此

$$f(z)-f(mk)>m(k+1)+q-m(k+1)=q.$$

因此， $f([mk,z]_{\mathbb{Z}})$ 是 $\mathbb{Z}$ 中一条长度大于 q 的 c_1-路径。但是， $[mk,z]_{\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中一条长度为 q 的 c_1-路径。这是不可能的。

- 同理，如果 $f(z)-z<-m$，就会得到矛盾。

同样，如果 $k<0$，我们就会得到矛盾。由此可得， f 是一个m-映射。因此，$m\mathbb{Z}$ 是（m， m）-（$\mathbb{Z}$， c_1）的极限集。 □

10 进一步说明

数字图像的不动点理论促使我们研究极限集。具体而言，（A，m，n）-受限数字图像（X，κ）这一概念推广了 A 是（X，κ）的冻结集这一概念。如果相对于 $diam$（X，κ）而言，m 和 n 都很小，那么我们可以预期，$f \in C$（X，κ）不会使 X 中的任何点移动太远（即移动超过 n），其中 $f|_A$ 是一个 m-映射；因此，我们可能会预期 f（X）与 X 相似（不过，这种结论带有主观性，也可能主观地存在例外）。

我们探讨了极限集的若干基本性质，包括它们与收缩、笛卡尔积和无限基数之间的一些关系。我们发现，通常，如果 A 是 (X, κ) 的冻结集（即 (X, κ) 是 $(A, 0, 0)$-受限的），那么对于满足 $(m, n) \neq (0, 0)$ 的较小 m, n，(X, κ) 是 (A, m, n)-受限的。

我们感谢一位审稿人指出错误并提出建议。

参考文献

[1] C. Berge，《图与超图》，第2版，North-Holland，阿姆斯特丹，1976年。[2] K. Borsuk，关于紧集超空间的若干度量化，《Fundamenta Mathematicae》41 (1954)，168-202[3] K. Borsuk，《收缩理论》，波兰科学出版社，华沙，1967年。[4] L. Boxer，数字连续函数，《模式识别快报》15 (1994)，833-839[5] L. Boxer，数字基本群的一种经典构造，《数学成像与视觉杂志》10 (1999)，51-62[6] L. Boxer，数字简单闭曲线上的连续映射，《应用数学》1 (2010)，377-386[7] L. Boxer，数字拓扑中的广义正规乘积邻接，《应用一般拓扑学》18 (2) (2017)，401-427[8] L. Boxer，数字拓扑中的不动点集，2，《应用一般拓扑学》21(1) (2020)，111-133[9] L. Boxer，数字拓扑中的凸性与冻结集，《应用一般拓扑学》22 (1) (2021)，121-137[10] L. Boxer，数字平面中的子集与冻结集，《哈杰特佩数学与统计学杂志》50 (4) (2021)，991-1001[11] L. Boxer，数字拓扑中的豪斯多夫度量之外，《应用一般拓扑学》23 (1) (2022)，69-77

[12] L. Boxer，任意数字维度的冻结集，《数学》10 (13) (2022)，2291[13] L. Boxer，数字连续函数限制的一些推论，《数学笔记》42 (1) (2022)，47-76[14] L. Boxer，数字平面中的冷集与冻结集，《拓扑学论文集》61 (2023)，155-182[15] L. Boxer 和 P.C. Staecker，数字拓扑中的不动点集，1，《应用一般拓扑学》21 (1) (2020)，87-110[16] L. Chen，渐变曲面及其最佳一致逼近，《SPIE 会议论文集》2182 (1994)，300-307。[17] L. Chen，《离散曲面与流形》，Scientific Practical Computing，马里兰州罗克维尔，2004年[18] J. Haarmann、M.P. Murphy、C.S. Peters 和 P.C. Staecker，有限数字图像中的同伦等价，《数学成像与视觉杂志》53 (2015)，288-302[19] S-E Han，数字基本群的非乘积性质，《信息科学》171 (2005)，73-91[20] E. Khalimsky，有限空间中的运动、形变与同伦，载于《IEEE系统、人类与控制论国际会议论文集》，1987年，227-234。[21] S.B. Nadler, Jr.，《集合超空间》，Marcel Dekker, Inc.，纽约，1978年。[22] A. Rosenfeld，数字拓扑，《美国数学月刊》86，第8期 (1979)，621-630。[23] A. Rosenfeld，数字图像上的“连续”函数，《模式识别快报》4，177-184，1986年。[24] G. Sabidussi，图乘法，《Mathematische Zeitschrift》72 (1959)，446-457[25] J.H. van Lint 和 R.M. Wilson，《组合学教程》，剑桥大学出版社，纽约，1992年