arXiv:2302.01412v2 [math.NA] 8 Jun 2023

R^2 中广义 Radon 变换的视图混叠分析

ALEXANDER KATSEVICH[1]

Abstract. 本文研究平面上的广义 Radon 变换 $\mathcal{R}$ 。设 f 为一个分段光滑函数，它在一条光滑曲线 $\mathcal{S}$上发生跳跃。我们得到一个公式，可以准确描述视角混叠伪影在远离 $\mathcal{S}$ 处的情况，其中 f 根据沿视角方向离散化的数据 $\mathcal{R}f$ 进行重建。该公式是渐近的，在采样率 $\epsilon \to 0$趋于极限时成立。所提出的方法不要求 f带限。对经典 Radon 变换和广义 Radon 变换（沿圆积分）进行的数值实验验证了该公式的准确性。

1. Introduction

从离散数据进行图像重建的分辨率是成像领域的基本问题之一。估算分辨率最直接的方法是利用点扩散函数（PSF）和调制传递函数（MTF）的概念 [1, 第 12.2、12.3] 节。这种方法以及其他类似方法，只能对最简单的情形进行严格的理论分析，例如经典 Radon 变换的反演。对于更复杂情形（如锥束变换的反演）下的重建分辨率，大多通过启发式论证、数值方法或测量进行分析 [2–4]。

采样理论提供了一种相关方法来研究分辨率 [5–14]。例如，考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的经典 Radon 变换

$$\hat{f}(\alpha, p) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\delta(\vec{\alpha}\cdot x - p)\mathrm{d}x,\ \vec{\alpha} = (\cos\alpha, \sin\alpha). \tag{1.1}$$

相应的离散数据为

$$\hat{f}(\alpha_k, p_j),\ \alpha_k = \bar{\alpha} + k\Delta\alpha,\ p_j = \bar{p} + j\Delta p,\ \alpha_k \in [0, 2\pi), j \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

其中 $\bar{\alpha}$、 $\bar{p}$ 、 $\Delta\alpha$ 和 Δp 为某些固定值。假设 f 是有效带限的（按 ˜ 经典意义而言）。这意味着，其傅里叶变换 $f(\xi)$ 在很高精度下支撑于某个球 $|\xi| \leq B$ 内。采样理论预测了采样率 $\Delta\alpha$、 Δpˆ，按照这些采样率对 $f(\alpha,\ p)$ 进行采样后，从离散数据重建 f 时不会产生混叠伪影。由于有效带限 B 与 f 中最小细节的尺寸相关，理论的典型指导原则可粗略表述如下：给定 f 中最小细节的尺寸，为避免混叠所需的最小采样率为 $\Delta\alpha$、 Δp。或者，该理论也可根据采样率 $\Delta\alpha$、 Δp 确定 f 中能够分辨的最小细节尺寸。

近期发展出一种用于采样的微局部方法 [15–17]。在这种方法中，假设 f 在半经典意义下是带限的（即，半经典波前集 $\mathrm{WF}_h(f)$ 是紧致的）。另一种假设是，数据表示卷积 $w * \mathcal{R}f$ 的离散取值。这里， $\mathcal{R}$ 是广义 Radon 变换，而 w 是半经典带限光滑化函数。该

[1]本研究部分获得美国国家科学基金会项目 DMS-1906361 的资助。中佛罗里达大学数学系，佛罗里达州奥兰多，邮编 32816（Alexander.Katsevich@ucf.edu）。

光滑化函数对探测器孔径函数进行建模。目标是准确恢复 f 的半经典奇异性并避免混叠。如果不满足采样要求，该理论可以预测混叠伪影的位置和频率。

在 [18–22], 中，作者提出了另一种分辨率分析方法（我们称之为局部分辨率分析，即 LRA）。这些论文的主要结果是一些简单表达式，用于描述在各种情形下，由 $\mathcal{R}f$ 或 $w*\mathcal{R}f$ 在 f 的奇异性邻域中的离散值进行重建的过程。我们将这些表达式称为离散跃迁行为（DTB）。DTB 在采样率与分辨率之间建立了直接的定量联系。在这些论文中，这种联系适用于广泛的积分变换、余法分布 f 以及重建算子。在 [23, 24] 中，LRA 被推广到具有粗糙边界的对象 $\mathbb{R}^2$。无论 f 还是光滑化函数 w （如果采用）都不要求是带限的。

假设 $\Delta p = \epsilon$ 和 $\Delta\alpha = \kappa\epsilon$，其中 $\kappa > 0$ 为固定值。当 $\epsilon \to 0$ 时，在 ϵ 邻域内，DTB 是对 f 的奇异支集处重建结果的精确近似。因此，DTB 所提供的信息远不止单一的分辨率度量（例如，可分辨的最小细节尺寸）。给定 DTB 函数，用户可以完全定量地确定达到用户定义的重建质量所需的采样率。质量这一概念可以包括分辨率（可用任何所需的方式描述）和/或用户希望满足的任何其他要求。因此，LRA 准确回答了这样的问题：为保证所需的分辨率（广义理解），需要多高的采样率。

迄今为止，LRA 唯一缺少的内容是对混叠的分析。关于混叠伪影（更准确地说，是视角混叠伪影）分析的一些早期结果见 [25] and [1, 第 12.3 节2]。这些结果包括一个近似公式，用于描述远离小型径向对称物体处的伪影。较新的结果见 [15–17]。这些结果包括对伪影位置和频率的预测，对各种边缘（例如平坦边缘、凸边缘和角点）所产生伪影的定性分析，以及相应的数值示例。

本文将 LRA 推广到视角混叠分析。我们称之为局部化混叠分析，简称 LAA。我们的主要结果是定理 2.5，其中给出了描述混叠伪影的精确、定量公式。该公式是渐近的，并在采样率 $\epsilon \to 0$ 的极限下建立（这与 [15–17] 中的假设相同）。与 LRA 类似，LAA 非常灵活。本文研究 $\mathbb{R}^2$ 中的广义 Radon 变换，并将其应用于在光滑曲线两侧具有跳跃间断的函数。与 [18–22], 类似，我们认为 LAA 可以推广，并能够预测多种积分变换、余法分布 f 以及重建算子中的混叠伪影。

为避免混淆，我们在此阐明本文中“分辨率”和“混叠”这两个术语的含义。为简单起见，我们以光滑曲线 $\mathcal{S}$上的跳跃不连续为例。 $x_0 \in \mathcal{S}$ 处的分辨率是指：根据离散数据重建图像时，跳跃边界（即 $\mathcal{S}$）在 x_0 邻域内的模糊程度。这种模糊可由上文提到的 DTB函数准确描述。推导 DTB函数时，已考虑到因 $\mathcal{S}$ 在 x_0邻域内的部分发生混叠而可能产生的伪影。换言之，*LRA* 将局部混叠视为分辨率分析的一部分。本文中，“混叠”指远离$\mathcal{S}$ 处的快速振荡伪影，这些伪影由 $\mathcal{S}$的混叠所致。

本文结构如下。第 2 节介绍问题设定、阐述假设，并陈述主要结果——定理 2.5。该定理给出了一个

描述混叠伪影的简洁公式。我们还讨论了公式中用到的各种量，并陈述一个推论，说明该公式在经典 Radon 变换情形下的形式。定理 2.5 的证明见第 3 节。第 4.1 节阐述函数 Ψ 的一些有用性质，伪影正是通过这些性质来描述的。第 4.2 节给出了数值计算 Ψ 的算法。第 5 节包含经典和广义 Radon 变换的数值实验。后者对圆进行积分。文中还提供了实现细节，以展示该定理的用法。所有实验都表明，重建结果与预测高度吻合。部分引理的证明见附录A。

2. 预备知识

2.1. 广义 Radon 变换。 令 $p = \mathcal{P}_*(\alpha,\ x)$ 为广义 Radon 变换 $\mathcal{R}$ 的定义函数：

$$\hat{f}(\alpha,p) = \int_{\mathcal{S}_{\alpha,p}} W(\alpha,p;x) f(x)\mathrm{d}A,\ \mathcal{S}_{\alpha,p} := \{x\in\mathbb{R}^2 : \mathcal{P}_*(\alpha,x) = p\}, \alpha\in\Omega, p\in\mathbb{R}, \tag{2.1}$$

其中，$W \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}\times U)$ 是某个（已知的）积分权重，$\mathrm{d}A$ 是曲线 $\mathcal{S}_{\alpha,\ p}$ 上的弧长元素，$U\subset\mathbb{R}^2$ 是一个小开集，而 $\Omega\subset\mathbb{R}$ 是一个小区间。与经典 Radon 变换类似，我们将 α 视为极角，将 p - 视为仿射变量。然而，由于我们考虑的是广义 Radon 变换，这些变量有许多其他解释。有关广义 Radon 变换及其性质和应用的更多信息与参考文献，请参阅 [26,27] 。

设 $\mathcal{S}$ 是一条 C^∞ 曲线。令 $(\alpha_\star,\ p_\star)$ 为一对满足以下条件的对象：$\mathcal{S}_{\alpha_\star,\ p_\star}$ 在某个 $y_0\in\mathcal{S}\cap U$ 处与 $\mathcal{S}$ 相切。为简化记号，记 $\mathcal{S}_\star := \mathcal{S}_{\alpha_\star,\ p_\star}$。我们将在某个点 $x_0\notin\mathcal{S}_\star$ 的小邻域内进行重建。令 $H(y)=0$ 为 $\mathcal{S}$ 在 y_0 邻域内的一个方程。函数 H 是光滑的，并且 $\mathrm{d}H(y)\neq 0, y\in\mathcal{S}$。如有必要，将 H 乘以一个常数后，我们可以假设 $\mathcal{P}_*$ 满足以下方程

$$\mathcal{P}_*(\alpha_\star,x_0) = \mathcal{P}_*(\alpha_\star,y_0) = p_\star,\ \mathrm{d}_x\mathcal{P}_*(\alpha_\star,y_0) = \mathrm{d}H(y_0). \tag{2.2}$$

假设 2.1（的性质 $\mathcal{P}_*$）。

(1) $\mathcal{P}_*\in C^\infty(\Omega\times U)$，且 $\mathrm{d}_x\mathcal{P}_*(\alpha,x)\neq 0, x=x_0,y_0$；

(2) 方程 (2.2) 成立；(3) $\partial_\alpha\mathcal{P}_*(\alpha_\star,x_0)\neq\partial_\alpha\mathcal{P}_*(\alpha_\star,y_0)$（Bolker 条件）；(4) 有

$$M := (\vec{\Theta}_0^{\perp}\cdot\partial_y)^2(\mathcal{P}_*(\alpha_\star,y)-H(y))|_{y=y_0} > 0, \tag{2.3}$$

其中 $\vec{\Theta}_0^{\perp}$ 是与 $\mathrm{d}H(y_0)$ 正交的单位向量；并且

(5) 存在 $c>0$，使得 $y_0\notin\mathcal{S}_{\alpha,p}$ 对任意 $\alpha\in\Omega$ 和 $|p-p_\star|\geq c$均成立。

假设2.1(4)等价于以下条件：$\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}_\star$在 y_0 处的曲率不相等。换言之，$\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{S}_\star$ 之间的接触阶数为一（而非更高）。例如，如果两条曲线中的一条在 y_0处是平坦的，那么只要另一条不是平坦的，$M\neq 0$就成立。要求 M 为正并不构成限制。如果 $M<0$，我们可以翻转 p轴，并替换 $H\to -H, \mathcal{P}_*\to -\mathcal{P}_*$，使 M 为正。实质性的要求是 $M\neq 0$。

