arXiv:2302.01446v1 [math.CV] 2 Feb 2023

线性畸变泛函下半连续性的普遍失效

Sayed Mohsen Hashemi 和 Gaven J. Martin *

谨以此文纪念 *Peter Duren*

摘要

我们考察定义在欧几里得 n 维空间中区域上的同胚的畸变泛函的凸性性质，尤其是线性畸变 $n \geq 3$。内畸变泛函和外畸变泛函在所有维度上都具有下半连续性，因此，对于曲线模或拟共形性的解析定义，可以推出：若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个 K-拟共形映射序列（此处 K 取决于具体的畸变泛函，但对序列中的每个元素都相同），且该序列局部一致收敛到映射 f，那么这个极限函数也是 K-拟共形的。尽管人们普遍认为，对于拟共形性的几何定义（通过线性畸变 $H(f_n)$ 定义）也成立，但 T. Iwaniec 给出了一个具体而令人意外的例子，表明在线性畸变泛函作用于一致收敛的拟共形映射序列时，它并不总是下半连续的。本文表明，这种下半连续性的失效十分常见，甚至可能具有普遍性：在对拟共形 f 施加温和限制的条件下，存在一个序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，使其 $f_n \to f$ 局部一致收敛，且 $\limsup_{n\to\infty} H(f_n) < H(f)$。我们的主要结果表明，仿射映射也满足这一结论。针对 F.W. Gehring 和 Iwaniec 提出的猜想，我们证明极限中的跃升可以任意大，并给出我们认为是尖锐的界：对于每个 $\alpha < \sqrt{2}$，都存在一个局部一致收敛的 $f_n \to f$，其中 f 为仿射，且

$$\alpha \limsup_{n\to\infty} H(f_n) < H(f)$$

我们猜想$\sqrt{2}$是最佳可能结果。

*两位作者的研究工作均得到新西兰 Marsden 基金的部分资助。本研究的部分内容见第一作者的博士论文。**关键词**。 拟共形、线性畸变、下半连续性。**数学主题分类：** 30C60。

1 引言。

本文探讨线性畸变泛函的凸性性质，尤其是它的下半连续性。因此，我们先给出一个定义。

定义 1.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ 中的一个区域，且 $f : \Omega \to f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ 是一个同胚。对每个 $x \in \Omega$ 以及 $0 < r < d(x, \partial\Omega)$，定义

$$H(x, f) = \limsup_{r \to 0} \frac{\max_{|x-y|=r}\{|f(x) - f(y)|\}}{\min_{|x-y|=r}\{|f(x) - f(y)|\}}. \tag{1}$$

若 $H(x, f)$ 在Ω中有界，且 $H = H(f) = \|H(x, f)\|_{L^\infty(\Omega)}$，则称$f$ 为 H-拟共形映射， H 为 f的线性畸变。

若 f 在 $x \in \Omega$ 处具有非奇异导数 $Df(x)$，其奇异值为 $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \cdots \leq \lambda_n(x)$，则可知

$$H(x, f) = \frac{|\lambda_n(x)|}{|\lambda_1(x)|}.$$

一个显著的事实是，若 $H(f)$ 在 Ω 中有界，则具有索伯列夫正则性$f \in W^{1,\, n}(\Omega)$， [9, 3]。更令人惊讶的是，有结果指出，当 $\Omega = \mathbb{R}^n$, [5] 时，定义中的上极限可以替换为下极限。

其他定义假定具备这种正则性，并根据微分矩阵来定义畸变。两种常见定义是内畸变和外畸变，但还有许多其他定义，见 [7, 第 9] 章。作为 Sobolev 类 $W^{1,\, n}(\Omega)$ 中同胚的示例，令

$$K_0(f) = \left\| \frac{|Df|^n}{J(x, f)} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, \ \mathbb{K}(f) = \left\| \frac{\|Df\|^n}{J(x, f)} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, \ K_I(f) = \left\| \frac{J(x, f)}{\lambda_1^n} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

每种畸变都定义了同一类映射，简单的特征值计算表明

$$\mathbb{K}(f) \leq K_0(f) \leq H(f)^{1/n}, \quad H(f) \leq K_I(f) \leq H(f)^n. \tag{2}$$

畸变泛函的多凸性（当畸变是微分的子式的凸函数时）以及拟共形映射通常具有的紧性性质 [2] 表明，畸变 $\mathbb{K}(f)$ $K_0(f)$ 和 $K_I(f)$ 都具有以下下半连续性性质。

定理 1 设 $K = K(f)$ 表示三个畸变泛函之一：$\mathbb{K}(f)$、 $K_0(f)$、 $K_I(f)$；设 $K_\infty < \infty$，且设 $\{f_j : \Omega \to \mathbb{R}^n\}$ 为一列拟共形映射，满足 $K(f) \leq K_\infty$。那么，要么

1. 序列 f_j 在 Ω 中局部一致收敛于一个取值为 $\mathbb{R}^n$ 的常值映射。*2.* 存在 $x_0 \in \Omega$，且 f_j 在 $\Omega \setminus \{x_0\}$ 中局部一致收敛于一个取值为 $\mathbb{R}^n$ 的常值映射。*3.* 序列 f_j 在 Ω 中局部一致收敛于一个 $K(f)$ 拟共形映射 $f_\infty : \Omega \to \mathbb{R}^n$，并且 $K(f) \leq \overline{K}_\infty$。

自多维拟共形映射理论诞生之初，人们便普遍认为，通过线性畸变定义的 $\mathbb{R}^n$ 中的 H-拟共形映射类在局部一致收敛下是闭的。然而，关于下半连续性的问题，Tadeusz Iwaniec 在回应 Curt McMullen 的一个问题时给出了否定答案。在他的论文 [6], 中，他给出了一个明确的例子，以证明以下结论。

定理 2 存在一个 H-拟共形映射序列 $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，它在 $\mathbb{R}^n$ 中局部一致收敛于线性映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，且

$$H(f) > \limsup_{\nu \to \infty} H(f_j). \tag{3}$$

正如我们将看到的，线性畸变函数出现这种异常且反常行为的原因在于，当维数高于 2 时，它并非秩一凸。一个自然的问题是，此处的跃升幅度可能有多大；Gehring 和 Iwaniec 通过定理 1 和 (2) 得到了以下界。

定理 3 设 $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是一个拟共形映射序列，它在 $W^{1,n}(\Omega)$ 中弱收敛到 f，并且设 $H(x, f_j) \leq M$ 属于 Ω，其中 $j = 1$、 2、 .....。那么

$$H(x, f) \leq \frac{1}{2}\left(M + M^{n-1}\right)^{2/n} \tag{4}$$

当 $n = 3$和 M较大时，这个界大致为 $\frac{1}{2}M^{4/3}$；而当n 较大时，则为 $\frac{1}{2}M^2$。我们证明，式 (4) 右侧可能达到的最佳下界在 M 较大时必须超过 $\sqrt{2}M$，并给出了所有 M 的明确界。

2 主要结果

我们的主要结果如下：它们为 Gehring 和 Iwaniec 的结果给出了下界，并证明线性畸变的下半连续性失效具有普遍性——至少对于仿射映射而言。

定理4 设 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个仿射映射，其微分具有三个互不相同的奇异值。那么存在一列 H–拟共形映射 $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $H(x, f_j) \leq H$，它们在球面度量下统一收敛于 A，并且 $H < H(x, A) = H(A)$。

我们用A的奇异值给出了此处跳跃量的明确界，尽管这些界较为复杂。下一个结果与定理 3 有关。

定理5 设 $\alpha < \sqrt{2}$。那么存在一列 H-拟共形映射 $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得 $H(x, f_j) \leq H$ 局部一致收敛于一个仿射映射，并且

$$H(A) = H(x, A) \geq \alpha H. \tag{5}$$

对于我们的例子，$H \to \infty$ 如 $\alpha \to \sqrt{2}$，因此可见间隙 $H(A) - H(f_j)$ 可以任意大。我们给出了有力的数值证据，表明 $\sqrt{2}$在此处是最优的，至少在三维情况下如此。

这两个结果基于线性畸变泛函的以下性质。例如，我们回顾一下，行列式函数 $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 尽管是关于 n^2 个变量的非线性多项式，但实际上沿秩一矩阵的方向是线性的。更准确地说，实变量 $t \mapsto$ 的函数 $\det(A+tB)$ 在线性条件 $\operatorname{rank}(B) \leq 1$ 成立时是线性的。低阶子式也具有相同的性质，因此零拉格朗日量也如此，因为它们是 Df 的子式的线性组合。

秩一矩阵可以写成两个向量的张量积。Iwaniec 工作中的关键思想是，线性畸变函数在维数 $n \geq 3$ 下不是秩一凸的。为了计算仿射映射 $x \mapsto Ax + b$ 的线性畸变，我们研究以下对象的特征值

$$A^tA \in Sym^+_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

对称正定 3×3 矩阵构成的空间。给定这样的一个 A，谱定理告诉我们 A 可正交对角化。这是一个初等的

事实：如果 U， V彼此正交且 f是拟共形的，那么 $H(x,\ f)\ =H(UfV,\ V^{-1}x)$，因此我们不妨假设 A是对角矩阵。这样，我们就将线性畸变泛函的凸性问题归结为考察定义在由 $1 = a_{11} \le a_{22} \le a_{33}$作为元素的 3×3 对角矩阵空间上的该泛函。Iwaniec 给出了一个从三维推广到 n维的初等论证，我们稍后会回顾这一论证。

为了得到这些明确的界，我们研究一个本身颇有趣、且可能与材料科学某些方面相关的问题：确定使线性畸变函数在 A 处“最具凹性”的秩一方向。这些方向或许能揭示变分法中某些储能泛函的极小化子所对应的层状结构， [8]。因此，我们围绕两个待解决的问题展开证明。

2.1 问题 1：最佳秩一方向。

Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, a, b)$$

为对角矩阵，且 $1 < a < b$。确定 $\mathbb{R}^3$, $\|$中的向量$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{v}$ ，使得$\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| =$，并且 $B_0 = \mathbf{u}\ \otimes\mathbf{v}$ 满足

