arXiv:2302.01431v1 [math.RA] 2 Feb 2023

具有有界布饶尔 2-扭结指标的域

KARIM JOHANNES BECHER

谨以此文纪念 *David W. Lewis*（*1944—2021*）

Abstract. 本文证明，对于特征不为 2 的域，任一总符号为零的各向异性二次 Pfister 形式，其维数至多为某个指数 2 的中心除代数维数的两倍。证明基于对中心单代数的二次迹形式所作的计算。

Keywords: 指数为 2 的中心单代数，迹形式，四元数代数，符号长度，二次 Pfister 型，Witt 环，基本理想的幂

Classification (MSC 2020): 11E04, 11E81, 16H05

1. Introduction

设 F 是一个域。我们用 $F^\times$ 表示 F 的乘法群。我们用 $\mathrm{Br}(F)$ 表示 F 的布劳尔群，并用 $\mathrm{Br}_2(F)$ 表示其 2-扭结部分。$\mathrm{Br}(F)$ 中的任一元素$\alpha \in$都是唯一一个中心 F-除代数的布劳尔等价类，我们用 $\mathrm{ind}(\alpha)$ 表示该代数的次数。

我们用 $\mathbb{N}$ 表示包含 0 在内的自然数集合。注意，$\mathrm{Br}_2(F)$ 中的任一元素的指标都是 2^n，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。我们定义

$$\lambda'(F) \;=\; \sup\{\log_2(\mathrm{ind}(\alpha_F)) \mid \alpha \in \mathrm{Br}_2(F)\} \;\in\; \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

并称这个域不变量为 F 的布劳尔2-扭结指标。

根据 Merkurjev 定理，$\mathrm{Br}_2(F)$ 中的每个元素都可以表示为 F 个四元数代数的张量积。对于 $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$，我们定义

$\lambda^2(\alpha) \;= \min\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha$ 可表示为 n 个四元数代数$\}$.的张量积

2 符号长度的定义为 F 是

$$\lambda^2(F) \;=\; \sup\{\lambda^2(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{Br}_2(F)\} \;\in\; \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

我们观察到

$$\lambda'(F) \leqslant \lambda^2(F)\,.$$

A.A. Albert 在 [1, 定理 6] 中证明，每个次数为 4、指数为 2 的中心单纯 F代数都是两个 F四元数代数的张量积。因此，当 $\lambda'(F) \leqslant 2$ 时，我们有 $\lambda^2(F) = \lambda'(F)$。J.-P. Tignol 在 [9] 中证明，任意

日期：2023年1月6日。

指数为 2、指标为 8 的中心单纯 F代数等价于 4 个四元数代数的张量积。因此，当 $\lambda'(F) = 3$ 时，我们有 $3 \leqslant \lambda^2(F) \leqslant 4$。当 $\lambda'(F) > 3$ 时，目前尚不知道如何根据 $\lambda'(F)$ 对 $\lambda^2(F)$ 给出界。

下文假设 F 的特征不为 2。我们采用二次型理论中的标准术语和记号，少数例外之处会明确说明。对于两个二次型 φ 和 ψ，我们写作 $\varphi = \psi$ 表示它们等距，写作 $\varphi \equiv \psi$ 表示它们 Witt 等价。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 a_1，……，$a_n \in F^\times$，我们用 $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ 表示由二元二次型 $\langle 1, -a_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n\rangle$ 的 n 重张量积构成的型，称为 n 重 Pfister 型。给定 F 上的非退化二次型 φ 和 $m \in \mathbb{N}$，我们用 $m \times \varphi$ 表示 m 重正交和 $\varphi \perp \ldots \perp \varphi$。我们用 $\mathrm{W}F$ 表示 F 的 Witt 环，用 $\mathrm{I}F$ 表示其基本理想。对于 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{W}F$ 中理想 $\mathrm{I}F$ 的 n 次幂记为 $\mathrm{I}^n F$。注意，$\mathrm{I}^0 F = \mathrm{W}F$。我们用 $\mathrm{I}_{\mathrm{tor}} F$ 表示 $\mathrm{W}F$ 的挠理想。若域 F 中 -1 是平方和，则称该域为非实域；否则称为实域。若 F 是非实域，则由 [5, 推论 6.8 和命题 31.4 (6)]，$\mathrm{W}F = \mathrm{I}_{\mathrm{tor}} F$。

