arXiv:2302.01445v1 [math.CO] 2 Feb 2023

通过松弛强基可排序性将集合划分为公共独立集

Krist´of B´erczi* Tam´as Schwarcz*

摘要

用尽可能少的公共独立集覆盖两个拟阵的基集，这一问题众所周知极为困难，即使在非常受限的情形下也是如此；例如，判断两个公共独立集是否足以完成覆盖。尽管如此，由于该问题推广了若干长期悬而未决的问题，找出可处理的情形尤为重要。强基可排序拟阵构成一个拟阵类，其满足的基交换条件远强于标准公理。因此，对于任意拟阵尚未解决的若干问题，都可以在这一类拟阵中得到解决。特别是，Davies 和 McDiarmid 证明，若两个拟阵均为强基可排序拟阵，则它们交集的覆盖数等于二者覆盖数的最大值。

受他们结果的启发，我们从两个方向提出对强基可排序性的松弛。首先，我们弱化基交换条件，由此定义了一个新的完备拟阵类，该类具有显著的算法性质。其次，我们引入用图覆盖拟阵回路的概念，并考察图为 2-正则图或路径的情形。我们列举了大量结果，阐明所提出的松弛与关于公共独立集覆盖的现有猜想和定理之间的关系。

关键词： 覆盖、排除子、拟阵交、拟阵 k-可着色性、强基可排序拟阵

1 引言

关于拟阵理论的基本定义和记号，感兴趣的读者可参阅 [33]。全文中，我们将拟阵 M 的基集记为 E，而独立集、基和回路的集合分别记为 $\mathcal{I}$、$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$。拟阵 **的覆盖数** $\beta(M)$ 是覆盖其基集所需的最少独立集数。因此，如果 k**-可覆盖**，则称该拟阵为 $\beta(M) \leq k$。研究覆盖数时，我们假设拟阵无环，否则显然无法用独立集覆盖基集。利用 Edmonds 和 Fulkerson 给出的拟阵并的秩公式，可以确定 $\beta(M$。

考虑两个拟阵交集的类似概念是很自然的。给定定义在同一基集上的两个拟阵 M_1 和 M_2，其交集的**覆盖数** $\beta(M_1 \cap M_2)$是覆盖公共基集所需的最少公共独立集数量。长期以来，确定 $\beta(M_1 \cap M_2)$ 的精确值一直备受关注，因为它推广了图论和拟阵理论中的一系列基本问题，包括关于有向图中两两不交的 dijoin 最大数量的 Woodall 猜想 [39]

*MTA-ELTE 动量拟阵优化研究组和 ELKH-ELTE Egerváry 研究组，运筹学系，Eötvös Loránd 大学，布达佩斯，匈牙利。电子邮件：kristof.berczi@ttk.elte.hu、tamas.schwarcz@ttk.elte.hu。

，以及关于横截基打包的 Rota基猜想 [24]。然而，除了 K″的 1-因子分解定理 [27] 或 Edmonds不相交树形分支定理 [16], 等部分结果外，这个问题一直悬而未决。直到最近，作者通过证明该问题在秩预言机模型下是困难的，才解决了其复杂性问题 [6]。

由于通常很难确定 $\beta(M_1 \cap M_2)$ 的精确值，因此需要找到较好的上下界。给出一个下界很容易，因为 $\beta(M_1 \cap M_2) \geq \min\{\beta(M_1)\ \beta(M_2)\}$ 总是成立。然而，对于一般的拟阵，等式 $\beta(M_1 \cap M_2) = \max\{\beta(M_1)\ \beta(M_2)\}$ 不一定成立。一个广为人知的例子说明了这一点： M_1 是四个顶点的完全图的图拟阵，而 M_2 是由其边划分为三个匹配所定义的分划拟阵[1] ，详情请见 [35] 。至于上界，Aharoni 和 Berger [3] 运用拓扑学中的技巧证明了 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq 2\max\{\beta(M_1)\ \beta(M_2)\}$。此外，他们还验证了一个略强的命题：只要 $\beta(M_1)$ 和 $\beta(M_2)$ 中有一个整除另一个， $\beta(M_1 \cap M_2) \leq \beta(M_1) + \beta(M_2)$ 就成立。然而，目前尚无已知例子能使实际值接近这个上界。事实上，Aharoni 和 Berger [4] 提出了以下猜想，该猜想最初归功于 [3]。

猜想 1。 (Aharoni 和 Berger) 设 M_1 和 M_2 是定义在同一地集上的拟阵 $t.$

(1) 若 $\beta(M_1) \neq \beta(M_2)$，则 $\beta(M_1 \cap M_2) = max\{\beta(M_1)\ \beta(M_2)\}$。
(2) 若 $\beta(M_1) = \beta(M_2)$，则 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq max\{\beta(M_1)\ \beta(M_2)\} + 1$。

该猜想仅在 $\beta(M_1) = \beta(M_2) = 2$ 的情况下由 Aharoni、Berger 和 Ziv [4]验证。在同一篇论文中，作者还证明，若 $\beta(M_1) = 2$ 且 $\beta(M_2) = 3$，则 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq 4$成立。对于 $\beta(M_1) = 2$ 和 $\beta(M_2) = k \geq 4$，目前最佳界由 Aharoni 和 Berger [3]上述结果推出：若 k 为偶数，则 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq k+2$；若 k 为奇数，则 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq k+3$。

与猜想 1相关的结果中，最重要的可能是 Davies 和 McDiarmid [14], 对强基可排序拟阵这一类拟阵的研究。若一个拟阵满足**强基可排序**，则称其为

(SBO) 对于任意一对基 A, B 都存在一个双射 φ: $A \setminus B \to B \setminus A$，使得对于每个 $X \subseteq A \setminus B$，$(A \setminus X) \cup \varphi(X)$ 都是一个基。

值得一提的是，这也意味着 $(B \cup X) \setminus \varphi(X)$ 也是一个基。强基可排序拟阵之所以有趣且重要，是因为我们对其整体结构有相当深入的了解；相比之下，对于一般情形，我们所知却少得令人沮丧。特别是，Davies 和 McDiarmid 证明了，两个强基可排序拟阵之交集的覆盖数恰好等于显然的下界。

定理 1. (Davies 和 McDiarmid) 设 M_1 和 M_2 是定义在同一基集上的强基可排序拟阵。则 $\beta(M_1 \cap M_2) =$ 最大$\{\beta(M_1)\ \beta(M_2)\}$。

许多自然出现在组合优化和图优化问题中的拟阵类（例如可达拟阵）都具有强基可排序性，因此定理 1 是打包公共独立集研究中的一项里程碑成果。最近，Abdi、Cornu´ejols 和 Zlatin [1] 借助该定理成功解决了 Woodall 猜想的一些特殊情形，使得这一定理再度受到关注。然而，有些基本拟阵类并不具有强基可排序性，例如图拟阵或铺砌拟阵。

[1]本文中讨论的所有分划拟阵，其分划类的上界均为 1，文中不再特别说明。

我们的贡献。 我们的研究受到以下问题的启发：能否在定理 1中以某种较弱的假设取代强基可排序性，同时仍使结论成立？或者更一般地说，能否验证某个足够广泛的拟阵类满足猜想 1？作为对这些问题的部分回答，我们提出了强基可排序性的两种松弛方式，分别从不同方面弱化了原始定义。

首先，在第 2 节中，我们省略要求双射在 $A\setminus B$与 $B\setminus A$之间建立对应的条件，并允许将多重集 $A\cup B$重新划分为两个新的基 A'和 B'，使其满足 $A'\cap B'=A\cap B$和 $A'\cup B'=A\cup B$。我们证明，满足这一放宽条件的拟阵构成一个完备类。我们还证明，当两个拟阵都属于所提出的类时，定理 1仍然成立，由此确定了打包问题可有效求解的新情形。最后，我们说明这一新类在现有拟阵类的层次结构中的位置。

其次，在第 3 节中，我们放宽了要求在 $A\setminus B$与 $B\setminus A$之间建立双射的条件。我们转而寻找一个图，其顶点集与这些基的对称差一致，并且该图以局部方式表示这个拟阵，即图中的每个稳定集都对应于原拟阵的一个独立集。特别地，我们证明，对于图拟阵、铺砌拟阵和尖峰拟阵，可以将所讨论的图选为一条路径。我们猜想，对任意拟阵也有类似结论，并讨论了由此类结果可以推出的一系列推论。

2 Re放宽固定基：强基可重排拟阵 s

考虑定理 1 向更广泛拟阵类推广时，有一些自然的候选对象。对于子集 X，$Y\subseteq E$，其**对称差**定义为$X\triangle Y:=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$。当 Y只含一个元素 y时， $X\setminus\{y\}$ 和 $X\cup\{y\}$分别简写为 $X-y$ 和 $X+y$。如果一个拟阵满足以下条件，则称其为**基可排序**：

(BO) 对于任意一对基 A，B存在一个双射 $\varphi\colon A\setminus B\to B\setminus A$，使得对每个 $x\in A\setminus B$，$A-x+\varphi(x)$ 和 $B+x-\varphi(x)$ 都是基。

显然，强基可排序拟阵也是基可排序的，因为 (SBO) 中出现的双射也满足(BO) 。已知 $M(K_4)$（四个顶点的完全图的图拟阵）是基可排序的禁 minor。因此，每个基可排序拟阵都属于 Ex($M(K_4)$) 这一类 $M(K_4)$-minor-free 拟阵。事实上，已知这些包含关系都是严格的，因此 SBO $\subsetneq$ BO $\subsetneq$ Ex($M(K_4)$) 均成立。

Davies 和 McDiarmid [14] 提出了一个问题：如果将强基可排序性替换为较弱的假设，即两个拟阵都基可排序，定理 1 是否仍然成立。尽管这个具体问题仍未解决，下面的例子表明，两个拟阵都属于 Ex($M(K_4)$) 并不足以保证结论成立。该例使用了 J，这是 Oxley 引入的一个自对偶秩 4 拟阵 [34]。

注 2。我们证明存在一个分划拟阵 M，使得 $\beta(J)=\beta(M)=2$且$\beta(J\cap M)=3$。考虑图 1 中拟阵 J的几何表示；定义也见 [33, 第 650]页。令 M 为由分划类$\{a,h\}$、$\{b,g\}$、$\{c,e\}$、$\{d,f\}$定义的分划拟阵，因此 $\beta(J)=\beta(M)=2$。