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(A + t\,B_0) \ = \ 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} H(A + t\,B_0) \ \le \ \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} H(A + t\,B), \tag{7}$$

对于每个秩一矩阵 $B = \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}\ \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\|\tilde{\mathbf{u}}\| = \|\tilde{\mathbf{v}}\| = 1$ ，其中

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(A + t\,B) = 0.$$

问题 1 的解在符号意义下唯一。我们或许可以预期， $H(A + tB)$ 的最小值会出现在这个方向上。接下来，我们确定使 $H(A + t\,B)$ 为凹函数的 t-区间。

2.2 问题 2：凹性区间

令 $A =$对角矩阵(1， a， b)，其中 $1 < a < b$且假设 $B_0 = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}^t$ 是问题 1 的一个解。求最大的实数 $\mathbf{t}_+ > 0$ 和 $\mathbf{t}_- < 0$ ，使得 $H(A + t\,B_0)$ 在区间 $\mathbf{t}_- < t <$ $\mathbf{t}_+$内是光滑函数。然后求出 $H(A +\mathbf{t}_- B_0)$ 和 $H(A + \mathbf{t}_+ B_0)$。

我们自然会预期，$\mathbf{t}_-$ 和$\mathbf{t}_+$ 处就是 t 变化时 $A + tB_0$ 的奇异值相交的位置——当 $H(A + tB_0) \to +\infty$随 $t \to \pm\infty$变化时，它们必然相交。$\mathbf{t}_-$ 和 $\mathbf{t}_+$ 的值将通过一个（相当棘手的）判别式问题确定。我们猜想，对于所有秩一矩阵$B = \tilde{u} \otimes \tilde{v}$、 $\|\tilde{u}\| = \|\tilde{v}\| = 1$ ，满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} H(A + t\,B) = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\Big|_{t=0} H(A + t\,B) < 0,$$

对于所有 $t > 0$，我们都有

$$H(A + tB) \geq \max\{H(A + \mathbf{t}_- B_0), H(A + \mathbf{t}_+ B_0)\}.$$

这个猜想表达了这样一种期望：“最佳秩一方向”也能使 $H(A)$与 $H(A + t\,B)$ 之间的差距最大，因此能给出线性畸变最小的 A 近似。不过，对于较大的 t，或许存在另一条路径能得到更好的结果，尽管数值证据表明并非如此。

3 求解问题1。

我们现在要确定最佳的秩一矩阵 $B_0 =\mathbf{u}_0.\mathbf{v}_0^t$ ，使得 (6) 和 (7) 成立。也就是说，级数展开 $H(A+tB)$ 中二次项的系数尽可能小（负值尽可能大）。令 $A =$ $\mathrm{diag}(1, a, b)$,$1 < a < b$，并设 B 为秩一矩阵， $B = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^t$，其中

$$\mathbf{u}^t = (\sqrt{1 - r^2}, r\cos(\theta_1), r\sin(\theta_1)), \quad \mathbf{v}^t = (\sqrt{1 - s^2}, s\cos(\theta_2), s\sin(\theta_2))$$

此处 $0 \leq r, s \leq 1$和 $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$。显然 $H(A) = b$。设 $\lambda_1(t)$、 $\lambda_2(t)$ 和 $\lambda_3(t)$ 是 $X = (A + tB)^t(A + tB)$ 的特征值。函数 $\lambda_i(t)$ 在 t 中局部良定义且光滑，并且 $\lambda_1(0) = 1, \lambda_2(0) = a^2, \lambda_3(0) = b^2$.因此，对于充分小的 t ，有 $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$，并且

$$H(A + tB) = \sqrt{\frac{\lambda_3(t)}{\lambda_1(t)}}.$$

As

$$(\frac{A}{t}+B)^t(\frac{A}{t}+B)=\frac{1}{t^2}A^tA+\frac{1}{t}(A^tB+B^tA)+B^tB,$$

如果 t 趋于无穷大，那么

$$\lim_{|t|\to+\infty}H(A+tB)=\lim_{|t|\to+\infty}H(\frac{A}{t}+B)=H(B)=\infty,$$

由于 B 是秩一矩阵。矩阵 B 的形式为

$$B=\begin{bmatrix}\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2} & \sqrt{1-r^2}s\cos(\theta_2) & \sqrt{1-r^2}s\sin(\theta_2)\\ r\sqrt{1-s^2}\cos(\theta_1) & rs\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & rs\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\\ r\sqrt{1-s^2}\sin(\theta_1) & rs\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) & rs\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\end{bmatrix}$$

且 $A+tB$ 的形式为

$$\begin{bmatrix}1+t\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2} & ts\sqrt{1-r^2}\cos(\theta_2) & ts\sqrt{1-r^2}\sin(\theta_2)\\ tr\sqrt{1-s^2}\cos(\theta_1) & a+trs\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & trs\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\\ tr\sqrt{1-s^2}\sin(\theta_1) & trs\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) & b+trs\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\end{bmatrix}.$$

利用 t 的二阶泰勒级数，我们可以求出 X 的最小和最大特征值，精确到二阶。令 I 为单位 3×3 矩阵。于是， X 的最小特征值可由下式求得

$$\det[X-\lambda_1 I]\approx\det[A+tB-(1+xt+yt^2)I]=0, \tag{8}$$

其中 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$。对 (8) 求导得 $x=2\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2}$ 和

$$\begin{aligned}y &= 1-s^2-\frac{\left(ar\sqrt{1-s^2}\cos(\theta_1)+s\sqrt{1-r^2}\cos(\theta_2)\right)^2}{a^2-1}\\ &\quad-\frac{\left(br\sqrt{1-s^2}\sin(\theta_1)s\sqrt{1-r^2}\sin(\theta_2)\right)^2}{b^2-1}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lambda_1(t)=&1+2\big(\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2}\big)t+\Big(1-s^2-\frac{\big(ar\sqrt{1-s^2}\cos(\theta_1)+s\sqrt{1-r^2}\cos(\theta_2)\big)^2}{a^2-1}-\\ &\frac{\big(br\sqrt{1-s^2}\sin(\theta_1)+s\sqrt{1-r^2}\sin(\theta_2)\big)^2}{b^2-1}\Big)t^2+O(t^3).\end{aligned}$$

类似地，最大特征值的二阶项为

$$\lambda_3(t) = b^2 + 2\,brs\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\,t + \Big(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}s^2\cos(2\theta_2) + \frac{\big(br\sqrt{1-s^2}\sin(\theta_1) + s\sqrt{1-r^2}\sin(\theta_2)\big)^2}{b^2-1} + \frac{s^2\big(rb\,\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) + ra\,\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\big)^2}{b^2-a^2}\Big)\,t^2.$$

因此，对于足够小的 t，线性畸变函数 $H(A+tB)$ 是

$$\begin{aligned} & b + \big(-b\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2} + rs\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\big)t + \frac{1}{2b}\Big(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}s^2\cos(2\theta_2) \\ & -4brs\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2}\,\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \frac{\big(br\sqrt{1-s^2}\sin(\theta_1) + s\sqrt{1-r^2}\sin(\theta_2)\big)^2}{b^2-1} \\ & + \frac{s^2\big(rb\,\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) + ra\,\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\big)^2}{b^2-a^2} - \big(b\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2} - rs\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\big)^2 \\ & + b^2\Big(-1 + s^2 + 4(r^2-1)(s^2-1) + \frac{\Big(ar\sqrt{1-s^2}\cos(\theta_1) + s\sqrt{1-r^2}\cos(\theta_2)\Big)^2}{a^2-1} \\ & + \frac{\big(br\sqrt{1-s^2}\sin(\theta_1) + s\sqrt{1-r^2}\sin(\theta_2)\big)^2}{b^2-1}\Big)\Big)t^2 + O(t^3). \end{aligned}$$

我们要求 $H(A+tB)$ 的一阶导数为零。

$$b\big(\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2}\,\big) = rs\sin(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{9}$$

我们希望将上述二次项系数视为四个变量 r、 s、 θ_1 和 θ_2 以及两个参数 a 和 b的函数并使其最小化。 $Q(r,\ s,\ \theta_1,\ \theta_2) =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2b}\Big(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}s^2\cos(2\theta_2) - 4brs\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2}\,\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ & + \frac{\big(br\sqrt{1-s^2}\sin(\theta_1) + s\sqrt{1-r^2}\sin(\theta_2)\big)^2}{b^2-1} + \frac{s^2\big(rb\,\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) + ra\,\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\big)^2}{b^2-a^2} \\ & - \big(b\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-s^2} - rs\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\big)^2 + b^2\Big(-1 + s^2 + 4(r^2-1)(s^2-1) \\ & + \frac{\Big(ar\sqrt{1-s^2}\cos(\theta_1) + s\sqrt{1-r^2}\cos(\theta_2)\Big)^2}{a^2-1} + \frac{\big(br\sqrt{1-s^2}\sin(\theta_1) + s\sqrt{1-r^2}\sin(\theta_2)\big)^2}{b^2-1}\Big)\Big). \end{aligned}$$

我们代入 (9) 中的 r^2s^2，得到 $Q(r,\ s,\ \theta_1,\ \theta_2) =$

$$\frac{1}{8}\Big(\frac{r^2\cos(2\theta_1)\big(-2(b^2+b^4)+s^2(-5+3b^2+2b^4)-(b^2-5)s^2\cos(2\theta_2)\big)}{b^3-b}$$
$$+\frac{3r^2s^2+2b^4(5r^2-4)(s^2-1)+b^2\big(r^2(14-17s^2)+12s^2-8\big)}{b^3-b}$$
$$+\frac{(-4b^2+3(b^2-1)r^2)s^2\cos(2\theta_2)}{b^3-b}$$
$$+4bs^2\cos^2(\theta_2)\Big(\frac{1-r^2}{a^2-1}+\frac{r^2\sin^2(\theta_1)}{b^2-a^2}\Big)+4a^2r^2\cos^2(\theta_1)\Big(\frac{b(1-s^2)}{a^2-1}+\frac{s^2\sin^2(\theta_1)}{b^3-a^2b}\Big)$$
$$-\frac{2a(b^2-1)r^2s^2\sin(2\theta_1)\sin(2\theta_2)}{(a^2-1)(a^2-b^2)}\Big).$$

