arXiv:2302.01410v1 [math.NA] 2 Feb 2023

通过绕数计算研究双曲型初边值问题有限差分格式的稳定性

BENJAMIN BOUTIN、PIERRE LE BARBENCHON 和 NICOLAS SEGUIN

摘要。本文提出一种数值策略，用于检验带流入边界条件的一维平流方程单步显式有限差分格式的强稳定性（或 GKS 稳定性）。我们运用 Kreiss-Lopatinskii 理论研究强稳定性，并引入一种新工具——内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式，它与离散稳定解向量丛具有相同的正则性。通过将复分析的标准结果应用于该行列式，我们能够将数值格式的强稳定性与绕数计算联系起来；这种计算稳健且成本低廉。文中还通过 O3 格式、五阶 Lax-Wendroff（LW5）格式，以及边界处的重构过程来展示这一研究。

AMS 分类： 65M12, 65M06,30E10
关键词： 初边值问题、Kreiss-Lopatinskii 行列式、GKS 稳定性、有限差分方法、绕数

1. 引言

1.1. 动机与假设。本文旨在建立一种高效的数值策略，以判定给定的半直线上的有限差分方法是否稳定。我们研究定义在正实轴上的右行线性输运方程的近似：

$$\begin{cases} \partial_t u + a\partial_x u = 0, & t \geqslant 0, x \geqslant 0, \\ u(t,0) = g(t), & t \geqslant 0, \\ u(0,x) = f(x), & x \geqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$u(t,x) \in \mathsf{R}$ 是未知量，f 是在时刻 $t = 0$ 的初始数据，g 是在点 $x = 0$ 给定的物理边界数据；该点对应流入边界，因为假设速度 a 为正 $a > 0$。

在离散层面，我们考虑如下形式的显式单步有限差分方法

$$U_j^{n+1} = \sum_{k=-r}^{p} a_k U_{j+k}^n, \tag{2}$$

其中整数 r，$p \geqslant 1$ 和 a_p，a_{-r} 均非零。关于 $p = 0$ 或 $r = 0$ 的情况将在第 1.2 节讨论。这里，格式 U_j^n 中的未知量预期近似于量 $u(n\Delta t,\ j\Delta x)$。时间步 $\Delta t > 0$ 和空间步长 $\Delta x > 0$ 通常根据稍后讨论的某个 CFL 条件 $\lambda = a\Delta t/\Delta x \leqslant \lambda_{\mathsf{CFL}}$ 来选取。

本文中，记 $\mathsf{S} = \{z \in \mathsf{C} \ |z| = 1\}$ 为单位圆，$\mathsf{D} = \{z \in \mathsf{C} \ |z| < 1\}$ 为开单位圆盘，$\mathcal{U} = \{z \in \mathsf{C} \ |z| > 1\}$ 为相应的外部区域，$\mathcal{U} = \{z \in \mathsf{C} \ |z| \geqslant 1\}$ 为其闭包。对于 $n < m$，记号 $[\![n : m]\!]$ 表示集合 $\{k \in \mathsf{N} \ n \leqslant k \leqslant m\}$。

日期：2023年2月6日。本项工作部分得到法国国家研究署项目 NABUCO、ANR-17-CE40-0025 以及亨利·勒贝格中心项目 ANR-11-LABX-0020-0 的资助。

作为数值分析中的核心思想，Lax 等价定理 [25] 指出，相容格式当且仅当稳定时才收敛。因此，本文始终只考虑相容的数值格式，讨论也仅聚焦于它们的稳定性问题。空间周期问题的柯西稳定性通过傅里叶符号分析（即所谓的冯·诺伊曼稳定性分析；参见 [8] 和 [9]）来处理，并使用符号 γ。与该格式相关的符号 定义如下，其中格式为（2），且 $\xi \in \mathbb{R}$：

$$\gamma(\xi) = \sum_{k=-r}^{p} a_k e^{ik\xi}. \tag{3}$$

假设（H1）。格式（2）是柯西稳定，即符号 γ 满足 $|\gamma(\xi)| \leqslant 1$对所有 $\xi \in \mathbb{R}$。

对于定义在整条实线 $j \in \mathbb{Z}$ 上的离散格式，其柯西稳定性的代数刻画通常可由傅里叶分析得出；但在标量情形下，这一问题可归结为一个关于符号曲线 Γ 的几何性质，该曲线是一条闭合的复参数曲线，由下式定义

$$\Gamma = \{\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \gamma(\theta)\}.$$

这条曲线为柯西稳定性假设（H1）提供了几何解释，可将其视为包含关系 $\Gamma \subset \mathbb{D}$。稳定性条件（H1）可以通过复平面上的图形直观地展示。从某种意义上说，我们的目标是在纳入数值边界条件后，拓展这类图形研究。

为求解初边值问题（IBVP）（1）并采用离散格式（2），r需要增加虚点，以考虑左边界条件并完整定义离散近似。我们假设这些虚点上的值由解在边界附近、同一时间步上的前几个值的线性组合得到。更具体地说，所考虑的数值格式写作

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=-r}^{p} a_k U_{k+j}^n, & j \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}, \quad (4) \\ U_j^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} b_{j,k} U_k^n + g_j^n, & j \in [\![-r : -1]\!],\ n \in \mathbb{N}, \quad (5) \\ U_j^0 = f_j, & j \in \mathbb{N}, \quad (6) \end{cases}$$

其中整数 m 满足 $p + r \leqslant m$，$(f_j)_j$ 是初始条件 f 的近似值，而 $(g_j^n)_{n,\ j}$ 是与边界数据 g 及其导数（例如参见第4.3节中的示例）有关的数值数据。假设 $p + r \leqslant m$ 并不构成限制，因为某些系数 $b_{j,\ k}$ 可能为零。

为了定义 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上的稳定性，并为方便 Kreiss-Lopatinskii 行列式的表述（见定义 10），可以通过将 r 虚点 U_j^n（其中 $j \in [\![-r : -1]\!]$）代入 r 边界条件（5）和递推公式（4）中，避免显式使用虚点。经过直接计算，边界部分也可写成如下形式

$$\mathfrak{U}_r^{n+1} = \mathcal{B}\mathfrak{U}_m^n + \mathcal{G}^n \tag{7}$$

其中我们记

$$\mathfrak{U}_r^{n+1} = \begin{pmatrix} U_0^{n+1} \\ \vdots \\ U_{r-1}^{n+1} \end{pmatrix},\ \mathfrak{U}_m^n = \begin{pmatrix} U_0^n \\ \vdots \\ U_{m-1}^n \end{pmatrix},\ \mathcal{G}^n = \begin{pmatrix} a_{-r} & \cdots & a_{-1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{-r}^n \\ \vdots \\ g_{-1}^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}).$$

这里，矩阵 $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{r,\ m}(\mathbb{C})$ 以另一种方式编码了边界处理。它对应于 Beam 和 Warming [2]所用格式的准托普利茨矩阵形式中的边界部分。具体而言， $\mathcal{B}$ 与 B 之间的显式关系如下：

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_{-r} & \cdots & a_{-1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{-r} \end{pmatrix} B + \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_p & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ a_{-r+1} & \cdots & a_0 & \cdots & a_p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{C}) \tag{8}$$

记号为

$$B = \begin{pmatrix} b_{-r,0} & \cdots & \cdots & b_{-r,m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{-1,0} & \cdots & \cdots & b_{-1,m-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{C}).$$

例如，对于非常朴素的格式 $U_j^{n+1} = \frac{U_{j-1}^n + U_{j+1}^n}{2}$ 和边界条件 $U_{-1}^n = \frac{U_0^n + U_1^n}{2}$，我们得到 $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 和 $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$。

这一类边界条件（5）或（7），涵盖了 Dirichlet 和 Neumann 外推过程，例如参见 Goldberg 的工作 [16]。这一类还包括更一般的简化逆 Lax-Wendroff 方法，Vilar 和 Shu 在中心紧致格式框架下对其进行了分析 [33]；Li、Shu 和 Zhang 则针对平流方程 [27]以及扩散方程进行了研究 [28]。在数值算例中，我们将重点讨论边界条件的所谓重构技术，该技术能够处理边界不与网格点重合的情况（由 Dakin、Després 和 Jaouen 提出 [10]，另见第4.3节）。边界处还存在其他处理方法，例如吸收边界条件 [12]以及 [11],或透明边界条件 [1]，不过 [7], 一般而言，它们不属于本文讨论的框架。

对于应用于离散初边值问题的有限差分格式，稳定性研究是一个核心问题，也是多种研究方法的主题。例如，Beam 和 Warming [2] 研究格式的托普利茨表示或准托普利茨表示的谱性质。同样，计算截断（即有限维）准托普利茨矩阵的谱半径，可能为判断该方法是否幂有界提供重要信息。Dakin、Després 和 Jaouen [10]等人便采用了这种方法。这一策略有时称为 特征值谱可视化方法，Li、Shu 和 Zhang 尤其如此 [26, 27, 28]。在第4节中，我们将针对采用重构边界条件的 O3 格式，将后一种方法与下文介绍的我们自己的策略进行比较。我们的策略基于所谓的 GKS 稳定性理论，该理论由 Gustafsson、Kreiss 和 Sundström 提出 [19]，用于处理具有零初始数据的离散初边值问题（4）-（5）-（6）。关于半群估计的最新进展，读者可参阅 Wu [34]和 Coulombel [6] 的研究；这些估计可用于根据 GKS 稳定性，推导具有非零初始数据的离散初边值问题（4）-（5）-（6）的稳定性。边界问题的 GKS 稳定性（亦称强稳定性）概念用到了以下离散范数：

$$\|U_j\|_{\Delta t}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta t |U_j^n|^2 \quad \text{and} \quad \|U\|_{\Delta x,\Delta t}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \Delta t \Delta x |U_j^n|^2.$$

所谓强稳定性或 GKS 稳定性，定义如下：

定义 1（强稳定性）。 格式 (4)-(5)-(6)称为强稳定的，若对于 $(f_j) = 0$，存在$C > 0$ 和 α_0，使得对于所有 $\alpha > \alpha_0$、所有边界数据 (g_j^n)、所有 $\Delta x > 0$、所有 $n \in \mathbb{N}$，解满足

$$\sum_{j=-r}^{-1} \|e^{-\alpha n \Delta t} U_j\|_{\Delta t}^2 + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha \Delta t + 1} \right) \|e^{-\alpha n \Delta t} U\|_{\Delta x,\Delta t}^2 \leqslant C \sum_{j=-r}^{-1} \|e^{-\alpha n \Delta t} g_j\|_{\Delta t}^2. \tag{9}$$

提醒读者，$\|e^{-\alpha n\Delta t}U_j\|_{\Delta t}^2$ 在这里是对$\sum_{n=0}^{+\infty}\Delta t e^{-2\alpha n\Delta t}|U_j^n|^2$的符号滥用；$\|e^{-\alpha n\Delta t}U\|_{\Delta x}^2$也同样如此，$\Delta t$。对于连续双曲型偏微分方程 [3]的解，这一定义也有类似的连续形式。也就是说，它给出了若干先验估计，有助于对此类问题进行一般性分析。

下面的Kreiss定理 [23] 给出了强稳定性的充要条件。我们将在下文给出该定理的一种紧凑形式，它由 [19, 定理 5.1]与 [18,引理 13.1.4]或 [17, 定义 2.23]结合得到。

定理 2 (Kreiss)。 以下陈述等价：

(i) 格式 (4)-(5)-(6)在定义 *1* 的意义下是强稳定的。*(ii)* 一致 *Kreiss-Lopatinskii* 条件成立。

一致 Kreiss-Lopatinskii 条件对应于所谓的 Kreiss-Lopatinskii行列式 Δ_{KL} 不存在零点；我们通过以下非正式定义来介绍该行列式：

$$\Delta_{\mathrm{KL}}(z)=\det(\mathfrak{B}e_1(z),\dots,\mathfrak{B}e_r(z)) \tag{10}$$

