arXiv:2302.01422v1 [math.RA] 2 Feb 2023

刻画 其乘子决定的幂零结合代数

Erik Mainellis

摘要

本文探讨结合代数背景下著名的 Schur 乘子的一个类似概念，以及衡量其维数距离最大值有多远的量。借鉴李理论中的方法，我们刻画了所有使该量不超过十的有限维幂零结合代数。

1 引言

粗略地说，Schur 乘子是一种将代数对象 L 的第二（上）同调群 $\mathcal{H}^2(L)$ 视为最大维数茎扩张之核的方法。这一理论已应用于李 [3], Leibniz [11], 二结合 [10], 和三结合 [12] 代数。具体而言，[10] 的研究以二结合推广为基础，开启了对结合代数乘子的研究。[13], 进一步发展了这一理论，作者专门研究幂零二结合代数的乘子，并讨论了这些结果在结合代数中的特例。这些结果涉及乘子的维数界，构成了本文工作的基础。

通过与乘子维数相关的不变量来刻画幂零李代数和 Leibniz 代数，已经取得了很大成功（见 [1, 2, 4, 5, 7, 8, 14]）。通常，这些论证会考察乘子维数 $M(L)$ 距离其最大值有多远，并据此对代数进行分类。对于维数为 n 的李代数 L，这一度量为 $\frac{1}{2}n(n-1)$ – 维数 $M(L)$。对于 Leibniz 代数，该度量为 n^2 – 维数 $M(L)$。也有人研究过一些变体。

本文旨在基于类似的度量对幂零结合代数进行分类。具体而言，对于维数为 n 的幂零结合代数 A，我们定义 $t(A) = n^2$ – 维数 $M(A)$，并确定所有满足 $t(A) \leq 10$的 A。全文中，我们均在复数域上讨论，并假设所有代数均为有限维。我们用 $A(n)$表示维数为 n 的阿贝尔代数，并用 $A * B$ 表示结合代数 A 和 B的中心和。令 $E(n)$遍历所有维数为 n的特异代数。

2 预备知识

关于结合代数中的子代数、理想、中心和、扩张、截面、中心扩张和茎扩张等概念，请参阅 [9] 的预备知识。设 A 为一个结合代数。我们用 $A' = AA$ 表示 A的导出理想，即由 A中的所有乘积生成的理想。我们从李代数的意义上定义 A 的中心；它是由所有满足以下条件的 $z \in A$构成的理想：对于所有 $a \in A$，均有 $za = az = 0$。同样从李代数的意义上说，如果所有乘积都为零（换言之，如果 $Z(A) = A$，或者如果 $A' = 0$），则称 A 为阿贝尔代数。如果存在自然数 n，使得 A 中任意 n 个元素的乘积都为零，则称代数 A 为幂零代数。

给定一个结合代数 A，如果 $A \cong K/M$ 且 $M \subseteq Z(K) \cap K'$，则称一对结合代数 (K, M) 是 A 的定义对。等价地，定义对刻画了一个茎扩张

$$0 \to M \to K \xrightarrow{\omega} A \to 0$$

其中 $M = \ker \omega$。如果定义对 (K, M) 的K 维数达到最大值，我们就称其为极大定义对。在这种情形下，K 称为 A 的覆盖，而 M 称为 A 的乘子，记作 $M(A)$。已知 $M(A) \cong \mathcal{H}^2(A, \mathbb{F})$，即系数取基域 $\mathbb{F}$ 的第二上同调群，并且覆盖是唯一的（见 [10]）。与 Leibniz 情形类似，结合代数 A 的乘子 $M(A)$ 的维数有上界 $(\dim A)^2$。在 [12], 中，作者给出了李代数、 Leibniz 代数、结合代数、二结合代数和三结合代数情形的对照表。因此，我们定义一个度量

$$t(A) = (\dim A)^2 - \dim M(A)$$

用于衡量 $\dim M(A)$ 距离最大值有多远。显然，$\dim M(A) = (\dim A)^2$ 当且仅当 A 是阿贝尔的，因此在这种情形下，$t(A) = 0$。