显然，函数 Q 是 π-周期的，因此我们假设 $\theta_1,\theta_2\in[0\pi]$ 的值。令 $\delta=r^2$ 且 $\eta=s^2$，并将方程写为

$$Q(\delta,\eta,\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{8}\Big(\frac{\delta\cos(2\theta_1)\big(-2(b^2+b^4)+\eta(-5+3b^2+2b^4)-(b^2-5)\eta\cos(2\theta_2)\big)}{b^3-b}+$$
$$\frac{3\delta\eta+2b^4(5\delta-4)(\eta-1)+b^2\big(\delta(14-17\eta)+12\eta-8\big)+(-4b^2+3(b^2-1)\delta)\eta\cos(2\theta_2)}{b^3-b}+$$
$$4b\eta\cos^2(\theta_2)\Big(\frac{1-\delta}{a^2-1}+\frac{\delta\sin^2(\theta_1)}{b^2-a^2}\Big)+4a^2\delta\cos^2(\theta_1)\Big(\frac{b(1-\eta)}{a^2-1}+\frac{\eta\sin^2(\theta_1)}{b^3-a^2b}\Big)-$$
$$\frac{2a(b^2-1)\delta\eta\sin(2\theta_1)\sin(2\theta_2)}{(a^2-1)(a^2-b^2)}\Big).$$

Now

$$\delta\eta=\frac{b^2\big(\delta+\eta-1\big)}{b^2-\sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)}$$

根据（9），我们可以消去非线性项 $\delta\eta$，函数 Q 可简化为 $Q(\delta,\eta,\theta_1,\theta_2) =$

$$-\frac{1}{32\,(a^2-1)\,(b^2-1)\,(b^2-a^2)\,(b^2-\sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2))}$$
$$b\Big(b^4(32-7\delta-7\eta)+8b^6(\delta+\eta-2)-7b^2(\delta+\eta)+2a^4\big(\delta+\eta-4-4b^2(\delta+\eta-3)\big)$$
$$-a^2\big(\delta-8+b^2(40-21(\delta+\eta))+\eta+8b^4(\delta+\eta)\big)+(a^2-b^2)\Big[\Big(\eta-8-2a^2(-4+4b^2(1+\delta-\eta)+\eta)$$
$$+b^2(8\delta-8b^2(\eta-1)+\eta)\Big)\cos(2\theta_1)+(1-2a^2+b^2)\delta\cos(4\theta_1)\Big]+\Big[8(a^2-1)\big(-b^2(\delta+\eta-2)$$
$$+a^2(-1+b^2(\delta+\eta-1))\big)\cos(2\theta_1)+(a^2-b^2)\Big(-8+\delta+a^2(8-2\delta+8b^2(\delta-\eta-1)+b^2(-8b^2(\delta-1)$$
$$++\delta+8\eta)+(2a^2-b^2-1)\delta\cos(4\theta_1)\Big)\Big]\cos(2\theta_2)-2(a^2-b^2)(2a^2-b^2-1)\eta\cos(4\theta_2)\sin^2(\theta_1)$$
$$-8ab(b^2-1)^2(\delta+\eta-1)\sin(2\theta_1)\sin(2\theta_2)\Big).$$

$\xi = 32(a^2-1)(b^2-1)(b^2-a^2)$ 和 $\mu = \big(b^2 - \sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)\big)$ 均为正。我们将 Q 表示为关于四个变量 δ、η、θ_1 和 θ_2 的函数，如下所示，

$$Q(\delta,\eta,\theta_1,\theta_2) = \frac{\alpha\delta+\beta\eta+\gamma}{32(a^2-1)(b^2-1)(b^2-a^2)\big(b^2-\sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)\big)}. \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha(\theta_1,\theta_2) =& b\Big(a^2-2a^4+\big(7-21a^2+8a^4\big)b^2+\big(7+8a^2\big)b^4-8b^6-8\big(a^2-1\big)\\
& b^2\cos(2\theta_1)\Big(-a^2+b^2+\big(a^2-1\big)\cos(2\theta_2)\Big)-\big(a^2-b^2\big)\Big[\Big(1+b^2-8b^4\\
& +a^2\big(-2+8b^2\big)\Big)\cos(2\theta_2)+2\Big(1-2a^2+b^2\Big)\cos(4\theta_1)\sin^2(\theta_2)\Big]+\\
& 8ab\Big(b^2-1\Big)^2\sin(2\theta_1)\sin(2\theta_2)\Big),\\
\beta(\theta_1,\theta_2) =& b\Big(a^2-2a^4+\big(7-21a^2+8a^4\big)b^2+\big(7+8a^2\big)b^4-8b^6+\cos(2\theta_1)\\
& \Big[-\big(a^2-b^2\big)\Big(1+b^2-8b^4+a^2\big(8b^2-2\big)\Big)-8\big(a^2-1\big)b^2\cos(2\theta_2)\Big]+\\
& 2\big(b^2-a^2\big)\Big[-4\big(a^2-1\big)b^2\cos(2\theta_2)+\Big(1-2a^2+b^2\Big)\cos(4\theta_2)\sin^2(\theta_1)\Big]\Big]\\
& +8ab\Big(b^2-1\Big)^2\sin(2\theta_1)\sin(2\theta_2)\Big),\\
\gamma(\theta_1,\theta_2) =& -b\Big(32b^4-16b^6+8a^2\big(1-5b^2\big)+8a^4\big(3b^2-1\big)-8\big(a^2-b^2\big)\\
& \big(a^2-b^2-1\big)\cos(2\theta_1)+\cos(2\theta_2)\Big[8\big(b^2-1\big)\big(a^2-b^2\big)\big(1-a^2+b^2\big)-\\
& 8\big(a^2-1\big)\Big(a^2+\big(a^2-2\big)b^2\Big)\cos(2\theta_1)\Big]+8ab\Big(b^2-1\Big)^2\sin(2\theta_1)\sin(2\theta_2)\Big).
\end{aligned}$$

约束条件见式（9）。由于 Q 的分母不为零，我们可以将约束条件乘以该项以消去乘数因子。接着，我们考虑拉格朗日乘子，并考察以下函数。

$$F(\delta,\eta,\lambda) = \frac{\alpha\delta+\beta\eta+\gamma}{\xi\mu} - \lambda\big(b^2(1-\delta-\eta)+\delta\eta\mu\big). \quad (11)$$

我们得到以下三个方程

1. $\frac{\partial F}{\partial\delta} = b^2\lambda - \eta\lambda\mu + \frac{\alpha}{\xi\mu} = 0,$

2. $\frac{\partial F}{\partial \eta} = b^2\lambda - \delta\lambda\mu + \frac{\beta}{\xi\mu} = 0,$

3. $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = b^2(-1+\delta+\eta) - \delta\eta\mu = 0.$

从而得到 δ 和 η的两组解。

$$\delta_1 = \frac{b\Big(b - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{b^2-\mu}\Big)}{\mu},\ \eta_1 = \frac{b\Big(b - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{b^2-\mu}\Big)}{\mu},\ \lambda_1 = -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{b\,\xi\,\mu\sqrt{b^2-\mu}},$$

$$\delta_2 = \frac{b\Big(b + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{b^2-\mu}\Big)}{\mu},\ \eta_2 = \frac{b\Big(b + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{b^2-\mu}\Big)}{\mu},\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{b\,\xi\,\mu\sqrt{b^2-\mu}}.$$

由于 $0 \le \delta,\ \ \eta \le 1$，我们必须确定所需的 0 和 1 之间的解集。事实上 $0 \le \delta_1 \le 1$, $0 \le \eta_1 \le 1$, $\delta_2 \ge 1$ 和 $\eta_2 \ge 1$。我们有 $\mu = \big(b^2 - \sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)\big)$，因此

$$\sqrt{b^2-\mu} = \sqrt{\sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)} = \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \ge 0.$$

对于 δ_2，我们有

$$b^2 + b\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left(\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\right) \ge b^2 \ge b^2 - \sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2).$$

So,

$$\delta_2 = \frac{b^2 + b\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left(\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\right)}{b^2 - \sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)} \ge 1.$$

类似地

$$\eta_2 = \frac{b^2 + b\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\left(\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\right)}{b^2 - \sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)} \ge 1.$$

3.0.1 极值情形。

接下来，我们考察一个特殊情形；事实证明，该情形将达到极值。由此可知，函数 Q 的最小值为负。令 $r = s$ 和 $\theta_2 = \pi - \theta_1$。那么，向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是

$$\mathbf{u}^t = (\sqrt{1-r^2}, r\cos(\theta_1), r\sin(\theta_1)), \quad \mathbf{v}^t = (\sqrt{1-r^2}, -r\cos(\theta_1), r\sin(\theta_1)).$$

Thus

$$A+tB=\begin{bmatrix} 1+t(1-r^2) & -tr\sqrt{1-r^2}\cos(\theta_1) & tr\sqrt{1-r^2}\sin(\theta_1) \\ tr\sqrt{1-r^2}\cos(\theta_1) & a-tr^2\cos^2(\theta_1) & tr^2\cos(\theta_1)\sin(\theta_1) \\ tr\sqrt{1-r^2}\sin(\theta_1) & -tr^2\cos(\theta_1)\sin(\theta_1) & b+tr^2\sin^2(\theta_1) \end{bmatrix}.$$

矩阵 $(A+tB)^t(A+tB)$ 的最小特征值和最大特征值可像之前一样求至二阶。

$$\lambda_1(t) = 1+2(1-r^2)t+\Big(\frac{(r^2-1)\big(1+a-b+r^2+ab\,(r^2-1)-(a+b)r^2\cos(2\theta_1)\big)}{(a+1)(b-1)}\Big)t^2,$$

and

$$\lambda_3(t) = b^2+2\,br^2\sin^2(\theta_1)\,t- \Big(\frac{r^2\Big(b\big(3r^2+b(r^2-4)\big)+a\big(r^2+b(3r^2-4)\big)+(a-b)(b-1)\cos(2\theta_1)\Big)\sin^2(\theta_1)}{2(a+b)(b-1)}\Big)t^2.$$