利用 $F(\sqrt{-1})$ 的分次上同调环上带 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 系数的除幂运算，B. Kahn [7, 命题 3.3] 证明了，若 F 是带 $\lambda^2(F) < \infty$ 的非实域，则 $\mathrm{I}^{2\lambda^2(F)+3} F = 0$。我们将看到，在相同假设下，实际上已有 $\mathrm{I}^{2\lambda^2(F)+2} F = 0$；而 Kahn 只有在更强的假设 $-1 \in F^{\times 2}$ 下才能得到这一结论。由于 $\lambda'(F) \leqslant \lambda^2(F)$，本文的以下主要结果甚至在 $-1 \in F^{\times 2}$ 的情形下也改进了 Kahn 的结论。我们给出的表述也涵盖 F 为实域的情形。

定理 1 (定理 3.2). 假设 $\lambda'(F) < \infty$。那么 $\mathrm{I}^{2\lambda'(F)+2} F(\sqrt{-1}) = 0$，且 $\mathrm{I}^{2\lambda'(F)+2} F$ 是无挠的。特别地，若 F 是非实域，则 $\mathrm{I}^{2\lambda'(F)+2} F = 0$。

注意，摘要中表述的结论可由定理 1 通过 Pfister 局部—整体原理 [5,定理 3122]推出。

对于 F 为非实的情形，定理 1 的结论是最优的；也就是说，$\mathrm{I}^{2\lambda'(F)+1} F \neq 0$ 可能成立。这可由一个经典例子看出：对任意 $n \in \mathbb{N}$，取具有 $2n+1$ 个变量的迭代幂级数域

$$F = \mathbb{C}(\!(t_1)\!) \ldots (\!(t_{2n+1})\!),$$

对 其中有 $\lambda'(F) = \lambda^2(F) = n$（见 [2, 第 4] 节），且 $\mathrm{I}^{2n+1} F \neq 0 = \mathrm{I}^{2n+2} F$。

若 F 是实域，则显然对所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $\mathrm{I}^m F \neq 0$。我们的第二个主要结果为 F 是实域的情形提供了额外信息。

对于 n，$r \in \mathbb{N}$ 我们将 $2^r \times \mathrm{I}^n F$ 记作 $\mathrm{W}F$ 中由 $\mathrm{I}^n F$ 的元素的 2^r 倍数构成的理想，该理想包含于 $\mathrm{I}^{r+n} F$ 中。

定理 2 (定理 3.4)。 若 $0 < \lambda'(F) < \infty$，则 $\mathrm{I}^{2\lambda'(F)+2} F = 8 \times \mathrm{I}^{2\lambda'(F)-1} F$。

定理 2 中表述的关系是最优的。在说明这一点之前，我们先指出它与 的约化稳定指数之间的关系，该指数记作 st(F)

并定义如下:

$$\mathsf{st}(F) \;=\; \mathsf{inf}\{n \in \mathbb{N} \mid \mathsf{I}^{n+1}F \subseteq 2 \times \mathsf{I}^{n}F + \mathsf{I}_{\mathsf{tor}}F\} \;\in\; \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,.$$

（此特征见 [5, 命题 35.23] 。）注意，$\mathsf{st}(F) = 0$ 当且仅当 F 是非实域或可唯一排序。

推论。若 $0 < \lambda'(F) < \infty$，则 $\mathsf{st}(F) \leqslant 2\lambda'(F) - 1$。

证明。假设 $0 < \lambda'(F) < \infty$，并令 $n = 2\lambda'(F)-1$。根据定理 2，$\mathrm{I}^{n+3}F = 8\times\mathrm{I}^{n}F$。因此，对于任意 $\alpha \in \mathrm{I}^{n+1}F$，存在某个 $\alpha' \in \mathrm{I}^{n}F$使得 $4\times\alpha = 8\times\alpha'$，由此得到 $\alpha \equiv 2 \times \alpha'$ 模 $\mathsf{I}_{\mathsf{tor}}F$。□

由于 $\lambda'(F) \leqslant \lambda^2(F)$，该结果改进了在 [3, 推论 2.3] 中得到的界 $\mathsf{st}(F) \leqslant 2\lambda^2(F) - 1$。