条件 $M>0$ 意味着，当 $\delta>0$ 时，$\mathcal{S}_{\alpha_\star,\ p_\star+\delta}$ 在 y_0 附近与 $\mathcal{S}$ 相交于两点，而在 y_0 附近不与 $\mathcal{S}$ 相交——若 $\delta<0$ （见图1）。下文中我们令

$$\vec{\Theta}_0 := \pm\mathrm{d}H(y_0), \tag{2.4}$$

并选择符号（+ 或 −），使得 $\vec{\Theta}_0$ 指向 $\mathcal{S}_{\alpha_\star,\ p_\star+\delta}$,$0<\delta\ll 1$ 中位于其与 $\mathcal{S}$ 的两个交点之间的部分（见图1）。

如有必要，进一步缩小 Ω 和 U，我们可以假设不存在其他一对 $(\alpha',\ p')\neq(\alpha_\star,\ p_\star)$，$\alpha'\in\Omega$，使得 $x_0\in\mathcal{S}_{\alpha',\ p'}$，且 $\mathcal{S}_{\alpha',\ p'}$ 在y_0处与 $\mathcal{S}$ 相切。

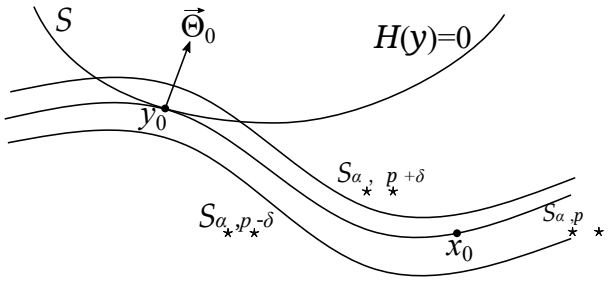


FIGURE 1. 曲线 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}_{\alpha,\ p}$的示意图。

设 $\mathcal{P}(\alpha)$，$\alpha\in\Omega$，是满足以下条件的函数：曲线$\mathcal{S}_{\alpha,\ \mathcal{P}(\alpha)}$ 在 y_0的某个邻域内与 $\mathcal{S}$ 相切。图2展示了在经典 Radon 变换（左图）以及对圆进行积分的广义 Radon 变换（右图）情形下的函数$\mathcal{P}(\alpha)$。这些圆的半径和圆心任意，且圆心位于给定曲线 $z(\alpha)\in\Gamma$, $\alpha\in\Omega$ 上。考虑后一种情形。例如，假设 $\mathcal{S}$ 是一个半径为 r、圆心为 a的圆。全局来看，存在两个这样的函数：$\mathcal{P}(\alpha)=|z(\alpha)-a|\pm r$。关于圆形 Radon 变换的更多细节，另见第5.2节。

以下简单引理的证明见附录 A.1。

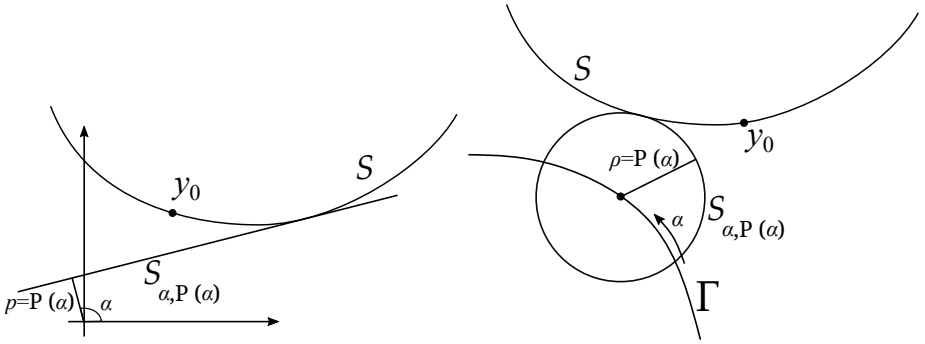


FIGURE 2. 函数 $\mathcal{P}(\alpha)$ 的示意图。左图：经典 Radon 变换，对直线进行积分。右图：广义 Radon 变换，对圆进行积分，这些圆的圆心位于由 α 参数化的一条给定曲线上（图中记为 Γ）。

引理 2.2。对于充分小的邻域 $\Omega\ni\alpha_\star$，有

$$\mathcal{P}(\alpha_\star)=p_\star,\ \mathcal{P}(\alpha)\in C^\infty(\Omega),\ \partial_\alpha\mathcal{P}_*(\alpha_\star,y_0)=\mathcal{P}'(\alpha_\star). \tag{2.5}$$

由假设 2.1(1, 3) 和引理 2.2,

$$u_0:=\mathrm{d}_x\mathcal{P}_*(\alpha_\star,x_0)\neq 0,\ \mu_0:=\partial_\alpha(\mathcal{P}_*(\alpha_\star,x_0)-\mathcal{P}(\alpha_\star))\neq 0. \tag{2.6}$$

2.2. **其余假设与主要结果。** 考虑平面 $x \in \mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x)$。我们假设

假设 2.3 （ f的性质）。

(1) $\operatorname{supp}(f) \subset U$，且 $\operatorname{diam}(U)$ 充分小；(2) 存在开集 $D_\pm$ 和函数 $f_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$，使得$f(x) \equiv f_-(x)$ $x \in D_-$，$f(x) \equiv f_+(x)$ $x \in D_+$，

$$D_- \cap D_+ = \varnothing,\ D_- \cup D_+ = U \setminus \mathcal{S}; \tag{2.7}$$

and

(3) $\mathcal{S} \cap U$ 是一条 C^∞ 曲线。

因此，$\operatorname{sing\,supp}(f) \subset \mathcal{S}$。一般而言，$f_-(x) \neq f_+(x)$，$x \in \mathcal{S}$，所以 f可能在 $\mathcal{S}$ 处发生跳跃。注意，$x_0 \in U$ 与否无关紧要。此外，当 U 向 y_0收缩时，$\mathcal{S}$ 不会改变。因此，$\mathcal{S} \cap U$ 是 $\mathcal{S}$ 上 y_0附近的一小段。基于这一理解，在下文中我们不区分 $\mathcal{S}$ 和$\mathcal{S} \cap U$。

与 [17], 类似，我们考虑半离散数据

$$\hat{f}_\epsilon(\alpha_k, p) := \int w_\epsilon(p-s)\hat{f}(\alpha_k, s)\mathrm{d}s,\ \alpha_k := k\Delta\alpha,\ p \in \mathbb{R},\ w_\epsilon(t) := \epsilon^{-1}w(t/\epsilon), \tag{2.8}$$

其中，w 是一个光滑化函数（例如探测器孔径函数），$\Delta\alpha = \kappa\epsilon$，且 $\kappa > 0$是固定的。可以合理地假设，w_ϵ 的支撑集大小为 $O(\epsilon)$，因为沿着 α 和 p 的采样率通常处于同一数量级。

假设 2.4 （关于光滑化函数 w的假设）。

（1）w 是紧支撑的，且对于某个 $q > 2$，$w' \in L^q(\mathbb{R})$；（2）$\int w(p)\mathrm{d}p = 1$。

因此，数据（2.8）表示 f 沿着$\mathcal{S}_{\alpha_k,\ p}$周围窄条带的积分，而其宽度（$= O(\epsilon)$）由 ϵ 和 w的支撑集决定。在理想情况下（本文不予讨论），若 w 是狄拉克 δ-函数，则数据表示 f 沿着$\mathcal{S}_{\alpha_k,\ p}$的积分。

根据数据 (2.8) 进行重建的公式为

$$f_\epsilon^{\mathrm{rec}}(x) = -\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\sum_{\alpha_k \in \Omega}\frac{\omega(\alpha_k, x)}{\pi}\int \frac{\partial_p \hat{f}_\epsilon(\alpha_k, p)}{p - \mathcal{P}_*(\alpha_k, x)}\mathrm{d}p,\ x \in U', \tag{2.9}$$

其中，U'是 x_0的一个小邻域，$\omega \in C^\infty(\Omega \times U')$是某个权函数。这是经典滤波反投影（FBP）反演公式[28] 针对 $\mathbb{R}^2$ 中的广义 Radon 变换所作的离散化（关于 α）版本（例如，[29,30]中采用的方法）。关于 p的积分按柯西主值理解，它是滤波步骤（希尔伯特变换）。外层求和是对应于反投影积分的求积公式。

为了更好地理解 (2.9)，我们考察它的连续类比。假设 w 是 δ函数。(2.9)的连续版本为

$$f^{\mathrm{rec}} = \mathcal{R}^*(\mathcal{H}\partial_p)\mathcal{R}f. \tag{2.10}$$

这里，$\mathcal{R}^*$ 是加权伴随变换，而 $\mathcal{H}$ 是相对于 p作用的希尔伯特变换。通过对 $\mathcal{P}_*$、ω和 W 施加附加限制，我们可以确保 $\mathcal{R}^*(\mathcal{H}\partial_p)\mathcal{R}$ 是一个零阶 ΨDO（例如参见 [29,31]），并具有其他一些所需性质（例如椭圆的、主符号等于 1）。我们没有这样做，因为本文只关注 $f_\epsilon^{\mathrm{rec}}$中远离 $\mathcal{S}$处的快速振荡伪影的重建。尤其是，我们并未试图实现精确重建。鉴于此，我们只施加保证定理 2.5 成立所需的最少条件。这些条件不能保证 $\mathcal{R}^*(\mathcal{H}\partial_p)\mathcal{R}$ 是一个 ΨDO。

引入以下函数：

$$\begin{aligned}\psi(\hat{q}) :=& (1/2)\int_0^\infty w(\hat{q}+\hat{p})\hat{p}^{-1/2}\mathrm{d}\hat{p},\ \hat{q}\in\mathbb{R},\\ \Psi(h;a,r) :=& \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\psi\left(a(k-r)+h\right)-\psi\left(a(k-r)\right)\right],\ h,a,r\in\mathbb{R}, a\neq 0,\\ \Psi(h;0,r) :=& 0,\ h,r\in\mathbb{R},\end{aligned} \tag{2.11}$$

and

$$\Delta f(y_0) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(f(y_0+\epsilon\vec{\Theta}_0)-f(y_0-\epsilon\vec{\Theta}_0)\right). \tag{2.12}$$

ψ 和 Ψ的各种性质（例如，ψ 连续且衰减足够快，因此 Ψ定义中的级数绝对收敛）将在第 3.1 节和第 4 节中证明。我们的主要结果如下。

定理 2.5。设 $W\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}\times U)$，且 $\omega\in C^\infty(\Omega\times U')$，其中 $\Omega\Omega\ni\alpha_\star$、$U\ni y_0$ 和 $U'\ni x_0$ 是某些小开集。在假设 *2.1*、*2.3* 和 *2.4* 下，有

$$\begin{aligned}&\epsilon^{-1/2}(f_\epsilon^{rec}(x_0+\epsilon\check{x})-f_\epsilon^{rec}(x_0)) = c\Psi(u_0\cdot\check{x};\kappa\mu_0,k_\star)+O(\epsilon^{1/2}),\ \epsilon\to 0,\\ &c := -\frac{\kappa\omega(\alpha_\star,x_0)W(\alpha_\star,p_\star;y_0)}{\pi}(2/M)^{1/2}\,\Delta f(y_0),\\ &k_\star :=\alpha_\star/\Delta\alpha,\ \kappa := \Delta\alpha/\epsilon,\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中，M 定义于(2.3)，u_0 和 μ_0 定义于(2.6)，而 $O(\epsilon^{1/2})$ 项关于$\check{}x$ 是一致的，且该参数限制在任意有界集内。