线性畸变函数将为

$$H(A+tB)=\sqrt{\frac{\lambda_3(t)}{\lambda_1(t)}}=b+L(r,\theta_1)\,t+Q(r,\theta_1)\,t^2+O(t^3).$$

线性畸变函数的一阶导数必须为零，$L(r,\theta_1)=b(r^2-1)+r^2\sin^2(\theta_1)=0$, 因此 $b(r^2-1)=-r^2\sin^2(\theta_1)$。若将上述方程代入二次系数函数，我们可得 $Q(r,\theta_1)$ 为

$$\frac{r^2\Big(4(a+1)(a+b)-\big(1+a+a^2+(a-1)b+b^2\big)r^2\Big)}{8(a+1)(b-1)(a+b)} + \frac{r^2\Big(-4(a+1)(a+b)\cos(2\theta_1)+\big(1+a+a^2+(a-1)b+b^2\big)r^2\cos(4\theta_1)\Big)}{8(a+1)(b-1)(a+b)}.$$

我们首先求出临界点：$\frac{\partial Q}{\partial r}(r,\ \theta_1)=0$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial \theta_1}(r,\ \theta_1)=0$。解为 $r\in\{0,1\}$、$\theta_1\in\{0,\pi\}$。如果 $r=0$，那么 $Q=0$。当 $r=1$ 函数 Q 为

$$Q(1,\theta_1)=\frac{\Big(4(a+1)(a+b)-\big(1+a+a^2+(a-1)b+b^2\big)\Big)}{8(a+1)(b-1)(a+b)} + \frac{\Big(-4(a+1)(a+b)\cos(2\theta_1)+\big(1+a+a^2+(a-1)b+b^2\big)\cos(4\theta_1)\Big)}{8(a+1)(b-1)(a+b)}.$$

在这种情况下， Q 关于 θ_1 的偏导数为

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_1}(1,\theta_1) = \frac{8(a+1)(a+b)\sin(2\theta_1) - 4\big(1+a+a^2+(a-1)b+b^2\big)\sin(4\theta_1)}{8(a+1)(b-1)(a+b)} = 0.$$

由于 $8(a+b)(b-1)(a+1) > 0$，我们在 $[0,\pi]$ 中找到五个临界点。

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_1 = \pi, \quad \theta_1 = \arctan\frac{y_1}{x_1}, \quad \theta_1 = \pi - \arctan\frac{y_1}{x_1},$$

其中

$$x_1 = \frac{(a+1)(a+b)}{1+a+a^2-b+ab+b^2},$$

and

$$y_1 = \frac{(b-1)\sqrt{1+2a+2a^2+2ab+b^2}}{\sqrt{1+2a+3a^2+a^4-2b+2a^3b+3b^2+3a^2b^2-2b^3+2ab^3+b^4}}.$$

函数 Q_1 在临界点处的值为

$$Q_1(0) = 0, \qquad Q_1(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{b-1} > 0, \qquad Q_1(\pi) = 0,$$

$$Q_1(\arctan\frac{y_1}{x_1}) = -\frac{(b-1)^3}{4(a+1)(b+a)\big(1+a+a^2+b(a-1)+b^2\big)} < 0.$$

现在我们证明二次函数 Q 在 $\theta_1, \theta_2 \in \{0,\pi\}$ 所在的边界上为正。因此，

$$\theta_1 = 0 \text{ and } \theta_2 = \theta, \qquad \theta_1 = \pi \text{ and } \theta_2 = \theta,$$

$$\theta_1 = \theta \text{ and } \theta_2 = 0, \qquad \theta_1 = \theta \text{ and } \theta_2 = \pi.$$

这里有四种情况，我们只证明第一种情况，因为它们完全相似。设 $\theta_1 = 0$ 和 $\theta_2 = \theta$

$$\mathbf{u}^t = (\sqrt{1-r^2}, r, 0), \quad \mathbf{v}^t = (\sqrt{1-s^2}, s\cos(\theta), s\sin(\theta)).$$

由于 $-b\sqrt{1-r}^2\sqrt{1-s^2} = 0$， $r = 1$ 或 $s = 1$。如果 $r = 1$，那么

$$\begin{aligned} Q(1,s,\theta) &= \frac{b\big(s^2+a^2(2-3s^2)+2b^2(s^2-1)+(a^2-1)s^2(2\cos^2(\theta)-1)\big)}{4(a^2-1)(a^2-b^2)} \\ &= \frac{b\big(2s^2(a^2-1)(1-\cos^2(\theta))+2(b^2-a^2)(1-s^2)\big)}{4(a^2-1)(b^2-a^2)}. \end{aligned}$$

由于 $1 < a < b$、 $0 \le s \le 1$ 和 $0 \le \theta \le \pi$，因此 $Q(1,\ s,\ \theta) \ge 0$。情形 $s = 1$ 完全类似。

现在我们已经证明， Q（二次项）在其边界上为正，并在 δ_1 和 η_1 处取得绝对最小值。请注意，定义 δ_1 和 η_1 的方程分别包含表达式 $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ 和 $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$，。如图1所示，由于我们在公式中呈现代数解的方式，选择平方根时会遇到计算问题（我们通过在下文绘制函数 Q 的图像解决了这一问题），因此在计算中必须稍加注意，考虑 β 和 α 的取值范围。

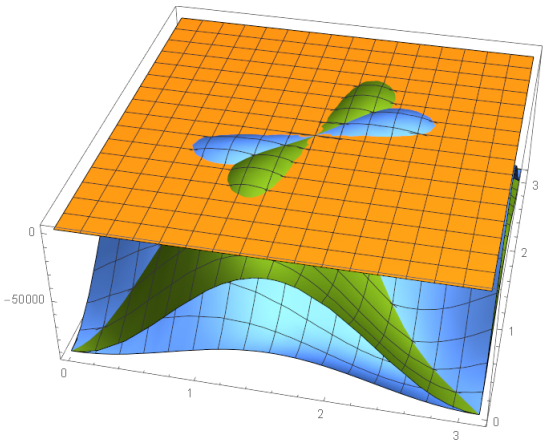

图1。 当 $A = (1,\ 2,\ 4)$ 时，函数 α 和 β。函数 α 和 β 分别为蓝色和绿色图像。

代入 δ_1 和 η_1 的表达式并化简后，我们得到

$$Q(\theta_1, \theta_2) = \frac{\alpha\left(b^2 - b\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\right) + \beta\left(b^2 - b\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\right) + \gamma\mu}{\xi\mu^2}.$$

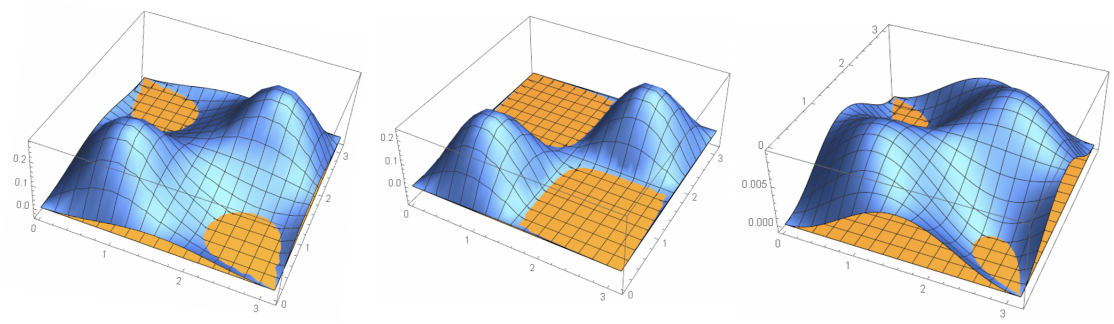

图 2 二次函数 Q，其中 $A=(1,\ 2,\ 10)$ $A=(1,\ 2,\ 105)$ $A=(1,\ 99,\ 154)$（从左到右）

函数 Q 具有各种性质，例如：$Q(\theta_1,\theta_2)=Q(\theta_2,\theta_1)$ $Q(\theta_1,\theta_2)=Q(-\theta_1,-\theta_2)$ $Q(\theta_1,\theta_2)=Q(\pi-\theta_1,\pi-\theta_2)$，$Q(\theta_1,\theta_2)=Q(2\pi-\theta_2,2\pi-\theta_1)$，以及 $Q(\theta_1,\theta_2)=Q(\pi-\theta_2,\pi-\theta_1)$。

其中一些显而易见，因此我们只证明 $Q(\theta_1,\ \theta_2)=Q(\pi-\theta_1,\ \pi-\theta_2)$，从而确立函数 α、β、γ 和 μ 的对称性。

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\pi-\theta_1,\pi-\theta_2)\\
=&b\Big(a^2-2a^4+\big(7-21a^2+8a^4\big)b^2+\big(7+8a^2\big)b^4-8b^6-\\
&8\big(a^2-1\big)b^2\cos(2(\pi-\theta_1))\Big(-a^2+b^2+\big(a^2-1\big)\cos(2(\pi-\theta_2))\Big)-\\
&\big(a^2-b^2\big)\Big[\Big(1+b^2-8b^4+a^2\big(-2+8b^2\big)\Big)\cos(2(\pi-\theta_2))+\\
&2\Big(1-2a^2+b^2\Big)\cos(4(\pi-\theta_1))\sin^2(\pi-\theta_2)\Big]+\\
&8ab\Big(b^2-1\Big)^2\sin(2(\pi-\theta_1))\sin(2(\pi-\theta_2))\Big)\\
&=b\Big(a^2-2a^4+\big(7-21a^2+8a^4\big)b^2+\big(7+8a^2\big)b^4-8b^6-8\big(a^2-1\big)\\
&b^2\cos(2\theta_1)\Big(-a^2+b^2+\big(a^2-1\big)\cos(2\theta_2)\Big)-\big(a^2-b^2\big)\Big[\Big(1+b^2-8b^4\\
&+a^2\big(-2+8b^2\big)\Big)\cos(2\theta_2)+2\Big(1-2a^2+b^2\Big)\cos(4\theta_1)\sin^2(\theta_2)\Big]+\\
&8ab\Big(b^2-1\Big)^2\sin(2\theta_1)\sin(2\theta_2)\Big)=\alpha(\theta_1,\theta_2).
\end{aligned}
$$