为了说明定理 2 和推论都是最优的，我们考虑任意整数 $n \geqslant 2$ 对应的迭代幂级数域

$$F = \mathbb{R}(\!(t_1)\!)\ldots(\!(t_{2n-1})\!)\,.$$

在此情形下，我们有 $\lambda'(F) = \lambda^2(F) = n$（见 [2, 第 4] 节），且 $(2n + 2)$ 重 Pfister 型 $\langle\!\langle -1, -1, -1, t_1, \ldots, t_{2n-1}\rangle\!\rangle$ 的类属于 $8 \times \mathrm{I}^{2n-1}F$，但不属于 $16 \times \mathrm{I}^{2n-2}F$。由于 $\mathrm{I}^{2n+2}F$ 是无挠的，根据定理 1，这也意味着 $\mathsf{st}(F) = 2n - 1$。

当 $\lambda'(F) = 1$ 时，定理 1 和定理 2 分别对应于 [4,推论 2.8 和推论 2.9]。对于所有满足 $\lambda'(F) > 1$ 的情形，上述结果都是新的。

2. Trace forms and tensor product

为得到这些结果，我们对中心单代数的迹型进行了初等计算。迄今为止，这种方法在研究 $\mathrm{I}F$ 的幂时所具有的有效性似乎一直未受关注。

设 F 是一个中心单 F-代数 A。我们用 $\mathsf{Trd}_A : A \to F$ 表示约化迹映射。由此从 A 上的 F-线性形式得到一个非退化二次型

$$\mathsf{T}_A : A \to F, x \mapsto \mathsf{Trd}_A(x^2)\,,$$

它称为 的迹形式。根据 [8, 引理 2.1], ，对于任意两个中心单 F-代数 A 和 B，有

$$\mathsf{T}_{A\otimes B} = \mathsf{T}_A \otimes \mathsf{T}_B\,.$$

对于 F 上的二次型 φ 和 $r \in \mathbb{N}$，我们用 $2^r\varphi$ 表示将 φ 乘以 2^r 后得到的二次型，而用 $2^r \times \varphi$ 表示 2^r 重正交和 $\varphi \perp \ldots \perp \varphi$。

给定一个 F四元数代数 Q，我们将其范数型记为 N_Q。如果有$Q = (a,\ b)_F$，其中 $a,\ b \in F^\times$，那么可得 $\mathsf{N}_Q = \langle\!\langle a, b\rangle\!\rangle = \langle 1, -a, -b, ab\rangle$和 $\mathsf{T}_Q = \langle 2, 2a, 2b, -2ab\rangle$，因此 $\langle -1\rangle \perp 2\mathsf{T}_Q = \langle 1\rangle \perp -\mathsf{N}_Q$。

因此，对于任意 F四元数代数 Q，我们有

$$\mathsf{T}_Q \equiv \langle 1,1\rangle \perp -2\mathsf{N}_Q\,.$$

特别地，我们有 $\mathsf{T}_{\mathbb{M}_2(F)} \equiv \langle 1,1\rangle$。因此，对于任意中心单代数$F$-代数 A，我们得到

$$\mathsf{T}_{\mathbb{M}_2(A)} = \mathsf{T}_{\mathbb{M}_2(F)} \otimes \mathsf{T}_A \equiv 2 \times \mathsf{T}_A\,.$$

3. Computing Pfister forms via trace forms

3.1. **命题**。 设 $n \in \mathbb{N}$和 $a_0, b_0, \dots, a_n, b_n \in F^\times$ 满足： a_0是 F中的两个平方数之和，并且 F-代数 $\bigotimes_{i=0}^n (a_i, b_i)_F$不是除代数。则 F上的$(2n+2)$重 ***Pfister*** 型 $\langle\langle a_0, b_0, \dots, a_n, b_n\rangle\rangle$ 是双曲的。

证明。 令 $\rho = \langle\langle a_0, b_0, \dots, a_n, b_n\rangle\rangle$。 对于 $0 \leqslant i \leqslant n$，我们将 $Q_i = (a_i, b_i)_F$、$\mathsf{T}_i = \mathsf{T}_{Q_i}$、$\mathsf{N}_i = \mathsf{N}_{Q_i}$ 记作简写，并注意到 $\mathsf{N}_i = \langle\langle a_i, b_i\rangle\rangle$。 因此 $\rho = \bigotimes_{i=0}^n \mathsf{N}_i$。