为帮助读者理解，我们讨论式 (2.13) 中出现的各种量。

(1) $\check{}x$ 是从固定点 x_0 到附近重建点 x的缩放位移：$\check{}x=(x-x_0)/\epsilon$；(2) 对于经典 Radon 变换（经典拉东变换），$\mathcal{P}_*(\alpha,x)=\vec{\alpha}\cdot x$，其中 α 和 $\vec{\alpha}$由 $\vec{\alpha}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$联系起来；(3) $\alpha_\star,p_\star$ 是满足以下条件的值：积分曲线$\mathcal{S}_\star=\mathcal{S}_{\alpha_\star,p_\star}$ 包含x_0，且在某一点与 $\mathcal{S}$ 相切，该点记为 y_0（见图1）；(4) $W(\alpha,p;y)$ 和 $\omega(\alpha,x)$分别是 $\mathcal{R}$ 及其伴随算子的积分权重（见 (2.1)、(2.9)、(2.10) 以及这些公式附近的讨论）。对于经典拉东变换，$W(\alpha,p;y)\equiv 1$，且 $\omega(\alpha,x)\equiv 1$；(5) $\kappa=\Delta\alpha/\epsilon$，其中 $\Delta\alpha$ 是沿 α的步长；(6) 除一个非零因子外，M 是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}_\star$ 在 y_0处曲率的差值；(7) $\Delta f(y_0)$是 f 在 y_0处跨越 $\mathcal{S}$ 时的跳跃值；(8) $k_\star=\alpha_\star/\Delta\alpha$ 是对应于角度 $\alpha_\star$的“指标”值。我们将“指标”一词加上引号，因为 $k_\star$ 不一定是整数。从 (2.11) 和 (2.13) 很容易看出，只有 $k_\star$ 的小数部分才重要；(9) 量 $u_0:=\mathrm{d}_x\mathcal{P}_*(\alpha_\star,x_0)$和 $\mu_0:=\partial_\alpha(\mathcal{P}_*(\alpha_\star,x_0)-\mathcal{P}(\alpha_\star))$取决于 Radon 变换的性质（通过函数 $\mathcal{P}_*$）以及曲线 $\mathcal{S}$。对于经典拉东变换，$u_0=\vec{\alpha}_\star$ 和 $\mu_0=\vec{\alpha}_\star^\perp\cdot(x_0-y_0)$，因此 $|\mu_0|=|x_0-y_0|$。

下面的推论可由定理 2.5 直接得出，它展示了经典 Radon 变换情况下公式 (2.13) 的形式。

推论 2.6。令 $\mathcal{R}$ 为经典 *Radon* 变换。在定理 *2.5* 的假设下，有

$$\begin{aligned}&\epsilon^{-1/2}(f_\epsilon^{rec}(x_0+\epsilon\check{x})-f_\epsilon^{rec}(x_0)) = c\Psi(\alpha_\star\cdot\check{x};\kappa\vec{\alpha}_\star^\perp\cdot(x_0-y_0),k_\star)+O(\epsilon^{1/2}),\ \epsilon\to 0,\\ &c := -(\kappa/\pi)(2r)^{1/2}\,\Delta f(y_0),\ k_\star := \alpha_\star/\Delta\alpha,\ \kappa := \Delta\alpha/\epsilon,\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中， r 是 y_0处 $\mathcal{S}$ 的曲率半径，并且当˙x 限制在任意有界集内时， $O(\epsilon^{1/2})$ 项是一致的。

有关如何将（2.13）应用于经典 Radon 变换和圆形 Radon 变换的更多细节，请参见第 5 节。

3. Proof of Theorem 2.5

由（2.6）， $u_0 \neq 0, \mu_0 \neq 0$。根据 Radon 变换的线性性，我们可以假设 f 的支撑集包含在 y_0 的一个小邻域内（即，尽可能缩小U）。根据假设 2.1(5)，进一步缩小 U 和 Ω，我们可以假设存在 $c > 0$ 使得

$$\mathcal{S}_{\alpha,p} \cap U = \varnothing \text{ for any } \alpha \in \Omega, |p - p_\star| \geq c. \tag{3.1}$$

Then

$$\hat{f}(\alpha,p) = \varphi_1(\alpha)(p-\mathcal{P}(\alpha))_+^{1/2} + \varphi_2(\alpha,p)(p-\mathcal{P}(\alpha))_+^{3/2} + \varphi_3(\alpha,p),\ \alpha \in \Omega, p \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

其中 $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$， $\varphi_{2,\ 3} \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$，并且

$$\varphi_1(\alpha_\star) = W(\alpha_\star, p_\star; y_0)\Delta f(y_0) 2(2/M)^{1/2}. \tag{3.3}$$

对于经典 Radon 变换，这一结果已在 [32, 33]中确立。对于广义 Radon 变换，通过应用 [21]中引理 3.5 的证明方法，由 $\mathrm{d}_x\mathcal{P}_*(\alpha_\star,\ y_0) \neq 0$ 和 $M \neq 0$（参见假设 2.1(1, 4)）可轻易得出。

由于(3.1)，f 是紧支撑的，$\hat{f}$ 在 p 中紧支撑。因此我们可以假设 $\varphi_2(\alpha,\ p)$ 也紧支撑，并且

$$\varphi_3(\alpha,p) \equiv -\varphi_1(\alpha)(p-\mathcal{P}(\alpha))_+^{1/2},\ \alpha \in \Omega, |p| \geq c, \tag{3.4}$$

对于某个 c。

ˆ 证明的思路是利用 (3.2) 将 f 分成三项，依次将它们代入 (2.8)、(2.9)，并分别考察所得表达式。

ˆ 3.1. **证明开始。首项估计。**在 (2.8) 中用 $\varphi_1(\alpha)(s-\mathcal{P}(\alpha))_+^{1/2}$ 替换 $f(\alpha,\ s)$，并代入 (2.9)。经过简单变换，我们得到

$$\begin{aligned} f_\epsilon^{\text{rec-1}}(x) &:= -\frac{\Delta\alpha}{2\pi\epsilon^{1/2}} \sum_{\alpha_k \in \Omega} \omega(\alpha_k, x)\varphi_1(\alpha_k)\psi((\mathcal{P}_*(\alpha_k,x) - \mathcal{P}(\alpha_k))/\epsilon), \\ \psi(\hat{q}) &:= (2\pi)^{-1} \int (\hat{p}-\hat{q})^{-1} \int w(\hat{p}-\hat{s})\hat{s}_+^{-1/2} \mathrm{d}\hat{s}\mathrm{d}\hat{p}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

借助积分 (3.13) 进一步变换后， ψ 化简为 (2.11) 中的表达式。这些变换的合理性可通过将 (3.5) 中的 ψ 应用于一个测试函数，并利用 [34, 第 III.28 节的结果改变积分次序来证明。反过来，(2.11) 给出

(3.6)

$\psi(\hat{q}) = 0,\ \hat{q} > c$; $\psi(\hat{q})$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续;

$$\psi^{(n)}(\hat{q}) = c_n(-\hat{q})^{-(1/2)-n} + O(|\hat{q}|^{-(3/2)-n}),\ \hat{q} < -c, \hat{q} \to -\infty, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

对于某些 $c > 0$ 和 c_n。由于对任意 $q' < 2$ 都有 $\hat{p}_+^{-1/2} \in L^{q'}_{loc}(\mathbb{R})$，假设2.4(1) 和 [35, 习题11，第 196] 页蕴含 ψ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。注意，$\psi(\hat{q})$ 在一个紧集上具有有限光滑性，而在该紧集之外， ψ 是 C^∞。

利用（2.6）和（2.11）中的记号，我们表述如下结果

引理 3.1. 在定理 *2.5* 的假设下，有

$$\begin{aligned}&\epsilon^{-1/2}(f_\epsilon^{rec\text{-}1}(x_0+\epsilon\check{x})-f_\epsilon^{rec\text{-}1}(x_0))\\&\qquad=-\frac{\kappa\omega(\alpha_\star,x_0)\varphi_1(\alpha_\star)}{2\pi}\Psi(u_0\cdot\check{x};\mu_0\kappa,k_\star)+O(\epsilon^{1/2}),\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中， $O(\epsilon^{1/2})$ 项关于 $\check{x}$ 一致，并限制在任意有界集合内。

该引理的证明见 A.2 小节。

3.2. 第二项。 类似地，将 (2.8) 中的 $\hat{f}(\alpha,s)$ 替换为 $\varphi_2(\alpha,s)(s-\mathcal{P}(\alpha))_+^{3/2}$，并代入 (2.9)。经过简单变换，我们得到某个 c

$$\begin{aligned}f_\epsilon^{\text{rec-}2}(x):=&c\epsilon\sum_{\alpha_k\in\Omega}\omega(\alpha_k,x)g_2(\mathcal{P}_*(\alpha_k,x),\mathcal{P}(\alpha_k),\alpha_k),\ x=x_0+\epsilon\check{x},\\g_2(p,q,\alpha):=&\int(t-p)^{-1}\partial_t\int w_\epsilon(t-s)\varphi_2(\alpha,s)(s-q)_+^{3/2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,\\&p=\mathcal{P}_*(\alpha_k,x),\ q=\mathcal{P}(\alpha_k).\end{aligned}\tag{3.8}$$

因此，在 (3.8) 中， p,q 满足

$$|p|\le\sup_{\alpha\in\Omega}|\mathcal{P}_*(\alpha,x_0)|+O(\epsilon),\ |q|\le c,\tag{3.9}$$

其中 c 与 (3.1) 中相同。如有必要，进一步缩小 Ω，我们可以假设 (3.9) 中的上确界有界。因此，对于某个 $P<\infty$，有 $|p|,|q|\le P$。为简洁起见，记号中将省略 g_2、 φ_2 及相关函数对 α 的依赖。将 g_2 改写如下：

$$g_2(p,q)=\int w_\epsilon(p-t)\int(s-t)^{-1}\partial_s\left(\varphi_2(s)(s-q)_+^{3/2}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\tag{3.10}$$

利用 [36, §8.3], 中的结果，我们得到

$$g_2(p,q)=\int w_\epsilon(p-t)\left(\varphi_{2,1}(t,q)(t-q)_-^{1/2}+\varphi_{2,2}(t,q)\right)\mathrm{d}t\tag{3.11}$$

对于某些光滑且有界的 $\varphi_{2,\ 1}$ 和 $\varphi_{2,\ 2}$。通过写出下式，也可以用初等方法得到相同的结果

$$\int_0^\infty\frac{\varphi(s)}{s^{1/2}(s-\rho)}\mathrm{d}s=\varphi(\rho)\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s^{1/2}(s-\rho)}+\int_0^\infty\frac{\varphi(s)-\varphi(\rho)}{s-\rho}s^{-1/2}\mathrm{d}s,\tag{3.12}$$