类似地，我们得到

$$\begin{aligned}\beta(\pi-\theta_1,\pi-\theta_2)&=\beta(\theta_1,\theta_2),\\ \gamma(\pi-\theta_1,\pi-\theta_2)&=\gamma(\theta_1,\theta_2).\end{aligned}\tag{12}$$

此外，

$$\begin{aligned}\mu(\pi-\theta_1,\pi-\theta_2)&=\left(b^2-\sin^2(\pi-\theta_1)\sin^2(\pi-\theta_2)\right)\\ &=\left(b^2-(-\sin(\theta_1))^2(-\sin(\theta_2))^2\right)\\ &=\left(b^2-\sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)\right)=\mu(\theta_1,\theta_2)\end{aligned}\tag{13}$$

由此可知， Q 具有所需的对称性。

接下来，函数 Q 在我们区域的边界上为正，因为

$$Q(0,\theta_2)=Q(\pi,\theta_2)=\frac{b\sin^2(\theta_2)}{2(b^2-a^2)},\qquad Q(\theta_1,0)=Q(\theta_1,\pi)=\frac{b\sin^2(\theta_1)}{2(b^2-a^2)}.$$

为了确定 Q 的极值，我们必须求解

$$\frac{\partial Q}{\partial\theta_1}(\theta_1,\theta_2)=0,\qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial\theta_2}(\theta_1,\theta_2)=0.\tag{14}$$

然而，由于这些方程是八次三角函数方程，因此很难通过解析方法求解。幸运的是，可以证明函数 Q 的极值位于对称线上。为此，我们必须证明 Q 的偏导数的等高线图在对称线上彼此相交，如下方图3所示。

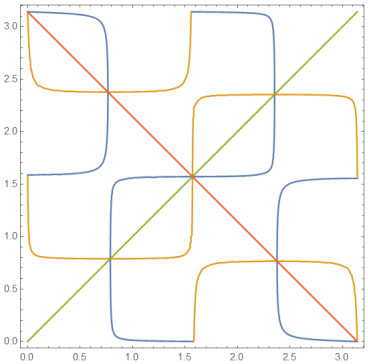

图3 $\frac{\partial Q}{\partial\theta_1}(\theta_1,\ \theta_2)$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial\theta_2}(\theta_1,\ \theta_2)$ 的等高线图，其中 $A=(1,\ 2,\ 86)$.

Fi$^{\text{rst,}}$ t he 部分 ial derivati$^{\text{ves o}}$ f Q 是对称的 ic with 关于 t he li ne$\theta_1=\theta_2$。

$$\frac{\partial Q}{\partial\theta_1}(\theta_1,\theta_2)=\frac{\partial Q}{\partial\theta_2}(\theta_2,\theta_1).\tag{15}$$

点（$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$）是对称线 $\theta_1 = \theta_2$和 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$的交点。若将原点（0，0）平移至点（$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$），则函数 Q 的两个偏导数关于直线 $\theta_1 = \theta_2$对称。也就是说，这两个函数中的一个可视为 f，另一个可视为 f^{-1}。因此，$[0, \pi] \times [0, \pi]$ 上的联立方程的解位于对称线 $\theta_1 = \theta_2$ 和$\theta_1 + \theta_2 = \pi$上。因此，如图3所示，$Q$ 的临界点位于对称线上。

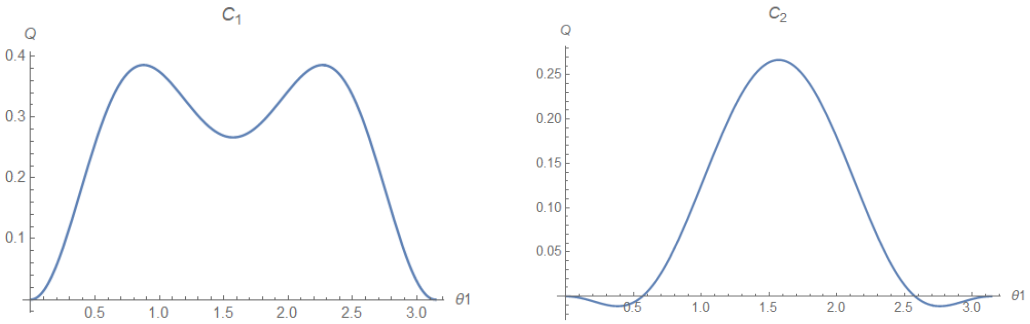

图4。图5的截面。相对于直线 $\theta_1 = \theta_2$。相对于直线 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$。

3.0.2 情形1：($\theta_1 = \theta_2$)

在这种情况下，函数 α、β、γ 和 μ 如下：

$$\begin{aligned}\alpha(\theta_1) =& b\Big(a^2 - 2a^4 + \big(7 - 21a^2 + 8a^4\big)b^2 + \big(7 + 8a^2\big)b^4 - 8b^6 + \cos(2\theta_1)(a^2 - b^2)\\ & (-1 + 2a^2 - 9b^2 + 8b^4) - 8(a^2 - 1)^2 b^2 \cos^2(2\theta_1) + 2(a^2 - b^2)(2a^2 - b^2 - 1)\\ & \cos(4\theta_1)\sin^2(\theta_1) + 8ab(b^2 - 1)^2 \sin^2(2\theta_1)\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(\theta_1) =& b\Big(a^2 - 2a^4 + \big(7 - 21a^2 + 8a^4\big)b^2 + \big(7 + 8a^2\big)b^4 - 8b^6 + \cos(2\theta_1)(a^2 - b^2)\\ & (-1 + 2a^2 - 9b^2 + 8b^4) - 8(a^2 - 1)^2 b^2 \cos^2(2\theta_1) + 2(a^2 - b^2)(2a^2 - b^2 - 1)\\ & \cos(4\theta_1)\sin^2(\theta_1) + 8ab(b^2 - 1)^2 \sin^2(2\theta_1)\Big),\end{aligned}$$

$$\gamma(\theta_1) = -8b\Big(a^2(1-5b^2) - 2b^4(b^2-2) + a^4(3b^2-1) - 2(b^2-1)(b^2-a^2)$$
$$(1-a^2+b^2)\cos(2\theta_1) - (a^2-1)\big(a^2+(a^2-2)b^2\big)\cos^2(2\theta_1) +$$
$$ab(b^2-1)^2\sin^2(2\theta_1)\Big).$$

此外，对于函数 μ 和常数 ξ，我们有

$$\mu(\theta_1) = (b^2 - \sin^4(\theta_1)), \quad \xi = 32(a^2-1)(b^2-1)(b^2-a^2). \tag{16}$$

这表明，如果 $\theta_1 = \theta_2$，那么 $\alpha(\theta_1) = \beta(\theta_1)$。求出 Q 的最大值点和最小值点很简单。令

$$Q_1(\theta_1) = \frac{b^2(\alpha(\theta_1)+\beta(\theta_1)) - 2b\sqrt{\alpha(\theta_1)}\sqrt{\beta(\theta_1)}\sin^2(\theta_1) + \gamma(\theta_1)\mu(\theta_1)}{\mu^2(\theta_1)\xi} \tag{17}$$

其中 $\theta_1 \in [0,\pi]$。那么

$$\frac{\mathrm{dQ_1}}{\mathrm{d}\theta_1}(\theta_1) = 2b^2\Big[\frac{\big(2+6b^2+4a^2(b+1)-4a(b+1)^2\big)\sin(2\theta_1)}{(a-b)(b-1)(a-1)\big(1+2b-\cos(2\theta_1)\big)^3} +$$
$$\frac{\big(-1-2a^2(b+1)+2a(b+1)^2+b(-2+b-2b^2)\big)\sin(4\theta_1)}{(a-b)(b-1)(a-1)\big(1+2b-\cos(2\theta_1)\big)^3}\Big] = 0 \tag{18}$$

$[0,\pi]$上有五个临界点，

$$\theta_1 \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \arctan\frac{y_1}{x_1}, \pi - \arctan\frac{y_1}{x_1},$$

其中

$$x_1 = \frac{(b-1)\sqrt{b}}{\sqrt{1-2a+2a^2+2b-4ab+2a^2b-b^2-2ab^2+2b^3}},$$

and

$$y_1 = \frac{\sqrt{b+1}\sqrt{1-2a+2a^2-2ab+b^2}}{\sqrt{1-2a+2a^2+2b-4ab+2a^2b-b^2-2ab^2+2b^3}}.$$

函数 Q_1 在临界点处的取值为

$$Q_1(0) = 0, \qquad Q_1(\frac{\pi}{2}) = \frac{b}{b^2-1} > 0, \qquad Q_1(\pi) = 0,$$

并且，当 Q_1时，$(\arctan\frac{y_1}{x_1}) = Q_1(\pi - \arctan\frac{y_1}{x_1})$，且

$$Q_1(\arctan\frac{y_1}{x_1}) = \frac{b(b-1)^3}{4(a-1)(b-a)(b+1)\big(1+a^2+b(b-1)-a(b+1)\big)},$$

这些值均为非负数。

3.0.3 情况 2：($\theta_2 = \pi - \theta_1$)

这就是我们此前在 §3.0.1 中明确推导出的情形。

3.1 最佳秩一方向。

我们已经找到了最佳秩一方向，即使二阶导数取负值最大化的方向。我们知道，在最佳方向上，$\theta_2 = \pi - \theta_1$和 $\alpha(\theta_1) = \beta(\theta_1)$。我们有 $\delta = r^2$ 和 $\eta = s^2$。于是

$$\delta_1 = \frac{b\Big(b - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{b^2-\mu}\Big)}{\mu}, \qquad \eta_1 = \frac{b\Big(b - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{b^2-\mu}\Big)}{\mu}.$$