回顾对于 $0 \leqslant i \leqslant n$，$\mathsf{T}_i \equiv \langle 1,1\rangle \perp -2\mathsf{N}_i$。 a_0 是 F 中两个平方的和这一假设意味着 $2 \times \mathsf{N}_0$ 是双曲的，并且 $-\mathsf{N}_0 = \mathsf{N}_0$。 因此，我们得到对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，$\mathsf{T}_0 \equiv \langle 1,1\rangle \perp 2\mathsf{N}_0$ 以及 $\mathsf{N}_0 \otimes \mathsf{T}_i = \mathsf{N}_0 \otimes 2\mathsf{N}_i$。

设 $B = \bigotimes_{i=1}^n Q_i$ 和 $A = Q_0 \otimes B$。 由于 $\mathsf{T}_B = \bigotimes_{i=1}^n \mathsf{T}_i$，我们得到

$$\mathsf{N}_0 \otimes \mathsf{T}_B = \mathsf{N}_0 \otimes \bigotimes_{i=1}^n (2\mathsf{N}_i) = (2^n)\rho\,.$$

由于 A 的次数为 2^{n+1} 且不是除代数，因此对于某个次数为 2^n 的中心单 F-代数 B'，有 $A = B' \otimes \mathbb{M}_2(F)$。这就得到

$$\mathsf{T}_0 \otimes \mathsf{T}_B = \mathsf{T}_A \equiv 2 \times \mathsf{T}_{B'}\,.$$

由于 $\mathsf{T}_0 = \langle 1,1\rangle \perp 2\mathsf{N}_0$，，我们得到

$$2 \times \mathsf{T}_{B'} \equiv \mathsf{T}_0 \otimes \mathsf{T}_B \equiv 2 \times \mathsf{T}_B \perp (2^{n+1})\rho\,.$$

因此

$$(2^{n+1})\rho \equiv 2 \times (\mathsf{T}_{B'} \perp -\mathsf{T}_B)\,.$$

由于这两个二次型的维数均为 4^{n+1}，我们得到

$$(2^{n+1})\rho = 2 \times (\mathsf{T}_{B'} \perp -\mathsf{T}_B)\,.$$

由于二次型 $2 \times \mathsf{T}_{B'}$ 和 $2 \times \mathsf{T}_B$ 都表示 $\mathbf{1}$，我们发现 ρ 是各向同性的。由于 ρ 是 Pfister 型，我们得出 ρ 是双曲的。□

3.2. **定理**。 设 $n \in \mathbb{N}$ 满足：对于每个 $\alpha \in \mathsf{Br}_2(F)$，均有 指标$(\alpha) \leqslant 2^n$ 。则$\mathsf{I}^{2n+2}F(\sqrt{-1}) = 0$，且$\mathsf{I}^{2n+2}F$ 无挠。特别地，若 F 是非实的，则$\mathsf{I}^{2n+2}F = 0$。

证明。 令 $m = 2n+2$。考虑任意元素 $a_1, \dots, a_m \in F^\times$ 以及任意域扩张 F'/F。假设意味着 F'-代数$\bigotimes_{i=0}^n (a_{2i+1}, a_{2i+2})_{F'}$不是除代数。若 a_1是 F'中的两个平方数之和，则由命题 3.1 可得， $\langle\langle a_1, \dots, a_m\rangle\rangle$ 在 F'上是双曲的。因此，

F 上的每个 m 重 Pfister 型，在其某个槽成为两个平方数之和的任意域扩张上，都会变成双曲型。对于 $F' = F$，这表明 F 满足 [5, 节中所述的条件 (A_m)。此外，由于在 $F' = F(\sqrt{-1})$ 中每个元素都是两个平方数之和，我们得到，定义在 F 上的每个m重 Pfister 型在 $F(\sqrt{-1})$ 上都会变成双曲型，因此 $\mathrm{I}^m F = 2 \times \mathrm{I}^{m-1} F$。由这两点可知，根据 [5, 推论 35.27]，$\mathrm{I}^m F(\sqrt{-1}) = 0$ 且 $\mathrm{I}^m F$ 是无挠的。□

3.3. **命题**。设 $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ 和 $a_1, \dots, a_{2n+1} \in F^\times$ 满足条件，使得 F-代数 $(-1, a_1)_F \otimes \bigotimes_{i=1}^n (a_{2i}, a_{2i+1})_F$ 不是除代数。那么存在一个 $2n$重 *Pfister* 型 ψ，其定义在 F 上，使得

$$2 \times \langle\langle a_1, \dots, a_{2n+1} \rangle\rangle = 4 \times \psi \,.$$