作者尚未能找到以下适用于结合代数的 K¨unneth-Loday 型公式的直接证明，但通过适当的替换，利用其李代数类比的方法（见 [2]中的定理 1），从基本原理出发很容易证明该公式。值得注意的是，[5] 使用了该公式的 Leibniz 版本，旨在通过乘子刻画幂零 Leibniz 代数。设有限维结合代数 A和 B,

$$\dim M(A \oplus B) = \dim M(A) + \dim M(B) + 2\dim(A/A' \otimes B/B'). \tag{1}$$

该公式有助于证明以下引理，而我们将在主要结果的证明中大量依赖此引理。

引理 2.0.1. 设 A 是一个幂零有限维结合代数，满足 $Z(A) \not\subseteq A'$。那么，A 中存在一个一维理想 Z，使得 $A = I \oplus Z$ 且 $t(I) + 2\dim(I') = t(A)$，其中 I 是 A中的一个理想。

证明。在给定假设下，存在一个一维子空间 $Z \subseteq Z(A)$，使得$Z \not\subseteq A'$。令 I 为 A 中 Z 的补空间，使得 $A = I \oplus Z$ 且 $A' \subseteq I$。注意，由于 Z是阿贝尔的，$\dim M(Z) = (1)^2 = 1$；又由于 $Z/Z' = Z$，$\dim(I/I' \otimes Z/Z') = \dim I - \dim(I')$。由 (1)，我们得到

$$\dim M(I \oplus Z) = \dim M(I) + \dim M(Z) + 2\dim(I/I' \otimes Z/Z')$$

由此可得

$$n^2 - t(A) = (n-1)^2 - t(I) + 1 + 2(n - 1 - \dim(I'))$$

对于 $n = \dim A$。化简此方程，我们得到 $t(I) + 2\dim(I') = t(A)$。 □

令 A 为一个幂零的有限维结合代数。对于更一般的双结合代数情形，文献 [13] 给出了其乘子 $M(A)$的以下维数界。这里我们陈述其结合代数版本：

$$\dim M(A) + 1 \leq \dim M(A/Z) + 2\dim(A/A') \tag{2}$$

对于任意一维理想 $Z \subseteq Z(A) \cap A'$，以及

$$\dim M(A) \leq \dim M(A/A') + \dim(A')[2\dim(A/A') - 1]. \tag{3}$$

我们将在主定理的证明中直接应用不等式 (2)。由 (3)，我们以下述方式将 $t(A)$ 与 $\dim(A')$ 联系起来。

Lemma 2.0.2. 设 A 是一个幂零有限维结合代数。那么

$$t(A) \geq \dim(A')(\dim(A')+1).$$

证明。令 $n=$维数为 A，且 $m=$维数为(A')。由于 A/A'是阿贝尔的，我们有维数 $M(A/A') = (n-m)^2$。由 (3)，计算得

$$\begin{aligned}\dim M(A) &\leq (n-m)^2 + m(2(n-m)-1)\\ &= n^2 - m^2 - m\end{aligned}$$

由此得到 $t(A) \geq n^2 - n^2 + m^2 + m = m(m+1)$。 □

最后，称结合代数 A 为特异的，若 $Z(A) = A'$ 且 $\dim(Z(A)) = 1$。在 [9], 中，作者获得了这些代数及其乘子的分类。特别地，它们的结构与 Leibniz 情形（在 [6]中得到的）完全相同，但在少数几种情形下，它们的乘子有所不同。我们陈述 [9]中的两个定理。