利用积分（见 [37, 方程 2.2.4.25 和 2.2.4.26]）

$$\int(s-\rho)^{-1}s_+^{-1/2}\mathrm{d}s=\pi\rho_-^{-1/2},\tag{3.13}$$

并代入 $\rho=t-q$, $\varphi(s)=s\left[(3/2)\varphi_2(s+q)+s\varphi_2'(s+q)\right]$。

由 (3.11) 可知

$$\begin{aligned}&|g_2(p+\Delta p,q)-g_2(p,q)|\\&\le O(|\Delta p|)+c\max_{|\tau|\le c\epsilon}\left|(p-q+\Delta p+\tau)_-^{1/2}-(p-q+\tau)_-^{1/2}\right|\end{aligned}\tag{3.14}$$

对于某个 c。回想一下，在 (3.14) 中

$$p-q=\mathcal{P}_*(\alpha_k,x_0)-\mathcal{P}(\alpha_k),\ \Delta p=\mathcal{P}_*(\alpha_k,x)-\mathcal{P}_*(\alpha_k,x_0)=O(\epsilon),\ \tau=O(\epsilon),\tag{3.15}$$

其中 $x=x_0+\epsilon\check{x}$。由于 $\mu_0\ne0$（参见 (2.6)），对于任意 $\alpha\in\Omega$ 和某个 $c>0$，我们有 $|\mathcal{P}_*(\alpha,\ x_0)-\mathcal{P}(\alpha)|\ge c|\alpha-\alpha_\star|$。因此，存在 $c_1>0$，使得每当 $|\alpha-\alpha_\star|\ge c_1\epsilon$ 且 $\epsilon>0$ 足够小时，表达式 $(p-q+\Delta p+\tau)_-^{1/2}$ 和

$(p-q+\tau)_-^{1/2}$ 要么同时为零，要么同时非零。当它们同时非零时，其差值的大小等于

$$\frac{|\Delta p|}{|p-q+\Delta p+\tau|^{1/2}+|p-q+\tau|^{1/2}} \leq \frac{c\epsilon}{|\alpha-\alpha_\star|^{1/2}}, \quad |\alpha-\alpha_\star| \geq c_1\epsilon, \tag{3.16}$$

对于某个 c。此外，存在有限多个 k（接近 $k_\star$），使得 $|\alpha_k-\alpha_\star|<c_1\epsilon$。对于这些 k，相同的差值为 $O(\epsilon^{1/2})$。

在 (3.8) 中使用 (3.14) 和 (3.16)，我们可以类似于 (2.13) 得到：

$$\begin{aligned}&\epsilon^{-1/2}(f_\epsilon^{\text{rec-2}}(x_0+\epsilon\check{x})-f_\epsilon^{\text{rec-2}}(x_0))\\&=O(\epsilon^{1/2})+O(\epsilon^{1/2})\left[\epsilon^{1/2}+\sum_{1\leq k\leq O(1/\epsilon)}\frac{\epsilon}{(k\epsilon)^{1/2}}\right]=O(\epsilon^{1/2}).\end{aligned} \tag{3.17}$$

右侧的第一 $O(\epsilon^{1/2})$ 项吸收了以下贡献：这些贡献源于 (3.8) 中对 ω 的 x 依赖性，以及 (3.14) 中的 $O(|\Delta p|)=O(\epsilon)$ 项。这里我们利用了 $|\omega(x_0+\epsilon\check{x},\alpha)-\omega(x_0,\alpha)|\leq c\epsilon$，以及 $|g_2(p,q,\alpha)|\leq c$，对某个 c 及所有 $\alpha\in\Omega$，$|p|,|q|\leq P$ 均成立。

ˆ 3.3. **第三项**。最后，将 (2.8) 中的 $f(\alpha,\ s)$ 替换为 $\varphi_3(\alpha,\ s)$，并代入 (2.9)。注意，φ_3 在 s 中不一定是紧支撑的（参见 (3.4)），并且

$$\partial_s^l\varphi_3(\alpha,s)=O(|s|^{(1/2)-l}),\ s\to\infty,\ \alpha\in\Omega,\ l=0,1,2, \tag{3.18}$$

其中，大-O 项关于 α 一致。类似于 (3.8) 和 (3.10)，我们得到

$$\begin{aligned}f_\epsilon^{\text{rec-3}}(x):=&c\epsilon\sum_{\alpha_k\in\Omega}\omega(\alpha_k,x)g_3(\mathcal{P}_*(\alpha_k,x),\alpha_k),\\g_3(p,\alpha):=&\int(t-p)^{-1}\partial_t\int w_\epsilon(t-s)\varphi_3(\alpha,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\=&\int w_\epsilon(-\tau)\int s^{-1}\partial_s\varphi_3(\alpha,s+\tau+p)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau,\ |p|\leq P.\end{aligned} \tag{3.19}$$

下面的引理在附录 A.3 中证明。

引理 3.2。有

$$\int s^{-1}\partial_s\left[\varphi_3(\alpha,s+q+\Delta q)-\varphi_3(\alpha,s+q)\right]ds=O(|\Delta q|),\ \Delta q\to 0, \tag{3.20}$$

关于 $\alpha\in\Omega$ 和 $|q|\leq c$ 一致，对任意 c 均成立。

利用引理 3.2，(3.14) 的类似结果变为（其中 Δp 与 (3.15) 中相同）

$$\begin{aligned}&|g_3(p+\Delta p,\alpha)-g_3(p,\alpha)|\\&\leq c\max_{|\tau|\leq c\epsilon}\left|\int s^{-1}\partial_s\left[\varphi_3(\alpha,s+\tau+p+\Delta p)-\varphi_3(\alpha,s+\tau+p)\right]\mathrm{d}s\right|\\&=O(|\Delta p|)=O(\epsilon),\ \alpha\in\Omega,\end{aligned} \tag{3.21}$$

对于某个 c。因此，类似于式 (3.17)，我们得到：

$$\epsilon^{-1/2}(f_\epsilon^{\text{rec-3}}(x_0+\epsilon\check{x})-f_\epsilon^{\text{rec-3}}(x_0))=O(\epsilon^{1/2}). \tag{3.22}$$

结合 (2.13)、(3.3)、(3.17) 和 (3.22)，并利用 $f_{\text{rec}\epsilon}=f_{\text{rec-}\epsilon}^{\ 1}+f_\epsilon^{\text{rec-2}}+f^{\text{rec-}\epsilon}{}^{3}$，我们完成了定理 2.5 的证明。

4. A more detailed look at the function Ψ

4.1. 函数的性质 Ψ。 定理 2.5 表明，在 (2.11) 中定义的函数 Ψ 在描述混叠伪影时起着关键作用。由 (3.6) 可知，定义 Ψ 的级数在每一点都绝对收敛。这里我们证明 Ψ 的一些性质。

引理 4.1. 在假设 *2.4* 下，有

(1) Ψ 在 $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus 0)\times\mathbb{R}$上连续；(2) 对所有 h、a、$r\in\mathbb{R}$，$\Psi(h;\,a,r+1)=\Psi(h;\,a,r)$，且 $\Psi(h;\,-a,-r)=\Psi(h;\,a,r)$；(3) 对所有 h、a、$r\in\mathbb{R}$，$\Psi(h+a;\,a,r)=\Psi(h;\,a,r)$；

证明。当 a 远离零时，在 h 和 r 限制在有界集合内的条件下，(2.11) 中求和项里具有有限光滑性的项数一致有界。因此，我们可以将 Ψ 表示为有限个连续项与一个绝对收敛级数之和，该级数的各项均为光滑函数。这就证明了结论 (1)。

命题 (2) 的前半部分显然。将 (2.11) 中的 $a\to -a$、$r\to -r$ 替换，并改变求和指标 $k\to -k$，即可立即得到命题 (2) 的后半部分。

为证明命题 (3)，固定某个 $c\gg 1$，并将 (2.11) 中的求和指标 $k'=k+1$ 平移:

$$\Psi(h+a;a,r)=\sum_{k'\leq c}\left[\psi\left(a(k'-r)+h\right)-\psi\left(a(k'-1-r)\right)\right]. \tag{4.1}$$

乍看之下，为完成证明，我们只需在第二个ψ中将 $k=k'-1$ 改回即可。但这行不通，因为分别取出的每个和都是发散的（参见 (3.6)）。因此我们采用另一种论证方式。对于任意 $K\gg 1$，有:

$$\begin{aligned}\Psi(h+a;a,r)&=\sum_{k'=-K}^{c}\left[\psi(a(k'-r)+h)-\psi(a(k'-1-r))\right]+O(K^{-1/2})\\&=\sum_{k'=-K}^{c}\left[\psi(a(k'-r)+h)-\psi(a(k'-r))\right]-\psi(a(K-1-r))\\&\quad+O(K^{-1/2})=\Psi(h;a,r)+O(K^{-1/2}),\ K\to\infty.\end{aligned} \tag{4.2}$$

所需结论由此得出。 □

引理 4.2。 设 w 是紧支撑的，且 $w^{(N)}\in L^q(\mathbb{R})$，其中 $N\geq 1$和 $q>2$为某些值。则有:

$$\partial_h^{n_1}\partial_r^{n_2}\Psi(h;a,r)=O(|a|^{N-(n_1+n_2)}),\ a\to 0,\ n_1,n_2\geq 0, n_1+n_2\leq N-1, \tag{4.3}$$

关于 h、$r\in\mathbb{R}$一致成立。

证明。 我们需要以下一个简单引理，它可由欧拉-麦克劳林求和公式 [38, eq. (25.7)] 立即推出。为方便读者，该引理的证明见附录 A.4。

引理 4.3。 任取一些 $N'\geq 1$。假设 $g, g^{(N')}\in L^1(\mathbb{R})$，$g^{(n)}(t)\to 0$ 当 $t\to\infty$ 时对任意 $n=0,1,2,\ldots,N'-1$，且 $\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=0$。那么，

$$\left|\epsilon\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(\epsilon k)\right|\leq c\,\epsilon^{N'}\|g^{(N')}\|_{L^1(\mathbb{R})} \tag{4.4}$$

对于某个与 g 和 ϵ 无关的 c。

Set

$$g(t) := \partial_h^{n_1}\partial_r^{n_2}(\psi(t-ar+h)-\psi(t-ar)). \tag{4.5}$$

为简洁起见，省略了 g 对 h 和 r 的依赖关系。显然， g 满足引理 4.3 的假设。事实上，根据引理 4.1(2,3)，我们可以假设 $h\in[0,a)$， $r\in[0,1)$。假设 $w^{(N)}\in L^q(\mathbb{R})$、 $q>2$ 和 (2.11) 表明， ψ 的所有不超过 N 阶的导数在 $\mathbb{R}$ 上连续。

由 (3.6)， $|g^{(m)}(t)|\le c_m(1+|t|)^{-3/2}$, $0\le m\le N-(n_1+n_2)$，其中某个 c_m与 h 和 r无关。因此， g 在无穷远处衰减得足够快。

剩下需要验证的是 g 的积分为零。如果 $n_1>0$ 或 $n_2>0$，这显然成立。假设 $n_1=n_2=0$。对于某个 $c>0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(t)\mathrm{d}t &= \int_{-A}^{c} g(t)\mathrm{d}t + O(A^{-1/2})\\ &= -\int_{-A}^{h-A}\psi(t)\mathrm{d}t + O(A^{-1/2}) = O(A^{-1/2}),\ A\to\infty.\end{aligned} \tag{4.6}$$