其中，$(e_1(z)\dots,e_r(z))$ 是 $\ell^2(\mathbb{N})$-稳定解空间的一组显式基，这些解是内部方程$\mathcal{Z}$的变换 (4)；而 $\mathfrak{B}$ 则是边界方程 $\mathcal{Z}$的变换 (5) 的一种编码。关于该行列式的严格定义，请参见定义 10 或 Gustafsson、Kreiss和Oliger 所著的书 [18]。继续讨论之前，我们先对一个已经研究过的特例作一些说明。

1.2. **全迎风格式的情形及 [4]的总结。** 本文是我们先前工作的一个非平凡扩展 [4]，该工作处理的是全迎风格式这一受限情形。全迎风格式是形如（2）且满足 $p=0$ 当 $a>0$ 或 $r=0$ 当 $a<0$的格式。不失一般性，本文将讨论限制在 $p=0$ 的情形，因为交换指标可能会将一种情形转化为另一种情形。在本节中，我们总结 [4] 的结果，并介绍本文工作的创新之处。在 [4] 中所进行分析的第一步，是引入内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式：

$$\Delta(z)=\frac{\det(\mathfrak{B}e_1(z),\dots,\mathfrak{B}e_r(z))}{\det(e_1(z),\dots,e_r(z))} \tag{11}$$

使用与（10）中相同的非正式记号。在适当的假设下，可以得到内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式的显式公式：

$$\forall|z|\geqslant 1,\quad \Delta(z)=(-1)^{r(m-r)}\det C(z)\left(\frac{a_{-r}}{a_0-z}\right)^{m-r} \tag{12}$$

其中，$\det C(z)$ 是关于 z 的可计算多项式，仅取决于系数 $(a_j)_{j=-r}^{0}$ 以及 $\mathfrak{B}$。借助这一结果，我们证明 Δ 在 $\mathcal{U}$ 上是全纯的。需要注意的是，对于标准 Kreiss-Lopatinskii 行列式而言，这一性质可能并不成立。

将留数定理应用于 Δ，我们提出一种数值策略，用于计算 $\mathcal{U}$ 中 Kreiss-Lopatinskii 行列式的零点个数。根据定理 2（Kreiss），我们得出结论：若 $\mathrm{Ind}^{\Delta(\mathbb{S})}(0)<r$，则该格式不稳定；其中 $\mathrm{Ind}^{\Delta(\mathbb{S})}(0)$ 表示点 0 相对于 Kreiss-Lopatinskii 曲线 $\Delta(\mathbb{S})$ 的绕数。此结果使我们能够建立一种高效且实用的方法（见 [4] 中的方法 19 或本文的方法 15），以研究带边界的格式的稳定性。对于定义在半直线 $\mathbb{N}$ 上的问题，该方法能对其解 $(U_j^n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2(\mathbb{N})$ 给出精确结果。特别是，与基于计算谱半径的稳定性数值研究不同，此方法无需对（准）托普利兹矩阵进行任意截断。另一方面，对于定义在有界空间区域上的问题，要进行完整的收敛性研究，则需要对截断数据采用叠加技术，如 [7] 和 [5] 中所用的方法。这一特点主要将研究范围限制在显式格式上。

在本文中，我们将 $p \geqslant 1$ 绕数与格式稳定性之间的联系推广到0。事实上，即使我们没有类似（12）的显式公式，内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式的全纯性也足以使我们采用同样高效的方法来研究稳定性。这种基于绕数的方法具有稳健性，因为它无需寻找代数曲线的零点，只需计算一个整数绕数，便可得到零点个数。值得一提的是 Thuné [32] 的工作，他提出了一种用于检验 GKS 稳定性的数值方法。他通过近似求解某些参数化特征多项式方程，来确定 Kreiss-Lopatinskii 行列式零点的精确位置；这与我们的工作有显著不同。

1.3. **本文结构**。 在第 2 节和第 3节构造内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式后，我们发现，在这种一般情形下，缺少 $\Delta(z)$的显式公式并不妨碍其具有全纯性质（见定理 12）。由此，我们得到以下稳定性判据：若 $\mathrm{Ind}^{\Delta(\mathbb{S})}(0) < r$，则该格式不稳定（见推论 14）。我们借助 Hermite 插值和留数定理证明这些结果。为数值计算 Kreiss-Lopatinskii 行列式，我们在第 4节采用一种易于使用的公式；从某种意义上说，该公式接近显式公式（12）。此外，第 4节还介绍了绘制 Kreiss-Lopatinskii 曲线的数值方法、若干示例，以及用于展示所提策略有效性的数值实验。

2. Kreiss-Lopatinskii 行列式

本节介绍 Kreiss-Lopatinskii 行列式，这是检验一致 Kreiss-Lopatinskii 条件的常用工具。随后，我们定义内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式，即对前者进行重新构造所得的行列式。与经典 Kreiss-Lopatinskii 行列式相比，它在实际应用中更为便利，且具有更好的性质：全纯性、连续性以及与基无关。

2.1. **稳定子空间 $\mathcal{E}^s(z)$ 和矩阵表示**。首先，我们研究内部方程的解：

$$U_j^{n+1} = \sum_{k=-r}^{p} a_k U_{k+j}^n, \ j \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

为研究该方程，我们应用 $\mathcal{Z}$-变换（见 [15, 第 40]课）。对于满足 $x_0 = 0$ 且 $z \in \mathcal{U}$ 的$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$，该变换定义为 $\widetilde{x}(z) = \sum_{n\geqslant 0} z^{-n} x_n$。于是，前述方程可写为

$$z\widetilde{U}_j(z) = \sum_{k=-r}^{p} a_k \widetilde{U}_{j+k}(z), \ j \in \mathbb{N}, \ z \in \mathcal{U}. \tag{14}$$

为求解线性递推方程（14），我们引入以下特征方程，其中 z 作为参数，而 κ 为未知数：

$$z\kappa^r = \sum_{k=-r}^{p} a_k \kappa^{r+k}. \tag{15}$$

该方程正是有限差分格式（13）的离散色散关系，其中频率参数 κ 对应空间， z 对应时间。通过寻找具有以下形式 $U_j^n = z^n \kappa^j$的内部方程（13）的解，即可形式化地得到该方程。

秉承 Hersh 的经典结果， [22], 以下引理给出了根相对于单位圆的分离性质。

引理3 （Hersh）。假设 *(H1)*。对于 z 属于 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 的无界连通分支中的点，

(1) 特征方程 (15)在 $\mathbb{S}$上无根，

(2) r 个特征方程 (15) 在 $\mathbb{D}$ 内的根（计重数）以及 p 个特征方程 (15) 在 $\mathcal{U}$内的根（计重数）。

注 4. 在柯西稳定性假设 (H1)下，已知包含关系 $\Gamma \subset \mathbb{D}$ 成立。由此可知，$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ 的无界连通分支包含整个集合 $\mathcal{U}$ 因此，在仅考虑 $z \in \mathcal{U}$ 时，可以得到该引理的一个较弱形式。此外，如果所考虑的格式也是耗散的，即其符号 γ 满足

$$|\gamma(\xi)| \leqslant 1 - \delta|\xi|^{2s}, \quad \xi \in [-\pi, \pi],$$

对于某个 $\delta > 0$ 以及一个与 ξ 无关的整数 $s \in \mathbf{N}^*$，那么对于 $z \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$，同样可以得到分离结果。该性质的原因是，在这种情况下，有 $\mathbf{S} \cap \Gamma = \{1\}$。

引理 *3* 的证明。

(1) 假设存在一个位于单位圆上的根 κ （15），则可以找到 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得$\kappa = e^{i\theta}$。因此我们有

$$z = \sum_{j=-r}^{p} a_j \kappa^j = \sum_{j=-r}^{p} a_j e^{ij\theta} = \gamma(\theta).$$

这是一个矛盾，因为 $z \in \Gamma$ 而根据假设 $z \in \mathbf{C} \setminus \Gamma$。证明完毕。

（2）我们记 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 的无界连通分支。多项式（15）有 $p + r$个根（按重数计）。只需计算单位圆盘内的根的数量，即可推导出单位圆盘外的根的数量。由于根关于系数具有连续性，并且对于 $z \in \mathcal{C}$ 在单位圆上没有根，因此我们知道，对于所有 $z \in \mathcal{C}$，单位圆盘内的根数都是一个常数。根据鲁歇定理，当 $f_z(\kappa) = \kappa^r - \frac{1}{z}(a_{-r} + a_{-r+1}\kappa + \cdots + a_p\kappa^{p+r})$ 和 $g_z(\kappa) = \kappa^r - \frac{1}{z}a_{-r}$ 在 $\mathbb{D}$ 中时，可以研究它们的 z 零点；当其足够大时即可得到所需结果。–

□

上面的引理 3 （Hersh）在图 1 中有所示意。前两行对应于引理 3（Hersh），第三行描述了 $z \in \Gamma \cap \mathbb{S}$ 的一种可能配置，通常不满足这些假设。这种情况将在后续讨论中展开。

对于 $|z| > 1$，根据引理 3 (Hersh)，(14) 的解中属于 $\ell^2(\mathbb{N})$ 的线性子空间由以下 r 向量生成：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \kappa_\ell \\ \kappa_\ell^2 \\ \kappa_\ell^3 \\ \kappa_\ell^4 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_\ell \\ 2\kappa_\ell^2 \\ 3\kappa_\ell^3 \\ 4\kappa_\ell^4 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_\ell \\ 2^2\kappa_\ell^2 \\ 3^2\kappa_\ell^3 \\ 4^2\kappa_\ell^4 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_\ell \\ 2^{\beta_\ell - 1}\kappa_\ell^2 \\ 3^{\beta_\ell - 1}\kappa_\ell^3 \\ 4^{\beta_\ell - 1}\kappa_\ell^4 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \ell = 1, \ldots, M \tag{16}$$

其中 κ_1，…，κ_M重数为 β_1，…，β_M是(15) 的解，且属于 $\mathbb{D}$，并且$\beta_1 + \cdots + \beta_M = r$ (为便于阅读，我们省略了 z对 $\kappa(z)$ 的依赖 。

记号。 我们将 $\mathcal{E}^s(z)$ 表示 (14) 的解在 $\ell^2(\mathbb{N})$ 中的线性子空间，并将 $K_{i,j}(z) \in \mathcal{M}_{j-i+1,r}(\mathbb{C})$ 表示一个矩阵，其各列由提取出的 i 与 j（含端点）之间所有行所组成，这些行来自 (r 16) 的向量，其中 $0 \leqslant i \leqslant j$。