定理 2.0.3. 任意特异结合代数都是以下五类特异结合代数的中心和:

i. J_1，其基为 $\{x,z\}$，非零乘积为 $xx=z$;

ii. J_n对于 $n=2,3,\ldots,$基为 $\{x_1,\ldots,x_n,z\}$且非零乘积为

$$x_1x_2=z, \quad x_2x_3=z, \quad \cdots \quad x_{n-1}x_n=z;$$

iii. Γ_n对于 $n=2,3,\ldots,$基为 $\{x_1,\ldots,x_n,z\}$且非零乘积为

$$\begin{aligned}&x_nx_1=z, \quad x_{n-1}x_2=-z, \quad \cdots \quad x_ix_{n-i+1}=(-1)^{n-i+2}z, \quad \cdots \quad x_2x_{n-1}=(-1)^nz,\\ &x_nx_2=z, \quad x_{n-1}x_3=-z, \quad \cdots \quad x_ix_{n-i+2}=(-1)^{n-i+2}z, \quad \cdots \quad x_2x_n=(-1)^nz,\\ &x_1x_n=(-1)^{n+1}z;\end{aligned}$$

iv. $H_2(\lambda)$ 基为 $\{x_1,x_2,z\}$ 且非零乘积为 $x_1x_2=z$, $x_2x_1=\lambda z$ 对于 $0\neq\lambda\neq 1$;

v. $H_{2n}(\lambda)$ 对于 $n=2,3,\ldots,$基为 $\{x_1,\ldots,x_{2n},z\}$且非零乘积为

$$\begin{aligned}&x_1x_{n+1}=z, \quad x_2x_{n+2}=z, \quad \cdots \quad x_nx_{2n}=z,\\ &x_{n+1}x_1=\lambda z, \quad x_{n+2}x_2=\lambda z, \quad \cdots \quad x_{2n}x_n=\lambda z,\\ &x_{n+1}x_2=z, \quad x_{n+2}x_3=z, \quad \cdots \quad x_{2n-1}x_n=z,\end{aligned}$$

其中 $0\neq\lambda\neq(-1)^{n+1}$。

这里，$\lambda\in\mathbb{F}$ 在替换为 λ^{-1} 后即确定。

定理 2.0.4. 设 A是一个特特殊结合代数。那么 $\dim M(A) = (\dim(A)-1)^2-1$，但 $A=J_1$除外。特别地，$\dim M(J_1) = 1$。

推论 2.0.5. 设 A是一个特特殊结合代数。那么 $t(A) = 2\dim A$，但 $A=J_1$除外。特别地，$t(J_1) = 3$。

证明. 对除 J_1之外的所有特异 A，我们计算

$$\begin{aligned}t(A) &= n^2 - \dim M(A)\\ &= n^2 - (n-1)^2 + 1\\ &= 2n\end{aligned}$$

其中 $n=$维数 A。对于 J_1，我们计算 $t(J_1) = 2^2-1=3$。 □

3 主要结果

定理 3.0.1. 设 A 是一个复幂零结合代数。那么

i. $t(A) = 0$ 当且仅当 A 是阿贝尔的；ii. 不存在满足以下条件的 A： $t(A) = 1$ 或 $t(A) = 2$；iii. $t(A) = 3$ 当且仅当 $A = J_1$；iv. 不存在满足以下条件的 A： $t(A) = 4$；v. $t(A) = 5$ 当且仅当 $A = J_1 \oplus A(1)$；vi. $t(A) = 6$ 当且仅当 $A = E(3)$；vii. $t(A) = 7$ 当且仅当 $A = J_1 \oplus A(2)$；viii. $t(A) = 8$ 当且仅当 $A = E(3) \oplus A(1)$、$E(4)$，或

$$C_3 = \langle x, z, z' \ : \ xx = z, \ xz = zx = z' \rangle;$$

ix. $t(A) = 9$ 当且仅当 $A = J_1 \oplus A(3)$；

x. $t(A) = 10$ 当且仅当 $A = E(3) \oplus A(2)$、$E(4) \oplus A(1)$、$E(5)$。

这里，$A(n)$ 表示维数为 n 的阿贝尔代数，而 $E(n)$ 遍历所有维数为 n 的特异代数。

证明。在整个证明中，设 A 是一个有限维幂零结合代数，维数为 n，并记 $m = \dim(A')$。

情形 $t(A) < 2$。我们已经提到，$t(A) = 0$ 当且仅当 A 是阿贝尔的。若 $t(A) = 1$，则由引理 2.0.2 得到 $1 \geq m(m+1)$，这意味着 $\dim(A') = 0$。但这意味着 A 是阿贝尔的，或者 $t(A) = 0$，矛盾。因此，不存在满足 $t(A) = 1$ 的 A。