将引理 4.3 应用于 (4.5) 中的 g，其中 $\epsilon=a$ 且 $N_1=N-(n_1+n_2)$，即可证明所需结论。关于 h 和 r 的一致性显然。□

推论 4.4。假设 w 是紧支撑的，且 $w^{(N)}\in L^q(\mathbb{R})$ 对于某个$N\ge 1$和 $q>2$成立。那么，导数 $\partial_h^{n_1}\partial_r^{n_2}\Psi(h;a,r)$、 n_1、 $n_2\ge 0$、 $n_1+n_2\le N-1$对于其自变量的所有取值均连续。

证明。 $a=0$ 之外的连续性证明方法与引理 4.1 的断言 (1) 相同。 $a=0$ 处的连续性由引理 4.2 得出。□

4.2. 数值计算 Ψ。 数值上，我们采用以下方法计算 Ψ。根据引理 4.1(2,3)，我们假设 $h\in[0,a)$， $r\in[0,1)$。实验中使用的光滑化函数定义为

$$w(t) = (15/16)(1-t^2)_+^2. \tag{4.7}$$

首先，通过解析计算 (2.11) 中的积分，得到 $\psi(t)$。然后我们计算 $\Delta\psi(t,h) := \psi(t+h)-\psi(t)$。对于适中的 t 值，我们直接根据定义计算 $\Delta\psi$。对于 $t\ll -1$，我们使用

$$\Delta\psi(t,h)\approx h/(4|t|^{3/2}). \tag{4.8}$$

最后，我们写出

$$\Psi(h;a,r)\approx \sum_{k=-K+1}^{c}\Delta\psi(a(k-r),h) + \frac{h}{4|a|^{3/2}}\sum_{k=K}^{\infty}k^{-3/2}, \tag{4.9}$$

其中，选择 $c>0$ 使得对于所有 $k>c$ 和 $h\in[0,a)$， $\Delta\psi(a(k-r),h)=0$，且 $K\gg 1$。最后一个求和使用赫尔维茨 ζ 函数的渐近公式 [39, 公式 (1.1)]进行估计

$$\zeta(s,t) := \sum_{k=0}^{\infty}(k+t)^{-s} = \frac{t^{1-s}}{s-1}+\frac{t^{-s}}{2}+O(t^{-(s+1)}),\ t\to+\infty, \tag{4.10}$$

其中 $s=3/2$ 和 $t=K$。 $\Psi(ah';a,r)$ 的图像（ $0\le h'\le 1$），对应取值$a=1,2,4$ 和 $r=1/3$，如图 3 所示。

与引理 4.2 一致，我们看到 $\Psi(ah';a,r)$ 随着 $a\to 0$ 快速衰减。

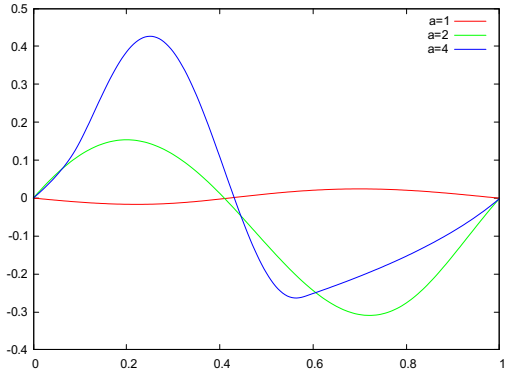


FIGURE 3. 当 a 取三个值时， $\Psi(ah';a,r)$ 的图像。变量h' 位于横轴上。

5. NUMERICAL EXPERIMENTS

5.1. 经典 Radon 变换。 在本小节中，我们对经典拉东变换（经典拉东变换）进行实验，该变换沿直线积分：

$$\hat{f}(\alpha,p)=\int_{S_{\alpha,p}} f(x)\mathrm{d}x,\ \vec{\alpha}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\ S_{\alpha,p}:=\{x\in\mathbb{R}^2:\alpha\cdot x=p\}. \tag{5.1}$$

重建使用 (2.9)：

$$\begin{aligned} f_\epsilon^{\mathrm{rec}}(x)&=-\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\sum_{|\alpha_k|\le\pi/2}\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial_p\hat{f}_\epsilon(\alpha_k,p)}{p-\mathcal{P}_*(x,\alpha_k)}\mathrm{d}p,\ \mathcal{P}_*(x,\alpha)\equiv\vec{\alpha}\cdot x,\\ \hat{f}_\epsilon(\alpha_k,p)&=\int w_\epsilon(p-\rho)\hat{f}(\alpha_k,\rho)\mathrm{d}\rho,\ \alpha_k=-(\pi/2)+(\pi/N_\alpha)(k+\delta),\end{aligned} \tag{5.2}$$

并且 w 与 (4.7) 中的相同。Radon 变换和反演公式中的权重均设为 1： $W(\alpha,p;x)\equiv 1$, $\omega(\alpha,x)\equiv 1$。

函数 f 是以原点为圆心、半径为 r 的圆盘的特征函数。因此， $\mathcal{S}=\{x\in\mathbb{R}^2:|x|=r\}$。根据 (2.2)，

$$|\mathrm{d}H(y_0)|=|\mathrm{d}_x\mathcal{P}_*(\alpha_\star,y_0)|=|\alpha_\star|=1. \tag{5.3}$$

因此，根据 (2.3)，

$$M=-(\vec{\Theta}_0^{\perp}\cdot\partial_y)^2H(y)|_{y=y_0}=1/r>0 \tag{5.4}$$

是 $\mathcal{S}$ 在 y_0处的曲率。此外， $\vec{\Theta}_0=\mathrm{d}H(y_0)$ 指向 $\mathcal{S}$ 在 y_0 处的曲率中心（圆盘的中心）。

对于给定的 $x\notin\mathcal{S}$，混叠源于 $\mathcal{S}$ 中直线$\mathcal{S}_{\alpha,p}\ni x$与 $\mathcal{S}$相切的部分。对于 $|x|>r$，存在两条这样的直线。我们选取 $x_0=(r,b)$，并找出两对满足所需性质的$(\alpha_\star,p_\star)$。显然，其中一对是$(\alpha_\star=\pi,p_\star=-r)$，另一对是$(\alpha_\star=2\tan^{-1}(b/r)-\pi,p_\star=-r)$。选择这些$(\alpha_\star,p_\star)$值可确保$\mathcal{S}_{\alpha_\star,p_\star+\delta}$，其中 $0<\delta\ll 1$与 $\mathcal{S}$ 相交于两点（参见(2.3)之后的段落）。见图4，其中第一对（带有$\alpha_\star=\pi$）以红色显示，第二对以蓝色显示。使用相应的参数值（在本小节其他位置计算得出），通过(2.13)计算来自每个切点邻域 y_0 的贡献，并将它们相加。对于重建，我们使用 $r=5$ 和 $x_0=(5,7)$。为更好地展示混叠伪影，我们还重建一个较小的感兴趣区域（ROI），它是一个以 x_0 为中心、边长为 40ϵ的正方形。

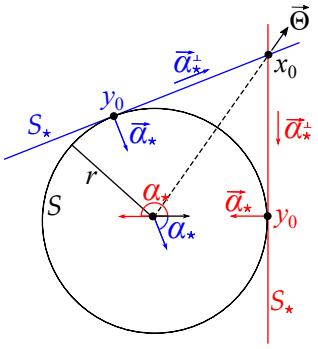


FIGURE 4. 经典拉东变换情形下，公式 (2.13) 中用于预测圆盘产生的混叠的各个量示意图。

进行计算时，我们还需要 u_0 和 μ_0 （参见(2.13)）。它们可由下式轻易得出(2.6):

$$u_0 = \vec{\alpha}_\star, \ \mu_0 = \vec{\alpha}_\star^\perp \cdot (x_0 - y_0), \tag{5.5}$$

其中， y_0 是 $\mathcal{S}_\star$ 与 $\mathcal{S}$相切的点。从图4中可以看出， $\mu_0 = -|x_0 - y_0|$ 对应第一对（红色）$(\alpha_\star, \ p_\star)$，而 $\mu_0 = |x_0 - y_0|$ 对应第二对（蓝色）。

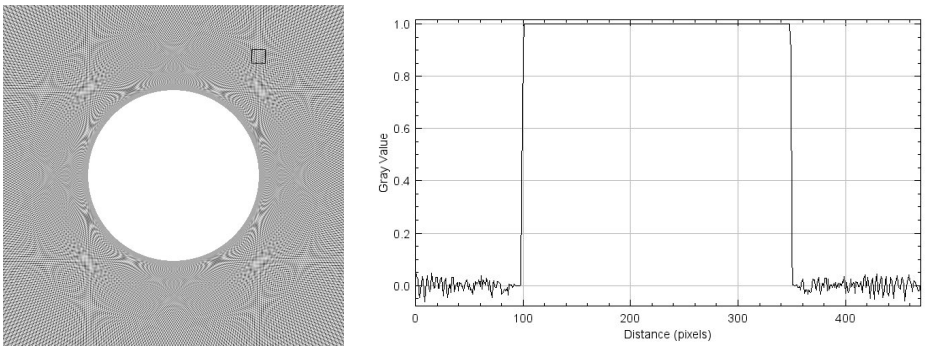


FIGURE 5. 区域 $|x_1|, \ |x_2| \leq 10$的经典拉东变换重建： ϵ =0.02, $N_\alpha = 200$, $\delta = 0.03$。左：全局重建；右：穿过重建中心的剖面。

在第一个实验中， $\epsilon = 0.02$、 $N_\alpha = 200$；在第二个实验中： $\epsilon = 0.01$、$N_\alpha = 400$。由于方向 $\alpha_\star = 0$ 较为特殊，为了增加一般性，我们在 (5.2) 中采用非零平移 δ 。结果见图5–10。

图5（左图）显示了重建区域 $|x_1|, \ |x_2| \leq 10$ 其中包含 $\epsilon = 0.02$和 $N_\alpha = 200$。左图还显示了感兴趣区域（一个小正方形）。右图显示了一条穿过原点的线剖面，以确认重建的准确性。图6显示了包含 $\delta = 0.03$的重建感兴趣区域。右图显示了沿线段$x = x_0 + \epsilon h\vec{\Theta}$, $|h| \leq 11$的重建差值剖面 $\epsilon^{-1/2}(f_{\text{rec}\epsilon}(x) - f_\epsilon^{\text{rec}}(x_0))$（绿色），以及由式（2.13）右侧的主项给出的预测（红色），其中 $\vec{\Theta} = x_0/|x_0|$。左图标出了该线段。剖面图的横轴表示 h 的值。根据式（5.5），式（2.13）中使用的 $u_0 \cdot \check{x}$ 的值为 $h\,\vec{\alpha_\star} \cdot \Theta$。