为了证明 $\beta(J\cap M)>2$，反设 $E=B_1\cup B_2$是 J和 M的两个公共基的一个分解。不失一般性，我们可以假设 $h\in B_1$。由于 B_1是公共基，它恰好包含来自每一对 $\{b,g\}$、$\{c,e\}$、$\{d,f\}$的一个元素，并且至多包含来自每一对 $\{b,c\}$、$\{d,g\}$、$\{e,f\}$的一个元素，因此 $B_1=\{b,d,e,h\}$ 或$B_1=\{c,f,g,h\}$。无论哪种情形， B_2都不是 J的基，矛盾。因此 $\beta(J\cap M)>2$，故根据前面提到的 Aharoni 、 Berger 和 Ziv 的结果， $\beta(J\cap M)=3$ 。

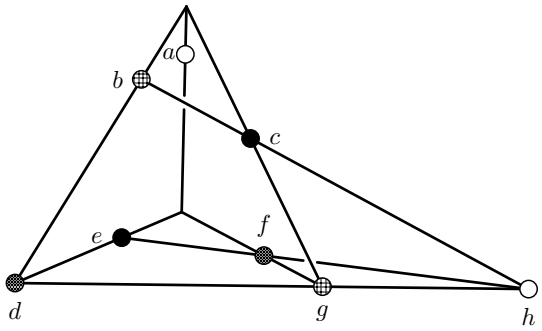

图 1：拟阵 J 的几何表示：不位于同一平面上的四元集合是基。若 $M_1 = J$ and M_2 是由分划类$\{a,h\}$、$\{b,g\}$、$\{c,e\}$、$\{d,f\}$定义的分划拟阵，且上界为一，则 $\beta(M_1) = \beta(M_2) = 2$ and $\beta(M_1 \cap M_2)$ =3。

受定理 1证明的启发，我们称拟阵**强基可重排** （简称 SBRO），如果

（SBRO）对于任意一对基 A、B，存在基 A'、B'以及一个双射 φ：$A' \setminus B' \to B' \setminus A'$，使得 $A' \cap B' = A \cap B$、$A' \cup B' = A \cup B$，且 $(A' \setminus X) \cup \varphi(X)$ 对每个 $X \subseteq A' \setminus B'$ 都是一个基。

换句话说，（SBRO）与（SBO）的区别在于，前者允许在要求双射之前，重新划分基的多重并 φ。由定义立即可知，强基可排序拟阵也是强基可重排的。

2.1 完备性与交

Ingleton [25] 将一个拟阵类定义为**完备的**，当且仅当它在取子式、对偶、直和、截断以及通过有向图进行归纳后仍然封闭。完备类在许多其他拟阵运算下也封闭，例如串联与并联连接、2-和、并以及主扩张，参见例如 [11]。Ingleton [25] 已指出，基可排序拟阵类和强基可排序拟阵类都是完备的，而 Sims [36]则验证了 Ex($M(K_4)$) 也是完备的。

一对基 A, B的 k**-交换排序**是一个双射 φ: $A \setminus B \to B \setminus A$，使得对于每个满足 $|X| \leq k$ 的子集 $X \subseteq A \setminus B$，$(A \setminus X) \cup \varphi(X)$ 和 $(B \setminus \varphi(X)) \cup X$ 都是基。若拟阵的每一对基都有一个 k-交换排序，则称该拟阵为 k**-基可排序的**。注意，k-基可排序性在 $k = 1$ 为拟阵基数时对应于基可排序性，而在 k 为拟阵的秩时对应于强基可排序性。Bonin和Savitsky [11] 证明，对于任意固定的 $k \geq 1$，k-基可排序拟阵类都是完备的。基于他们的证明，我们验证强基可重排拟阵类 SBRO 也是完备的。按照 [33]，的记法，拟阵 M 中集合 X 的**收缩**和**删除**分别记为M/X 和 $M\backslash X$。

定理 3. SBRO是一个完备类。

证明。Bonin和Savitsky [11]证实，如果一个拟阵类在取子式、对偶、直和以及向平坦进行主扩张的操作下封闭，那么它就是完备的。对于基集为 E 的拟阵 M 的一个平坦 F，以及一个不属于 E 的元素 e，其**主扩张** $M +_F e$ 是一个拟阵

其基集为 $E+e$，基族为

$$\{B+e-f \mid B \text{ is a basis of } M,\ f \in (B \cap F)+e\}.$$

以下结论在 [11] 证明 k-基可重排拟阵类在主扩张下封闭时已被隐含地证明。

引理4。设 k 为正整数，F 为拟阵 M 在基集 E上的一个平坦，且 e 为不属于 E的一个元素。若 φ_0 是基 A_0 和 B_0 的 k-交换排序，并且它们属于 M，则对于每个$x \in (A_0 \cap F)+e$和 $y \in (B_0 \cap F)+e$，存在基 A_0+e-x和 B_0+e-y 的 k-交换排序，并且它们属于 $M+_F e$。

我们通过证明 SBRO 在直和、对偶、子式和主扩张下保持封闭来证明定理3 。对直和封闭性的验证是直接的。

为证明对偶下的封闭性，设 A^* 和 B^* 是 SBRO 拟阵 M的对偶 M^* 的基。由于 $A:=E\setminus A^*$和 $B:=E\setminus B^*$是 M的基，存在基 A'、B'以及一个双射 φ: $A'\setminus B' \to B'\setminus A'$，使得对于每个 $X \subseteq A'\setminus B'$，$A'\cap B'=A\cap B$、$A'\cup B'=A\cup B$，且（$A'\setminus X$）$\cup\varphi$（$X$）是 M的基。于是，$A'^*:=E\setminus A'$和 $B'^*:=E\setminus B'$ 是 M^*的基，使得 $A'^*\cap B'^*=A^*\cap B^*$、$A'^*\cup B'^*=A\cup B$，并且 φ^{-1}是从 $B'\setminus A'=A'^*\setminus B'^*$到 $A'\setminus B'=B'^*\setminus A'^*$ 的双射，从而对于每个 $Y\subseteq B'\setminus A'$，集合（$A'^*\setminus Y$）$\cup\varphi^{-1}$（$Y$）是$M$的基，因为 $E\setminus\big((A'^*\setminus Y)\cup\varphi^{-1}(Y)\big)=(A'\cup Y)\setminus\varphi^{-1}(Y)=(A'\setminus\varphi^{-1}(Y))\cup\varphi\big(\varphi^{-1}(Y)\big)$ 是 M的基。

接下来，我们证明该性质在取子式时保持。注意，通过从强基可重排拟阵 M 中删除元素 x 得到的拟阵 $M\backslash x$ 是 SBRO。这是因为，如果 x不是 M的余回路元素，那么 $M\backslash x$的每个基都是 M的基；而如果 x是 M的余回路元素，那么对 $M\backslash x$的每个基 B，$B+x$ 都是 M 的基。我们已经证明 SBRO 在取对偶时保持，因此收缩 $M/x=(M^*\backslash x)^*$ 也为 SBRO。

最后，我们证明该性质在主扩张下保持。设 F是强基可重排拟阵M的一个平坦，并考虑 $M+_F e$的一对基 A、B。根据主扩张的定义，存在 $x\in F\cap A+e$和 $y\in F\cap B+e$，使得 $A+x-e$和 $B+y-e$是 M的基。由于 M是 SBRO，存在一对 A_0、B_0 以及一个双射 φ_0: $A_0\setminus B_0\to B_0\setminus A_0$，使得$A_0\cap B_0=(A+x-e)\cap(B+y-e)$、$A_0\cup B_0=(A+x-e)\cup(B+y-e)$，并且对每个 $X\subseteq A_0\setminus B_0$，$(A_0\setminus X)\cup\varphi(X)$都是 M 的基。由于 φ_0 是 k 的一个 k-交换排序，其中M表示秩，根据引理4，对于 $M+_F e$的基 $A':=A_0+e-x$和 $B':=B_0+e-y$，存在一个 k-交换排序 φ。鉴于 $A'\cap B'=A\cap B$和 $A'\cup B'=A\cup B$成立，一对 A'、B'及双射 φ 满足（SBRO）的要求。 □

借助定理 3，我们可以证明下一个定理，它展示了所提出类别的重要性。尽管证明与 1 中出现的定理证明类似 [35, 定理 42。13], 我们仍将其列出，以使本文自成一体。

定理 5。设 M_1 和 M_2 是定义在同一基集上的强基可重排拟阵。则 $\beta(M_1\cap M_2)=$最大值$\{\beta(M_1)$ $\beta(M_2)\}$。

证明。设 $k=\max\{\beta(M_1)\ \beta(M_2)\}$，且 $r=\max\{r(M_1)\ r(M_2)\}$。不妨设拟阵的公共基集 E 在每个拟阵中都可分解为 k 个不相交基M_1和 M_2。事实上，对于 $i=1$、2，考虑拟阵 M_i'，它由 M_i 与以 $k\cdot r-|E|$ 个元素为基集的自由拟阵的直和经 r 截断得到。根据定理 3，M_i' 是 SBRO，且其基集可分解为 $i=1$、2 个不相交基 k，并且 $\beta(M_1'\cap M_2')=\beta(M_1\cap M_2)$ 也成立。

设 $\mathcal{X}=\{X_1,\ldots,X_k\}$ 和 $\mathcal{Y}=\{Y_1,\ldots,Y_k\}$ 分别是 E 划分为 M_1 和 M_2 的基所得的划分，且 $\sum_{i=1}^{k}|X_i\cap Y_i|$ 尽可能大。若其值为 $|E|$，则 $\mathcal{X}=\mathcal{Y}$ 是将 E 分解为 M_1 和 M_2 的 k 个公共基。否则，存在互不相同的指标 i 和 j，使得 $X_i\cap Y_j\neq\emptyset$。设 X_i' 和 X_j' 分别为 M_1 和 φ_1 的基：由（SBRO），对于 M_1 的不相交基 X_i 和 X_j，存在双射 $X_i'\to X_j'$。类似地，设 Y_i' 和 Y_j' 分别为 M_2 和 φ_2 的基：由（SBRO），对于 M_2 的不相交基 Y_i 和 Y_j，存在双射 $Y_i'\to Y_j'$。考虑以 $X_i\cup X_j\cup Y_i\cup Y_j$ 为顶点集、以 $\{e\varphi_1(e)\mid e\in X_i'\}\cup\{e\varphi_2(e)\mid e\in Y_i'\}$ 为边集的图 G。由于 G 是两个匹配的并，因此它是二分图。令 S 和 T 表示对图 G 的顶点进行二着色所得到的颜色类。由于对每个 $Z\subseteq X_i'$，$(X_i'\setminus Z)\cup\varphi_1(Z)$ 都是 M_1 的基，且对每个 $Z\subseteq Y_i'$，$(Y_i'\setminus Z)\cup\varphi_2(Z)$ 都是 M_2 的基，所以 $=S\cap(X_i\cup X_j)$ 和 $=T\cap(X_i\cup X_j)$ 是 M_1 的基，而 $=S\cap(Y_i\cup Y_j)$ 和 $=T\cap(Y_i\cup Y_j)$ 是 M_2 的基。考虑由 $\mathcal{X}$ 将 X_i 和 X_j 分别替换为 X_i'' 和 X_j'' 后得到的划分 $\mathcal{X}'$，以及由 $\mathcal{Y}$ 将 Y_i 和 Y_j 分别替换为 Y_i'' 和 Y_j'' 后得到的划分 $\mathcal{Y}'$。那么 $|X_i''\cap Y_i''|+|X_j''\cap Y_j''|=|(X_i\cup X_j)\cap(Y_i\cup Y_j)|>|X_i\cap Y_i|+|X_j\cap Y_j|$，因此 $\mathcal{X}'$ 和 $\mathcal{Y}'$ 与 $\sum_{i=1}^{k}|X_i\cap Y_i|$ 的极大性矛盾。