情形 $t(A) = 2$。若 $t(A) = 2$，则由 $2 \geq m(m+1)$ 得到 $m = 0$ 或 $m = 1$。同样，$m = 0$ 会导致矛盾，因为 A 不可能是阿贝尔的。因此我们假设 $\dim(A') = 1$。$Z(A) \subseteq A'$ 或者不成立。若不成立，则应用引理 2.0.1，可得一个一维理想 Z 和一个理想 I，使得 $A = I \oplus Z$ 且 $t(I) + 2\dim(I') = t(A) = 2$。若 $\dim(I') = 0$，则 $t(I) = 2$。但这也意味着 I 是阿贝尔的，因此矛盾。若 $\dim(I') = 1$，则 $t(I) = 0$。但这意味着 I 是阿贝尔的，这与 $\dim(I') = 1$ 矛盾。因此，$Z(A) \not\subseteq A'$ 并无结果。若 $Z(A) \subseteq A'$，设 Z 是包含于 $Z(A)$ 的一维理想，并记 $H = A/Z$。由于 $Z \subseteq A'$，我们有 $\dim H - \dim(H') = \dim A - \dim(A')$。由不等式 (2) 得到

$$\dim M(A) + 1 \leq \dim(A/Z) + 2\dim(A/A'),$$

或 $n^2 - t(A) + 1 \leq (n-1)^2 - t(H) + 2(n - \text{维数}(A'))$，化简后得到

$$t(H) + 2\dim(A') \leq t(A).$$

这意味着 $t(H) \leq 0$。因此 $t(H) = 0$，且 H 是阿贝尔的，也就是说 $H' = 0$。这意味着$A' \subseteq Z$，从而得到 $A' = Z(A) = Z$；换言之，A 是特异的。然而，不存在满足 $t(A) = 2$ 的代数。

情形 $t(A) = 3$。我们再次从 $3 \geq m(m+1)$ 开始，这保证了 $m = 1$，因为 $m = 0$会导致矛盾。若 $Z(A) \not\subseteq A'$，则应用引理 2.0.1；同样，这确保了 $A = I \oplus Z$，其维数为 $Z = 1$，且 $t(I) + 2$ 维数 $(I') = t(A) = 3$。若维数 $(I') = 0$，则 I 是阿贝尔的，且 $t(I) = 3$，这就产生了矛盾。若维数 $(I') = 1$，则 $t(I) = 1$。然而，正如前面几种情形所见，不存在这样的代数 I。若 $Z(A) \subseteq A'$，我们再次令 Z 为 $Z(A)$ 中的一个一维理想，并记$H = A/Z$。我们的不等式 (2) 得出 $t(H) \leq 1$。不存在满足 $t(H) = 1$ 的代数 H，因此我们来考虑情形 $t(H) = 0$。此时， H 必为阿贝尔的，因此 A 是特异的。满足 $t(A) = 3$ 的唯一特异代数是 J_1。

情形 $t(A) = 4$。这里，引理 2.0.2 得出 $4 \geq m(m+1)$，因此同样有 $\dim(A')$ 必须为 1。若$Z(A) \not\subseteq A'$，则 $A = I \oplus Z$ with $t(I) + 2\dim(I') = 4$，由引理 2.0.1 可知。若 $\dim(I') = 0$，则 I 是阿贝尔的，且 $t(I) = 4$，矛盾。若 $\dim(I') = 1$，则 $t(I) = 2$，但不存在这样的代数 I。若 $\dim(I') = 2$，则 $t(I) = 0$，但这意味着 I 是阿贝尔的，这与 $\dim(I') \neq 0$矛盾。假设 $Z(A) \subseteq A'$。我们再次令 Z 为 $Z(A)$ 中的一个一维理想，并记作 $H = A/Z$。这一次，不等式 (2) 得出 $t(H) \leq 2$。不存在代数 H 使得 $t(H) = 1$ 或 $t(H) = 2$。在 $t(H) = 0$的情形下，可以推得 A 是特异的。然而，不存在满足 $t(A) = 4$ 的特异代数 A。