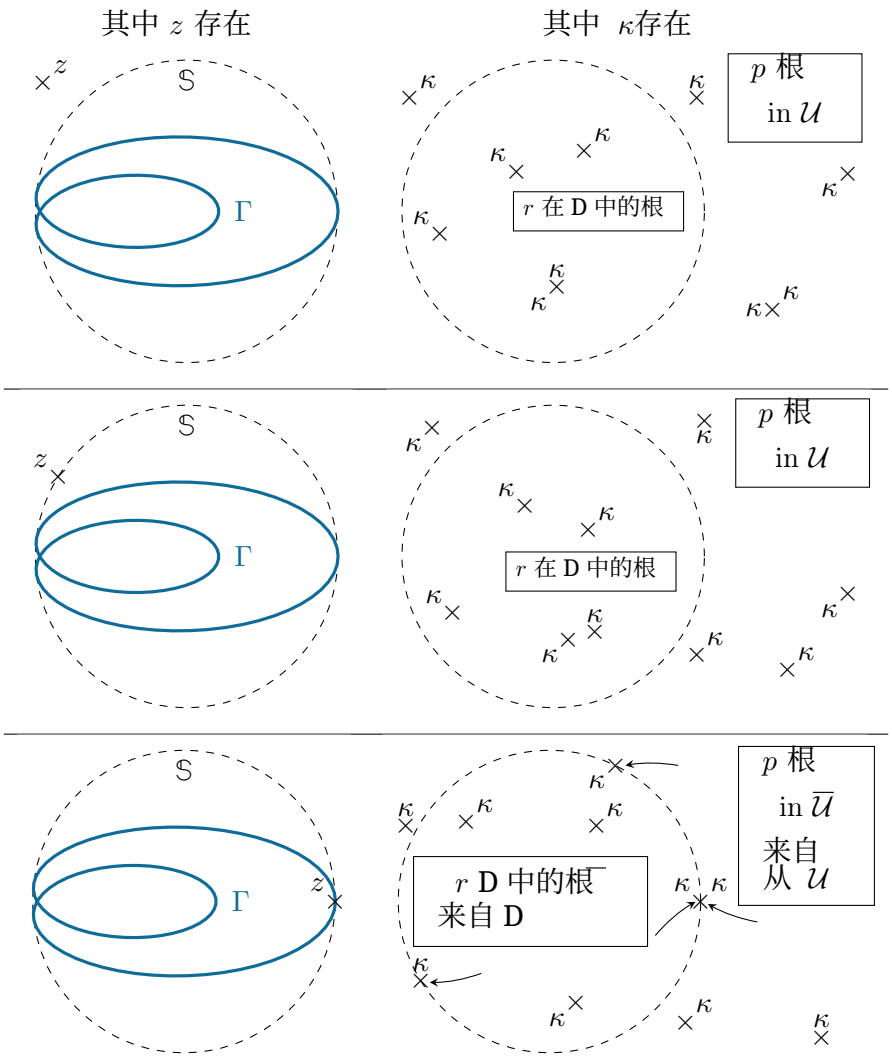

图1。 引理 3 的示意图：情形 $|z|>1$ （第一行）、情形 $|z|=1$ 和 $z\notin\Gamma$（第二行），以及引理 $z\in\Gamma$ 所述的情形，其中引理 3 不成立（第三行）。

注 5. 当 $r=2$ 时，若 (15) 的解为 $\kappa_1(z)\neq\kappa_2(z)$，则恰有两个根，重数均为 1。(14) 的解可写为 $\widetilde{U}_j(z)=\alpha_1\kappa_1(z)^j+\alpha_2\kappa_2(z)^j$，并且有

$$K_{0,2}(z)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \kappa_1(z) & \kappa_2(z)\\ \kappa_1(z)^2 & \kappa_2(z)^2\end{pmatrix}.$$

备注 6。 对于 $r=2$，如果方程（15）的解现在为 $\kappa(z)$，重数为 2，那么方程（14）的解可写为 $\widetilde{U}_j(z)=(\alpha_1+\alpha_2 j)\kappa(z)^j$，并且有

$$K_{0,3}(z)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \kappa(z) & \kappa(z)\\ \kappa(z)^2 & 2\kappa(z)^2\\ \kappa(z)^3 & 3\kappa(z)^3\end{pmatrix}.$$

我们强调对 z 的依赖关系，以及连续性方面的问题，因为映射 $z\mapsto K_{i,\,j}(z)$ 并不连续，而（15）的根集是关于 z的连续映射。

事实上，当出现多重根时，根曲线 $(\kappa_j(z))_j$ 可能相交。例如，对于 $r=2$，若存在 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{U}$，满足 $\kappa_1(z_n)\neq\kappa_2(z_n)$，且它们收敛到 $z_\infty\in\mathcal{U}$，使得 $\kappa_1(z_\infty)=\kappa_2(z_\infty)$ 是一个二重根，那么我们有

$$\forall j\in\{1,2\},\quad \kappa_j(z_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\kappa_j(z_\infty)$$

but

$$K_{0,3}(z_n)=\begin{pmatrix}1&1\\ \kappa_1(z_n)&\kappa_2(z_n)\\ \kappa_1^2(z_n)&\kappa_2^2(z_n)\\ \kappa_1^3(z_n)&\kappa_2^3(z_n)\end{pmatrix}\not\xrightarrow[n\to\infty]{} K_{0,3}(z_\infty)=\begin{pmatrix}1&0\\ \kappa_1(z_\infty)&\kappa_1(z_\infty)\\ \kappa_1^2(z_\infty)&2\kappa_1^2(z_\infty)\\ \kappa_1^3(z_\infty)&3\kappa_1^3(z_\infty)\end{pmatrix}.$$

因此，所考虑的基（16） $\mathcal{E}^s(z)$ 通常并不定义关于 z 的连续映射。

尽管存在上述困难，事实证明， $\mathcal{E}^s(z)$ 是定义在 $\mathcal{U}$ 上的连续甚至全纯向量丛，详见 [6, 定理 4.3]。文中还证明，这个向量丛 $\mathcal{E}^s(z)$ 甚至可以连续延拓到 $\mathcal{U}$ 上，从而也考虑了 $z\in\mathsf{S}$（另见 [30] ，其中讨论了双曲—抛物型偏微分方程情形下的类似性质）。关键在于，对某些 $z_0\in\mathsf{S}$，S 上可能存在一个（或多个）方程（15）的根 $\kappa_0(z_0)$。在这些点上， z_0 引理 3 （Hersh）不再成立。这种情形在图1的第三行中有所描绘。对于 S 上的 z ，空间 $\mathcal{E}^s(z)$ 的维数仍为 r ，我们将记号 $K_{i,j}(z)$ 延拓至此。以上讨论可概括为以下定理。

定理 7 ([6])。 在假设 *(H1)* 下，空间 $\mathcal{E}^s(z)$ 是一个定义在 $\mathcal{U}$上的全纯向量丛，并且可以唯一地延拓为定义在 $\mathcal{U}$上的连续向量丛。

注 8。 对于延拓，首先遇到的困难是选出式（15）中来自内部的根。事实上，如果在 S 上存在一个根，它可能来自 D 的内部、外部，或者两者皆有（当其重数大于 1 时）。在第 4.2 节中，我们将说明如何通过数值策略选出合适的根。第二个困难是证明延拓后 $\mathcal{E}^s(z)$的连续性；这可由 K-对称化子的存在性推出，例如可见 [6, 定理 4.3]。如前所述，$K_{i,j}(z)$通常关于 z并不连续。

2.2. **内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式**。 本节将恰当地定义公式（10）和（11）。考虑边界条件（7）的 $\mathcal{Z}$ 变换形式，即

$$z\begin{pmatrix}\widetilde{U}_0(z)\\ \vdots\\ \widetilde{U}_{r-1}(z)\end{pmatrix}-\mathcal{B}\begin{pmatrix}\widetilde{U}_0(z)\\ \vdots\\ \widetilde{U}_{m-1}(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{-r}&\cdots&a_{-1}\\ &\ddots&\vdots\\ 0&&a_{-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{g}_{-r}(z)\\ \vdots\\ \widetilde{g}_{-1}(z)\end{pmatrix}.\tag{17}$$

将解 $(U_j(z))_{j\in\mathbb{N}}\in\mathcal{E}^s(z)$ 代入 (14) 中的 (17)，可得到一个包含 r 个方程、具有 r个标量未知数的方程组：这些未知数是 $(U_j(z))_{j\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{E}^s(z)$的基 16 下的系数。

注 9. 对于 $r=2$ 以及给定的 z (为方便起见，以下省略对 z 的依赖)，若 $\kappa_1\neq\kappa_2$，使得 (17) 的解具有 $\alpha_1\kappa_1^j+\alpha_2\kappa_2^j$ 的形式，那么该解受到方程组 (17) 的约束。该方程组的矩阵形式为

$$\left(z\begin{pmatrix}1&1\\ \kappa_1&\kappa_2\end{pmatrix}-\mathcal{B}\begin{pmatrix}1&1\\ \kappa_1&\kappa_2\\ \kappa_1^2&\kappa_2^2\\ \vdots&\vdots\\ \kappa_1^{m-1}&\kappa_2^{m-1}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{-1}\widetilde{g}_{-1}+a_{-2}\widetilde{g}_{-2}\\ a_{-2}\widetilde{g}_{-1}\end{pmatrix}.$$

边界条件的单射性（因此也是可逆性）直接与以下性质相关：$\det(zK_{0,1}-\mathcal{B}K_{0,m-1}(z))\neq 0$，其中 $zK_{0,1}-\mathcal{B}K_{0,m-1}(z)\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathsf{C})$。

定义 10（Kreiss-Lopatinskii 行列式）。Kreiss-Lopatinskii 行列式 是定义在 $|z| \geqslant 1$ 上的复值函数：

$$\Delta_{\mathrm{KL}}(z) = \det(zK_{0,r-1}(z) - \mathcal{B}K_{0,m-1}(z)).$$

尽管空间 $\mathcal{E}^s(z)$ 在 $\mathcal{U}$ 上是一个全纯向量丛，并且在 $\mathcal{U}$ 上连续（定理 7），但该行列式 Δ_{KL} 在 $\mathcal{U}$ 上并非全纯。为恢复这些性质，我们定义内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式 Δ，其动机可由以下非正式讨论来说明。上述 Kreiss-Lopatinskii 行列式实际上定义不明确，除非我们以某种方式对 (15) 的根 $(\kappa_j(z))_{j=1,\dots,r}$ 排序。这里有两点需要强调。第一点与交叉根有关，已在注 6 之后讨论过。第二点是，除交叉情形外，无论如何选择根的排序（从而也决定向量丛之基 (16) 中向量的排序），通常都无法使矩阵 $K_{0,m-1}(z)$ 的分量在 $\mathcal{U}$ 上具有全纯性。例如，由于对数分支的选取，甚至 $X^2 - z$ 的根关于 $z \in \mathcal{U}$ 也不是全纯的。另一方面，根 $(\kappa_j(z))_{j=1,\dots,r}$ 的任意对称函数却是全纯的，因为它们可以直接用多项式 (15) 的系数表示。因此，除交叉根之外，量 $\Delta_{\mathrm{KL}}(z)$ 也同样如此，因为矩阵 B 和 $\mathcal{B}$ 是常数，且行列式本身是一个对称函数。

达到全纯性并克服最后困难的一种非常自然的方法是除以 Δ_{KL} 以下量$\det K_{0,\,r-1}(z)$。因此，在两次计算中都涉及基（16）中向量的相同排列或组合。这个内禀 *Kreiss-Lopatinskii* 行列式已在 [4]中的一个特殊情形下被引入并研究。

定义 11（内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式）。内禀 *Kreiss-Lopatinskii* 行列式是对 $|z| \geqslant 1$ 定义的复值函数，其定义为：

$$\Delta(z) = \frac{\Delta_{\mathrm{KL}}(z)}{\det K_{0,r-1}(z)}. \tag{18}$$

注意到，内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式可以改写为

$$\Delta(z) = \frac{\det(zK_{0,r-1}(z) - \mathcal{B}K_{0,m-1}(z))}{\det K_{0,r-1}(z)} = z^r \det\left(I_r - \frac{\mathcal{B}K_{0,m-1}(z)K_{0,r-1}(z)^{-1}}{z}\right). \tag{19}$$

最后，为结束这些定义，我们再对一致 *Kreiss-Lopatinskii* 条件作进一步说明。在上述记号下，除要求$zK_{0,\,r-1}(z) - \mathcal{B}K_{0,\,m-1}(z)$~可逆之外，它还对应于存在常数 $C > 0$，使得对任意 $z \in \mathcal{U}$、任意 $U \in \mathcal{E}^s(z)$ 解~满足（17）的解都满足一致估计 $\|U\| \leqslant C\|\widetilde{g}\|$。由关于 $\mathcal{Z}$-变换的 Parseval 恒等式，该不等式直接给出强稳定性估计（9）中必要的前半部分。关于更详细的论述，请参阅 [18] 。

2.3. **主要结果**。 定理 12 是我们的主要理论结果。它指出，内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式具有与 $\mathcal{E}^s(z)$ 相同的正则性性质，参见定理7。

定理 12 (内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式的光滑性)。 假设 *(H1)*。内禀 *Kreiss-Lopatinskii* 行列式 Δ 在 $\mathcal{U}$ 上全纯，并且在 $\mathcal{U}$上连续。