□

2.2 二元和三元 SBRO 拟阵

一般而言，了解一个小拟阵封闭类的排除 minor，是一种强大的工具，可用于各种应用。基于 Brylawski 对 $M(K_4)$-minor-free 二元拟阵的刻画，以及 Oxley 对 [12] $M(K_4)$-minor-free 三元拟阵的刻画 [34],，我们给出二元和三元 SBRO 拟阵的刻画。对于后者，我们将利用拟阵 $S(5,6,12)$ 是 SBRO 这一事实。Steiner系统 $S(5,6,12)$ 是一个由 12 元基集上的 6 元子集组成的族，其中基集的每个 5 元子集都恰好包含在该族的一个成员中。稍微滥用一下记号，将超平面族与该系统相同的拟阵也记作 $S(5,6,12)$。

引理 6. *$S(5,6,12)$ 是 SBRO。*

证明。 作为证明的准备，我们讨论 $S(5,6,12)$ 的一些子式在域 $GF(3)$ 上的表示。我们用 $a_1,\ldots,a_n$ 表示一个 $r\times n$ 矩阵 A 的列，并用 $M[A]$ 表示由 A 在域 $GF(3)$ 上表示的拟阵。证明中的所有计算均在域 $GF(3)$ 上进行。

Oxley [34] (另见 [33, 第 658] 页) 给出了 $S(5,6,12)$ 的如下 $GF(3)$-表示：

$$S:=\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0&0&1&0&1&-1&-1&1\\0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&0&0&1&-1&1&0&1&-1\\0&0&0&0&1&0&1&-1&-1&1&0&1\\0&0&0&0&0&1&1&1&-1&-1&1&0\end{array}\right].$$

表示拟阵 $M[S]/s_6\backslash s_{12}$ 的矩阵 T 可以通过删除 S 的第 6 列、第 12 列和第 6 行得到（参见 [33, 命题 3.2。6]）：

$$T:=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\0&1&0&0&0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&0&0&1&1&0&1&-1\\0&0&0&1&0&1&-1&1&0&1\\0&0&0&0&1&1&-1&-1&1&0\end{array}\right].$$

不过，使用下面的矩阵会更加方便：

$$T' \coloneqq \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$M[T]$ 拟阵与 $M[T']$ 同构。事实上，从左侧乘以任意 5×5 可逆矩阵 T 不会改变 $M[T]$。特别地，由其表示的拟阵

$$\left[\begin{array}{ccccc} t'_4 & t'_2 & t'_1 & t'_3 & t'_6 \end{array}\right] \cdot T = \left[\begin{array}{ccccccccc} t'_4 & t'_2 & t'_1 & t'_3 & t'_6 & -t'_7 & t'_5 & -t'_8 & -t'_{10} & -t'_9 \end{array}\right]$$

为 $M[T]$，而它与 $M[T']$同构。最后，不难验证 $M[T']/t'_5 \backslash t'_{10}$由下式表示：

$$P \coloneqq \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

除了这些矩阵表示外，我们还依赖于拟阵 S（5，6，12）的若干性质，该拟阵见于 [33, 第 658]页。

下面开始证明引理，即证明（SBRO）对 S（5，6，12）成立。该性质等价于以下命题：对于 $M[S]$ 的每一对基 A、B，拟阵 N 存在一对不相交基 A'、B'：$= M/$（$A \cap B$）$\setminus$（$E \setminus$（$A \cap B$））， 以及一个双射φ： $A' \to B'$，使得对于每个 $X \subseteq A$，$(A' \setminus X) \cup \varphi$（$X$）是 N的基。我们根据 $A \cap B$的大小区分若干种情形。

如果 $|A \cap B| \geq 3$，那么 N的秩至多为三。在这种情形下， N是强基可排序的，因为S(5，6，12) 包含 $M(K_4)$ 作为 minor，而秩至多为三的 $M(K_4)$-无 minor 拟阵是强基可排序的。

如果 $|A \cap B| = 2$，那么我们利用这样一个事实：从 S(5，6，12) 中删除两个元素并收缩两个元素所得的拟阵在同构意义下唯一[2]，，这可由 S(5，6，12) 的自同构群是 5-传递的推出。因此，N与 $M[P]$同构。令 $A_1 \coloneqq \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $B_1 \coloneqq \{p_5, p_6, p_7, p_8\}$ 和 φ_1: $A_1 \to B_1$, $\varphi_1(p_i) = p_{i+4}$，其中 i =1，…，4，不难验证，对于每个 $X \subseteq A_1$，$(A_1 \setminus X) \cup \varphi_1(X)$ 都是 $M[P]$ 的一个基。

若 $|A \cap B| = 1$，则根据与前一情形类似的推理， $N$is 同构于 $M[T']$。令 $A_2 \coloneqq \{t'_1, \ldots, t'_5\}$, $B_2 \coloneqq \{t'_6, \ldots, t'_{10}\}$，以及 φ_2: $A_2 \to B_2$，$\varphi_2(t'_i) = t'_{i+5}$，其中 $i = 1$，…，5。我们声称，对于每个 $X \subseteq A_2$，$(A_2 \setminus X) \cup \varphi_2(X)$ 都是 $M[T']$ 的一个基。若 $t'_5 \notin X$，则这可由以下事实推出：对于每个 $Z \subseteq A_2 - t'_5$，$((A_2 - t'_5) \setminus Z) \cup \varphi_2(Z)$ 都是 $M[T']/t'_5 \backslash t'_{10}$ 的一个基；这一点我们已在前一情形中看到。若 $t'_5 \in X$，则我们需要证明，对于每个 $Z \subseteq A' - t'_5$，$((A_2 - t'_5) \setminus Z) \cup \varphi_2(Z)$ 都是 $M[T']/t'_{10} \backslash t'_5$ 的一个基。通过对第 5 行第 10 个元素进行枢轴变换，删除第 5 列和第 10 列，并删除第 5 行，我们从 T' 得到如下表示 $M[T']/t'_{10} \backslash t'_5$ 的矩阵 P'：

$$P' \coloneqq \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

[2]注意，所讨论的拟阵是指 P_8 中的 [33]。

我们需要证明，对于 $i = 1, \ldots, 4$，若 $A_3 := \{p'_1, p'_2, p'_3, p'_4\}$，$B_3 := \{p'_5, p'_6, p'_7, p'_8\}$，且 φ_3: $A_3 \to B_3$，$\varphi_3(p'_i) = \varphi_3(p'_{i+4})$，则对于每个 $Z \subseteq A_3$，集合 $(A_3 \setminus Z) \cup \varphi_3(Z)$ 都是 $M[P']$ 的一个基。由于

$$\begin{bmatrix} p_5 & p_6 & p_3 & -p_8 \end{bmatrix} \cdot P' = \begin{bmatrix} p_5 & p_6 & p_3 & -p_8 & p_1 & p_2 & p_7 & -p_4 \end{bmatrix}$$

表示与 P' 相同的拟阵，函数 $f: (p'_1, \ldots, p'_8) \mapsto (p_5, p_6, p_3, p_8, p_1, p_2, p_7, p_4)$ 是从 $M[P']$ 到 $M[P]$ 的一个同构。由于对于 $i = 1, \ldots, 4$, f, $f(\{p'_i, p'_{i+4}\}) = \{p_i, p_{i+4}\}$，因此它将族 $\{(A_3 \setminus Z) \cup \varphi_3(Z) \mid Z \subseteq A_3\}$ 映射到 $\{(A_1 \setminus X) \cup \varphi_1(X) \mid X \subseteq A_1\}$。既然我们已经看到后一个族的每个成员都是 $M[P]$ 的一个基，那么形如 $(A_3 \setminus Z) \cup \varphi_3(Z)$ 的每个集合都是 $M[P']$ 的一个基。

最后，考虑情形 $A \cap B = \emptyset$。由于拟阵 $M[S]/s_6 \backslash s_{12} = M[T]$ 和 $M[T']$ 同构，存在一对 A_4, B_4 以及一个双射 φ_4: $A_4 \to B_4$，使得对每个 $X \subseteq A_4$，$(A_4 \setminus X) \cup \varphi_4(X)$ 都是 $M[S]/s_6 \backslash s_{12}$ 的一个基。将 φ_4 扩展为双射 $\hat{}\varphi_4$: $A_4 + s_6 \to B_4 + s_{12}$，令 $\hat{}\varphi_4(s_6) = s_{12}$。我们声称，对每个 $X \subseteq A_4 + s_6$，$((A_4 + s_6) \setminus X) \cup \hat{}\varphi_4(X)$ 都是 $M[S]$ 的一个基。若 $s_6 \notin X$，则由 $(A_4 \setminus X) \cup \varphi_4(X)$ 是一个基可知结论成立。若 $s_6 \in X$，则利用 $(X - s_6) \cup \varphi_4((A_4 + s_6) \setminus X)$ 是 $M[S]/s_6 \backslash s_{12}$ 的一个基，因此$X \cup \varphi_4((A_4 + s_6) \setminus X)$ 是 $M[S]$的一个基。这意味着其补集 $((A_4 + s_6) \setminus X) \cup \varphi_4(X)$ 也是一个基，因为已知 $M[S]$ 是恒等自对偶的。 □

定理 7. 拟阵 $M(K_4)$ 和 J 是 *SBRO* 的排除 *minor*。此外，

(a) 二元拟阵是 *SBRO*，当且仅当它不包含 $M(K_4)$ 作为 *minor*；*(b)* 三元拟阵是 *SBRO*，当且仅当它不包含 $M(K_4)$ 或 J 作为 *minor*。

证明。 首先，我们证明 $M(K_4)$ 和 J 均不是 SBRO。根据定理 5，这可由以下事实推出：每个$M_1 \in \{M(K_4)\ J\}$都是 2-可覆盖的，并且存在一个定义在相同基集上的 2-可覆盖分划拟阵 M_2，使得 $\beta(M_1 \cap M_2) = 3$。事实上，对于 $M_1 = M(K_4)$，定义 M_2 的三个分划类是 K_4 中大小为二的匹配，见 [35]。对于 $M_1 = J$，该结论由备注 2得出。