由于 $\alpha(\theta_1) = \beta(\theta_1)$，$r^2 = s^2$，且 $r = \pm s$。不失一般性，我们可以假设 $r = s$，因此，

$$r = s = \frac{b\Big(b - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{b^2-\mu}\Big)}{\mu} = \frac{\big(b^2 - b\sin^2(\theta_1)\big)}{b^2 - \sin^4(\theta_1)} = \frac{b\big(b - \sin^2(\theta_1)\big)}{(b - \sin^2(\theta_1))(b + \sin^2(\theta_1))}.$$

因此，$r = s = \frac{b}{(b+\text{正弦}^2(\theta_1))}$
并且

$$\mathbf{u}^t = \Big(\frac{\sqrt{2b\sin(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)}}{(b + \sin^2(\theta_1))},\ \frac{b\cos(\theta_1)}{(b + \sin^2(\theta_1))},\ \frac{b\sin(\theta_1)}{(b + \sin^2(\theta_1))}\Big), \tag{19}$$

$$\mathbf{v}^t = \Big(\frac{\sqrt{2b\sin(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)}}{(b + \sin^2(\theta_1))},\ -\frac{b\cos(\theta_1)}{(b + \sin^2(\theta_1))},\ \frac{b\sin(\theta_1)}{(b + \sin^2(\theta_1))}\Big), \tag{20}$$

并且，利用我们先前计算得到的值$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{v}$，可将其关于 a 和 b 写为$\mathbf{u} = \big(u_1, u_2, u_3\big), \mathbf{v} = \big(u_1, -u_2, u_3\big)$, 其中

$$u_1 = \frac{(b-1)}{\sqrt{2(b+1)(1+a+a^2+b(a-1)+b^2)}},$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{1+2a^2+b^2+2a(1+b)}{2(1+a+a^2+b(a-1)+b^2}}, \tag{21}$$

$$u_3 = \frac{(b-1)\sqrt{b}}{\sqrt{2(b+1)(1+a+a^2+b(a-1)+b^2)}}.$$

函数 Q 的最小值为

$$Min(\text{对角矩阵}(1,a,b)) = \frac{-b(b-1)^3}{4(a+1)(b+1)(a+b)(1+a+a^2+ab-b+b^2)}. \quad (22)$$

3.2 一个例子： $A = \text{对角矩阵}(1,\ 2,\ 4)$
那么 $B_0 = \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$，$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right)$，$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right)$.

$$A + tB_0 = \begin{bmatrix} 1+\frac{t}{30} & -\frac{t}{6} & \frac{t}{15} \\ \frac{t}{6} & 2-\frac{5t}{6} & \frac{t}{3} \\ \frac{t}{15} & -\frac{t}{3} & 4+\frac{2t}{15} \end{bmatrix}.$$

如果 $K = (A+tB_0)^t(A+tB_0)$，那么特征方程为

$$-\lambda^3 + \left(21 - \frac{11t}{5} + t^2\right)\lambda^2 + \left(-84 + 50t - \frac{1121t^2}{100}\right)\lambda + \left(64 - \frac{224t}{5} + \frac{196t^2}{25}\right) = 0.$$

利用泰勒级数，矩阵 K 的特征值（在 0 附近的一个区间内）的前三项等于

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= 1 + \frac{1}{15}t + \frac{1}{60}t^2 + O(t^3), \\ \lambda_2(t) &= 4 - \frac{10}{3}t + \frac{29}{36}t^2 + O(t^3), \\ \lambda_3(t) &= 16 + \frac{16}{15}t + \frac{8}{45}t^2 + O(t^3), \end{aligned}$$

线性畸变为 $H(A+tB_0) = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}(t)\,(t)}$。

$$H(A+tB_0) = \sqrt{\frac{\lambda_3(t)}{\lambda_1(t)}} = \sqrt{\frac{16 + \frac{16t}{15} + \frac{8t^2}{45}}{1 + \frac{t}{15} + \frac{t^2}{60}}} = 4 - \frac{1}{90}t^2 + O(t^3).$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} H(A + t\,B) = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\Big|_{t=0} H(A + t\,B) = -\frac{1}{90}.$$

图 6 还展示了特征值交叉处光滑性和凹性的丧失。

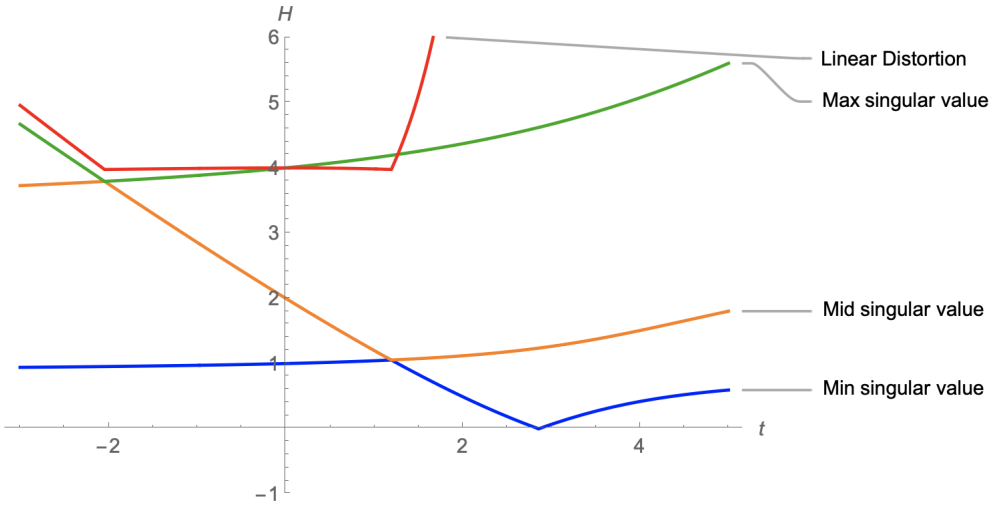

图 6. 矩阵 $K=(A+tB_0)^t(A+tB_0)$ 的特征值，其中$A=(1,2,4)$，且 B_0 是最优方向。

4 求解问题2。

设 $A=\mathrm{diag}(1,\ a,\ b)$，其中 $1<a<b$，并假设 $\mathbb{R}^3$ 中的$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$满足$\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|=1$，从而 $B_0=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}^t$ 是问题 1 的一个解。我们希望求出；

1. $\mathbf{t}_+>0$ 和 $\mathbf{t}_-<0$ 的绝对值最大，使得 $H(A+t\,B_0)$ 是 t 在区间 $\mathbf{t}_-<t<\mathbf{t}_+$ 上的光滑函数，并且

2. 对于所有满足以下条件的秩一矩阵 B

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}H(A+t\,B)=0,\quad\text{and}\quad\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=0}H(A+t\,B)<0,$$

对于所有 $t>0$，我们有

$$H(A+tB)\geq\max\{H(A+\mathbf{t}_-B_0),H(A+\mathbf{t}_+B_0)\}.$$

我们找到的值 $\mathbf{t}_-$ 和 $\mathbf{t}_+$ 是 $A+tB_0$ 的奇异值发生交叉的位置。因此，我们将 $H(A+tB_0)$ 的特征值方程的判别式识别为特征值发生横截交叉的位置，这意味着 H 失去

光滑性。两个向量$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 见式 (21)。特征方程 $\det((A+tB_0)^t(A+tB_0) - \lambda I) = 0$ 为:

$$
\begin{aligned}
&\det(K-\lambda I) = \\
&\frac{b^2\Big(2a^3(b+1)+2a^2(b+1)(b-t+1)+2a(b^3-4bt+1)-(b^3+b^2+b+1)t\Big)^2}{4(b+1)^2\big(a^2+ab+a+b^2-b+1\big)^2} - \\
&\frac{1}{4(b+1)^2\big(a^2+ab+a+b^2-b+1\big)^2}\Big[4a^6(b+1)^2(1+b^2)+8a^5(b+1)^2(1+b^2)(1+b-t)+ \\
&8b^6(t-2)t+t^2+4bt^2+4b^7t(t+2)-4b^3t(3t+4)+2b^4t(15t+4)+4b^2(1+2t+2t^2)+ \\
&b^8(t^2+4)-4b^5(3t^2-2t-2)+4a^4(b+1)\Big(3+3b^5-3b^4(t-1)-3t+t^2+b(t^2-10t+3)+ \\
&b^3(t^2-10t+7)+b^2(t^2-6t+7)\Big)-2a(b+1)\Big(2b^7t-(t-2)t-3b^4(t-2)-8bt^2+b^3(-8t^2+ \\
&6t-4)-b^6(t^2+4)-4b^5(2t^2+1)-b^2(3t^2+4)\Big)+4a^3(b+1)\Big(2+2b^6+b^5(2-4t)-4t+t^2+ \\
&b^4(t^2-8t+4)+2b^2(t^2-6t+2)+2b^3(3t^2-6t+4)+b(6t^2-8t+2)\Big)+a^2(b+1)\Big(4+4b^7- \\
&8t+5t^2-4b^6(2t+1)+b^5(5t^2-28t+20)+2b^3(11t^2-36t+6)+b(21t^2-28t-4)+b^4(12+ \\
&8t+21t^2)+b^2(20+8t+22t^2)\Big)\Big]\lambda+\frac{1}{(b+1)(1+a+a^2-b+ab+b^2)}\Big[1+b^5+a^4(b+1)+ \\
&a^3(b+1)(1+b-2t)+b^3(t-1)^2+t-2bt+b^4t+t^2+b^2(1+2b)+a(1+b)(1+b+b^2+ \\
&b^3-t-b^2t+t^2+bt^2)+a^2(b+1)\big(2+2b^2-2t+t^2-b(1+2t)\big)\Big]\lambda^2-\lambda^3=0.
\end{aligned}
$$