根据方程 (18)，函数 Δ 与 Kreiss-Lopatinskii 行列式 Δ_{KL}具有相同的零点，因此可在一致 Kreiss-Lopatinskii 条件中作为替代使用，参见定理 2 (Kreiss)。另一项对后续应用很重要的性质见下一个推论 14 ，其中涉及以下重要的几何对象：

定义 13。 *Kreiss-Lopatinskii* 曲线 $\Delta(\mathbb{S})$ 是一条闭复参数曲线

$$\Delta(\mathbb{S}) = \{\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \Delta(e^{i\theta})\}.$$

Usi应用留数定理[1] 根据定理 12，我们得到以下结果。

推论 14 （内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式的零点个数）。 假设 *(H1)*。若$0 \notin \Delta(\mathbb{S})$ 则方程 $\Delta(z) = 0$ 恰有 $r - \mathrm{Ind}^{\Delta(\mathbb{S})}(0)$ 个零点位于 $\mathcal{U}$。

在上文及全文中，$\mathrm{Ind}^{\Delta(\mathbb{S})}(0)$ 表示相对于闭合有向曲线 $\Delta(\mathbb{S})$ 的原点绕数（绕数的定义见 [24] ）。该推论有助于我们通过定理2（Kreiss）建立一种高效且实用的方法，来研究给定初边值问题的稳定性。特别是，以下流程的计算成本很低，因此非常适合研究参数化初边值问题，见第 4节。

方法 15 （一致 Kreiss-Lopatinskii 条件检验）。 有两种不同的情况：

- 若 $0 \in \Delta(\mathbb{S})$，则存在 $z_0 \in \mathbb{S}$ 使得 $\Delta(z_0) = 0$。
- 若 $0 \notin \Delta(\mathbb{S})$， Δ 在$\mathbb{S}$ 上不为零，并且根据定理*14*，它在 $\mathcal{U}$ 中有 $r - \mathit{Ind}^{\Delta(\mathbb{S})}(0)$ 个零点。因此，若 $\mathit{Ind}^{\Delta(\mathbb{S})}(0) = r$ ，则该格式稳定；否则该格式不稳定。

总之，根据定理 2 (Kreiss)，且由于一致 Kreiss-Lopatinskii 条件成立当且仅当 Kreiss-Lopatinskii 行列式在 $\mathcal{U}$中没有零点，因此可以采用方法 15 来判断该格式是否稳定。第 4节将展示 O3 格式和五阶 Lax-Wendroff 格式的一些示例。

3. 定理12 及推论 14的证明

3.1. **阶数为 r 的常系数递推序列**。 对于每个 $z \in \mathcal{U}$，我们记 P_z 与特征方程（15）相关联的多项式，即：

$$P_z(\kappa) = a_p\kappa^{r+p} + \cdots + a_1\kappa^{r+1} + (a_0 - z)\kappa^r + a_{-1}\kappa^{r-1} + \cdots + a_{-r+1}\kappa + a_{-r}. \tag{20}$$

根据引理 3（Hersh），多项式 $P_z(\kappa)$ 可以分解为两个多项式：一个的 r 个根位于 D 中，记作 $R_z(\kappa)$；另一个的 p 个根位于 $\mathcal{U}$ 中，记作 $Q_z(\kappa)$。我们知道， P_z 的系数在 z 中是全纯的。我们已经指出，基 (16) 不是全纯的，因为根 κ 不是全纯的。在下一个结果中，我们证明，位于 D 中的 r 个根κ 的对称函数确实在 $\mathcal{U}$ 中是全纯的，换言之， R_z 的系数在 $\mathcal{U}$ 中是全纯的。

引理16。 对于所有 $z \in \mathcal{U}$，多项式 $R_z(X) = \prod_{j=1}^{r}(X - \kappa_j(z))$ 的系数在 $\mathcal{U}$ 中是全纯的，其中 $(\kappa_j(z))_{j=1}^{r}$ 是 r 个位于 $\mathbb{D}$ 中的 (15)的根（计重数）。

证明。 我们使用邓福德-泰勒公式，其中 C_z 是多项式 (15) 的伴随矩阵：

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}}(\zeta I_{r+p} - C_z)^{-1}d\zeta$$

它是沿着 $\mathrm{E}_s(z) = \ker\prod_{j=1}^{r}(C_z - \kappa_j(z))$ 投影到 $\mathrm{E}_u(z) = \ker\prod_{j=r+1}^{r+p}(C_z - \kappa_j(z))$ 上的投影，其中 $(\kappa_j(z))_{j=r+1}^{r+p}$ 是 (15) 在 $\mathcal{U}$ 中的根，因为 $(\kappa_j(z))_{j=1}^{r}$ 被 S 包围，而 $(\kappa_j(z))_{j=r+1}^{r+p}$则没有。投影算子 $\Pi(z)$ 在 $\mathcal{U}$ 上全纯，因为它是全纯参数积分。我们有 $C_z \circ \Pi(z)|_{\mathbb{E}_u}(z) = 0$ 和 $C_z \circ \Pi(z)|_{\mathbb{E}_s}(z) = C_z$，因此 $C_z \circ \Pi(z)$ 的特征多项式是 $X^p R_z(X)$，因为 $\mathbb{C}^{r+p} = \mathrm{E}_s(z) \oplus \mathrm{E}_u(z)$。函数 $z \mapsto C_z \circ \Pi(z)$ 在 $\mathcal{U}$ 上全纯，因此其特征多项式的系数也全纯。证明至此完成。 □

[1]所有复分析结果都可以在 [24] 中找到。

3.2. **Hermite 插值**。 为了证明 Δ 的全纯性质，根据 (19)，只需研究函数 $z \mapsto K_{0,\ m-1}(z)K_0^{-1}{}_{,\ r-1}(z)$。为简化这项研究，对于 $z \in \mathcal{U}$，我们在线性映射上引入

$$\varphi_z : Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X] \mapsto \varphi_z(Q) \in \mathbb{C}_{r-1}[X] \tag{21}$$

其中， $\varphi_z(Q)$ 是次数小于 $r-1$ 的埃尔米特插值多项式，其由以下取值定义：$(Q(\kappa_1(z)) \dots, Q^{(\beta_1-1)}(\kappa_1(z))$ $Q(\kappa_2(z)) \dots, Q^{(\beta_2-1)}(\kappa_2(z)) \dots, Q^{(\beta_M-1)}(\kappa_M(z)))$，其中 κ 与式（16）中的相同。矩阵 $K_{0,m-1}(z)K_0^{-1}{}_{,r-1}(z)$ 与 φ_z 之间的联系如下：

引理 17。 对于所有 $z \in \overline{\mathcal{U}}$，矩阵 $K_{0,m-1}(z)K_0^{-1}{}_{,r-1}(z)$ 的转置是 φ_z 在典范基下的表示，其中 （21）中定义了该表示。

证明。 Hermite 插值会引出以下矩阵

$$H_{0,j}(z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \kappa_1 & 1 & 0 & \cdots \\ \kappa_1^2 & 2\kappa_1 & 2 & \cdots \\ \kappa_1^3 & 3\kappa_1^2 & 6\kappa_1 & \cdots \\ \kappa_1^4 & 4\kappa_1^3 & 12\kappa_1^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \kappa_1^j & j\kappa_1^{j-1} & j(j-1)\kappa_1^{j-2} & \cdots \end{pmatrix}}_{\beta_1 \text{ columns linked to } \kappa_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ \kappa_2 & 1 & \cdots \\ \kappa_2^2 & 2\kappa_2 & \cdots \\ \kappa_2^3 & 3\kappa_2^2 & \cdots \\ \kappa_2^4 & 4\kappa_2^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ \kappa_2^j & j\kappa_2^{j-1} & \cdots \end{pmatrix}}_{\beta_2 \text{ columns linked to } \kappa_2} \cdots \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ \kappa_M & 1 & \cdots \\ \kappa_M^2 & 2\kappa_M & \cdots \\ \kappa_M^3 & 3\kappa_M^2 & \cdots \\ \kappa_M^4 & 4\kappa_M^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ \kappa_M^j & j\kappa_M^{j-1} & \cdots \end{pmatrix}}_{\beta_M \text{ columns linked to } \kappa_M}.$$

$z \mapsto \varphi_z$ 在典范基下的表示为 $(H_{0,m-1}(z)H_0^{-1}{}_{,r-1}(z))^T$。此外，存在一个可逆矩阵 $M(z) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$，使得 $K_{0,j}(z) = H_{0,j}(z)M(z)$。因此，我们有 $K_{0,m-1}(z)K_0^{-1}{}_{,r-1}(z) = H_{0,m-1}(z)M(z)M(z)^{-1}H_0^{-1}{}_{,r-1}(z) = H_{0,m-1}(z)$ $H_0^{-1}{}_{,r-1}(z)$。结论由此得出。

□

命题 18。 函数 $z \mapsto \varphi_z$ 在 $\mathcal{U}$ 上是全纯的。

证明。 对于所有 $k \in [\![0 : m-1]\!]$，我们希望多项式 $\varphi_z(X^k)$ 的每个系数在 $\mathcal{U}$ 上都是全纯的。将 $\varphi_z(X^k)(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{j,\ k}(z)x^j$ 写成如下形式，我们知道

$$\forall j \in [\![0 : r-1]\!], \quad j!\alpha_{j,k}(z) = \partial_x^j \varphi_z(X^k)(x)_{|x=0}. \tag{22}$$

根据 Hermite 插值的误差（见 [21]），我们有

$$\varphi_z(X^k)(x) - x^k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{S}} \frac{\zeta^k R_z(x)}{(x-\zeta)R_z(\zeta)} d\zeta \tag{23}$$

其中 $R_z(X)$ 在引理16中定义。对方程（23）进行求导（使用莱布尼茨乘积法则），可得

$$j!\alpha_{j,k}(z) = k!\delta_k^j + \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} R_z^{(j-s)}(0) \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{S}} \frac{-s!\ \zeta^{k-s-1}}{R_z(\zeta)} d\zeta. \tag{24}$$

根据引理 16 以及依赖参数的积分的全纯性，对于所有 $j \in [\![0 : r-1]\!]$ 和 $k \in [\![0 : m-1]\!]$，函数 $z \mapsto \alpha_{j,\ k}(z)$ 在 $\mathcal{U}$ 上是全纯的。证明至此完成。□

命题 19。 函数 $z \mapsto \varphi_z$ 在 $\mathcal{U}$上连续。

证明。由于引理 3（Hersh）对 $z \in \mathbb{S}$ 不再成立，特征方程 (15) 的根 $\kappa(z)$ 可能位于单位圆 $\mathbb{S}$ 上。为证明 $z \mapsto \alpha_{j,k}(z)$ 的连续性，我们使用方程 (24)，但将 $\mathbb{S}$ 替换为 $\mathbb{S}_\varepsilon \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} \ |z| = 1+\varepsilon\}$ for $\varepsilon > 0$。利用依赖参数的积分的连续性以及特征方程 (15) 的根 $\kappa(z)$ 的连续性，我们得到系数的连续性

of R_z，因此函数 $z \mapsto \alpha_{j,\,k}(z)$ 在 $\mathcal{U}$ 上连续，对所有 $j \in [\![0:\, r-1]\!]$ 和 $k \in [\![0 \vdots\, m-1]\!]$ 均成立。证明至此完成。□

命题 20. 函数 $z \mapsto \varphi_z$ 在 $\mathcal{U}$ 上有界。

证明。 方程（24）可给出 $K_{0、\,m-1}(z)\, K_0^{-1}{}_{、\,r-1}(z)$ 各分量的一个界。事实上，按照引理 3（Hersh）的证明，利用鲁歇定理可知，对于 $|z| > R$，存在某个 R，特征方程（15）的所有根 $\kappa(z)$ 都满足 $|\kappa(z)| < \frac{1}{2}$。于是，对于 $|z| > R$，可得