$M(K_4)$-minor-free 二元拟阵是 SBRO，因为它们恰好是串并联图的图拟阵 [12]，而这些图拟阵是强基可排序的，另见 [37]。由于 $M(K_4)$ 不是 SBRO，因此 $M(K_4)$ 是 SBRO 唯一的二元排除 minor。

最后，我们证明，若 M 是一个不同于 $M(K_4)$ 的 SBRO 三元排除 minor，则 M 同构于 J。由定理 3 可知，SBRO 对直和和 2-和封闭，因此 M 是 3-连通的。Oxley [34] 证明，若一个 3-连通三元拟阵不含 $M(K_4)$-minor，则它同构于某个秩为 r 的涡轮拟阵 $\mathcal{W}^r$ （其中 $r \geq 2$），或同构于 J，或同构于拟阵 $S(5, 6, 12)$ 的一个 minor。由于 $\mathcal{W}^r$ 是横截拟阵，因此它是强基可排序的。根据引理 6， $S(5, 6, 12)$ 是 SBRO。因此， M 同构于 J。由于 J 不是 SBRO，且不含 $M(K_4)$ 作为 minor，因此，除 $M(K_4)$ 外， J 是 SBRO 唯一的三元排除 minor。

□

由于 $M(K_4)$ 是唯一的二元排除 minor，而 $M(K_4)$ 和 J是基可排序性的唯一三元排除 minor， [34],定理7 立即推出以下结论。

推论 8。 一个二元或三元拟阵是 *SBRO*，当且仅当它是基可排序的。

考虑一个拟阵 $M = (E, \mathcal{C})$，其基集为 E，回路集为 $\mathcal{C}$。此外，假设 $G = (E, F)$ 是一个图，其顶点集为 E，边集为 F。对于子集 $X \subseteq E$，令 $\mathcal{C}[X]$ 表示 M 中包含于 X 的回路集，即 $\mathcal{C}[X] := \{C \in \mathcal{C} \mid C \subseteq X\}$；令 $F[X]$ 表示由 X 诱导的 G 的边集。若 G **覆盖** 回路子集 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$，则对每个 $C \in \mathcal{C}'$，都有 $F[C] \neq \emptyset$。换言之， G 中的 E 的每个稳定子集都不包含来自 $\mathcal{C}'$ 的回路。

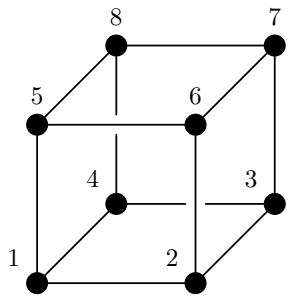

图 2：秩 4 拟阵 $AG(3,\ 2)$，其中每个三元素集合都是独立的，而大小为四的依赖集包括立方体的六个面、六个对角平面以及两个扭曲平面 $\{1,3,6,8\}$ 和 $\{2,4,5,7\}$。

现在让我们回到 Davies 和 McDiarmid 提出的开放问题：在定理1中，能否用基可排序性替代强基可排序性。定理5 和推论8 共同表明，当拟阵为三元拟阵时，答案是肯定的；对于二元拟阵，这一点早已为人所知，因为基可排序二元拟阵类与强基可排序二元拟阵类相同。受此观察启发，一个自然的问题是：所有基可排序拟阵是否都是 SBRO？遗憾的是，下面的例子表明并非如此。

注 9。我们构造一个定义在 10 个元素上的秩 5 拟阵 X_{10}，它是基可排序的，但不是 SBRO。回顾二元仿射立方体 $AG(3,\ 2)$ 的构造，见 [33, 第 645]页，其中用到了面、对角平面和扭曲平面，参见图2。我们在基集 X_{10} 上定义$\{1,2,\ldots,8\}\cup\{a,b\}$，使得每个大小为四的集合都是独立的，而大小为五的依赖集族为

$$\mathcal{H}:=\{F\cup\{a\}\mid F \text{ is a face}\}\cup\{F\cup\{b\}\mid F \text{ is a diagonal plane or a twisted plane}\}.$$

根据铺砌拟阵的构造（例如参见 [21, 定理 5.3。5]，X_{10} 是一个秩为 5 的铺砌拟阵，因为对于每个 $|H_1\cap H_2|\leq 3$，$H_1,\ H_2\in\mathcal{H},\ H_1\neq H_2$。不难验证 X_{10}不包含 $M(K_4)$ 作为 minor，因此它是基可排序的，因为不含 $M(K_4)$-minor 的铺砌拟阵都是基可排序的 [11]。

还需证明 X_{10} 不是SBRO。反设 X_{10} 是SBRO，并考虑一对 A、B不相交基，例如 $A=\{1,2,3,5,a\}$ 和 $B=\{4,6,7,8,b\}$。根据（SBRO），存在一对 A'、B'不相交基，以及一个双射 φ：$A'\to B'$，使得（$A'\setminus X$）$\cup\varphi$（X）是 $X\subseteq A'$的一个基；等价地，$P:=\{e\varphi(e)\mid e\in A'\}$ 覆盖 X_{10}的每个回路。于是，我们定义双射$\hat{}\varphi$：$A'\cup B'\to A'\cup B'$，令$\hat{}\varphi(z):=\varphi(z)$（若 $z\in A'$），否则令其为 $\varphi^{-1}(z)$。

由于 P同时覆盖 $\{1,3,6,8,b\}$ 和 $\{2,4,5,7,b\}$，因此扭曲平面 $\{1,3,6,8\}$和 $\{2,4,5,7\}$ 中至少有一个包含 P的一条边。由对称性，不妨设 $13\in P$。先考虑 $\hat{}\varphi(5)\in\{2,4,6,7,8\}$的情形。注意，$P':=P\setminus\{13,5\,\hat{}\varphi(5)\}$ 覆盖了该族的每个成员

$$\mathcal{H}':=\{H\setminus\{1,3,5,\hat{\varphi}(5)\}\mid H'\in\mathcal{H},|H'\cap\{1,3\}|=|H'\cap\{5,\hat{\varphi}(5)\}|=1\}.$$

我们声称，$\mathcal{H}'$ 是一个与 $M(K_4)$同构的拟阵的回路族。事实上，

$$\mathcal{H}'=\begin{cases}\{\{4,8,a\},\{4,6,b\},\{6,7,a\},\{7,8,b\}\} & \text{if } \hat{\varphi}(5)=2,\\ \{\{2,7,a\},\{2,8,b\},\{4,7,b\},\{4,8,a\}\} & \text{if } \hat{\varphi}(5)=6,\\ \{\{2,6,a\},\{2,8,b\},\{4,6,b\},\{4,8,a\}\} & \text{if } \hat{\varphi}(5)=7,\end{cases}$$

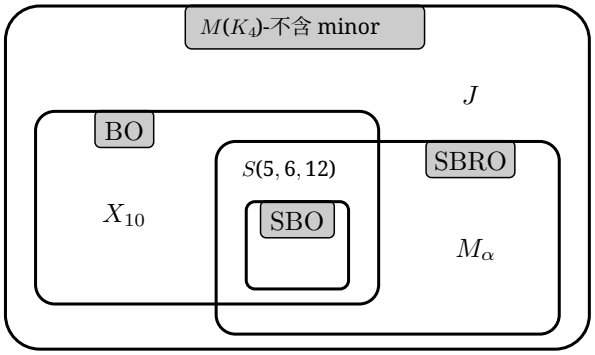

图3：第 2 节讨论的拟阵类之间的包含关系，其中的示例展示了严格包含关系。

而情形$\hat{}\varphi(5) = 4$和$\hat{}\varphi(5) = 8$分别与情形$\hat{}\varphi(5) = 2$和$\hat{}\varphi(5) = 6$对称。这就产生了矛盾，因为$M(K_4)$的回路无法被一个匹配覆盖。

我们证明了$\hat{}\varphi(5) \in \{a, b\}$，因此由对称性可知，$\hat{}\varphi(7) \in \{a, b\}$也成立。我们可以假设$\hat{}\varphi(5) = a$且$\hat{}\varphi(7) = b$。由于$P$覆盖了$\{3, 4, 7, 8, a\}$、$\{2, 3, 6, 7, a\}$、$\{3, 4, 5, 6, b\}$和$\{2, 3, 5, 8, b\}$中的每一个，$P \setminus \{13, 5a, 7b\}$的两条边覆盖了$\{4, 8\}$、$\{2, 6\}$、$\{4, 6\}$和$\{2, 8\}$中的每一个，这是不可能的，因此导出了矛盾。

图3总结了本节讨论的拟阵类之间的关系。这里，M_α表示在 [11, 第 8] 节中描述的、参数为$r = 5$、$|A| = |D| = 1$和$|B| = |C| = |E| = |F| = 2$的拟阵。也就是说，设$A = \{a\}$、$B = \{b_1, b_2\}$、$C = \{c_1, c_2\}$、$D = \{d\}$、$E = \{e_1, e_2\}$和$F = \{f_1, f_2\}$。那么，$M_\alpha$的非空真循环平坦为$C \cup B \cup E$、$C \cup A \cup D$、$F \cup E \cup A$和$F \cup D \cup B$，其秩分别为$r(C \cup B \cup E) = |C| + |B| = 4$、$r(C \cup A \cup D) = |C| + |A| = 3$、$r(F \cup E \cup A) = |F| + |E| = 4$和$r(F \cup D \cup B) = |F| + |D| = 3$。设$X$和$Y$是$M_\alpha$的任意基。文献 [11] 已证明，$M_\alpha$是强基可排序性的一个禁 minor，因此若$X \cap Y \neq \emptyset$，则对基对$X$、$Y$，甚至（SBO）也成立。另一方面，若$X$和$Y$不相交，则不难验证，双射$\varphi$: $(a, b_1, c_1, e_1, f_1) \mapsto (d, b_2, c_2, e_2, f_2)$满足（SBRO）。

3 放宽双射：用一个 2-因子覆盖回路

本节提出对强基可排序性的另一种放宽方式。为此，我们首先给出性质（SBO）的一种新解释。回忆一下，对于拟阵$M = (E, \mathcal{C})$，若图$G = (E, F)$满足：对于每个$C \in \mathcal{C}'$，都有$F[C] \neq \emptyset$，则称该图覆盖$\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$。使用这一术语，（SBO）等价于：对于强基可排序拟阵$M = (E, \mathcal{C})$的任意一对基A, B，都存在一个图G，它由$A \setminus B$与$B \setminus A$中元素之间的匹配构成，并覆盖$\mathcal{C}[A \cup B]$。类似地，第2节讨论的性质（SBRO）意味着存在一个$A \triangle B$上覆盖$\mathcal{C}[A \cup B]$的匹配。请注意这两个定义之间细微却关键的区别：前者要求匹配边连接A和B中的元素，而后者允许任意匹配边的两个端点落在同一集合中，即A或B。