情形 $t(A) = 5$。我们从 $5 \geq m(m+1)$ 开始，再次推导出 $\dim(A')$ 必须为 1。对于 $Z(A) \not\subseteq A'$，我们有 $A = I \oplus Z$，其中 $t(I) + 2\dim(I') = 5$。$\dim(I') = 0$ 的情形会导致矛盾。$\dim(I') = 2$ 的情形迫使 $t(I) = 1$，但不存在这样的 I。然而，$\dim(I') = 1$ 的情形意味着 $t(I) = 3$。这种情形下有一个代数： $I = J_1$。因此，$A = J_1 \oplus A(1)$。这与 $t(A) = 5$ 相符，因为

$$\dim M(J_1 \oplus A(1)) = \dim M(J_1) + \dim M(A(1)) + 2\dim(J_1/J_1' \otimes A(1)) = 1 + 1 + 2(1)(1$$

由 (1) 可知，因此 $t(A) = 3^2 - 4$。现在假设 $Z(A) \subseteq A'$。设 Z 是 $Z(A)$ 中的一个一维理想，并且 $H = A/Z$。这一次，不等式 (2) 得出 $t(H) \leq 3$。根据前面的情形，对于 $t(H) = 1$ 或 $t(H) = 2$，没有可行情况。对于 $t(H) = 0$， A 必须是特异的。然而，不存在满足 $t(A) = 5$ 的特异代数 A。对于 $t(H) = 3$，唯一的可能是 $H = J_1$，因此 A 必须是由 J_1 扩张 Z 得到的中心扩张。换言之，存在一个中心扩张

$$0 \to Z \to A \to J_1 \to 0$$

使得 $Z \subseteq A'$。 A的一组基为 $\{x, z, z'\}$，其中 $\{z'\}$是 Z的一组基，且 A的乘法为$xx = z$ 和 $xz = zx = z'$。但我们需要 A' 为一维，因此这里不可能如此。这一扩张将在情形 $t(A) = 7$中再次出现，届时我们将对此作更深入的考察。

情形 $t(A) = 6$。根据不等式 $6 \geq m(m+1)$，我们推得 $\dim(A')$ 必须等于 1 或 2，因为 A 不是阿贝尔的。假设 $Z(A) \not\subseteq A'$。我们有 $A = I \oplus Z$，其中 $t(I) + 2\dim(I') = 6$。$\dim(I') = 0$ 和 $\dim(I') = 3$ 这两种情形会导致 I 为阿贝尔的这一条件产生矛盾。若 $\dim(I') = 1$，则 $t(I) = 4$。若 $\dim(I') = 2$，则 $t(I) = 2$。这两种情形下，都不存在这样的 I。现在假设 $Z(A) \subseteq A'$。令 Z 为 $Z(A)$ 和 $H = A/Z$中的一个一维理想。我们的不等式 (2) 变为 $t(H) + 2\dim(A') \leq 6$。

i. 若 $\dim(A') = 1$，则 $t(H) \leq 4$。不存在满足 $t(H) = 1$、2、4 的代数。若 $t(H) = 3$，则 H 必须等于 J_1，因此 A 是由 J_1 扩张 Z 得到的中心扩张。但这又会迫使 $\dim(A') \neq 1$，因为 Z 也包含在 A'中，矛盾。若 $t(H) = 0$，则有阿贝尔 H和特异 A。由于 $t(A) = 6 = 2\dim(A)$，所以 $\dim(A) = 3$，因此 A 可以是 $J_1 * J_1$、 J_2、 Γ_2 或 $H_2(\lambda)$ 中的任意一个，其中 $0 \neq \lambda \neq 1$。换言之， $A = E(3)$。

ii. 若 $\dim(A') = 2$，则 $t(H) \leq 2$。对于 1 或 2，没有需要讨论的内容。若 $t(H) = 0$，则 A 是特异的。然而，我们假设 $\dim(A') = 2$，因此这就产生了矛盾。