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{S}} \frac{-s!\, \zeta^{k-s-1}}{R_z(\zeta)} d\zeta \right| = \left| \frac{s!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta(k-s-1)}}{\prod_{j=1}^{r} (e^{i\theta} - \kappa_j(z))} d\theta \right| \leqslant \frac{s!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 - \frac{1}{2}|^r} d\theta \leqslant s! 2^r.$$

根据高斯-卢卡斯定理，对于所有 $|z| > 1$，R_z 的所有导数的根都在 D 中，因此 $R_z^{(j-s)}(0)$ 有界，且其界与 z 无关。于是，对于 $|z| > R$，量 $K_{0,\,m-1}(z) K_0^{-1}{}_{,\,r-1}(z)$ 有界。此外，根据命题 19，量 $K_{0,\,m-1}(z) K_0^{-1}{}_{,\,r-1}(z)$ 在紧集 $\{1 \leqslant |z| \leqslant R\}$ 上有界。证明至此完成。□

3.3. 结论。

定理 *12* 的证明。 根据引理 17，命题 $z \mapsto \varphi_z$ 中给出的连续性和全纯性性质同样适用于函数 $z \mapsto K_{0、\,m-1}(z) K_0^{-1}{}_{、\,r-1}(z)$。内在行列式（19）的表达式完成了证明。□

下面的证明与 [4] 的推论 15 的证明相近。为完整起见，我们在此重述该证明。

定理 *14* 的证明。 定义如下函数

$$\widetilde{\Delta} : z \in \mathbb{D}^* \mapsto \Delta(1/z) \in \mathbb{C}.$$

根据定理 12，函数 Δ 在 D 上为亚纯函数，只有一个极点，且该极点位于 0，并且在 $\mathrm{D} \setminus \{0\}$ 上连续。根据命题 20，函数 $z \mapsto K_{0,\,m-1}(1/z) K_{0,\,r-1}(1/z)^{-1}$ 在 D 上有界，因此 $\widetilde{\Delta}$ 可知，0 是函数 Δ 的 r 阶极点。将留数定理应用于路径 S 上的 Δ，可得以下等式：

$$\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Delta}(\mathbb{S})}(0) = \#\mathrm{zeros}_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{D}) - \#\mathrm{poles}_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{D}).$$

由此可得

$$\#\mathrm{zeros}_{\Delta}(\mathcal{U}) = r - \mathrm{Ind}_{\Delta(\mathbb{S})}(0).$$

□

4. 数值结果

4.1. **新的表述** Δ。 在 [4], 中给出了 Kreiss-Lopatinskii 行列式的显式公式。遗憾的是，为了约简边界矩阵 $\mathcal{B}$，需要使用次数为 $r+p$的特征方程来求得一个大小为 $r \times (r+p)$ 的最终矩阵；而由于在本文的分析中 $p \neq 0$，该矩阵不是方阵。为避开这个问题，我们将使用引理 R_z 中定义的多项式 16，而不使用完整的特征方程（20）。它也可写为

$$R_z(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \kappa_j(z)) = X^r + \sigma_{r-1}(z) X^{r-1} + \cdots + \sigma_1(z) X + \sigma_0(z)$$

其中 $(\sigma_j(z))_j$ 是 $(\kappa_j(z))_j$的对称函数。

因为 $\widetilde{U}_j(z)$ 属于 $\mathcal{E}^s(z)$，且可表示为基（16）中的元素；对于所有 $j \in \mathbb{N}$，

$$\widetilde{U}_{j+r}(z) + \sigma_{r-1}(z) \widetilde{U}_{j+r-1}(z) + \cdots + \sigma_1(z) \widetilde{U}_{j+1}(z) + \sigma_0(z) \widetilde{U}_j(z) = 0. \tag{25}$$

记号。注意，对于所有 $j \in \mathbb{N}$， $\widetilde{\mathfrak{U}}_j(z)$ 是大小为 $j+1$ 的向量 $(\widetilde{U}_0(z) \cdots \widetilde{U}_j(z))^T$。

命题 21. 设 $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{C})$. 存在一个函数 $\mathcal{B} : \mathbb{C}^r \to \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{C})$ 可构造，使得对所有 $z \in \mathcal{U}$，都有

$$\mathcal{B}\widetilde{\mathfrak{U}}_{m-1}(z) = \widetilde{\mathcal{B}}(\sigma_0(z), \dots, \sigma_{r-1}(z))\widetilde{\mathfrak{U}}_{r-1}(z) \tag{26}$$

其中 $(U_j(z))_j$ 满足 (25) 对所有 $j \in \mathbb{N}$。

这里所说的“可构造函数”，是指我们建立了一种可计算算法，以求得矩阵 $\mathcal{B}(\sigma_0(z) \dots, \sigma_{r-1}(z))$。该算法基于高斯消元，并在下面的证明中作了完整说明。

证明。 对于 $z \in \mathcal{U}$和 $\varsigma_0 = \sigma_0(z) \dots, \varsigma_{r-1} = \sigma_{r-1}(z)$，通过对 j从 $m-1$到 $r-1$作降序归纳，我们构造一个矩阵 $\mathcal{B}_j(\varsigma_0, \dots, \varsigma_{r-1}) \in \mathcal{M}_{r,j+1}(\mathbb{C})$，使得

$$\mathcal{B}\widetilde{\mathfrak{U}}_{m-1}(z) = \mathcal{B}_j(\varsigma_0, \dots, \varsigma_{r-1})\widetilde{\mathfrak{U}}_j(z).$$

初始化：若 $j = m-1$，则可取 $\mathcal{B}$作为矩阵 $\mathcal{B}_{m-1}(\varsigma_0, \dots, \varsigma_{r-1})$。归纳法：对于某个 $j \in [\![m-1$，假设归纳假设成立： $r]\!]$，并希望证明在 $j-1$时的结果。根据方程（25），有 $\mathfrak{U}_j(z) = \mathcal{P}_j\mathfrak{U}_{j-1}(z)$ 其中

$$\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ (0) & -\varsigma_0 & \cdots & -\varsigma_{r-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{j+1,j}(\mathbb{C}).$$

我们定义 $\mathcal{B}_{j-1}(\varsigma_0, \dots, \varsigma_{r-1}) = \mathcal{B}_j(\varsigma_0, \dots, \varsigma_{r-1})\mathcal{P}_j \in \mathcal{M}_{r,\ j}(\mathbb{C})$，则有

$$\mathcal{B}_{j-1}\widetilde{\mathfrak{U}}_{j-1}(z) = \mathcal{B}_j\mathcal{P}_j\widetilde{\mathfrak{U}}_{j-1}(z) = \mathcal{B}_j\widetilde{\mathfrak{U}}_j(z) = \mathcal{B}\widetilde{\mathfrak{U}}_{m-1}(z).$$

结论：我们定义 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{B}_{r-1}$。
函数 $\widetilde{\mathcal{B}}$ 可轻易计算，因为（$\mathcal{P}_j$）$_j$ 只是高斯消元得到的矩阵。 □

根据（26，内禀 Kreiss-Lopatinskii 行列式可写为

$$\Delta(z) = \frac{\det(zK_{0,r-1}(z) - \mathcal{B}K_{0,m-1}(z))}{\det K_{0,r-1}(z)} = \frac{\det(zK_{0,r-1}(z) - \widetilde{\mathcal{B}}K_{0,r-1}(z))}{\det K_{0,r-1}(z)} = \det(zI_r - \widetilde{\mathcal{B}}). \tag{27}$$

命题 $\mathcal{B}$ 21 中的矩阵取决于系数 $(\sigma_j(z))_j$。根据 (26)，我们有

$$\widetilde{\mathcal{B}}(\sigma_0(z), \dots, \sigma_{r-1}(z)) = \mathcal{B}K_{0,m-1}(z)K_{0,r-1}^{-1}(z).$$

使用任意计算机代数系统，我们都可以根据矩阵 $\mathcal{B}$计算矩阵 $\mathcal{B}(\varsigma_0$、……、$\varsigma_{r-1})$，然后计算系数 $(\sigma_j(z))_j$，并将 ς_j 替换为 $\sigma_j(z)$，对所有 $j \in [\![0 : r-1]\!]$ 均如此。这样只需计算一次 $\mathcal{B}(\varsigma_0$、……、$\varsigma_{r-1})$，之后即可将其用于不同的 z（因此 $(\sigma_j(z))_j$ 也不同）。

由（27），根据引理 Δ，我们再次得到 16 所陈述的 $z \mapsto \sigma_j(z)$在 $\mathcal{U}$ 上对所有 $j \in [\![0$ 都是全纯的，即 $r-1]\!]$。

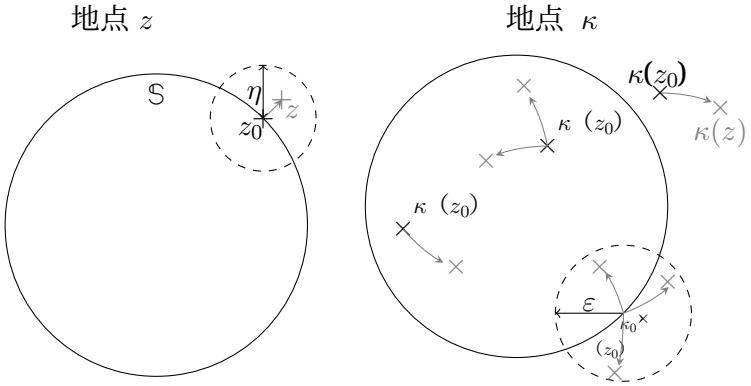

图 2. 引理示意图22

4.2. $\Delta(\mathbb{S})$ 的计算。令 $z_0 \in \mathbb{S}$ 固定。为计算 $(\sigma_j(z_0))_j$，我们需要来自单位圆盘内部的根 $(\kappa_j(z_0))_j$，参见注 8。根据多项式 P_{z_0}（定义于式（20））的根关于参数 z_0 的连续性，对于单位圆上重数为 β 的每个 $\kappa_0(z_0)$，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，存在 $\eta > 0$，使得对所有 $z \in B(z_0, \eta)$，多项式 P_z 在 $B(\kappa_0(z_0), \varepsilon)$ 中恰有 β 个根（按重数计）。η 的明确取值见下述命题。

引理 22. 设 z_0 位于单位圆上。设 $\kappa_0(z_0) \in \mathbb{S}$ 是多项式 β 的一个重数为 P_{z_0} 的根，该多项式定义于 (20)中。设 $\varepsilon > 0$ 满足 $\kappa_0(z_0)$ 是 P_{z_0} 在 $B(\kappa_0(z_0), \varepsilon)$ 中的唯一根，并令

$$\eta = (1+\varepsilon)^{-r} \min_{\kappa \in \partial B(\kappa_0(z_0), \varepsilon)} |P_{z_0}(\kappa)|.$$

那么对于所有 $z \in B(z_0, \eta)$，多项式 P_z 在 $B(\kappa_0(z_0), \varepsilon)$ 中恰有 β 个根（按重数计）。

引理 22 的证明是鲁歇定理的一个推论：比较当 z 在 $B(\kappa_0(z_0), \varepsilon)$ 中接近 z_0 时，P_{z_0} 与 P_z 之间的零点个数。此处不再给出证明细节，但可参见 [24] 中关于鲁歇定理的证明。图 2 展示了该引理，其中 $\kappa_0(z_0)$ 的重数为 3。黑点对应于 z_0 和 $(\kappa_j(z_0))_j$，灰点对应于 z 和 $(\kappa_j(z))_j$。