类似地，图7展示了在 $\delta = 0.2$ 时，同一线段对应的重建感兴趣区域和线剖面。

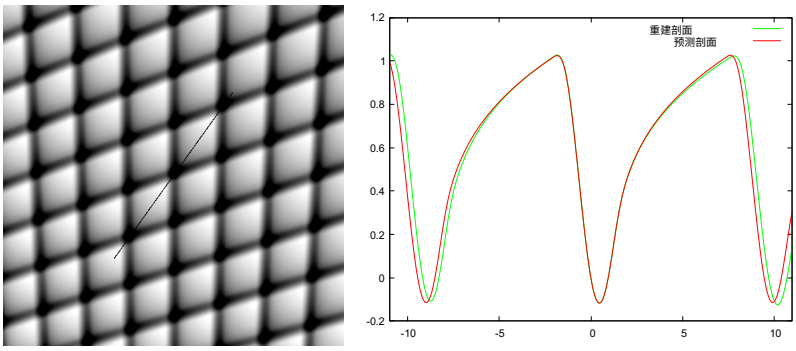


FIGURE 6. 感兴趣区域 CRT 重建： $\epsilon = 0.02$, $N_\alpha = 200$, $\delta = 0.03$。感兴趣区域是图5所示的正方形。左：重建的感兴趣区域；右：沿左图所示线段 $x = x_0 + \epsilon h\vec{\Theta}$, $|h| \leq 11$ 的重建（绿色）和预测（红色）剖面。变量 h 位于横轴上。

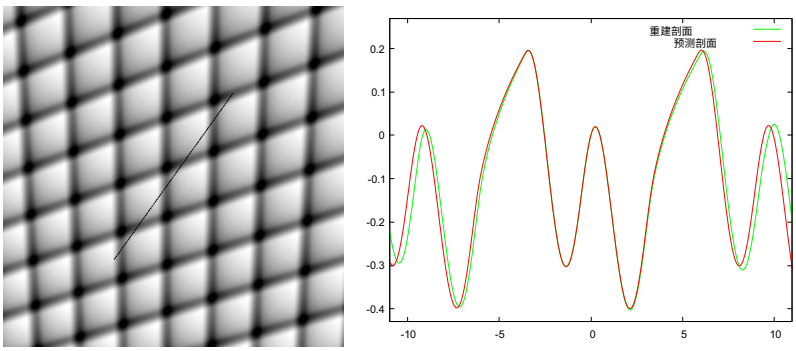


FIGURE 7. 感兴趣区域 CRT 重建： $\epsilon = 0.02$, $N_\alpha = 200$, $\delta = 0.2$。感兴趣区域是图5左侧所示的正方形。左：重建的感兴趣区域；右：沿线段 $x = x_0 + \epsilon h\vec{\Theta}$, $|h| \leq 11$的重建剖面（绿色）和预测剖面（红色），如左侧所示。变量 h 位于横轴上。

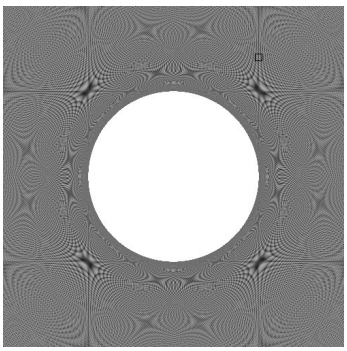


FIGURE 8. 区域 $|x_1|, |x_2| \leq 10$的经典拉东变换重建： ϵ =0.01, $N_\alpha = 400$, $\delta = 0.03$。

图8展示了重建区域 $|x_1|$, $|x_2| \leq 10$ 其中包含 $\epsilon = 0.01$ 和 N_α =400。左侧面板标出了感兴趣区域。请注意，感兴趣区域的大小与 ϵ 成正比。图9展示了感兴趣区域及其对应的线剖面，适用于

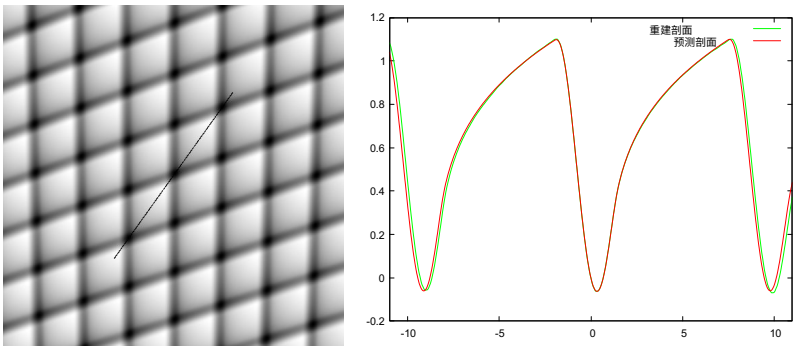


FIGURE 9.感兴趣区域 CRT 重建：$\epsilon = 0.01$、$N_\alpha = 400$、$\delta = 0.03$。感兴趣区域是图8左侧所示的正方形。左：重建的感兴趣区域；右：沿线段 $x = x_0 + \epsilon h\vec{\Theta}$、$|h| \le 11$的重建剖面（绿色）和预测剖面（红色），该线段显示在左侧。变量 h 位于横轴上。

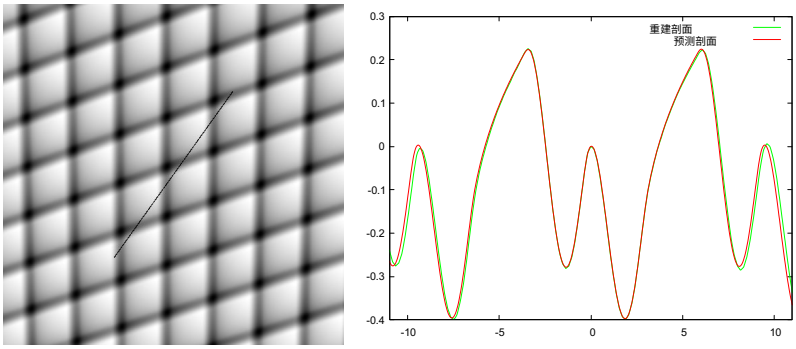


FIGURE 10.感兴趣区域 CRT 重建：$\epsilon = 0.01$, $N_\alpha = 400$, $\delta = 0.2$。感兴趣区域是图8左侧所示的正方形。左：重建的感兴趣区域；右：沿线段 $x = x_0 + \epsilon h\vec{\Theta}$, $|h| \le 11$的重建（绿色）和预测（红色）剖面，该线段如左侧所示。变量 h 位于横轴上。

$\delta = 0.03$。类似地，图10显示了当$\delta = 0.2$时重建的感兴趣区域和线剖面。在这两种情况下，确定该线段的向量 Θ 和 h 的范围都与之前相同。

比较图6与图9，以及图7与图10，可以看出，减小 ϵ 和 $\Delta\alpha$ 能改善重建与预测之间的吻合度。

5.2. 圆形 Radon 变换。 本小节中，我们对广义 Radon 变换（GRT）进行实验，它沿半径为任意 $\rho > 0$、圆心位于圆 $|x| = R$上的圆进行积分：

$$(\mathcal{R}f)(\alpha,\rho) = \hat{f}(\alpha,\rho) = \int_{S_{\alpha,\rho}} f(x)\mathrm{d}x,\ \vec{\alpha} = (\cos\alpha, \sin\alpha), \tag{5.6}$$
$$\mathcal{P}_*(\alpha,x) := |x - R\vec{\alpha}|,\ S_{\alpha,\rho} := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - R\vec{\alpha}| = \rho\}.$$

R 的值是固定的。因此

$$\mathrm{d}_x\mathcal{P}_*(\alpha,x) = \frac{x - R\vec{\alpha}}{|x - R\vec{\alpha}|},\ M = (1/\rho_\star) - (\vec{\Theta}_0^\perp \cdot \partial_y)^2 H(y)|_{y=y_0} > 0. \tag{5.7}$$

在计算 M 时，我们使用了 $\mathrm{d}_x\mathcal{P}_*(\alpha,\ x)\ =1$。重建通过对 (2.9) 进行直接修改来实现

(5.8)
$$f_\epsilon^{\mathrm{rec}}(x) = -\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\sum_{\alpha_k\in\Omega}\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial_\rho\hat{f}_\epsilon(\alpha_k,\rho)}{p-\mathcal{P}_*(x,\alpha_k)}\mathrm{d}\rho,$$
$$\hat{f}(\alpha_k,\rho) = \int w_\epsilon(\rho-\rho')\hat{f}(\alpha_k,\rho')\mathrm{d}\rho',\ \alpha_k=(2\pi/N_\alpha)k,\ w(\rho)=(15/16)(1-\rho^2)_+^2,$$

也就是说，w 与（4.7）中的相同。显然，重建在理论上已不再精确，但它保留了奇异性的强度（在 Sobole夫尺度上）。同样，Radon 变换和反演公式中的权重都设为 1：$W(\alpha,\ \rho;\ x)\equiv 1,\ \omega(\alpha,\ x)\equiv 1$。

函数 f 是以 x_c 为中心、半径为 r的圆盘的特征函数。因此，$\mathcal{S}=\{x\in\mathbb{R}^2:\ |x-x_c|=r\}$，见图11。

在给定的 x_0处，混叠源于 $\mathcal{S}$ 中各种 $\mathcal{S}_{\alpha,\ \rho}\ni x_0$ 与 $\mathcal{S}$相切的部分。所有此类（$\alpha,\ \rho$）都可通过求解以下两个方程得到:

(5.9)
$$|x_c-R\vec{\alpha}|-|x_0-R\vec{\alpha}|=\pm r$$

关于 α，并令 $\rho=|x_0-R\vec{\alpha}|$。一般而言，最多可有四个解（$\alpha,\ \rho$）（即最多四个圆 $\mathcal{S}_{\alpha,\ \rho}$）。为简化实验，我们反过来处理。选取一对（$\alpha_\star,\ \rho_\star$），使得 $\mathcal{S}_\star$ 在某个 y_0处与 $\mathcal{S}$ 相切，然后再选取某个 $x_0\in\mathcal{S}_\star$。具体来说，我们在（5.9）中选取一个“+”，也就是说，$\rho_\star$ 满足 $|x_c-R\vec{\alpha_\star}|=r+\rho_\star$。这意味着 $M=(1/r)+(1/\rho_\star)$，且 $\vec{\Theta}_0=(y_0-R\vec{\alpha_\star})/|y_0-R\vec{\alpha_\star}|$指向 $\mathcal{S}$ 在 y_0 处的曲率中心（见图11）。与经典 Radon 变换类似，我们的构造确保 $\mathcal{S}_{\alpha_\star,\ \rho_\star+\delta}$（其中 $0<\delta\ll 1$）与 $\mathcal{S}$ 交于两点。

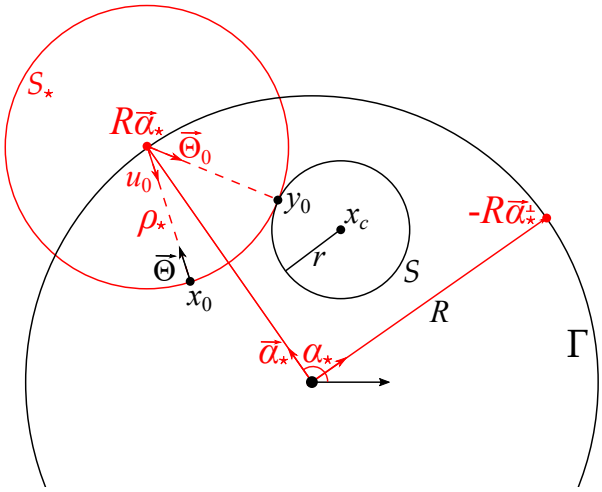


FIGURE 11. 圆形 Radon 变换中用于主公式 (2.13) 预测圆盘混叠的各种量的示意图。

为了仅说明 $\mathcal{S}_\star$ 与 $\mathcal{S}$ 相切处产生的混叠，我们选取 Ω 为 $\alpha_\star$的一个足够小的邻域。由于 $\mathcal{P}_*(\alpha,\ x)\ =|x-R\vec{\alpha}|$ 以及