我们猜想，对于任意拟阵也存在类似的结论：其中G是一个 2-正则图或路径，而非匹配；若图中每个顶点的度恰好为二，则称其为 **2-正则**。更准确地说，我们提出了四种强度各异的松弛，并称拟阵$M = (E, \mathcal{C})$具有性质

(R)　　if: 对于任意一对基A, B，存在一个覆盖$\mathcal{C}[A \cup B]$的$A \triangle B$上的 2-正则图　　],

(R+)：对于任意一对基 A, B，存在一个由在 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 之间交替的环组成并覆盖 $\mathcal{C}[A \cup B]$ 的 2-正则图；(P)：对于任意一对基 A, B，存在一条覆盖 $\mathcal{C}[A \cup B]$ 的 $A \triangle B$ 上的路径；(P+)：对于任意一对基 A, B，存在一条在 $A \setminus B$ 和$B \setminus A$ 之间交替并覆盖 $\mathcal{C}[A \cup B]$ 的路径。

在所有情形中，相关图覆盖 $\mathcal{C}[A \cup B]$ 这一条件，等价于要求 $A \cap B$ 与图中 $A \triangle B$ 的任意稳定集的并集在 M中独立。

由于任何路径都可以通过在其两个端点之间添加一条边扩展为一个圈，因此性质 (P+) 蕴含其他所有性质，而性质(R) 是其中任一性质的特例。至于性质 (R+) 和 (P)，我们无法证明它们之间存在任何联系。由于 $A \setminus B$与 $B \setminus A$之间的匹配总能扩展为连接它们的交错路径，因此强基可排序拟阵满足 (P+)；类似地推理可知，SBRO拟阵满足 (P)。

3.1 覆盖基本回路

注意，在所有性质 (R) – (P+) 中，用于覆盖相关回路的边数均不超过 $|A \triangle B|$。此时，我们甚至还不清楚为什么这些回路能由少量图边覆盖。为了初步理解一般情形，我们不再覆盖每个回路，而是仅专注于覆盖基本回路。给定拟阵的一个基 B 以及一个不属于 B的元素 a，我们用 $C_B(a)$ 表示 a 相对于 B的基本回路，也就是 $B+a$中的唯一回路。我们也将此记法推广到集合：对于与 B 不相交的集合 X，记作 $\mathcal{C}_B(X) := \{C_B(x) \mid x \in X\}$。

定理 10. 设 A、B 是拟阵 M 的基。

(a) 存在一个 2-正则图，由在 $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 之间交替出现的环组成，并覆盖 $\mathcal{C}_A(B) \cup \mathcal{C}_B(A)$。*(b)* 存在一棵树，由 $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 之间的边组成，并覆盖 $\mathcal{C}_A(B) \cup \mathcal{C}_B(A)$。

证明。基交换公理意味着存在一个双射 φ_A: $A \setminus B \to B \setminus A$，使得对每个 $a \in A \setminus B$，$A - a + \varphi_A(a)$ 都是一个基，或者等价地，$a \in C_A(\varphi_A(a))$（例如参见 [21, 定理 5.3.4]）。类似地，存在一个双射 φ_B: $B \setminus A \to A \setminus B$，使得对每个 $b \in B \setminus A$，$B - b + \varphi_B(b)$ 都是一个基，或者等价地，$b \in C_B(\varphi_B(b))$。因此，由边 $\{a\varphi_A(a) \mid a \in A \setminus B\} \cup \{b\varphi_B(b) \mid b \in B \setminus A\}$ 构成的图是一个覆盖 $\mathcal{C}_A(B) \cup \mathcal{C}_B(A)$ 的 2-正则图，从而证明了 (a)。

根据对称交换公理，存在一个映射——不一定是双射——ϕ_A: $A \setminus B \to B \setminus A$，使得对于每个 $a \in A \setminus B$，$A - a + \phi_A(a)$ 和 $B + a - \phi_A(a)$ 都是基；等价地，边 $a\phi_A(a)$ 同时覆盖 $C_A(\phi_A(a))$ 和 $C_B(a)$。类似地，存在一个映射 ϕ_B: $B \setminus A \to A \setminus B$，使得对于每个$b \in B \setminus A$，$B - b + \phi_B(b)$ 和 $A + b - \phi_B(b)$ 都是基；等价地，边 $b\phi_B(b)$ 同时覆盖 $C_B(\phi_B(b))$ 和 $C_A(b)$。考虑由边 $\{a\phi_A(a) \mid a \in A \setminus B\} \cup \{b\phi_B(b) \mid b \in B \setminus A\}$ 构成的图。注意，该图可能不是连通的，但其中 $A \triangle B$ 的每个顶点的度至少为一。因此，该图中的任意最大森林都覆盖 $\mathcal{C}_A(B) \cup \mathcal{C}_B(A)$。由于添加连接各连通分量的边，将森林扩展为树时仍能保持这一性质，故 (b) 得证。 □

定理 10 表明，与该基对对应的基本回路可以由一个 2-正则图覆盖。然而，当要求该图为一条路径时，同样的问题仍未解决，而这个看似简单的任务实际上已经显示出高度的非平凡性。定理 (b) 部分的实质在于：覆盖总是可以由一棵树来实现，而不必是一条路径。

3.2 图拟阵、铺砌拟阵与尖峰拟阵

我们无法找到任何一个使 (P+) 失效的拟阵，因此提出以下可能过于乐观的猜想。

猜想 2. 设 A, B 是拟阵 M 的基。那么存在一条在 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 之间交替、并覆盖 $\mathcal{C}[A \cup B]$ 的路径。

为在一定程度上验证这一猜想，我们证明该命题对图拟阵、铺砌拟阵和尖峰拟阵均成立。我们先给出一个技术性引理。

引理 11. 设 $\mathcal{M}$ 是一个小拟阵封闭拟阵类，且 $(X) \in \{(R), (R+), (P), (P+)\}$。要验证 (X) 对每个 $M \in \mathcal{M}$均成立，只需证明当基集是 A 与 B的不相交并时，该性质成立。

证明。设 A 和 B 是拟阵 $M = (E, \mathcal{C})$ 的基，其中 $M \in \mathcal{M}$。若 $A \cap B \neq \emptyset$ 或 $A \cup B \neq E$，则定义 $A' := A \setminus B$, $B' := B \setminus A$, $E' := A' \cup B'$，并令 $M' = (E', \mathcal{C}')$ 表示从 M 删除 $E \setminus (A \cup B)$ 并收缩 $A \cap B$ 所得到的拟阵。注意，A' 和 B' 是 M' 的不相交基，其并为 E'。此外，对任意回路 $C \in \mathcal{C}[A \cup B]$，都存在一个回路 $C' \in \mathcal{C}'[A' \cup B']$，使得 $C' \subseteq C$。因此，在 M' 中证明 A', B' 这一对满足 (X) 的任何图，也能证明在 M 中 A, B 这一对满足 (X)。 □

借助引理 11，我们先验证图拟阵情形。或许会令人困惑的是，(P+)断言存在某条路径，而我们讨论的又是图。因此我们强调，这条路径定义在基集的元素上，也就是说，定义在底层图的边上；从任何意义上说，它都不是图本身中的路径。

定理 12. 图拟阵具有性质 *(P+)*。

证明。设 $G = (V, E)$ 是一个图，其图拟阵为 $M(G)$。我们对 $|E|$ 归纳证明该定理。注意，当 (P+) 显然成立。取一对基 A, B。由于图拟阵类在取子式时封闭，引理11适用，因此我们不妨假设 E 是 A 与 B的不交并。此外，我们还可以假设 G 是连通的；否则，我们可以在每个连通分量中选取一个顶点，并将这些顶点识别为同一个顶点，从而得到一个连通图，其图拟阵与原图相同。

由上述结论可得 $|E| = |A| + |B| = 2(|V| - 1)$，因此 G 有一个度数至多为三的顶点 v。若 v 的度数为二，则 G 有一条边 $a \in A$，以及一条与 v相 incident 的边 $b \in B$。由于 $G' := G - v$是互不相交的生成树 $A - a$和 $B - b$的并，根据归纳假设，存在一条路径 P'覆盖 $M(G')$ 的回路。由于 G 中经过v的每个圈都包含边 a和 b，在 $P' \cup \{ab\}$ 中添加一条连接 a与 B 中 P'的端点的额外边，可得到一条连接 A 和 B 、覆盖 $M(G)$ 的交错路径。

如果 v 的度为三，则不妨设边 a_1、$a_2 \in A$ 和 $b \in B$ 均与 v关联。考虑通过收缩 a_2 并删除 b得到的图 G'，令 A' 表示通过在 A 中收缩 a_2得到的 G' 的生成树，并定义 $B' := B - b$。根据归纳假设，存在一条在 A'和 B'之间交替的路径 P'，它覆盖 $M(G')$ 的回路。令 c为 P'中 a_1的一个邻点，并考虑路径 $P := (P' - a_1c) \cup \{a_1b, ba_2, a_2c\}$。我们声称，$P$ 覆盖 $M(G)$ 的每一个回路 C。如果 C 对应于 G 中不经过 v的一个圈，那么它也是 $M(G')$ 的一个回路，因此由 $P' - a_1c$ 覆盖。如果 $b \in C$，那么 $a_1 \in C$ 或 $a_2 \in C$，因此 C 由 a_1b 或 ba_2覆盖。唯一剩下的情形是 a_1、$a_2 \in C$。令 C' 表示在 C中收缩 a_2 所得的 G' 的圈。那么 C'由 P'的一条边覆盖。如果 $c \notin C$，那么这也是 $P' - a_1c$ 的一条边；否则 C 由边 a_2c 覆盖。这证明了 P 覆盖 $M(G)$ 的所有回路。 □

注释13。 {v?}(P+) 中的路径定义在图的边上，这一事实可能会令人困惑，因此我们使用图论术语重新表述定理 12 ，因为这可能具有独立的组合学意义。该定理等价于以下结论：对于任何一个由两棵生成树的并构成的图 A 和 B，都可以按照某种方式排列其边，使得 A 和 B 中的元素交替出现，并且 G 的每个圈都包含两个相邻元素。

秩为r 的拟阵称为**铺砌拟阵**，如果每个大小至多为 $r-1$ 的集合都是独立的；换言之，每个回路的大小为 r 或 $r+1$。

定理 14. 铺砌拟阵具有性质 *(P+)*。

证明。 我们对 $|E|$进行归纳，以证明该定理。注意，当 (P+) 显然成立。取一对基 $E=\emptyset$和 A, B。由于图拟阵类在取子式时封闭，引理 11 适用，因此不妨设 E 是 A 与 B的不交并。