从数值角度来看，对于一个多重根 $\kappa_0(z_0)$，可以取 P_{z_0} 的两个根之间的最小距离作为 ε，取 $z = (1 + \frac{\eta}{2})z_0 \in \mathcal{U}$。通过对以 $\kappa_0(z_0)$ 为中心、半径为 ε 的圆进行离散化，可得到 η 的值。根据引理 3（Hersh），P_z 在单位圆上没有根，因此可以分别计算 $B(\kappa_0(z_0), \varepsilon) \cap \mathbb{D}$ 和 $B(\kappa_0(z_0), \varepsilon) \cap \mathcal{U}$ 中的根数，以确定与 $\kappa_0(z)$ 相关、分别来自单位圆盘内部和外部的根的数量。选出来自单位圆盘内部的根 $(\kappa_j(z))_j$ 后，可以计算它们的对称函数 $\widetilde{(\sigma_j(z))_j}$。将 $\mathcal{B}(\varsigma_0, \ldots, \varsigma_{r-1})$ 的形式变量 $(\varsigma_j)_j$ 替换为 $(\sigma_j(z))_j$ 后，可以用表达式 (27) 计算 $\Delta(z)$。不必针对单位圆上的每个 z 单独计算 $(\kappa_j(z))_j$，而可以利用 $(\kappa_j(z))_j$ 关于 z 的连续性，描述根 $(\kappa_j(z))_j$ 在 $z \in \mathbb{S}$ 中的运动。绘制出 Kreiss-Lopatinskii 曲线后，必须计算绕数才能使用方法 15。为此，我们采用 García Zapata 和 Díaz Martín 在 [13] 和 [14]中提出的几何算法。

4.3. **边界条件：重构过程**。为定义边界条件，我们使用 [10] 中说明的重构过程。该框架为平流方程，其

空间边界与离散网格点之间存在错位

$$\begin{cases} \partial_t u + a\partial_x u = 0, & t \geqslant 0, x \in [x_\sigma, 1], \\ u(t, x_\sigma) = g(t), & t \geqslant 0, \\ u(0, x) = f(x), & x \in [x_\sigma, 1]. \end{cases} \tag{28}$$

不失一般性，我们可以假设 $x_\sigma = \sigma\Delta x$其中 $\sigma \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$(正如 [4] 中所解释的)。引入 x_j 对于 $j\Delta x$ 以及 t^n 对于 $n\Delta t$ 当 $j \geqslant -r$ 且 $n \geqslant 0$时。令 $n \in \mathbb{N}$ 为固定时刻。方程（ u 28）的解（此处假设其足够光滑）满足

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_j-\frac{\Delta x}{2}}^{x_j+\frac{\Delta x}{2}} u(t^n, y)dy = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j-\frac{\Delta x}{2}}^{x_j+\frac{\Delta x}{2}} \sum_{k=0}^{d-1} \partial_x^k u(t^n, x_\sigma)\frac{(y-x_\sigma)^k}{k!}dy + O(\Delta x^d) \tag{29}$$

利用 d 阶泰勒展开。现在，取一个解 $(U_j^n)_{j\geqslant 0}$ ，它满足近似 u 的形式为（29）的格式（2）。利用（29），我们要定义 r 虚点 $(U_j^n)_{-r\leqslant j\leqslant -1}$。对于 $j \geqslant -r$，方程（29）的近似式为,

$$U_j^n \approx \sum_{k=0}^{d-1} \partial_x^k u(t^n, x_\sigma)\left(\frac{(j+\frac{1}{2}-\sigma)^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{(j-\frac{1}{2}-\sigma)^{k+1}}{(k+1)!}\right). \tag{30}$$

一方面，我们使用偏微分方程将空间导数转换为时间导数，直到指标 $k_d < d$。指标 k_d 使我们只需知道边界数据 g的一阶导数，其余部分则使用外推。对于平流方程，对所有 $k \leqslant k_d$，有:

$$\partial_x^k u(t^n, x_\sigma) = (-a)^{-k}\partial_t^k u(t^n, x_\sigma) = (-a)^{-k} g^{(k)}(t^n).$$

方程（30）对于 $j \geqslant -r$，变为

$$\begin{aligned} U_j^n \approx \sum_{k=0}^{k_d}(-a)^{-k} g^{(k)}(t^n)\left(\frac{(j+\frac{1}{2}-\sigma)^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{(j-\frac{1}{2}-\sigma)^{k+1}}{(k+1)!}\right) \\ + \sum_{k=k_d+1}^{d-1} \partial_x^k u(t^n, x_\sigma)\left(\frac{(j+\frac{1}{2}-\sigma)^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{(j-\frac{1}{2}-\sigma)^{k+1}}{(k+1)!}\right). \end{aligned} \tag{31}$$

另一方面，我们需要定义 $(\partial_x^k u(t^n, x_\sigma))_{k=k_d+1}^{d-1}$，但利用（31）求 $j \in [\![0: \ d-k_d-2]\!]$，我们可以推导出未知量 $(U_j^n)_{-r\leqslant j\leqslant -1}$。写作 $\mathfrak{U}_- = (U_{-r}^n, \ldots, U_{-1}^n)^T$、 $\mathfrak{U}_+ = (U_0^n, \ldots, U_{d-k_d-2}^n)^T$和 $\Theta^n = (\partial_x^{k_d+1}u(t^n, x_\sigma) \ldots, \partial_x^{d-1}u(t^n, x_\sigma))^T$，我们得到（31）的紧凑形式:

$$\begin{cases} \mathfrak{U}_- &= \mathcal{S}_-^n + \mathcal{Y}_-\Theta^n, \\ \mathfrak{U}_+ &= \mathcal{S}_+^n + \mathcal{Y}_+\Theta^n, \end{cases} \tag{32}$$

其中 $\mathcal{S}_-^n \in \mathrm{R}^r$, $\mathcal{S}_+^n \in \mathrm{R}^{d-k_d-1}$, $\mathcal{Y}_- \in \mathcal{M}_{r,d-k_d-1}(\mathrm{R})$ 和 $\mathcal{Y}_+ \in \mathcal{M}_{d-k_d-1}(\mathrm{R})$ 满足

$$\begin{cases} (\mathcal{S}_-^n)_i = \sum_{k=0}^{k_d}(-a)^{-k} g^{(k)}(t^n)\left(\frac{(-i+\frac{1}{2}-\sigma)^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{(-i-\frac{1}{2}-\sigma)^{k+1}}{(k+1)!}\right) & \text{for } i \in [\![1:r]\!] \\ (\mathcal{S}_+^n)_i = \sum_{k=0}^{k_d}(-a)^{-k} g^{(k)}(t^n)\left(\frac{(i-1+\frac{1}{2}-\sigma)^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{(i-1-\frac{1}{2}-\sigma)^{k+1}}{(k+1)!}\right) & \text{for } i \in [\![1:d-k_d-1]\!] \\ (\mathcal{Y}_-)_{i,j} = \left(\frac{(-(r-i+1)+\frac{1}{2}-\sigma)^{j+k_d+1}}{(j+k_d+1)!} - \frac{(-(r-i+1)-\frac{1}{2}-\sigma)^{j+k_d+1}}{(j+k_d+1)!}\right) & \text{for } i \in [\![1:r]\!], \\ & j \in [\![1:d-k_d-1]\!] \\ (\mathcal{Y}_+)_{i,j} = \left(\frac{(i-1+\frac{1}{2}-\sigma)^{j+k_d+1}}{(j+k_d+1)!} - \frac{(i-1-\frac{1}{2}-\sigma)^{j+k_d+1}}{(j+k_d+1)!}\right) & \text{for } i,j \in [\![1:d-k_d-1]\!] \end{cases}$$

消去　空间导数 Θ^n 在（32）中给出以下边界条件：

$$\mathfrak{U}_- = \mathcal{Y}_-\mathcal{Y}_+^{-1}\mathfrak{U}_+ + \mathcal{S}_-^n - \mathcal{Y}_-\mathcal{Y}_+^{-1}\mathcal{S}_+^n. \tag{33}$$

方程（33）正是该格式的边界方程（5），它们定义了 r 该格式的虚点。为了将边界条件写成带有表达式（7）和（8）的方程，我们令

$$B \overset{def}{=} \mathcal{Y}_-\mathcal{Y}_+^{-1} \text{ and } \begin{pmatrix} g_{-r}^n \\ \vdots \\ g_{-1}^n \end{pmatrix} \overset{def}{=} \mathcal{S}_-^n - \mathcal{Y}_-\mathcal{Y}_+^{-1}\mathcal{S}_+^n.$$

与 [10]、$\mathcal{R}^{d,\,k_d}$ 一样，表示重构过程，其中 d是该方法的相容阶，k_d 是从时间导数转换为外推时所用的指标。例如，重构过程 $\mathcal{R}^{3,\,0}$ 对于 $r = 2$ 和 $\sigma = 0.4$ 给出

$$\mathcal{Y}_- = \begin{pmatrix} -\frac{12}{5} & \frac{1753}{600} \\ -\frac{7}{5} & \frac{613}{600} \end{pmatrix}, \mathcal{Y}_+ = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{73}{600} \\ \frac{3}{5} & \frac{133}{600} \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} \frac{1371}{97} & \frac{526}{97} \\ \frac{554}{97} & \frac{143}{97} \end{pmatrix}$$

4.4. O3 格式示例。与 [10], 中的做法一样，我们希望求出对于 $j \in$N 和 $n \in$N定义的 O3 格式的稳定区域：

$$U_j^{n+1} = \left(\frac{\lambda^3}{6} - \frac{\lambda}{6}\right)U_{j-2}^n + \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{2}\right)U_{j-1}^n + \left(1 - \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 + \frac{\lambda^3}{2}\right)U_j^n + \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{6} - \frac{\lambda}{3}\right)U_{j+1}^n \tag{34}$$

O3 格式是一个具有 $r = 2$ 和 $p = 1$ 的格式，并且当 $\lambda \in]0,\ 1]$时是柯西稳定的。O3 格式的重构 $\mathcal{R}^{3,\,0}$ 和 $\sigma = 0.4$ 给出

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1371}{97} & \frac{526}{97} & 0 \\ \frac{554}{97} & \frac{143}{97} & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{180\lambda^2}{97} + \frac{277\lambda}{97} + 1 & \frac{120\lambda^2}{97} + \frac{23\lambda}{97} & 0 \\ \frac{263\lambda^3}{582} + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{14\lambda}{291} & \frac{217\lambda^3}{291} - \lambda^2 - \frac{217\lambda}{291} + 1 & -\frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda}{3} \end{pmatrix}.$$

利用 Kreiss-Lopatinskii 行列式的重写形式（27），我们得到

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{B}}(\varsigma_0, \varsigma_1) &= \mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\varsigma_0 & -\varsigma_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{180\lambda^2}{97} + \frac{277\lambda}{97} + 1 & \frac{120\lambda^2}{97} + \frac{23\lambda}{97} \\ \frac{(263+97\varsigma_0)\lambda^3}{582} + \frac{(1-\varsigma_0)\lambda^2}{2} + \frac{(14+97\varsigma_0)\lambda}{291} & \frac{(434+97\varsigma_1)\lambda^3}{582} - \frac{(2+\varsigma_1)\lambda^2}{2} - \frac{(217-97\varsigma_1)\lambda}{291} + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例如，对于 $\sigma = 0.4$，图3 表明，带有 $\mathcal{R}^{3,\,0}$ 边界的 O3 格式在$\lambda = 0.4$ （因为 $r - \text{Ind}^{\Delta(\mathbb{S})}(0) = 0$）时稳定，在 $\lambda = 0.9$ （因为 $r - \text{Ind}^{\Delta(\mathbb{S})}(0) = 1$）时不稳定。

我们可以绘制与 [10] 的图4相同的图，但我们不再计算截断准 Toeplitz 矩阵的谱半径，而是采用统计不稳定模态数量的策略，见图4 。这种方法（由于不依赖参数）可靠得多，也更高效。在图4中，每个标有 0 的区域都是 O3 格式稳定的区域。图 λ 中在很小的0 到0.01之间的大致范围内出现的奇特图案4 可能是计算绕数时遇到了困难。事实上，当 λ的值非常小时，Kreiss-Lopatinskii 行列式非常接近原点；即使经过细化（有关此过程的更多详情见下一个例子），绕数的计算也可能变得不准确。不过这在实践中并不构成问题，因为这对应的时间步长非常小，因而无法使用。