情形 $t(A) = 7$。由不等式 $7 \geq m(m+1)$，我们再次推得 $\dim(A')$ 必须等于 1 或 2。若 $Z(A) \not\subseteq A'$，则有 $A = I \oplus Z$，其中 $t(I) + 2\dim(I') = 7$。$\dim(I') = 0$ 的情形会与 $t(I) = 7$ 矛盾。若 $\dim(I') = 1$，则 $t(I) = 5$，这意味着 $I = J_1 \oplus A(1)$。在这种情形下，由于 $Z \subseteq Z(A)$ 是一维理想，我们得到 $A = J_1 \oplus A(2)$。若 $\dim(I') = 2$，则 $t(I) = 3$，这意味着 $I = J_1$。然而，$\dim(J_1') = 1$，矛盾。若 $\dim(I') = 3$，则 $t(I) = 1$；这里没有需要讨论的内容。现在假设 $Z(A) \subseteq A'$。令 Z 为 $Z(A)$ 和$H = A/Z$中的一维理想。不等式 (2) 变为 $t(H) + 2\dim(A') \leq 7$。

i. 如果 $\dim(A') = 1$，那么 $t(H) \leq 5$。对于 $t(H) = 1$、2、4，则不存在相应情形。如果 $t(H) = 0$，那么 H 是阿贝尔的，而 A 是特异的；然而，不存在满足 $t(A) = 7$的特异代数。如果$t(H) = 3$，那么 $H = J_1$。但 A' 是一维的，因此这是矛盾的，因为 $Z \subseteq A'$。如果 $t(H) = 5$，那么 $H = J_1 \oplus A(1)$，这再次与 $\dim(A') = 1$相冲突。

ii. 如果 $\dim(A') = 2$，那么 $t(H) \leq 3$。对于 $t(H) = 1$、2，则不存在相应情形。如果 $t(H) = 0$，那么 A 是特异的，这与 $\dim(A') = 2$相冲突。情形 $t(A) = 7$ 的最后一种可能是 $t(H) = 3$。在这里，我们知道 $H = J_1$，并且 A 是 Z 的一个中心扩张，其商为 J_1。和之前一样，A的一组基是 $\{x, z, z'\}$，其中 $\{z'\}$是 Z的一组基，而 A的乘法为 $xx = z$和 $xz = zx = z'$。到目前为止，这个 A 是成立的；注意 $\dim(A') = 2$。现在我们计算乘子 $M(A)$。

令 $\{m_i\}_{i=1,\dots,9}$ 为 $M(A)$ 的生成集，并考虑 A 覆盖的如下乘法表。

$$\begin{array}{lll} xx = z + m_1 & xz = z' + m_2 & xz' = m_3 \\ zx = z' + m_4 & zz = m_5 & zz' = m_6 \\ z'x = m_7 & z'z = m_8 & z'z' = m_9 \end{array}$$

通过变量替换，我们令 $m_1 = m_2 = 0$。此外，我们利用结合恒等式计算 $m_4 = m_6 = m_8 = m_9 = 0$ 和 $m_3 = m_5 = m_7$。因此，覆盖上的乘法为

$$\begin{array}{lll} xx = z & xz = z' & xz' = m \\ zx = z' & zz = m & zz' = 0 \\ z'x = m & z'z = 0 & z'z' = 0 \end{array}$$

其中 m 表示乘子的唯一基元素。因此，$t(A) = 3^2 - 1 = 8$。这种 A不符合 $t(A) = 7$，但计算 $t(A)$ 的工作将有助于处理下一种情形。

情形 $t(A) = 8$。我们以同样的方式继续处理 $8 \geq m(m+1)$。$Z(A) \not\subseteq A'$的情形给出 $A = I \oplus Z$ 上四种可能的结构；当 $t(I) = 6$ 时，这些结构以该情形为基础。它们是 $(J_1 * J_1) \oplus A(1)$、$J_2 \oplus A(1)$、$\Gamma_2 \oplus A(1)$ 和 $H_2(\lambda) \oplus A(1)$。当 $\dim(A') = 1$时，$Z(A) \subseteq A'$的情形给出 $A = E(4)$。当 $\dim(A') = 2$时，我们根据关于 $t(A) = 7$的讨论，得到 $A(1)$ 被 J_1 作出的中心扩张。这个 A的基为 $\{x, z, z'\}$，乘法为 $xx = z$ 和 $xz = zx = z'$，且 $t(A) = 8$。我们称这个代数为 C_3，因为它由一个元素生成，因此在莱布尼茨代数意义下是循环的。