证明。令 $a_0 = -1$。对于 $0 \leqslant i \leqslant n$，令 $Q_i = (a_{2i}, a_{2i+1})_F$、$\mathsf{T}_i = \mathsf{T}_{Q_i}$ 和 $\mathsf{N}_i = \mathsf{N}_{Q_i}$。进一步令 $A = \bigotimes_{i=0}^n Q_i$。则 $\mathsf{T}_A = \bigotimes_{i=0}^n \mathsf{T}_i$。此外，$\mathsf{N}_0 = 2 \times \langle 1, -a_1 \rangle$且 $\mathsf{T}_0 \equiv 2 \times \langle a_1 \rangle$。根据假设，对于一个次数为 2^n 的中心单代数 F-代数 B，我们进一步有 $A = B \otimes \mathbb{M}_2(F)$。由此可得

$$\mathsf{T}_A \equiv 2 \times \mathsf{T}_B \,.$$

令 $\pi = \langle\langle -1, a_2, \dots, a_{2n+1} \rangle\rangle$，由此

$$2 \times \langle\langle a_1, \dots, a_{2n+1} \rangle\rangle = \langle\langle a_1 \rangle\rangle \otimes \pi \,.$$

若 -1 是 F中的两个平方数之和，则对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，$2 \times \mathsf{T}_i = 2 \times \mathsf{N}_i$，因此

$$2 \times \mathsf{T}_B \equiv \mathsf{T}_A = \bigotimes_{i=0}^{n} \mathsf{T}_i \equiv 2 \times \langle a_1 \rangle \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} \mathsf{N}_i \equiv a_1 \pi \,,$$

由此，鉴于维数相等，$a_1 \pi = 2 \times \mathsf{T}_B$；又由于 $2 \times \mathsf{T}_B$表示 $\mathbf{1}$，可知 $2 \times \langle\langle a_1, \dots, a_{2n+1} \rangle\rangle$ 是双曲的。

现在令 F'表示域 F上二次型 $4 \times \langle 1 \rangle$ 的函数域。由于 -1 是 F'中的两个平方数之和，前一段的论证表明，$2 \times \langle\langle a_1, \dots, a_{2n+1} \rangle\rangle$ 在 F'上变为双曲型。由于 $4 \times \langle 1 \rangle$ 是 Pfister 型且 $n \geqslant 1$，由 [5, 定理 22.5] 可知，$4 \times \langle 1 \rangle$ 是 F上 $2 \times \langle\langle a_1, \dots, a_{2n+1} \rangle\rangle$ 的子型。由 [5, 命题 24.1]，，我们得出，对于 F上的一个 $2n$ 重 Pfister 型 ψ，有 $2 \times \langle\langle a_1, \dots, a_{2n+1} \rangle\rangle = 4 \times \psi$。□

3.4. **定理**。设 $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ 满足：对于每个 $\alpha \in \mathsf{Br}_2(F)$，都有指标$(\alpha) \leqslant 2^n$。那么

$$\mathsf{I}^{2n+2} F = 8 \times \mathsf{I}^{2n-1} F \,.$$

证明。由定理 3.2，我们有 $\mathrm{I}^{2n+2} F(\sqrt{-1}) = 0$。根据 [5, 定理 34.22]，可知 $\mathrm{I}^{2n+2} F$ 由如下二次型的 Witt 等价类生成：$2 \times \rho$，其中包含 $2n+1$ 重 Pfister 型 ρ，定义在 F 上。根据假设，命题 3.3 表明，对于这样的二次型 ρ，有 $2 \times \rho = 4 \times \psi$，其中 $2n$ 重 Pfister 型 ψ 定义在 F上。这说明 $2 \times \mathrm{I}^{2n+1} F = 4 \times \mathrm{I}^{2n} F$。因此，$\mathrm{I}^{2n+2} F$由二次型 $4 \times \psi$ 的等价类生成，其中 $2n$ 重 Pfister 型 ψ 定义在 F上。

考虑 a_1，b_1，……，a_n，$b_n \in F^\times$ 和 $\psi = \langle\!\langle a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \rangle\!\rangle$。对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 $Q_i = (a_i,\ b_i)_F$，$\mathsf{T}_i = \mathsf{T}_{Q_i}$，$\mathsf{N}_i = \mathsf{N}_{Q_i} = \langle\!\langle a_i, b_i \rangle\!\rangle$。于是 $\psi = \bigotimes_{i=1}^n \mathsf{N}_i$。我们将计算中心单纯 F-代数的迹形式

$$A = \bigotimes_{i=1}^n Q_i \quad \text{and} \quad A' = A \otimes (-1,-1)_F\,.$$