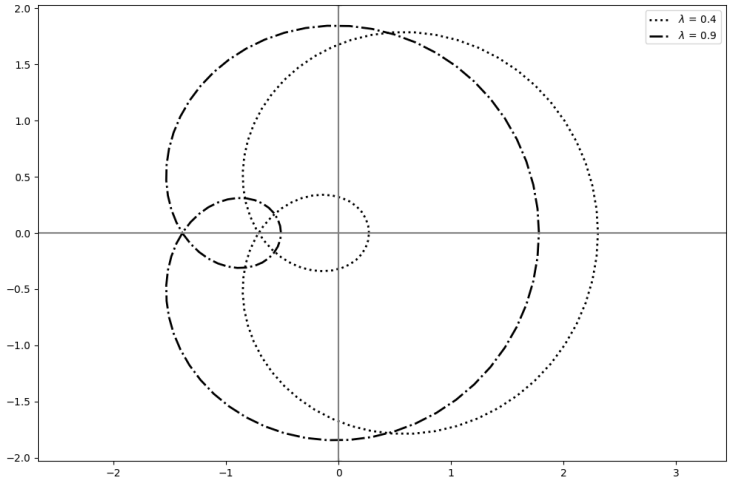

图 3. O3 格式对于 $\sigma = 0.4$、 $\lambda \in \{0.4, 0.9\}$ ，采用重构边界 $\mathcal{R}^{3,\ 0}$ 时的曲线 Δ(S)。

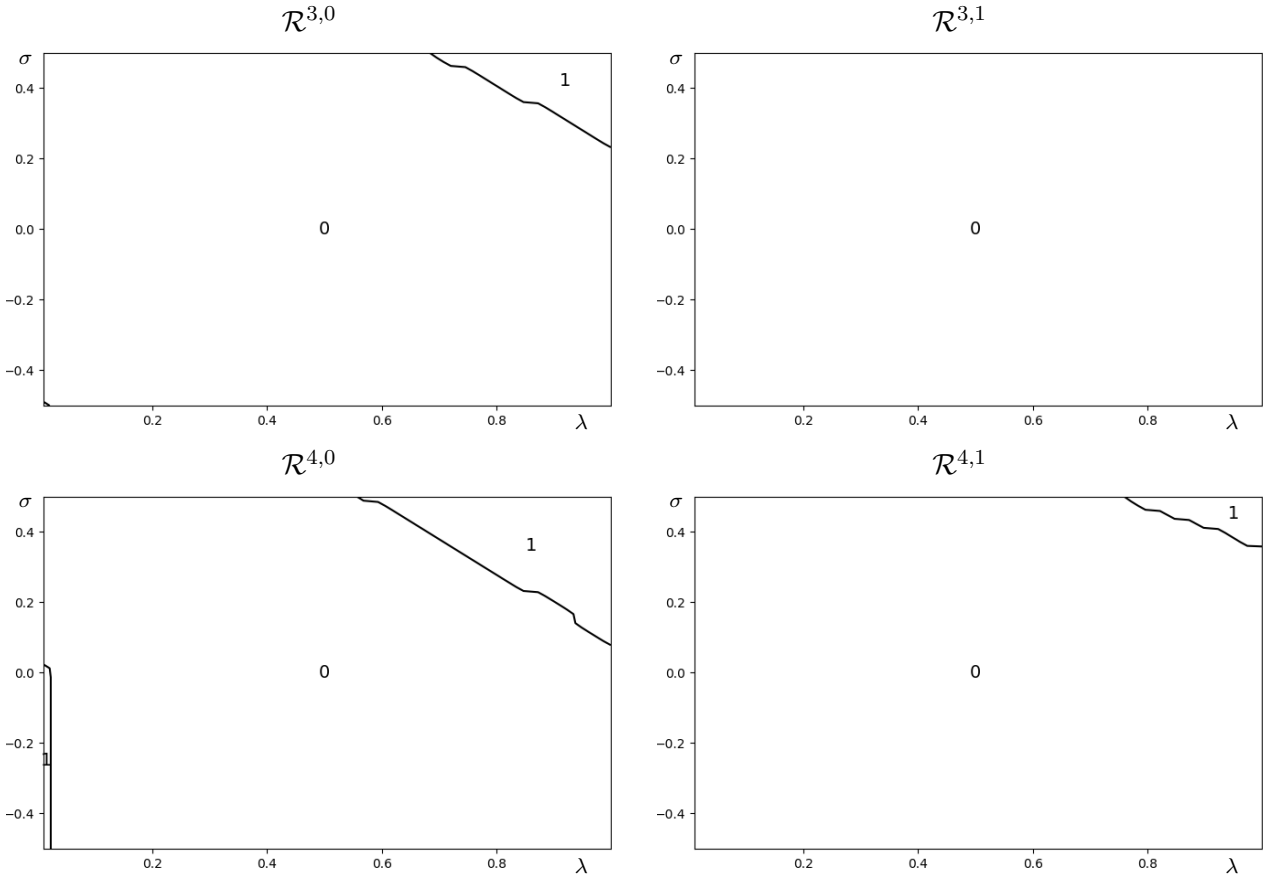

图4. 对于 $\lambda \in]0,\ 1]$ 和 $\sigma \in]-0.5,\ 0.5[$，采用不同重构边界的 O3 格式的 Kreiss-Lopatinskii 行列式零点数。

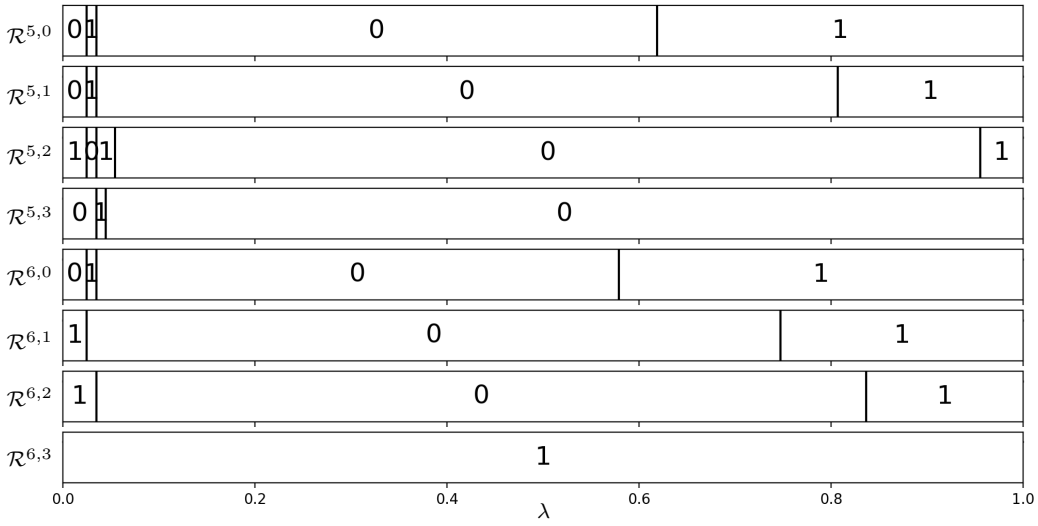

图 5. 对于 $\lambda \in]0,\ 1]$ 和 $\sigma = 0.4$，采用不同重构边界时 LW5 格式的 Kreiss-Lopatinskii 行列式的零点数量。

4.5. **Lax-Wendroff 5 示例**。五阶 Lax-Wendroff 格式（简称 LW5）在 [29] 中提出，对所有 $n \in \mathbb{N}$，对所有 $j \in \mathbb{N}$，可写为

$$U_j^{n+1} = \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)}{120} U_{j-3}^n - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda+2)}{24} U_{j-2}^n + \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda+2)}{12} U_{j-1}^n + \left(1 - \frac{\lambda(\lambda^4-3\lambda^3-5\lambda^2+15\lambda+4)}{12}\right) U_j^n + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+2)}{24} U_{j+1}^n - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)}{120} U_{j+2}^n. \quad (35)$$

对于 $\lambda \in]0,\ 1]$，LW5 格式是柯西稳定的。

图 5 展示了在不同重构边界下计算 LW5 不稳定性数量的结果，其中 $\sigma = 0.4$ 关于 $\lambda \in]0,\ 1]$。与前一个示例一样，Kreiss-Lopatinskii 曲线有时会非常接近原点，导致无法正确计算原点的绕数。按照 García Zapata 在 [14], 中提出的几何算法，对离散化进行细化可以提高绕数的有效计算精度。图 6 展示了这种细化，并放大了原点附近的区域。然而，即便采用这一策略，当 λ的值非常小时，我们也无法将细化程度提高到超过机器精度，因此图 λ 4、图 5和图 7中仍会出现一些异常图样。正如我们已经讨论过的，这种非常小的时间步在实际中并不会使用。图 7给出了关于两个参数 λ 和 σ 的稳定区域，并依次考虑了不同的重构边界条件。

所有图形都可以使用常用的 NumPy [20] 库以及用于计算机代数系统的 SymPy [31] 库轻松地在 Python 中计算。该算法效率很高。对于图 4 的每个子图，1600次运行在标准笔记本电脑上只需不到几分钟即可完成。此外，我们的方法能够提供精确的结果。特别是，与基于计算谱半径的稳定性数值研究不同，我们无需对（准）托普利兹矩阵进行任意截断。

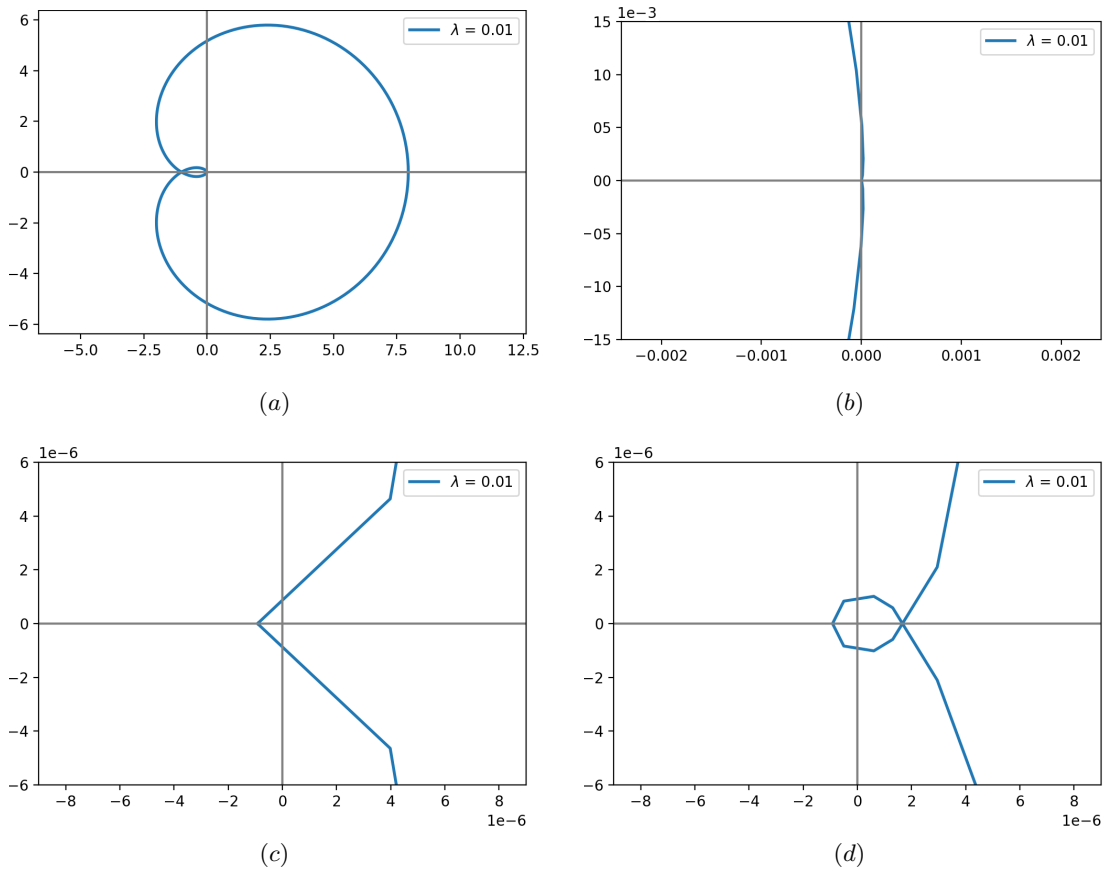

图 6. LW5 在边界条件 $\mathcal{R}^{6,\ 1}$ 下， $\lambda = 0.01$ 和 $\sigma = 0$对应的 Δ(S) 的 (*a*) 表示；放大图 (*b*)，未细化 (*c*) 和细化后 (*d*)。