设 $a_r \in A$ 和 $b_r \in B$ 满足 $A-a_r+b_r$ 是一个基。那么， $A-a_r$ 和 $B-b_r$ 是铺砌拟阵 M' 的基，其中 M' 由 M 收缩 b_r 并删除 a_r得到。根据归纳假设，存在 $A-a_r$的排列 $a_1,\ldots,a_{r-1}$以及 $B-b_r$的排列 $b_1,\ldots,b_{r-1}$，使得路径 $P'=a_1,b_1,\ldots,a_{r-1},b_{r-1}$覆盖 M'的所有回路。我们断言，路径$P=a_1,b_1,\ldots,a_r,b_r$覆盖 M的每个回路。由于 M是铺砌拟阵，我们只需考虑大小为 r的回路 C，因为大小为 $r+1$的回路显然都已被覆盖。若 $a_r \notin C$，则 $C-b_r$包含 M'的一个回路，而该回路被 P'覆盖。若 $a_r \in C$，则 C被 P覆盖，因为 A是唯一一个包含 a_r且大小为 r 的稳定集。因此，P 覆盖 M的每个回路。 □

秩为r 的**尖峰拟阵**，其**尖端** 为 t，**腿** 为 $\{t,x_1,y_1\}$、……、$\{t,x_r,y_r\}$，是基集为 $E=\{t,x_1,y_1,\ldots,x_r,y_r\}$ 的秩为r 的拟阵，其中每条腿都是回路，并且对于 $1\le k\le r-1$，任意 k 条腿的并集的秩为 $k+1$。等价地，尖峰拟阵的非生成回路族由各条腿、所有形如 $\{x_i,y_i,x_j,y_j\}$ 且满足 $1\le i<j\le r$的集合，以及一个子集$\mathcal{H}\subseteq\{Z\subseteq E\mid |Z|=r,\ |Z\cap\{x_i,y_i\}|=1$（当 $i=1$、…… …、 $r\}$时）组成，其中 $\mathcal{H}$ 中的任意两个成员的交集大小至多为 $r-2$。

定理 15。 尖峰拟阵具有性质 *(P+)* 。

证明。 设 M 是如上所定义的尖峰拟阵。注意，集合 $Z\subseteq E$ 是基，当且仅当满足以下条件之一。

1. 对某个指标 $1\le\ell\le r$， $t\in Z$、 $\{x_\ell,y_\ell\}\cap Z=\emptyset$，且对所有 $i\in\{1,\ldots,r\}\setminus\{\ell\}$, $|\{x_i,y_i\}\cap Z|=1$。 2. $t\notin Z$，并且存在不同的指标 k 和 ℓ，使得 $\{x_k,y_k\}\subseteq Z$、$\{x_\ell,y_\ell\}\cap Z=\emptyset$，且对所有 $i\in\{1,\ldots,r\}\setminus\{k,\ell\}$, $|\{x_i,y_i\}\cap Z|=1$。 3. $t\notin Z$，对所有 $1\le i\le r$， $|\{x_i,y_i\}\cap Z|=1$，且 $Z\notin\mathcal{H}$。

我们通过对 r 进行归纳法，证明 A、B 的每一对基 M 都具有 (P+) 所要求的性质。显然，当 $r\le 2$时，该命题成立，因此我们假设 $r\ge 3$。

首先考虑 $A\cap B\neq\emptyset$ 的情形。若 $t\in A\cap B$，则对拟阵 M/t 的基对 $A-t$、$B-t$ 应用 (P+)，即可得出结论。注意， M/t 是层状拟阵，因此也是强基可排序拟阵，其基族为：对所有 $1\le i\le r\}$, $\{Z\subseteq E-t\mid |Z|=r-1,|\{x_i,y_i\}\cap Z|=1$。若 $t\notin A\cap B$，则不妨设 $x_r\in A\cap B$。若 $t\notin A\cup B$，则对拟阵 $M/x_r\backslash t$ 的基对 $A-x_r$、$B-x_r$ 应用归纳假设，即可得出结论；该拟阵是一个尖端为 y_r、腿为 $\{x_1,y_1\}$、……、$\{x_{r-1},y_{r-1}\}$ 的尖峰拟阵。同理，若 $y_r\notin A\cup B$，则可对 $M/x_r\backslash y_r$ 的基对 $A-x_r$、$B-x_r$ 应用归纳假设；$M/x_r\backslash y_r$ 是一个尖端为 t、腿为 $\{x_1,y_1\}$、……、$\{x_{r-1},y_{r-1}\}$ 的尖峰拟阵。剩下需要考虑的是 $t\in A\triangle B$、 $x_r\in A\cap B$ 和 $y_r\in A\cup B$ 的情形，此时不妨设 $t\in A\setminus B$，并且

$y_r \in B \setminus A$。由于 z 和 y_r 在 M/x_r 中平行，拟阵 $M/\{x_r,t\}\backslash\{y_r\}$ 和 $M/\{y_r,x_r\}\backslash\{t\}$ 相同。将这个拟阵记为 M' ——注意， M' 是强基可排序的，因为它是层状拟阵 M/t 的 minor。设 P' 是对 M' 的基 $A-x_r-t$ 和 $B-x_r-y_r$ 应用 (P+) 得到的一条路径。那么，对于 M 中的基对 A、B， $P'+y_rt$ 满足 (P+) 的要求，因为 M' 的任意独立集与 $\{x_r,t\}$ 或 $\{x_r,y_r\}$ 中任一个的并集，都是 M 中的独立集。

在剩下的情形中 $A\cap B=\emptyset$。先假设 $t\in A\cup B$。我们可以假设 $A=\{t,x_1,\ldots,x_{r-1}\}$，并且 $B=\{y_2,\ldots,y_r,x_r\}$ 或 $B=\{y_1,\ldots,y_r\}$。若 $B=\{y_2,\ldots,y_r,x_r\}$，则在 A 与 B 之间交替的路径 $P=x_2,y_2,\ldots,x_{r-1},y_{r-1},t,x_r,x_1,y_r$ 覆盖 $M\backslash y_1$ 的每个回路。事实上，对于每个 $2\le i\le r-1$，它覆盖腿 $\{t,x_r,y_r\}$，并且不存在满足 $|\{x_1,y_1\}\cap Z|=\cdots=|\{x_r,y_r\}\cap Z|=1$ 的稳定集 Z。若 $B=\{y_1,\ldots,y_r\}$，则路径 $P=t,y_r,x_1,y_1,\ldots,x_{r-1},y_{r-1}$ 覆盖 $M\backslash x_r$ 的每个回路。事实上，对于每个 $1\le i\le r-1$ 都有 $x_iy_i\in P$，而 P 中唯一满足 $|\{x_1,y_1\}\cap Z|=\cdots=|\{x_r,y_r\}\cap Z|=1$ 的稳定集 Z 是基 $Z=\{y_1,\ldots,y_r\}=B$。

剩下需要考虑满足 $A\cap B=\emptyset$ 和 $A\cup B=E-t$ 的情形。若 A 包含一对 $\{x_i,y_i\}$，则可假设 $A=\{x_1,y_1,x_3,x_4,\ldots,x_r\}$ 和 $B=\{x_2,y_2,y_3,y_4,\ldots,y_r\}$。考虑路径 $P_1=x_1$、y_2、y_1、x_2、x_3、y_3、……、x_r、y_r 以及 $P_2=x_1$、x_2、y_1、y_2、x_3、y_3、……、x_r、y_r。P_1 和 P_2 都覆盖形如 $\{x_i,y_i,x_j,y_j\}$（其中 $1\le i<j\le r$）的回路，因为它们都包含边 x_3y_3、……、x_ry_r，并覆盖 $\{x_1,y_1,x_2,y_2\}$。唯一满足 $|\{x_1,y_1\}\cap Z|=$ 的集合是 Z

$\cdots=|\{x_r,y_r\}\cap Z|=1$ 它是 P_1 或 P_2 的稳定集，分别为 $Z_1=\{x_1,x_2,y_3,y_4,\ldots,y_r\}$ 和 $Z_2=\{x_1,y_2,y_3,\ldots,y_r\}$。由于 $|Z_1\cap Z_2|=r-1$， Z_1 和 Z_2 中至少有一个不属于 $\mathcal{H}$，因此 P_1 和 P_2 中至少有一个覆盖 $M\backslash t$ 的每个回路。

在唯一剩下的情形中，我们可以假设 $A=\{x_1,\ldots,x_r\}$ 和 $B=\{y_1,\ldots,y_r\}$。我们声称，路径 $P=y_r$， x_1，y_1，……，x_{r-1}，y_{r-1}，x_r 覆盖 $M\backslash t$ 的每个回路。事实上，对每个 $1\le i\le r-1$ 都有 $x_iy_i\in P$，而 P 中满足 $|\{x_1,y_1\}\cap Z|=\cdots=|\{x_r,y_r\}\cap Z|=1$ 的唯一稳定集 Z 是基 $Z=\{x_1,\ldots,x_r\}=A$ 和 $Z=\{y_1,\ldots,y_r\}=B$。

□

3.3 覆盖问题的应用

受 Du、Hsu 和 Hwang 的一个猜想启发， [15], Erd˝os [18] 推广了所谓的圈加三角形问题：该问题询问，每个由一个哈密顿圈和若干两两点不交三角形构成边不交并的 4-正则图是否可3着色。Fleischner 和 Stiebitz [19] 肯定地回答了这个问题。在过去几十年里，他们的工作之后又出现了一系列研究相关问题的论文，概述如下。

定理 16。（Fleischner 和 Stiebitz、McDonald 和 Puleo、Haxell）

(a) 如果图 G 是一个哈密顿圈与若干两两点不交三角形的边不交并，那么 G 可*3*着色。*(b)* 如果 $k\ge 4$，且图 G 是一个哈密顿圈与若干两两点不交的完全子图的边不交并，其中每个完全子图至多有 k 个顶点，那么 G 是 k-可着色的。*(c)* 如果 $k\ge 4$，且图 G 是一个 *2*-正则二部图与若干两两不交的团的边不交并，其中每个团至多有 k 个顶点，那么 G 是 k-可着色的。*(d)* 如果 $k\ge 5$，且图 G 是一个 *2*-正则图与若干两两点不交的完全子图的边不交并，其中每个完全子图至多有 k 个顶点，那么 G 是 k-可着色的。

命题 (b) 由 Fleischner 和 Stiebitz 证明 [20]。McDonald 和 Puleo [32] 验证了 $k\ge 4$：如果一个图可以分解为若干个恰有 k 个顶点的团以及一个至多含有一个长度超过三的奇圈的 2-正则图，那么它是 k-可着色的。这蕴含命题 (c)，因为我们可以通过添加额外顶点，将顶点数少于 k 个的团扩充，并为二分 2-正则