虽然该多项式关于 λ 是三次的，但关于 t 只是二次的——这是行列式的雅可比恒等式所带来的结果。这个特征方程必须有三个非负实根。为了避免求解这些方程，我们使用一种代数技巧：上述方程在 t 中有一个根，意味着特征方程有一个重根。

定理6 特征多项式

$$\det((A+tB_0)^t(A+tB_0)-\lambda I)=0$$

作为关于 t 的多项式，恰有两个实根。

W我们在 t 中写出这个方程。值得注意的是,

t 中的八次判别式方程有一个简单的重复二次因子 $P(t)$，等于

$$\big(-1-a-2a^2-4b-7ab-4a^2b+2b^2-7ab^2-2a^2b^2-4b^3-ab^3-b^4\big)\,t^2+$$
$$\big(-1+2a+a^2+4a^3-6b-4ab+7a^2b+8a^3b-b^2-12ab^2+7a^2b^2+4a^3b^2-$$
$$b^3-4ab^3+a^2b^3-6b^4+2ab^4-b^5\big)\,t-2\big(-a+a^4+b-ab-2a^2b$$
$$+2a^4b+b^2+2ab^2-4a^2b^2+a^4b^2+2ab^3-2a^2b^3+b^4-ab^4+b^5-ab^5\big)$$

四次多项式余项的判别式在 t 中等于

$$256(a+1)^2(b-1)^{12}b(b+1)^7(a+b)^2\left(a^2+ab+a+b^2-b+1\right)^6\left(2a^2+2a(b+1)+b^2+1\right)$$
$$\cdot\left(27a^6\left(b^3+b^2+b+1\right)+54a^5(b+1)^2\left(b^2+b+1\right)+9a^4\left(7b^5+27b^4+56b^3+56b^2+27b+7\right)\right.$$
$$+3a^2+4a^3\left(b^2+b+1\right)^2\left(11b^2+38b+11\right)+\left(7b^7+46b^6+99b^5+118b^4+118b^3+99b^2+46b+7\right)$$
$$+6a(b+1)^2\left(b^6+6b^5+3b^4+7b^3+3b^2+6b+1\right)$$
$$\left.+b^9+6b^8+18b^7+8b^6+21b^5+21b^4+8b^3+18b^2+6b+1\right)^3$$

该值严格为正。二阶导数的判别式为负，因此没有实根，由此可知该四次多项式不可能有四个实根，因此它没有实根。

推论 1 特征值的正则分支在 $(A+tB_0)^t(A+tB_0)$处交叉两次。

事实上，这些交叉是横截的，因此 $H(A+tB_0)$ 在那里将失去光滑性。我们并不需要这一结果，但可以根据下面的内容通过冗长的计算加以证明，因为我们将计算这些交叉点。我们有

$$\mathrm{Disc.}[\det((\mathrm{A}+\mathrm{tB_0})^{\mathrm{t}}(\mathrm{A}+\mathrm{tB_0})-\lambda\mathrm{I})]=\frac{\mathrm{P(t)^2R(t)}}{16(\mathrm{b}+1)^5(1+\mathrm{a}+\mathrm{a}^2-\mathrm{b}+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)^5}\ ,$$

其中 $R(t)>0$。 $P(t)$ 的判别式为

$$\Delta=(b^2-1)^2\Big[1+4b+6b^3+4b^5+b^6+4a(b+1)\big(b^4+3b^3+3b+1\big)$$
$$+4a^3(b+1)\big(3+(2+3b)\big)+2a^2(1+b+b^2)\big(5+b(6+5b)\big)+a^4\big(9+b(9b-2)\big)\Big],$$

显然它为正。因此， $P(t)$ 有两个实根，考察系数可知这两个根异号。记这两个根为

$\mathbf{t}_+ > 0$ 和 $\mathbf{t}_- < 0$。我们计算得

$$\mathbf{t}_+ = \frac{G_1(a,b) - (b^2-1)\sqrt{J_1(a,b)}}{2(-1-a-2a^2-4b-7ab-4a^2b+2b^2-7ab^2-2a^2b^2-4b^3-ab^3-b^4)},$$

$$\mathbf{t}_- = \frac{G_1(a,b) + (b^2-1)\sqrt{J_1(a,b)}}{2(-1-a-2a^2-4b-7ab-4a^2b+2b^2-7ab^2-2a^2b^2-4b^3-ab^3-b^4)},$$

where,

$$\begin{aligned} G_1(a,b) =& 1-2a-a^2-4a^3+6b+4ab-7a^2b-8a^3b+b^2+12ab^2-7a^2b^2- \\ & 4a^3b^2+b^3+4ab^3-a^2b^3+6b^4-2ab^4+b^5, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} J_1(a,b) =& 1+4a+10a^2+12a^3+9a^4+4b+16ab+22a^2b+20a^3b-2a^4b+ \\ & 12ab^2+32a^2b^2+20a^3b^2+9a^4b^2+6b^3+12ab^3+22a^2b^3+12a^3b^3+ \\ & 16ab^4+10a^2b^4+4b^5+4ab^5+b^6. \end{aligned}$$

将特征方程写为

$$D_1\lambda^3 + C_1\lambda^2 + B_1\lambda + A_1 = 0, \tag{23}$$

其中

$$D_1 = -4(b+1)^2\big(1+a+a^2+(a-1)b+b^2\big)^2,$$

$$\begin{aligned} C_1 =& 4(b+1)\big(1+a+a^2+(a-1)b+b^2\big)\Big(1+b^2+b^3+b^5+a^4(b+1)+a^3(b+1) \\ & (1+b-2t)+(b-1)^2(b^2+1)t+(b^3+1)t^2+a^2(b+1)\big(2-b+2b^2-2(b+1)t+ \\ & t^2\big)+a(b+1)\big(1+b+b^2+b^3-(b^2+1)t+(b+1)t^2\big)\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 =& -4a^6(b+1)^2(b^2+1)-4(b^4+b)^2-8a^5(1+b)^2(b^2+1)(1+b-t)-8b^2(b-1)^2 \\ & (b^3+1)t-\Big[1+b\Big(4+b\big[8+b\big(-12+b(30+b(-12+b(8+4(4+b)))))\big]\Big)\Big]+ \\ & 4a^4(b+1)\Big(-(b+1)(3+7b^2+3b^4)+(b+3)(3b+1)(b^2+1)t-(b+1)(b^2+1)t^2\Big)+ \\ & 4a^3(b+1)\Big(-2\big(1+b+b^2(b+1)(2+2b+b^3)\big)+4(b+1)(b^2+1)(1+b+b^2)t- \\ & (b^2+1)(1+b(6+b))t^2\Big)+a^2(b+1)\Big[-4(b+1)(b^2+1)\Big(1+b\big(-2+b(6+ \\ & (-2+b)b)\big)\Big)+4\Big(2+b\Big(7+b\Big[-2+b\Big(18+b\big(-2+b(7+2b)\big)\Big)\Big]\Big)\Big)t-(1+b) \\ & \Big(5+b\Big(16+b\big(9+b(16+5b)\big)\Big)\Big)t^2\Big]+2a(b+1)\Big[-4(b^2+b^3+b^5+b^6)+2t \\ & \big(1+b^3(3+3b+b^4)\big)-\Big(1+b\Big(8+b\Big(3+b\big(8+b(3+b(8+b))\big)\Big)\Big)\Big)t^2\Big], \end{aligned}$$

$$A_1 = b^2\Big(2a^3(b+1)+2a^2(b+1)(1+b-t)-(b+1)(b^2+1)t+2a(1+b^3-4bt)\Big)^2.$$

（23）的根为

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= Z(a,b,t) - \frac{2^{\frac{1}{3}} \times Y(a,b,t)}{3 \times X(a,b,t)} + \frac{X(a,b,t)}{3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times D_1}, \\
\lambda_2 &= Z(a,b,t) + \frac{\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \times 2^{\frac{1}{3}} \times Y(a,b,t)}{3 \times X(a,b,t)} - \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times X(a,b,t)}{3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times D_1}, \\
\lambda_3 &= Z(a,b,t) + \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times 2^{\frac{1}{3}} \times Y(a,b,t)}{3 \times X(a,b,t)} - \frac{\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \times X(a,b,t)}{3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times D_1}
\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned}
X(a,b,t) &= \Big(-2C_1^3 + 9B_1C_1D_1 - 27A_1D_1 \\
&\quad + \sqrt{-4\big(C_1^2 - 3B_1D_1\big)^3 + \big(2C_1^3 - 9B_1C_1D_1 + 27A_1D_1^2\big)^2} \Big)^{\frac{1}{3}}, \\
Y(a,b,t) &= \frac{(-C_1^2 + 3B_1D_1)}{D_1} \\
Z(a,b,t) &= -\frac{C_1}{3D_1}.
\end{aligned}$$

矩阵 $A + tB_0$ 的线性畸变为：

$$H(A + tB_0) = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}. \tag{25}$$

现在我们可以求解这个问题了。给定 $1 < a < b$，我们按照式 (21) 求出B_0，并计算 $H(A + \mathbf{t}_+B_0)$ 和 $H(A + \mathbf{t}_-B_0)$。二者都小于 $b = H(A)$。

接续前面关于 $A =$对角矩阵(1，2，4) 的示例，我们计算得

$$H(A) = 4, \quad \mathbf{t}_+ = 1.19219, \quad \mathbf{t}_- = -2.04584,$$
$$H(A + \mathbf{t}_+B_0) = 3.97539, \quad H(A + \mathbf{t}_-B_0) = 3.97539.$$

因此，对于所有 $t \in (-2.04484,\ 1.19219)$，我们都有 $H(A + tB_0) < H(A)$。这个例子值得注意，因为 $H(A + \mathbf{t}_+B_0) = H(A + \mathbf{t}_-B_0)$。一般而言，这并非总是成立，但在我们认为达到极值的情形中似乎如此。