参考文献

[1] A. Arnold、M. Ehrhardt 和 I. Sofronov。《薛定谔方程的离散透明边界条件：快速计算、近似与稳定性》。*Communications in Mathematical Sciences*，1(3):501–556，2003。[2] R. M. Beam 和 R. F. Warming。带状 Toeplitz 矩阵和准托普利兹矩阵的渐近谱。*SIAM Journal on Scientific Computing*，14(4):971–1006，1993。[3] S. Benzoni-Gavage 和 D. Serre。《多维双曲型偏微分方程：一阶系统及其应用》。OUP Oxford，2006年。[4] B. Boutin、P. Le Barbenchon 和 N. Seguin。关于双曲型初边值问题中全迎风格式的稳定性。已投稿，2022年。[5] B. Boutin、T. Nguyen、A. Sylla、S. Tran-Tien 和 J.-F. Coulombel。有界区域上输运方程的高阶数值格式。*ESAIM: Proceedings and Surveys*，70:84–106，2021。[6] J.-F. Coulombel。双曲型初边值问题的有限差分格式的稳定性。载于 *HCDTE* 讲义。第一部分：非线性双曲型偏微分方程、色散方程与输运方程，*AIMS Ser. Appl. Math.*第6卷，第146页。Am. Inst. Math. Sci. (AIMS)，密苏里州斯普林菲尔德，2013年。[7] J.-F. Coulombel。演化方程的透明数值边界条件：推导与稳定性分析。*Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6)*，28(2):259–327，2019。[8] R. Courant、K. Friedrichs 和 H. Lewy。关于数学物理中的偏微分方程。*Mathematische Annalen*，100(1):32–74，1928。[9] J. Crank 和 P. Nicolson。数值求解热传导型偏微分方程解的一种实用方法。*Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*，43(1):50–67，1947。[10] G. Dakin、B. Després 和 S. Jaouen。笛卡尔网格上可压缩拉格朗日-重映射流体动力学的逆 Lax–Wendroff 边界处理。*Journal of Computational Physics*，353:228–257，2018。

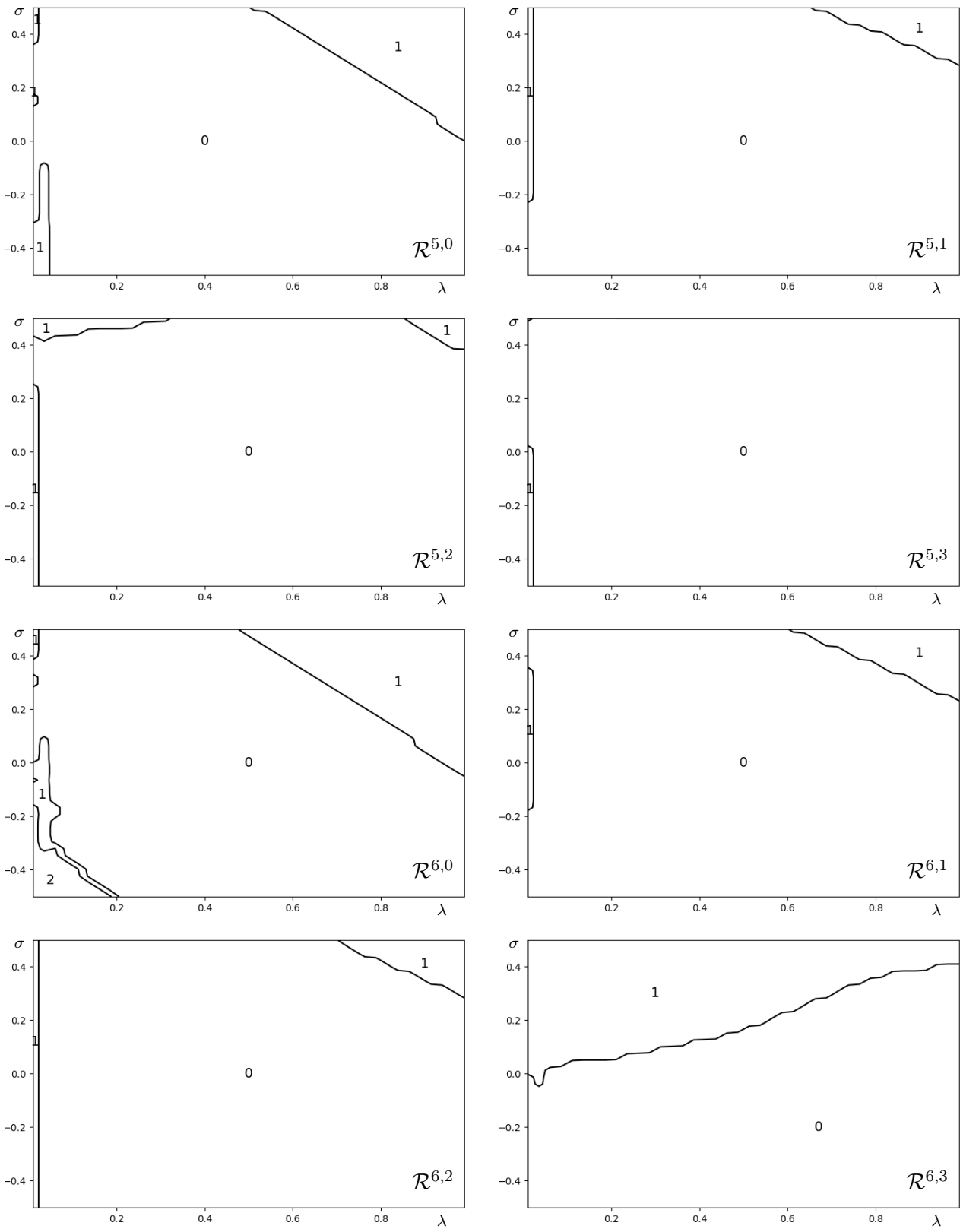

图 7. 对于 $\lambda \in]0,1]$ 和 $\sigma \in]-0.5, 0.5[$，采用不同重构边界的 LW5 格式的 Kreiss-Lopatinskii 行列式的零点数。

[11] M. Ehrhardt. 双曲系统的吸收边界条件. Numer. Math., Theory Methods Appl., 3(3):295–337, 2010年. [12] B. Engquist and A. Majda. 用于波的数值模拟的吸收边界条件. Mathematics of Computation, 31:629–651, 1977年. [13] J. L. García Zapata and J. C. Díaz Martín. 一种绕数计算的几何算法及其复杂度分析. Journal of Complexity, 28(3):320–345, 2012年. [14] J. L. García Zapata and J. C. Díaz Martín. 使用绕数求平面区域内多项式根的数量. Computers & Mathematics with Applications, 67(3):555–568, 2014年. [15] C. Gasquet and P. Witomski. 傅里叶分析与应用：滤波、数值计算、小波，第30卷. Springer Science & Business Media, 2013年. [16] M. Goldberg. 关于 Kreiss 的边界外推定理. Mathematics of Computation, 31 477, 1977 138 469( ): – .[17] B. Gustafsson. 时变偏微分方程的高阶差分方法. Springer 计算数学丛书第38卷. Springer, 柏林, 2008年. [18] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, and J. Oliger. 时变问题与差分方法. 纯粹与应用数学：Wiley 文本、专著与论著丛书. Wiley, 2013年. [19] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, and A. Sundström. 混合初边值问题差分逼近的稳定性理论. II. Mathematics of Computation, 26(119):649–649, 1972年. [20] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, R. Gommers, P. Virtanen, D. Cournapeau, E. Wieser, J. Taylor, S. Berg, N. J. Smith, R. Kern, M. Picus, S. Hoyer, M. H. van Kerkwijk, M. Brett, A. Haldane, J. F. del Río, M. Wiebe, P. Peterson, P. Gérard-Marchant, K. Sheppard, T. Reddy, W. Weckesser, H. Abbasi, C. Gohlke, and T. E. Oliphant. 使用 NumPy 进行数组编程. Nature, 585(7825):357–362, 2020年9月. [21] C. Hermite. 关于拉格朗日插值公式.（摘自 Hermite 先生致 Borchardt 先生的一封信）. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 84:70–79, 1877年. [22] R. Hersh. 多个变量中的混合问题. Journal of Mathematics and Mechanics, 12(3):317–334, 1963年. [23] H.-O. Kreiss. 混合初边值问题差分逼近的稳定性理论. i. Mathematics of Computation, 22(104):703–703, 1968年. [24] S. Lang. 复分析，第103卷. Springer Science & Business Media, 2013年. [25] P. D. Lax and R. D. Richtmyer. 线性有限差分方程稳定性的综述. Communications on Pure and Applied Mathematics, 9(2):267–293, 1956年. [26] T. Li, J. Lu, and C.-W. Shu. 抛物型方程高阶紧致差分格式逆 Lax–Wendroff 边界处理的稳定性分析. Journal of Computational and Applied Mathematics, 400:113711, 2022年. [27] T. Li, C.-W. Shu, and M. Zhang. 高阶迎风偏置有限差分格式逆 Lax–Wendroff 边界处理的稳定性分析. Journal of Computational and Applied Mathematics, 299 158, 2016 140: – .[28] T. Li, C.-W. Shu, and M. Zhang. 扩散方程高阶中心差分格式逆 Lax–Wendroff 边界处理的稳定性分析. Journal of Scientific Computing, 70(2):576–607, 2017年. [29] F. Lörcher and C.-D. Munz. 多个空间维数下的任意阶 Lax–Wendroff 型格式. IMA Journal of Numerical Analysis, 27(3):593–615, 2006年. [30] G. Métivier and K. Zumbrun. 抛物-双曲型边值问题中稳定子空间的对称化矩阵与连续性. Discrete & Continuous Dynamical Systems - A, 11(1):205–220, 2004年. [31] A. Meurer, C. P. Smith, M. Paprocki, O. Čertík, S. B. Kirpichev, M. Rocklin, A. Kumar, S. Ivanov, J. K. Moore, S. Singh, T. Rathnayake, S. Vig, B. E. Granger, R. P. Muller, F. Bonazzi, H. Gupta, S. Vats, F. Johansson, F. Pedregosa, M. J. Curry, A. R. Terrel, v. Roučka, A. Saboo, I. Fernando, S. Kulal, R. Cimrman, and A. Scopatz. Sympy：Python 中的符号计算. PeerJ Computer Science, 3:e103, 2017年1月. [32] M. Thuné. 自动 GKS 稳定性分析. SIAM J. Sci. Statist. Comput., 7(3):959–977, 1986年. [33] F. Vilar and C.-W. Shu. 中心紧致格式逆 Lax Wendroff 边界处理的开发与稳定性分析. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 49(1):39–67, 2015年. [34] L. Wu. 初边值问题差分逼近的半群稳定性. Mathematics of Computation, 64(209):71–71, 1995年.

雷恩大学，法国国家科学研究中心，IRMAR - UMR 6625，法国雷恩 F-35000。电子邮箱地址：benjamin.boutin@univ-rennes1.fr电子邮箱地址：pierre.lebarbenchon@univ-rennes1.fr

IMAG，蔚蓝海岸大学 Inria，蒙彼利埃大学，法国国家科学研究中心，法国蒙彼利埃电子邮箱地址：nicolas.seguin@inria.fr