图添加额外顶点和边，以确保每个团恰有 k 个顶点。最后，命题 (d) 由 Haxell 的结果得出 [23]：如果一个图可以分解为若干个含有 k-个顶点的团以及一个图 k，且 H 满足 $k \geq 3\Delta(H) - 1$，那么该图是 (b) 和 (c) 不适用于 $k = 3$，而命题 (d) 是否适用于 $k = 4$仍未解决。

定理17。令 $M_1 = (E、\mathcal{I}_1)$ 为一个 *2*-可覆盖拟阵，令 $M_2 = (E、\mathcal{I}_2)$ 为一个 k-可覆盖的分划拟阵。

(a) 若 $k \geq 3$ 和 M_1 满足 *(P)*，则 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq k$。*(b)* 若 $k \geq 4$ 和 M_1 满足 *(R+)*，则 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq k$。*(c)* 若 $k \geq 5$ 和 M_1 满足 *(R)*，则 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq k$。

证明。为证明 (a)，令 $E = A \cup B$ 为将 M_1 分解为两个基的一个分解，令 P 为覆盖 M_1的回路的 $A \triangle B$ 上的一条路径。令 E_1、……、E_q 表示 M_2 的分划类，并令Q 表示如下图：对 $i = 1$、……、q，取 E_i 上的完全图之并所得的图。我们断言，图 $G := P \cup Q$ 是 k-可着色的。事实上，若 $k = 3$，则 G 是定理 16(a)中出现的某个图的子图；而对于 $k \geq 4$，在 G 中连接 P的两个端顶点添加一条额外的边后，即可应用定理 16(b)。由于 P 的每个稳定集在 M_1 中都是独立的，且 Q 的每个稳定集在 M_2中都是独立的，因此 G 的 k-可着色性意味着 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq k$。

部分(b) 和(c) 可以用定理16(c)和(d)分别以类似方式证明。 □

迄今讨论的结果所带来的主要推论之一，是我们证实了猜想1对先前尚未解决的情形成立。

推论18。猜想*1* 成立，若 M_1 是图拟阵、铺砌拟阵或尖峰拟阵，且 $\beta(M_1) = 2$，并且 M_2 是分划拟阵。

证明。对于 $\beta(M_2) \leq 2$，该猜想已在 [4]中得到解决。对于 $\beta(M_2) \geq 3$，结合定理12–15 和定理17(a)即可推出该结论。 □

Kotlar和Ziv [29] 将拟阵 M 的元素 e 定义为（$k+1$）-张成的，当且仅当存在 $k+1$ 个两两不相交的集合，使得 e 在 M中被每个集合张成。该条件等价于存在 k 个两两不相交且不含 e 、但张成它的集合，因为其中一个集合可以取为 $\{e\}$。如果一个拟阵不含任何（$k+1$）-张成的元素，那么不难证明它是 k-可覆盖的。Kotlar和Ziv猜想，如果 M_1 或 M_2中没有元素是（$k+1$）-张成的，那么 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq k$。他们证实了这一猜想在 $k = 2$ 或基集分别在 M_1 和 M_2中分解为 k 个基时成立。接下来，我们将展示如何把不存在（$k+1$）-张成元素这一条件与(R)或(P)结合起来。

定理 19. 设 $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ 是一个 *2*-可覆盖拟阵，而 $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ 是一个不含由$(k+1)$张成的元素的拟阵。

(a) 若 M_1 满足 *(P)*，则 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq k+1$。

(b) 若 M_1 满足 *(R)*，则 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq k+2$。

证明。为证明 (a)，设 $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 满足由排序 $e_1, \ldots, e_n$ 定义的路径的每个稳定集在 M_1 中都是独立的。按照 $e_1, \ldots, e_n$ 的顺序，使用正整数进行贪心着色，使得元素 e_i 获得与 e_{i-1} 的颜色不同的最小颜色 c，且已获得颜色 c 的元素集合在 M_2 中不张成 e_i。此过程得到一种着色，使得每个颜色类在 M_2 中都是独立的，并且构成该路径的一个稳定集，因此在 M_1 中也独立。由于 M_2 不含由 $(k+1)$ 张成的元素，所用颜色数至多为 $k+1$。这证明了 $\beta(M_1 \cap M_2) \leq k+1$。

命题 （b）可通过类似的贪心论证得出。 □

Aharoni 和 Berger [3] 将图 G 定义为**拟阵 k-可着色的**，如果对于每个 k-可覆盖拟阵 M，其基集定义在 G的顶点集上，该基集都可以分解为 k 个稳定集，它们是 G 中的独立集 M。以下事实对于拟阵k-可着色图来说不难证明。

引理 20。

(a) 拟阵意义下 k-可着色图的子图也是拟阵意义下 k-可着色的。*(b)* 拟阵意义下 k-可着色的图也是拟阵意义下 $(k+1)$-可着色的。

证明。(a) 的证明显然。为证明 (b)，设 G 是顶点集为 V 的拟阵意义下 k-可着色图，且 M 是定义在 V 上的 $(k+1)$-可覆盖拟阵。设 $V = I_1 \cup \cdots \cup I_{k+1}$ 是将 V 划分为 M 的独立集的一个划分。由于根据 (a)，图 $G[I_1 \cup \ldots I_k]$ 是拟阵意义下 k-可覆盖的，且 $M\backslash I_{k+1}$ 是定义在其顶点集上的 k-可覆盖拟阵，因此存在 G 的稳定集 S_1、.....、S_k，它们在 $M\backslash I_{k+1}$ 中独立，且满足 $S_1 \cup \cdots \cup S_k = I_1 \cup \cdots \cup I_k$。由于根据 (a)，$G[S_2 \cup \cdots \cup S_k \cup I_{k+1}]$ 是拟阵意义下 k-可覆盖的，且 $M\backslash S_1$ 是定义在其顶点集上的 k-可覆盖拟阵，因此存在 G 的稳定集 S'_2、.....、S'_{k+1}，它们在 $M\backslash S_1$ 中独立，且满足 $S'_2 \cup \cdots \cup S'_{k+1} = S_2 \cup \cdots \cup S_k \cup I_{k+1}$。于是，$V = S_1 \cup S'_2 \cup \cdots \cup S'_{k+1}$ 是将 V 划分为 G 的稳定集的一个划分，且这些稳定集在 M 中独立。 □

作为定理 16(a) 的推广，Aharoni 和 Berger [3] 猜想，对于任意 $C_{3\ell}$，圈都可以进行拟阵意义上的 3-着色 $\ell \geq 1$。他们的猜想与引理 20(a)结合后，将推出以下结论。

猜想 3。 每条路径都可以进行拟阵意义上的 *3*-着色。

注记 21。 自然会想到，猜想 1 与3之间是否存在联系。事实证明，当 M_1 是满足 (P) 的 2-可覆盖拟阵时，后者蕴含前者。

事实上，设 P 是顶点集为 E 的一条路径，并且 P 的每个稳定集都是 M_1 中的独立集；再设 $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ 是任意一个 k-可覆盖拟阵。若 $k = 2$，则根据 Aharoni、Berger 和 Ziv [4] 的结果，$\beta(M_1 \cap M_2) \leq 3$ 成立。若 $k \geq 3$ 且猜想 3 成立，则由引理 20(b)，P 可以进行拟阵意义上的 k-着色，因此 E 可以分解为 P 中的 k 个稳定集，这些稳定集都是 M_2 中的独立集。由此可将 E 分解为 M_1 和 M_2 的 k 个公共独立集。

根据上述推理，若猜想 2 和3 成立，那么当 M_1是 2-可覆盖时，便可推出猜想 1。

最后，我们提及一个关于满足 q 条件的拟阵交集的有趣结果(R)。设 $M_1, \ldots, M_q$ 是定义在同一基集上的 2-可覆盖拟阵。一般而言，关于覆盖其基集所需的公共独立集的最小数量 $\beta(M_1 \cap \ldots, \cap M_q)$，我们知之甚少。一个显而易见的上界是各拟阵覆盖数的乘积，即 $\beta(M_1 \cap \cdots \cap M_q) \leq \prod_{i=1}^{q} \beta(M_i) = 2^q$。然而，若每个 M_i 都满足 (R)，则可得到一个强得多的上界。

定理 22. 设 $M_1, \ldots, M_q$ 是满足 *(R)* 的 *2*-可覆盖拟阵。那么 $\beta(M_1 \cap \cdots \cap M_q) \leq 2q + 1$。

证明。 设 G_i 是一个覆盖 $1 \leq i \leq q$ 的 M_i 中回路的 2-正则图。由于图 $G := G_1 \cup \cdots \cup G_q$ 的最大度至多为 $2q$，它可以用 $(2q+1)$ 种颜色着色。由于 G 的每个稳定集在每个 G_i 中都是稳定集，这种着色给出了将拟阵的基集分解为 $2q+1$ 个公共独立集的方法。 □

3.4 交换序列的应用

在研究拟阵中对称交换的结构时，Gabow [22] 提出了一个关于拟阵循环排序的优美猜想。Wiedemann 后来再次提出了这个问题 [38]，Cordovil 和 Moreira 也提出了这一问题 [13]。

猜想 4。 （Gabow）设 A 和 B 是秩为 r 的拟阵 M 的基。那么，分别可以对 A 和 B 的元素进行排序，得到 $(a_1, \ldots, a_r)$ 和 $(b_1, \ldots, b_r)$，使得它们的连接 $(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r)$ 是一个循环排序，其中任意长度为 r 的区间都构成一个基。

容易证明，对于强基可排序拟阵，该陈述成立。除此之外，该猜想已对图拟阵 [13, 26, 38]，稀疏铺砌拟阵 [10]，秩至多为 4 [30] 的 5 [28]，以及分裂拟阵 [7]，和尖峰拟阵 [5] 得到解决。下文将证明，（P+）蕴含该猜想的一个略微弱化版本。

定理 23。设 A 和 B 是满足（P+）的秩为 r 的拟阵 M 的基。那么，分别可以对 A 和 B 的元素进行排序，得到 $(a_1, \ldots, a_r)$ 和 $(b_1, \ldots, b_r)$，使得它们的连接 $(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r)$ 是一个循环排序，其中任意区间 $\{a_i, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_{i-1}\}$ 对于 $i = 1, \ldots, r$ 都构成一个基，并且任意区间 $\{b_i, \ldots, b_r, a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ 对于 $i = 1, \ldots, r$ 的秩至少为 $r - 1$。