$\mathcal{P}(\alpha) = |x_c - R\vec{\alpha}| - r$，我们得到

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \frac{x_0 - R\vec{\alpha}_\star}{|x_0 - R\vec{\alpha}_\star|}, \\
\mu_0 &= -R\vec{\alpha}_\star^{\perp} \cdot (u_0 - \vec{\Theta}_0) = -(R/\rho_\star)\vec{\alpha}_\star \cdot (x_0 - y_0),
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

参见图11。

对于重建，我们使用

$$
\begin{aligned}
&R = 5,\ x_c = (1,1),\ r = 2,\ (\alpha_\star, \rho_\star) = (0.53\pi, 2.24),\ x_0 = (-1.42, 2.95), \\
&\Omega := [\alpha_\star - \pi/4, \alpha_\star + \pi/4].
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

在第一次重建中，$\epsilon = 10^{-2}$, $N_\alpha = 500$；在第二次重建中：$\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-2}$, $N_\alpha = 1000$。结果分别显示在图12和图13中。左侧面板显示区域 $|x_1|,\ |x_2| \le 4$的有限角度重建。中间面板显示一个感兴趣区域的有限角度重建。该感兴趣区域是一个以 x_0 为中心、边长为 40ϵ的小正方形；感兴趣区域显示在左侧面板中。右侧面板显示沿线段 $x = x_0 + \epsilon h\vec{\Theta}$, $|h| \le 6$ 的重建差值 $\epsilon^{-1/2}(f_\epsilon^{\mathrm{rec}}(x) - f_\epsilon^{\mathrm{rec}}(x_0))$ 的剖面（绿色），以及由式（2.13）右侧主项给出的预测（红色）；该线段显示在中间面板中。$\vec{}$的 h 值位于剖面的横轴上。单位向量 Θ 选取为在 x_0 处与 $\mathcal{S}_\star$ 正交（即，$\vec{\Theta}$ 与 u_0 平行，参见图11）。在$\vec{}$实验中，我们设定 $\Theta = -u_0$。可以看出，减小 ϵ 和 $\Delta\alpha$ 可改善重建结果与预测之间的吻合程度。

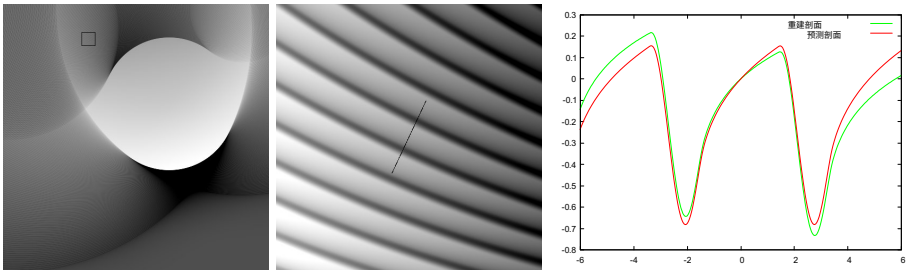


FIGURE 12. 有限角度广义射线变换重建：$\epsilon = 0.01$, N_α =500。左：全局重建；中：左图所示正方形感兴趣区域内的重建；右：沿中图所示线段 $x = x_0 + \epsilon h\vec{\Theta}$,$|h| \le 6$的重建剖面（绿色）和预测（红色）。变量 h 位于横轴上。

APPENDIX A. PROOFS OF LEMMAS

A.1. 引理 2.2 的证明。性质 $\mathcal{P}(\alpha_\star) = p_\star$ 由假设 2.1(2) 得出。回顾一下，$H(y) = 0$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个局部方程（参见 (2.2) 及其前面的段落）。为求出 $\mathcal{P}(\alpha)$，我们解

$$
H(y) = 0,\ \lambda \mathrm{d}H(y) = \mathrm{d}_y \mathcal{P}_*(\alpha, y) \tag{A.1}
$$

关于 α 在 ($\lambda = 1$, $y = y_0$, $\alpha = \alpha_\star$) 附近的 $y \in \mathcal{S}$ 和 λ，然后设定$\mathcal{P}(\alpha) = \mathcal{P}_*(\alpha, y(\alpha))$。假设 2.1(1, 2, 4) 和隐函数定理表明，$y(\alpha)$ 因此在一个小邻域 $\Omega \ni \alpha_\star$ 内光滑。因此，由于 $y'(\alpha)$ 与 $\mathcal{S}$ 相切，利用 (A.1) 中的第二个方程可得 $\mathcal{P}'(\alpha_\star) = \partial_\alpha \mathcal{P}_*(\alpha_\star, y_0)$。

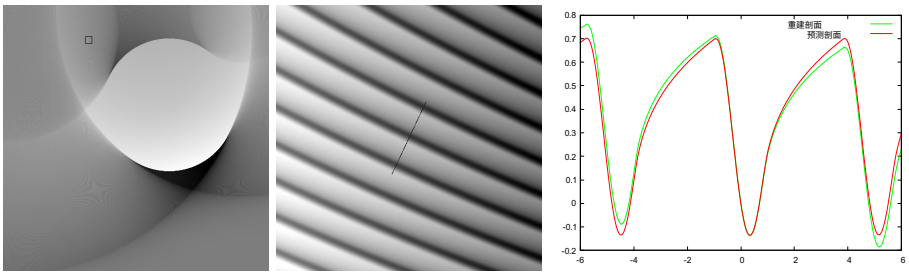


FIGURE 13. 有限角度广义射线变换重建： $\epsilon = 0.005$, $N_\alpha = 1000$。左：全局重建；中：左侧所示正方形感兴趣区域内的重建；右：中间所示线段$x = x_0 + \epsilon h\vec{\Theta}$, $|h| \le 6$上的重建（绿色）与预测（红色）的剖面。变量 h 位于横轴上。

A.2. **引理 3.1 的证明**。记作

$$H(x,\alpha,\epsilon) := \frac{\mathcal{P}_*(\alpha,x) - \mathcal{P}(\alpha)}{\epsilon},\ x = x_0 + \epsilon\check{x}, \alpha \in \Omega. \tag{A.2}$$

由于 $\mu_0 \neq 0$（参见 (2.6)），我们有 $|\mathcal{P}_*(\alpha,\ x_0) - \mathcal{P}(\alpha)| \ge c|\alpha - \alpha_\star|$，对于任意 $\alpha \in \Omega$ 以及某个 $c > 0$均成立。因此

$$|H(x,\alpha_k,\epsilon)| \ge c_1|k - k_\star|,\ \text{for all } |\check{x}| \le c, \alpha_k \in \Omega, |k - k_\star| \ge c_2, \tag{A.3}$$

对于某个 $c,\ c_1,\ c_2 > 0$, 以及所有足够小的 $\epsilon > 0$ s。由 (3.5) 得,

$$\begin{aligned} &f_\epsilon^{\text{rec-1}}(x_0 + \epsilon\check{x}) - f_\epsilon^{\text{rec-1}}(x_0) = -\frac{\Delta\alpha}{2\pi\epsilon^{1/2}}\big(J + O(\epsilon^{1/2})\big), \\ &J := \sum_{\alpha_k \in \Omega} \omega(\alpha_k, x_0)\varphi_1(\alpha_k)\left[\psi\left(H(x_0 + \epsilon\check{x}, \alpha_k, \epsilon)\right) - \psi\left(H(x_0, \alpha_k, \epsilon)\right)\right]. \end{aligned} \tag{A.4}$$

(A.4) 右侧括号中的 $O(\epsilon^{1/2})$ 项表示由 (3.5) 中 ω 对 x 的依赖所产生的贡献。这里我们使用 $n = 0$ 条件下的 (3.6)、(A.3)，以及对某个 c 和有界集中的所有 $\check{x}$，有:

$$|\omega(\alpha, x_0 + \epsilon\check{x}) - \omega(\alpha, x_0)| \le c\epsilon,\ |\varphi_1(\alpha)| \le c,\ \alpha \in \Omega, \tag{A.5}$$

因此

$$O(\epsilon)\left(O(1) + \sum_{c_2 \le |k-k_\star| \le O(1/\epsilon)} |k - k_\star|^{-1/2}\right) = O(\epsilon^{1/2}). \tag{A.6}$$

由 (2.6) 可得,

$$\begin{aligned} H(x_0 + \epsilon\check{x}, \alpha, \epsilon) &= H(x_0, \alpha, \epsilon) + \mathrm{d}_x\mathcal{P}_*(\alpha, x_0)\check{x} + O(\epsilon) \\ &= H(x_0, \alpha, \epsilon) + u_0 \cdot \check{x} + O(\epsilon + |\alpha - \alpha_\star|). \end{aligned} \tag{A.7}$$

此外，对于某个 c 以及所有 $\alpha \in \Omega$, $|\omega(x_0,\ \alpha)\varphi_1(\alpha)| \le c$。因此，由 (3.6)（其中 $n = 1$）和 (A.3),

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha_k \in \Omega} \omega(\alpha_k, x_0)\varphi_1(\alpha_k)\big[\psi(H(x_0 + \epsilon\check{x}, \alpha_k, \epsilon)) - \psi(H(x_0, \alpha_k, \epsilon) + u_0 \cdot \check{x})\big] \\ &= \sum_{|k| \le O(1/\epsilon)} \psi'(H(x_0, \alpha_k, \epsilon) + O(1))O(\epsilon + \epsilon|k - k_\star|) \\ &= O(\epsilon)\left(1 + \sum_{c_2 \le |k-k_\star| \le O(1/\epsilon)} \frac{1 + |k - k_\star|}{|k - k_\star|^{3/2}}\right) = O(\epsilon^{1/2}). \end{aligned} \tag{A.8}$$

这里我们利用了 $w' \in L^q(\mathbb{R})$、 $q > 2$ （见假设2.4(1)），因此 ψ' 连续。这表明，如果 w 不具备所需的光滑性（例如，若 w 是一个探测器像素的特征函数），则 (A.8) 中表达式的幅值可能会大得多，从而导致定理2.5中的收敛速率变慢（甚至可能完全不再收敛）。

由 (A.4)、(A.7) 和 (A.8) 可得，

$$\begin{aligned} J &= \sum_{\alpha_k \in \Omega} \omega(\alpha_k, x_0)\varphi_1(\alpha_k)\Delta\psi(H(x_0, \alpha_k, \epsilon)) + O(\epsilon^{1/2}), \\ \Delta\psi(t) &:= \psi(t + u_0 \cdot \check{x}) - \psi(t). \end{aligned} \tag{A.9}$$

此外，

$$H(x_0, \alpha_k, \epsilon) = \mu_0 \frac{\alpha_k - \alpha_\star}{\epsilon} + R_k,\ R_k = O(\epsilon(k - k_\star)^2). \tag{A.10}$$

为简便起见，记 $a_k = \mu_0\kappa(k - k_\star)$。于是

$$\Delta\psi(a_k + R_k) - \Delta\psi(a_k) = R_k\Delta\psi'(a_k + \xi_k), \tag{A.11}$$

其中 $|\xi_k| \le |R_k|$。我们可以假设 Ω 足够小，从而

$$|\mu_0(\alpha_k - \alpha_\star) + \epsilon R_k| \ge c|\alpha_k - \alpha_\star|,\ \forall \alpha_k \in \Omega, \tag{A.12}$$