情形 $t(A) = 9$。我们仍有维数$(A') = 1$ 或 2。$Z(A) \not\subseteq A'$ 的情形给出 $A = J_1 \oplus A(3)$。我们注意到，这与

$$\dim M(A) = \dim M(J_1) + \dim M(A(3)) + 2\dim(J_1/J_1' \otimes A(3)) = 1 + 9 + 2(1)(3) = 16$$

一致，因为 $t(A) = 25 - 16 = 9$。当 $Z(A) \subseteq A'$ 时，除了可能存在一个中心扩张外，我们得到的只有矛盾（包括另一条通往 C_3 的路径）

$$0 \to Z \to A \to J_1 \oplus A(1) \to 0$$

$Z = A(1)$ 被 $J_1 \oplus A(1)$ 扩张的情形。我们必须计算所有此类 A 及其乘子。

设 $\{x, z, a, z'\}$ 是 A 的一组基，其中 x 和 z 是 J_1 的通常元素，z' 生成 Z，而 a 生成另一个 $A(1)$。利用基变换和结合恒等式，我们计算得到 A 上的一般结构为

$$\begin{array}{lll} xx = z & xz = \beta z' & xa = \alpha_1 z' \\ zx = \beta z' & ax = \alpha_2 z' & aa = \alpha_3 z' \end{array}$$

其中至少有一个 α_i 必须非零，因为 $a \notin A'$ 和 $Z(A) \subseteq A'$，这迫使 a 非中心。在这些情形中，乘子都被发现是 4 维的，因此对于任意 $A(1)$ 被 $J_1 \oplus A(1)$ 中心扩张的情形，$t(A) = 12$。关于 $t(A) = 9$ 情形的讨论到此结束，不过我们仍给出该同构类的乘子计算

$$\langle x, z, a, z' \ : \ xx = z, \ ax = z' \rangle$$

作为这项工作的一个示例。

我们先给出覆盖的一般乘法表。

$$\begin{array}{llll} xx = z + m_{11} & xz = m_{12} & xa = m_{13} & xz' = m_{14} \\ zx = m_{21} & zz = m_{22} & za = m_{23} & zz' = m_{24} \\ ax = z' + m_{31} & az = m_{32} & aa = m_{33} & az' = m_{34} \\ z'x = m_{41} & z'z = m_{42} & z'a = m_{43} & z'z' = m_{44} \end{array}$$

通过基变换，我们令 $m_{11} = m_{31} = 0$。由结合恒等式可得 $m_{12} = m_{21}$、$m_{32} = m_{41}$ 和 $m_{14} = m_{22} = m_{23} = m_{24} = m_{34} = m_{42} = m_{43} = m_{44} = 0$。尝试将结合恒等式应用于 m_{13} 和 m_{33} 并无结果。由此，我们找到了乘子生成元之间的所有线性关系，因此一组基为 $\{m_{12}, m_{13}, m_{32}, m_{33}\}$。

情形 $t(A) = 10$。不等式 $10 \geq m(m+1)$ 给出 $\dim(A') = 1$ 或 2。当 $Z(A) \not\subseteq A'$ 时，我们得到 $A = E(3) \oplus A(2)$ 以及 $E(4) \oplus A(1)$。在情形 $Z(A) \subseteq A'$ 中，当 $\dim(A') = 1$ 时，我们得到 $E(5)$。当 $\dim(A') = 2$ 时，所有情况立刻都与之矛盾，可能的中心扩张除外

$$0 \to A(1) \to A \to E(3) \to 0$$

通过 $J_1 * J_1$、J_2、Γ_2 或 $H_2(\lambda)$ 对 $A(1)$ 进行扩张。我们必须计算所有此类 A 及其乘子。需要考虑许多可能性。

i. 当 $A(1)$ 通过 $J_1 * J_1 = \langle x, y, z$ 扩张为 $xx = yy = z \rangle$ 时，我们可以为 A 选取一组基，其乘法结构为

$$\begin{array}{ll} xx = z & xy = \alpha_1 z' \\ yx = \alpha_2 z' & yy = z + \alpha_3 z' \end{array}$$