证明。令 $k = |A \setminus B| = |B \setminus A|$。根据性质 (P+)，存在一条路径 P，它在 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 之间交替，使得 $A \cap B$ 与路径中任意稳定集的并集都是 M 中的独立集。将这条路径上的元素依次记为 b_1、a_1、……、b_k、a_k，其中 $a_i \in A \setminus B$ 且 $b_i \in B \setminus A$（$i = 1, \ldots, k$）。此外，取 $A \cap B$ 中每个元素的两个副本，并将它们分别记为 a_j 和 b_j（$j = k + 1, \ldots, r$）。我们断言，排序 $(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r)$ 满足该定理的条件。为此，注意对于 $1 \le i \le r$，区间 $\{a_i, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_{i-1}\}$ 是 $A \cap B$ 与路径 P 上一个稳定集的并集。类似地，对于 $1 \le i \le r$，区间 $\{b_i, \ldots, b_r, a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ 是 $A \cap B$ 的一个副本与一个至多张成路径中一条边的集合的并集，即 $a_{i-1}b_i$。然而，从该集合中删除 a_{i-1} 或 b_i，即可得到一个独立集，证明完毕。

□

3.5 用少量边覆盖回路

性质 (R)–(P+)中的任意一项，以及由此推出的猜想 2，都表明秩为 M、$r(M)$ 满足 $\beta(M) = 2$的拟阵 $O(2 \cdot r(M)$ 的回路可以用 M 条边覆盖。这自然引出了一个问题：类似结论是否也适用于覆盖数更大的情形，例如，是否可以用少量边覆盖拟阵 M 的所有回路。下面的下界仅用到 $r(M)$ 的每个独立集大小至多为 M这一事实。

定理 24。 设 M 是一个拟阵，其基集可分解为互不相交的基。则任何覆盖 M的回路的图至少有 $\Theta\left(\beta(M)^2 \cdot r(M)\right)$ 条边。

证明。设 $G = (E, F)$ 是覆盖 M中回路的图，并令 $\alpha(G)$ 表示 G的最大稳定集的大小。由于 G 的每个稳定集在 M中都是独立的，因此 $\alpha(G) \le r(M)$ 成立。已知（例如参见 [9, 定理 13.5]），对于具有 n 个顶点和 m 条边的每个图，$\overline{\alpha(G)} \ge \frac{n^2}{n+2m}$ 成立。因此，

$$r(M) \ge \alpha(G) \ge \frac{|E|^2}{|E| + 2|F|} = \frac{\beta(M)^2 \cdot r(M)^2}{\beta(M) \cdot r(M) + 2|F|},$$

这意味着

$$|F| \geq \frac{\beta(M)^2 \cdot r(M) - \beta(M) \cdot r(M)}{2} = \Theta\left(\beta(M)^2 \cdot r(M)\right).$$

□

定理24 的下界与作者和 Yamaguchi 提出的一个猜想相符，该猜想指出，任意秩为 [8], 的拟阵 M 都可以 $r(M)$ 归约为一个分划拟阵，其分划类的大小至多为 $2 \cdot \beta(M)$。事实上，在每个分划类的元素上取一个完全图，就会得到一个至多有 $\binom{2 \cdot \beta(M)}{2} r(M)$ 条边的图，它覆盖该拟阵的每个回路。该猜想于 [2] 被推翻，另有研究者独立地于 [31], 给出了反例；他们的证明还表明，下界为 $\Theta\left(\beta(M)^2 \cdot \log \beta(M) \cdot r(M)\right)$。

对于任意拟阵 M，其基集大小至多为 $\beta(M) \cdot r(M)$，因此总能用 $O(\beta(M)^2 r(M)^2)$ 条边覆盖所有回路——只需在 E 上取一个完全图。是否存在某个函数 f，使得对于任意拟阵 M，都能用 $O(f(\beta(M)) \cdot r(M))$ 条边覆盖其回路，仍是一个开放问题。

4 结论

本文研究了拟阵强基可排序性的松弛形式，并表明，将所提出的松弛形式与已有结果及猜想结合起来，可以得到有趣的观察。我们希望，这种新方法能成为拟阵优化问题中的有用工具，尤其是在处理两个或更多拟阵的不相交公共独立集时。

猜想 2 即使对于某些特殊的拟阵类，仍然是一个引人入胜的开放问题。尽管定理 12证明了该猜想对图拟阵成立，但余图情形尚缺少类似结果。与备注13类似，值得用图论术语重新表述这个问题。

问题 1. 给定一个由两棵生成树组成的图 A 和 B，是否总能以某种顺序排列边，使得 A 和 B 的元素交替出现，并且每个割都包含 G 中的两个连续元素？

另一个有趣的问题是刻画 SBRO拟阵的禁用子式。我们已经看到，$M(K_4)$ 和 J 是禁用子式，而且也可以验证，备注 X_{10} 中描述的拟阵9 也是这一类的禁用子式。不过，我们尚未发现其他例子；但从 SBO 和 BO拟阵的情形来看，禁用子式的数量似乎应当是无限的，参见 [11]。

问题 2. SBRO 类有哪些禁用拟阵？是否存在一列无限多个这样的拟阵？

最后，让我们重提第3.5节提出的问题。

问题 3. 是否存在一个函数 f，使得任意拟阵 M 的回路都能被$O(f(\beta(M)) \cdot r(M))$ 条边覆盖？

致谢。Tam´as Schwarcz 获得了文化与创新部国家研究、开发与创新基金资助的 UNKP-22-3 新国家卓越计划支持。本研究得到匈牙利科学院 Lend¨ület 计划（资助编号 LP2021-1/2021）以及匈牙利国家研究、开发与创新办公室 NKFIH（资助编号 FK128673）的支持。

参考文献

[1] A. Abdi、G. Cornu´ejols 和 M. Zlatin。关于在有向图和加权有向图中打包有向割集。arXiv 预印本 arXiv:2202.00392，2022年。[2] D. Abdolazimi、A. R. Karlin、N. Klein 和 S. O. Gharan。拟阵分划性质与秘书问题。arXiv 预印本 arXiv 2111.12436，2021年。[3] R. Aharoni 和 E. Berger。拟阵与单纯复形的交集。《美国数学会汇刊》，358(11):4895–4917，2006年。[4] R. Aharoni、E. Berger 和 R. Ziv。两个拟阵交集的边覆盖数。《离散数学》，312(1):81–85，2012年。[5] K. B´erczi、B. M´atrav¨olgyi 和 T. Schwarcz。基对的加权交换距离。arXiv 预印本 arXiv:2211.12750，2022年。[6] K. B´erczi 和 T. Schwarcz。拟阵中公共基打包的复杂性。《数学规划》，188(1):1–18，2021年。[7] K. B´erczi 和 T. Schwarcz。分裂拟阵中基对的交换距离。arXiv 预印本 arXiv:2203.01779，2022年。[8] K. B´erczi、T. Schwarcz 和 Y. Yamaguchi。通过归约到分划拟阵对两个拟阵进行列表着色。SIAM 离散数学杂志，35(3):2192–2209，2021年。[9] C. Berge。《图与超图》。Dunod，巴黎，1970年。[10] J. E. Bonin。稀疏铺砌拟阵的基交换性质。《应用数学进展》，50(1):6–15，2013年。[11] J. E. Bonin 和 T. J. Savitsky。强基可排序性的一个无限排除子族。《线性代数及其应用》，488:396–429，2016年。[12] T. H. Brylawski。串并联网络的组合模型。美国数学会汇刊，154:1–22，1971年。[13] R. Cordovil 和 M. L. Moreira。拟阵的基—余基图与多面体。《组合数学》，13(2):157–165，1993年。[14] J. Davies 和 C. McDiarmid。不相交公共横截集与交换结构。《伦敦数学会杂志》，2(1):55–62，1976年。[15] D. Du、D. Hsu 和 F. Hwang。连续有向图的哈密顿性质。《数学与计算机建模》，17(11):61–63，1993年。[16] J. Edmonds。边不相交分枝。载于《组合算法》。Academic Press，纽约，1973年。[17] J. Edmonds 和 D. R. Fulkerson。横截集与拟阵分划。《美国国家标准局研究杂志》(B)，69:147–153，1965年。[18] P. Erd˝os。关于我最喜爱的一些图论和区组设计问题。《数学》，45(1):61–74，1990年。

[19] H. Fleischner 和 M. Stiebitz。P. Erd˝os 着色问题的一个解。《离散数学》，101(1-3)：39–48，1992年。[20] H. Fleischner 和 M. Stiebitz。关于圈加三角形问题的一些评注。载于《Paul Erd ¨os 数学 II》，第 136–142 页。施普林格，柏林，1997年。[21] A. Frank。《组合优化：联系》，牛津数学及其应用讲座系列第 38 卷。牛津大学出版社，牛津，2011年。[22] H. Gabow。拟阵基中对称交换的分解。《数学规划》，10(1)：271–276，1976年。[23] P. E. Haxell。关于强色数。《组合学、概率与计算》，13(6)：857–865，2004年。[24] R. Huang 和 G.-C. Rota。关于拉丁方猜想与直化系数的各种关系。《离散数学》，128(1-3)：225–236，1994年。[25] A. W. Ingleton。横截拟阵及相关结构。载于《高等组合学》，第 117–131 页。施普林格荷兰，1977年。[26] Y. Kajitani、S. Ueno 和 H. Miyano。拟阵元素的排序，使其连续的 w 个元素独立。《离散数学》，72(1-3)：187–194，1988年。.[27] D. K¨onig。关于图及其在行列式理论和集合论中的应用。《数学年刊》，77(4)：453–465，1916年。[28] D. Kotlar。关于拟阵中的回路和串行对称基交换。SIAM 离散数学杂志，27(3)：1274–1286，2013年。[29] D. Kotlar 和 R. Ziv。关于将两个拟阵划分为公共独立子集。《离散数学》，300(1-3)：239–244，2005年。[30] D. Kotlar 和 R. Ziv。关于拟阵基的串行对称交换。《图论杂志》，73(3)：296–304，2013年。[31] M. Leichter、B. Moseley 和 K. Pruhs。关于分解二元拟阵的不可能性。《运筹学快报》，50(5)：623–625，2022年。[32] J. McDonald 和 G. J. Puleo。2-正则图的强着色：环限制与部分着色。《图论杂志》，100(4)：653–670，2022年。[33] J. Oxley。《拟阵理论》，牛津数学研究生教材第 21 卷。牛津大学出版社，牛津，第二版，2011年。[34] J. G. Oxley。无 $M(K_4)$-minor 的三元拟阵的一个刻画。《组合理论杂志 B 辑》，42(2)：212–249，1987年。[35] A. Schrijver。《组合优化：多面体与效率》。施普林格，柏林，2003年。[36]J. A. Sims。一个完备的拟阵类。《数学季刊》，28(4)：449–451，1977年。[37] D. J. A. Welsh。《拟阵理论》。Academic Press，伦敦，1976年。

[38] D. Wiedemann。拟阵的循环基序。手稿，1984 年。[39] D. R. Woodall。Menger 和 K″onig 系统。载于图论的理论与应用，第 620–635 页。施普林格，柏林，1978 年。