5 Iwaniec构造

这里我们简要概述这一构造。我们有 $B = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$。考虑$\mathbf{T_0}(x) = Ax$，对于 $\nu = 1, 2, ...$，我们通过方程定义一个序列 $\{\mathbf{T}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$

$$\mathbf{T}_\nu(x) = Ax\frac{1}{\nu}\, h\,(\nu \mathbf{u}\cdot x)\mathbf{v}$$

其中 h 是一个定义在实数轴上的周期分段线性函数，如图7所示。

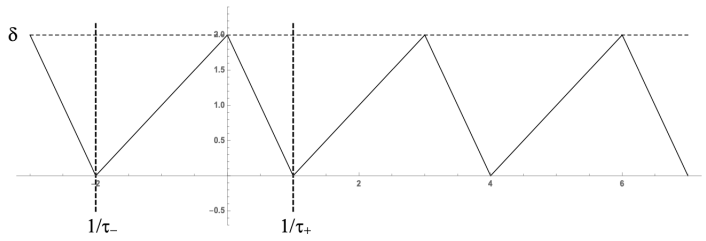

图7。 锯齿函数 给定引理中的$\mathbf{t}_- < 0$ 和$\mathbf{t}_+ > 0$ ，我们定义

$$h(r) = \begin{cases} \mathbf{t}_- r & \frac{i}{\mathbf{t}_+} - \frac{i-1}{\mathbf{t}_-} \leq r \leq \frac{i}{\mathbf{t}_+} - \frac{i}{\mathbf{t}_-}, \\ \mathbf{t}_+ r & \frac{i}{\mathbf{t}_+} - \frac{i}{\mathbf{t}_-} \leq r \leq \frac{i+1}{\mathbf{t}_+} - \frac{i}{\mathbf{t}_-}, \end{cases}$$

对任意整数 i。然后我们可以将 h 延拓到整条实数轴上（锯齿函数）。函数 h 是一个有界Lipschitz函数，其导数仅取$\mathbf{t}_-$ 和$\mathbf{t}_+$这两个值。序列 $\{\mathbf{T}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ 一致收敛到$\mathbf{T_0}$。$\mathbf{T}_\nu$ 的导数也仅取两个值，除去其未定义的可数个点外，这两个值均与 ν无关。

$$D\mathbf{T}_\nu = A + h'(\nu \mathbf{u}\cdot x)\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} = A + h'(\nu\langle \mathbf{u}, x\rangle)B \in \{A - \mathbf{t}_- B, A + \mathbf{t}_+ B\}.$$

无论哪种情况， $D\mathbf{T}_\nu(x)$的线性畸变都等于 H，

$$H = \max\{H(A + \mathbf{t}_- B_0), H(A + \mathbf{t}_+ B_0)\}$$

Iwaniec论证现在证明了我们的第一定理。我们指出，序列 $\{h'(\nu\langle \mathbf{u}\ x\rangle)\}_{\nu=1}^{\infty}$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 中弱收敛到 0（当 $\nu \longrightarrow \infty$ 时），但并非几乎处处逐点收敛。

5.1 高维。

在 n 维空间中，很难找出最优的秩一方向，因为 $A+tB$ 的特征方程非常复杂。不过，显然，只要按照规则（见 [6]）扩展矩阵 A 和 B，上述论证在高维情形下同样成立。

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0\\0&a&0&0&\cdots&0\\0&0&b&0&\cdots&0\\0&0&0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&a\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad B=\begin{bmatrix}B_0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

6 界。

对于 $A=$对角矩阵$(1,a,b)$，我们可以将所有内容都明确地表示为 a 和b的形式，尽管表达式可能很复杂，因此我们可以探究最大跳跃出现的位置以及数值 $\sqrt{2}$ 的来源。我们考察 $A=$对角矩阵$(1,c,f(c))$，并确定作为 c的函数的最优方向和最大跳跃。图 8 和图 9 展示了在下文中对多种 f 取值的计算结果。这些计算直接促成了这样一个猜想：当 $A=$对角矩阵$(1,c,c^2)$ 且 c 较大时，这一跳跃最大。值得注意的是，这正是 Iwaniec 考虑过的例子，尽管他没有找到最优方向。

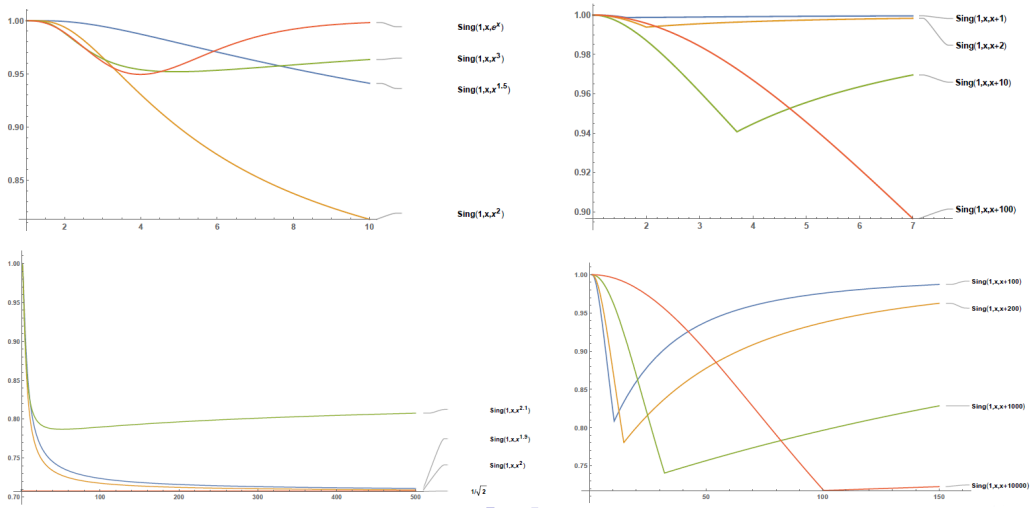

图 8 跳跃： $1 << a << b$ 最优方向为

图 9 跳跃 $|a-b|$ 有界。

$$B_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2+1} - \frac{1}{2(c-1)c+2} & -\frac{\left(c^2-1\right)\sqrt{\frac{c}{(c-1)c+1}+1}}{2\sqrt{(c+1)^2((c-1)c+1)(c^2+1)}} & \frac{(c-1)^2\sqrt{c^2}}{2((c-1)c+1)(c^2+1)} \\ \frac{\left(c^2-1\right)\sqrt{\frac{c}{(c-1)c+1}+1}}{2\sqrt{(c+1)^2((c-1)c+1)(c^2+1)}} & -\frac{c^2+1}{2(c-1)c+2} & \frac{\sqrt{c^2}\left(c^2-1\right)\sqrt{\frac{c}{(c-1)c+1}+1}}{2\sqrt{(c^2+1)(c^4+c^3+c+1)}} \\ \frac{(c-1)^2\sqrt{c^2}}{2((c-1)c+1)(c^2+1)} & -\frac{\sqrt{c^2}\left(c^2-1\right)\sqrt{\frac{c}{(c-1)c+1}+1}}{2\sqrt{(c+1)^2((c-1)c+1)(c^2+1)}} & \frac{(c-1)^2c^2}{2((c-1)c+1)(c^2+1)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_+ = \frac{(c-1)\left(c^2+1\right)\left(-c^6+2c^5-5c^4+5c^2+(c+1)^2\sqrt{\left(c^2+1\right)\left(\left(c\left(c^3+7c-8\right)+7\right)c^2+1\right)}-2c+1\right)}{2\left(\left(c^5+6c^3+c^2+c+6\right)c^2+1\right)}$$

$$\mathbf{t}_- = -\frac{(c-1)\left(c^2+1\right)\left(c^6-2c^5+5c^4-5c^2+(c+1)^2\sqrt{\left(c^2+1\right)\left(\left(c\left(c^3+7c-8\right)+7\right)c^2+1\right)}+2c-1\right)}{2\left(\left(c^5+6c^3+c^2+c+6\right)c^2+1\right)}$$

利用这些值，可以显式计算 $A+\mathbf{t}_\pm B_0$ 的奇异值，然后计算 $H(A+\mathbf{t}_\pm B_0)$。 $H(A+\mathbf{t}_\pm B_0)$的公式长达数页，这里不再列出。不过，它只涉及 c 中的低次 Laurent 多项式（次数为 18）、8 次多项式的平方根以及一个立方根。因此，利用常用的技巧，可以直接计算 $c \to \infty$ 时的极限。我们也用 Mathematica 检验了结果，几分钟内便得到了极限。取上述的 A、B_0 和$\mathbf{t}_\pm$，我们得到

$$\lim_{c\to\infty} \frac{H(A+\mathbf{t}_\pm B_0)}{c^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{26}$$

这就是我们的第二定理。

参考文献

[1] F.W. Gehring 和 T. Iwaniec，有限畸变映射的极限，芬兰科学院学报，**24**，(1999)，253–264

[2] F.W.Gehring 和 G.J. Martin，离散拟共形群。*I.* 伦敦数学会会刊，**55**，（1987），331–358。

[3] F.W.Gehring、G.J. Martin和B.P. Palka，高维拟共形映射理论导论。《数学调查与专著》第216卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017年。ix+430页。ISBN：978-0-8218-4360-4。

[4] S.M. Hashemi，线性畸变函数下半连续性的普遍失效。博士论文，梅西大学，2020年。[5] J. Heinonen和P. Koskela，拟共形性的定义，《数学发明》，**120**，（1995年），61–79。[6] T. Iwaniec，线性伸缩下半连续性的失效，《伦敦数学学会通报》，**30**，1998年，55–61。[7] T. Iwaniec和G. J. Martin，几何函数论与非线性分析。《牛津数学专著》。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2001年。xvi+552。ISBN：0-19-850929-4[8] S.M. Hashemi和G.J. Martin，变形的新模型：线性畸变与秩一凸性的失效，“数学促进产业”论坛论文集，2019年：81–98。[9] J. V¨ais¨al¨a，关于 n维拟共形映射的讲义。《数学讲义》第**229**卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1971年。xiv+144 页。高等研究院，梅西大学，奥克兰，新西兰。

e电子邮件：g.j.martin@massey.ac.nz