其中 z' 生成 $A(1)$，且至少有一个 α_i 非零，因为 $z' \in Z(A) \subseteq A'$。在每种情形下，乘子都是 4 维的，因此 $t(A) = 12$。

ii. 当 $A(1)$由 $J_2 = \langle x、\ y、\ z$扩展时：　$xy = z\rangle$，我们可以为 A选择一个仅具有非零乘法的基

$$\begin{aligned} xx &= \alpha_1 z' & xy &= z \\ yx &= \alpha_2 z' & yy &= \alpha_3 z' \end{aligned}$$

其中，　z'生成 $A(1)$，且至少一个 α_i 非零。这里，在所有情形下，　$t(A) = 12$，但同构类除外

$$\langle x, y, z, z' \ :\ xx = z',\ xy = z,\ yx = z' \rangle,$$

其中 $t(A) = 13$。

iii. 当 $A(1)$由 Γ_2扩张时，我们在每种情形下都得到 $t(A) = 12$。

iv. 当 $A(1)$由 $H_2(\lambda)$、 $0 \neq \lambda \neq 1$扩张时，我们再次在所有情形下都得到 $t(A) = 12$。

至此，我们结束了对 $t(A) = 10$ 情形的讨论，也完成了主要结果的证明。 □

参考文献

[1] Arabyani, H.; Niroomand, P.; Saeedi, F. “关于幂零李代数 Schur 乘子维数的研究 II.” 《亚欧数学杂志》，第 10 卷，第 04 期（2017 年）。[2] Batten, P.; Moneyhun, K.; Stitzinger, E. “通过乘子刻画幂零李代数.” 《代数通讯》，第 24 卷，第 14 期（1996 年）。[3] Batten, P. “李代数的乘子与覆盖.” 博士论文，北卡罗来纳州立大学（1993 年）。[4] Edalatzadeh, B.; Hosseini, S. N. “通过二阶同调的新界刻画幂零 Leibniz 代数.” 《代数杂志》，第 511 卷（2018 年）。[5] Edalatzadeh, B.; Hosseini, S. N.; Salemkar, A. R. “通过乘子刻画幂零 Leibniz 代数.” 《代数杂志》，第 578 卷（2021 年）。[6] Edalatzadeh, B.; Pourghobadian, P. “导出理想较小的 Leibniz 代数.” 《代数杂志》，第 501 卷，第 1 期（2018 年）。[7] Hardy, P. “通过乘子刻画幂零李代数 III.” 《代数通讯》，第 33 卷，第 11 期（2005 年）。[8] Hardy, P.; Stitzinger, E. “通过乘子刻画幂零李代数，$t(L)$ =3、4、5、6.” 《代数通讯》，第 26 卷，第 11 期（1998 年）。[9] Mainellis, E. “导出理想较小的结合代数”（2022 年）。arXiv:2212.01425[10] Mainellis, E. “单中心双结合代数的乘子.” 《代数及其应用杂志》（2022 年）。DOI: 10.1142/S0219498823501074[11] Mainellis, E. “单中心 Leibniz 代数的乘子.” 《代数及其应用杂志》，第 21 卷，第 12 期（2022 年）。[12] Mainellis, E. “单中心三结合代数的乘子”（2022 年）。arXiv:2210.14110[13] Mainellis, E. “幂零双结合代数的乘子.” 《数学进展》，第 77 卷，第 5 期（2022 年）。[14] Niroomand, P.; Shamsaki, A. “通过乘子刻画幂零李代数，$s(L) = 4$.” 《巴勒莫数学会会报》第二辑，第 69 卷（2020 年）。