对某个 $c > 0$ 成立。两边除以 ϵ 得

$$|a_k + R_k| \ge c\kappa|k - k_\star|,\ \forall \alpha_k \in \Omega, \tag{A.13}$$

具有相同的 c。利用 (3.6) 和 $n = 2$，得到

$$\begin{aligned} &\sum_{c \le |k-k_\star| \le O(1/\epsilon)} \omega(\alpha_k, x_0)\varphi_1(\alpha_k)\big[\Delta\psi(a_k + R_k) - \Delta\psi(a_k)\big] \\ &\qquad = \sum_{c \le |k-k_\star| \le O(1/\epsilon)} \frac{O(\epsilon|k - k_\star|^2)}{1 + |k - k_\star|^{5/2}} = O(\epsilon^{1/2}), \end{aligned} \tag{A.14}$$

对于某个足够大的 $c > 0$。需要满足条件 $|k - k_\star| \ge c$，因为当 $w' \in L^q$ 时，基于其进行估计 (A.14) 的 $\psi''(\hat{q})$，对于紧集中的 $\hat{q}$，可能不存在。为了在不依赖二阶导数的情况下估计剩余的有限项，我们写出

$$\begin{aligned} &\Delta\psi(a_k + R_k) - \Delta\psi(a_k) \\ &= \big[\psi(a_k + u_0 \cdot \check{x} + R_k) - \psi(a_k + u_0 \cdot \check{x})\big] - \big[\psi(a_k + R_k) - \psi(a_k)\big] \\ &= O(\epsilon),\ |k - k_\star| \le c. \end{aligned} \tag{A.15}$$

这是因为 ψ' 在整个 $\mathbb{R}$ 上连续，并且当 $|k - k_\star| \le c$ 时， $R_k = O(\epsilon)$（参见 (A.10)）。这是我们使用 $w' \in L^q$ 的另一处。如果 w 不够光滑，(A.15) 中的量可能会大得多。

显然，所有大-O 项对于限制在有界集内的 $\check{x}$ （因而也对于 h）都是一致的。结合 (A.4)、(A.9)、(A.14) 和 (A.15)，证明即告完成。

A.3. **引理 3.2 的证明**。记

$$J := \int s^{-1}\left[\varphi_3'(s + q + \Delta q) - \varphi_3'(s + q)\right] \mathrm{d}s, \tag{A.16}$$

为简洁起见，我们省略了对 α 的依赖。本小节中的所有大-O 项都关于 $\alpha \in \Omega$ 一致。将 (A.16) 中的积分限制到 $|s| \le 1$，我们得到

$$J_1 := \int_{|s| \le 1} s^{-1}\left([\varphi_3'(s + q + \Delta q) - \varphi_3'(q + \Delta q)] - [\varphi_3'(s + q) - \varphi_3'(q)]\right) \mathrm{d}s. \tag{A.17}$$

显然， $J_1 = O(|\Delta q|)$ 关于 $|q| \le c$ 一致。这里我们用到了 φ_3 是光滑的，因此其三阶导数在紧集上有界。由 (3.18)， $\varphi_3''(p) = O(|p|^{-3/2})$ $p \to \infty$。因此

$$J_2 := \int_{|s|\ge 1} s^{-1} \left[\varphi_3'(s+q+\Delta q) - \varphi_3'(s+q)\right] \mathrm{d}s = O(|\Delta q|) \tag{A.18}$$

对 $|q| \le c$ 一致成立。结合关于 $J_{1,\ 2}$ 的估计即可证明该引理。

A.4. 引理 4.3 的证明。 欧拉-麦克劳林公式如下 [38, 式 (25.7)]:

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \sum_{m=1}^{N'} \frac{b_m}{m!}(f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)) \\ - \int_a^b \frac{B_{N'}(\{1-t\})}{N'!} f^{(N')}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{A.19}$$

这里， $b > a$ 是整数， B_m 和 b_m 分别是伯努利多项式和伯努利数， $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ 是 $t \in \mathbb{R}$ 的小数部分， $\lfloor t \rfloor$ 是取整函数，即不超过 t 的最大整数。

代入 $f(t) = g(\epsilon t)$，令 $a \to -\infty, b \to \infty$ 趋于极限（由于 g 及其导数衰减，这是允许的），作变量替换 $\tau = \epsilon t$，并利用 $g^{(N')} \in L^1(\mathbb{R})$，即可完成证明。

References

[1] C. L. Epstein, *Introduction to the mathematics of medical imaging*。费城：SIAM，第二版，2008年。[2] B. Li、G. B. Avinash 和 J. Hsieh，“体积CT的分辨率与噪声权衡分析”， *Medical Physics*，第34卷，第10期，第3732–3738页，2007年。[3] R. Grimmer、J. Krause、M. Karolczak、R. Lapp 和 M. Kachelriess，“CT空间分辨率评估”， *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*，第5562–5566页，2008年。[4] S. N. Friedman、G. S. Fung、J. H. Siewerdsen 和 B. M. Tsui，“利用美国放射学会（ACR）认证模体测量计算机断层扫描（CT）调制传递函数（MTF）和噪声功率谱（NPS）的简易方法”， *Medical Physics* 40, 5, 1 9, 2013，卷号、期号和页码缺失。[5] H. Kruse，“计算机断层扫描重建方法的分辨率”， *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 10, 447 474, 1989，卷号和页码缺失。[6] L. Desbat，“断层成像中粗网格上的高效采样”， *Inverse Problems*，第9卷，第251–269页，1993年。[7] F. Natterer，“扇束断层成像中的采样”， *SIAM Journal on Applied Mathematics*，第53卷，第358–380页，1993年。[8] F. Natterer，“CT中的采样与分辨率”，载于 *Proceedings of the Fourth International Symposium (CT-93): Novosibirsk 1993* ´ 343 354, ，（M. M. Lavrentev 编），页码缺失。乌得勒支：VSP，1995年。[9] V. P. Palamodov，“Radon 变换调和分解的局部化”， *Inverse Problems* 1025 ，第11卷，页码缺失–1030，1995年。[10] A. Caponnetto 和 M. Bertero，“有限投影集的断层成像：奇异值分解与分辨率”， *IEEE Transactions on Information Theory*，第13卷，第1191–1205页，1997年。[11] A. Faridani 和 E. Ritman，“通过高效采样实现高分辨率计算机断层扫描”， *Inverse Problems*，第16卷，第635–650页，2000年。[12] A. Faridani，“采样理论与平行束断层成像”，载于 *Sampling wavelets and tomography* 63 *Applied and Numerical Harmonic Analysis* 225 254, ，,，第卷号缺失，第页码缺失。波士顿，马萨诸塞州：Birkhauser Boston，2004年。[13] A. Rieder 和 A. Schneck，“用于断层反演的全离散滤波反投影算法的最优性”， *Numerische Mathematik*，第108卷，第151–175页，2007年。[14] S. H. Izen，“平板探测器扇束断层成像中的采样”， *SIAM Journal on Applied Mathematics* 72, 61 84, 2012，卷号和页码缺失。

[15] P. Stefanov，“某些线性逆问题的半经典采样与离散化”，*SIAM Journal of Mathematical Analysis*，第52卷，第5554–5597页，2020年。[16] F. Monard 和 P. Stefanov，“简单曲面上的 X 射线变换采样”，*arXiv: ID:2110.05761* 2021，缺失。

[17] P. Stefanov，“有限角度下的 Radon 变换”，*arXiv:2208.05936v1*，第1–30页，2022年。[18] A. Katsevich，“断层成像中图像重建分辨率分析的局部方法”，*SIAM Journal on Applied Mathematics*，第77卷，第5期，第1706–1732页，2017年。[19] A. Katsevich，“函数存在跳跃间断时 $\mathbb{R}^3$ 离散 Radon 变换数据重建的分析”，*SIAM Journal on Applied Mathematics*，第79卷，第1607–1626页，2019年。[20] A. Katsevich，“一类分布的离散数据断层成像类重建分辨率分析”，*Inverse Problems*，第36卷，第12期，2020年。[21] A. Katsevich，“在 $\mathbb{R}^3$中利用离散数据反演广义 Radon 变换的分辨率分析”，*SIAM Journal of Mathematical Analysis*，第52卷，第4期，第3990–4021页，2020年。[22] A. Katsevich，“利用 $\mathbb{R}^n$ 中的离散数据对 N维广义 Radon 变换进行反演的分辨率分析”，*Journal of Fourier Analysis and Applications*，第29卷，文章编号6，2023年。[23] A. Katsevich，“利用离散 Radon 变换数据对具有非光滑边缘的函数进行二维重建的分辨率”，*SIAM Journal on Applied Mathematics*，即将刊出，2023年。[24] A. Katsevich，“针对 $\mathbb{R}^2$ 中具有粗糙边缘函数的 Radon 变换新型分辨率分析”，*SIAM Journal of Mathematical Analysis*，即将刊出，2023年。[25] P. M. Joseph 和 R. A. Schulz，“扇束计算机断层扫描的视角采样要求”，*Medical Physics*，第7卷，第6期，第692–702页，1980年。[26] P. Kuchment，“广义 Radon 型变换及其应用”，载于 *The Radon Transform, Inverse Problems, and Tomography*（G. Ólafsson 和 E. T. Quinto 编），第67–91页，普罗维登斯，罗得岛州：美国数学学会，2005年。[27] G. Ambartsoumian 和 E. T. Quinto，“广义 Radon 变换及其在断层成像中的应用”，*Inverse Problems*，第36卷，第2期，文章编号020301，2020年。[28] F. Natterer，*The Mathematics of Computerized Tomography*。费城：SIAM，2001年。[29] G. Beylkin，“广义 Radon 变换的反演问题及其应用”，1984年。[30] A. Katsevich，“二维断层成像中运动补偿的精确近似算法”，*Inverse Problems*，第26卷，2010年。[31] E. T. Quinto，“广义 Radon 变换对定义测度的依赖性”，*Transactions of the American Mathematical Society*，第257卷，第331–346页，1980年。[32] A. G. Ramm 和 A. I. Zaslavsky，“Radon 变换的奇异性”，*Bull. Amer. Math. Soc.*，第25卷，109页码缺失–115，1993年。[33] A. G. Ramm 和 A. I. Zaslavsky，“由函数的 Radon 变换重建其奇异性”，*Math. and Comput. Modelling*，第18卷，第1期，第109–138页，1993年。[34] N. I. Muskhelishvili，*Singular Integral Equations. Boundary problems of functions theory and their applications to mathematical physics.* 1958。多德雷赫特：施普林格，出版年份缺失。[35] W. Rudin，*Real and Complex Analysis*。伦敦：麦格劳-希尔，1970年。[36] F. D. Gakhov，*Boundary Value Problems*。牛津：培格曼出版社，1966年。[37] A. P. Prudnikov、Y. A. Brychkov 和 O. I. Marichev，*Integrals and series. Volume 1. Elementary functions* 1986。纽约：戈登与布里奇，出版年份缺失。[38] V. Kac 和 P. Cheung，*Quantum Calculus*。纽约州纽约市：施普林格，2002年。[39] G. Nemes，“赫尔维茨ζ函数渐近展开的误差界”，*Proceedings of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences* 473,，卷期号缺失，编号2203，2017年。