由于 $\deg A' = 2^{n+1}$，由关于 F 的假设可知，对于次数为 2^n 的中心单代数 F，B 满足 $A' = B \otimes \mathbb{M}_2(F)$。注意，$\mathsf{T}_{(-1,-1)} \equiv \langle -1, -1 \rangle$。因此

$$2 \times \mathsf{T}_B \equiv \mathsf{T}_{A'} \equiv 2 \times -\mathsf{T}_A\,.$$

由于 $\deg A = \deg B$，这就得到

$$2 \times \mathsf{T}_B = 2 \times -\mathsf{T}_A\,.$$

由于 $2 \times \mathsf{T}_A$ 和 $2 \times \mathsf{T}_B$ 都表示 $\mathbf{1}$，我们得到 $4 \times \mathsf{T}_A$ 是各向同性的。

由于对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，$\mathsf{T}_A = \bigotimes_{i=1}^n \mathsf{T}_{Q_i}$ 和 $4 \times \mathsf{T}_{Q_i} \equiv 4 \times \mathsf{N}_{Q_i}$ 在 $\mathsf{W}F$ 中模 8 同余，我们得到

$$4 \times \mathsf{T}_A \equiv 4 \times \bigotimes_{i=1}^n \mathsf{N}_{Q_i} \equiv 4 \times \psi \bmod 8$$

在 $\mathsf{W}F$ 中。由于 $4 \times \mathsf{T}_A$ 是各向同性的，且 $4 \times \psi$ 是 Pfister 型，并且这两个二次型维数相同，我们得到 $4 \times \psi$ 在 F 上二次 Pfister 型 $8 \times \langle 1 \rangle$ 的函数域上变为双曲的。由于 $n \geqslant 1$，由 [5, 定理 22.5] 可知，$8 \times \langle 1 \rangle$ 是 $4 \times \psi$ 的子型。根据 [5, 命题 24.1],，这就得到，对于 F 上的一个 $(2n-1)$ 重 Pfister 型 ϑ，有 $4 \times \psi = 8 \times \vartheta$。由于这一论证适用于 F 上任意一个 $2n$ 重 Pfister 型 ψ，我们得出$4 \times \mathsf{I}^{2n} F = 8 \times \mathsf{I}^{2n-1} F$。因此 $\mathsf{I}^{2n+2} F = 8 \times \mathsf{I}^{2n-1} F$。□

Acknowledgements

作者谨向审稿人致谢，感谢其提出批判性且极具建设性的意见，这些意见有助于改进本文的表述。此外，还要感谢 Saurabh Gosavi、Bruno Kahn 和 Jean-Pierre Tignol 提出的意见与建议。

Conflict of interest statement

作者声明不存在利益冲突。

References

[1] A. Adrian Albert. 代数数域上次数为四的正规除代数。*Trans.Amer. Math. Soc.* 34 (1932), 363–372.[2] Karim Johannes Becher 和 Detlev W. Hoffmann。Milnor K理论中的符号长度。*Homology, Homotopy and Applications*, 6 (2004), 17–31.[3] Karim Johannes Becher 和 Pawe-l G-ladki。符号长度与稳定指数。*J. Algebra*354 (2012), 71–76.[4] Richard Elman 和 Tsit-Yuen Lam。二次型与 u-不变量 II。*Invent. Math.*21 (1973), 125–137。

[5] Richard Elman、Nikita Karpenko 和 Alexander Merkurjev。二次型的代数与几何理论。第 56 卷。美国数学会专题报告。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008 年。[6] Bruno Kahn。若干域不变量的比较。*J. Algebra* 232 (2000), 485–492.[7] Bruno Kahn。关于附属于二次型的“水平”不变量，载于代数与数论，第 21–33 页，R. Tandon 编，印度斯坦图书代理公司，德里，2005 年。[8] David W. Lewis。中心单代数的迹型。*Math. Z.* 215 (1994), 367–375.[9]Jean-Pierre Tignol。关于次数为 8 的带对合体的相似类。C.R. Acad. Sci. Paris S´ér. A-B 286 (1978), A875–A876。

Universiteit Antwerpen, Department of Mathematics, Middelheimlaan 1, 2020Antwerp, Belgium.电子邮件地址：karimjohannes.becher@uantwerpen.be