arXiv:2302.01460v1 [math.FA] 2 Feb 2023

由线性算子生成的多项式代数

F. ZAJ 和 M. Abtahi*

Abstract. 设 E 为巴拿赫空间， A 为含幺交换巴拿赫代数。令 $\mathrm{P}(E,A)$ 表示 A 值多项式在 E 上的空间，该空间由有界线性算子生成（$\mathrm{P}(E,A)$ 中的一个 n次齐次多项式具有 $P=\sum_{i=1}^{\infty}T_i^n$的形式，其中 $T_i:\ E\to A(1\le i<\infty)$ 为有界线性算子，且 $\sum_{i=1}^{\infty}\|T_i\|^n<\infty$）。对于 E中的紧集 K ，记 $\mathfrak{b}(K,A)$ 为多项式 P在 $\mathscr{C}(K,A)$ 中的限制 $P|_K$的闭包，其中这些多项式属于 $\mathrm{P}(E,A)$。已证明，$\mathrm{P}(K,A)$ 是一个 A值一致代数，并且在一定条件下，它与内射张量积 $\mathcal{P}_N(K)\hat{\otimes}_\epsilon A$ 等距同构，其中 $\mathcal{P}_N(K)$ 是由核标量值多项式在 K 上生成的一致代数。随后，$\mathrm{P}(K,A)$ 的特征空间被确定为 $\hat{K}_N\times\mathfrak{M}(A)$，其中 $\hat{K}_N$ 是 E中 K 的核多项式凸包，而 $\mathfrak{M}(A)$ 是 A的特征空间。

1. Introduction

设 E 为一个巴拿赫空间， A 为复数域 $\mathbb{C}$上的交换含幺巴拿赫代数。对于 E中的紧集 K，令 $\mathscr{C}(K,A)$ 表示所有连续函数 $f:\ K\to A$ 所构成的代数，并赋予一致范数

$$\|f\|_K=\sup\{\|f(x)\|:x\in K\}. \tag{1.1}$$

当 $A=\mathbb{C}$时，我们用 $\mathscr{C}(K)$ 代替 $\mathscr{C}(K,\mathbb{C})$。

给定元素 $a\in A$，同样记号 a 也用于表示由 $a(x)=a$给出的常函数，其中对所有 $x\in K$均成立，并且将 A 视为 $\mathscr{C}(K,A)$ 的闭子代数。我们用 $\mathbf{1}$ 表示 A 的单位元，并将 $\mathbb{C}$与 A中的闭子代数 $\mathbb{C}\mathbf{1}=\{\alpha\mathbf{1}:\ \alpha\in\mathbb{C}\}$ 等同。因此，每个函数 $f\in\mathscr{C}(K)$ 都可以看作 A值函数 $x\mapsto f(x)\mathbf{1}$。对于这个 A值函数，我们仍使用记号 f ，并将 $\mathscr{C}(K)$视为 $\mathscr{C}(K,A)$ 的闭子代数。所谓 K上的 A值一致代数，是指 $\mathscr{C}(K,A)$ 的一个闭子代数 $\boldsymbol{A}$，它包含常函数并且分离 K中的点；参见 [1, 12]。关于复函数代数的全面讨论见 [5, 第 4] 章。

我们主要关注在与 A 的特征复合下保持不变的 A 值一致代数：若一个 A 值一致代数 $\boldsymbol{A}$ 在 $\phi\circ f\in\boldsymbol{A}$ 时满足 $f\in\boldsymbol{A}$ 和 ϕ，则称其为可容许的，其中 $A\to\mathbb{C}$ 是 A 的一个特征。回顾一下，特征就是一个非零乘法线性泛函。记为 $\mathfrak{M}(A)$ 的 A 的所有特征的集合，配备盖尔范德拓扑后，是一个紧豪斯多夫空间。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46G26，46J10，46H60，46J20。

Key words and phrases. 向量值一致代数，巴拿赫空间上的多项式，核多项式，多项式凸性，张量积。

* 通讯作者（abtahi@du.ac.ir）。

当 $\boldsymbol{A}$ 可容许时，我们令 $\mathfrak{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中由标量值函数组成的子代数；也就是说，$\mathfrak{A} = \boldsymbol{A} \cap \mathscr{C}(K)$。此时，对每个 $\phi \in \mathfrak{M}(A)$，都有 $\mathfrak{A} = \{\phi \circ f\colon\ f \in \boldsymbol{A}\}$。代数 $\mathscr{C}(K, A)$ 是可容许的，且 $\mathfrak{A} = \mathscr{C}(K)$。众所周知，$\mathscr{C}(K, A)$ 与内射张量积 $\mathscr{C}(K) \hat{\otimes}_\epsilon A$ 等距同构，并且 $\mathfrak{M}(\mathscr{C}(K, A)) = K \times \mathfrak{M}(A)$；参见 [8]。一般而言，给定一个可容许的 A 值一致代数 $\boldsymbol{A}$，自然会问，类似的等式 $\boldsymbol{A} = \mathfrak{A} \hat{\otimes}_\epsilon A$ 和 $\mathfrak{M}(\boldsymbol{A}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) \times \mathfrak{M}(A)$ 是否成立。本文研究由线性算子生成的某类 A 值一致代数中的这些问题。

注 1.1. 对于一个可容许的 A 值一致代数 $\boldsymbol{A}$，若 $\mathfrak{A} = \mathscr{C}(K) \cap \boldsymbol{A}$，令 $\mathfrak{A}A$ 表示由 $\mathfrak{A} \cup A$ 生成的 $\boldsymbol{A}$ 的子代数。事实上，$\mathfrak{A}A$ 由形如 $f = f_1 a_1 + \cdots + f_n a_n$ 的元素组成，其中 $f_i \in \mathfrak{A}$ 且 $a_i \in A$，对于 $1 \leq i \leq n$、$n \in \mathbb{N}$。以下陈述是等价的。

(1) $\boldsymbol{A} = \mathfrak{A} \hat{\otimes}_\epsilon A$ （等距同构）。（2）子代数 $\mathfrak{A}A$ 在 $\boldsymbol{A}$ 中稠密。

事实上，映射 $\Lambda_0\colon\ f \otimes a \mapsto fa$ 将 $\mathfrak{A} \otimes A$ 同态映射到 $\mathfrak{A}A$ 上，并利用 Hahn-Banach 定理，我们有

$$\begin{aligned}\Big\|\Lambda_0\Big(\sum_{i=1}^n f_i \otimes a_i\Big)\Big\|_K &= \sup_{x\in K}\Big\|\sum_{i=1}^n f_i(x)a_i\Big\| = \sup_{x\in K}\sup_{\phi\in A_1^*}\Big|\sum_{i=1}^n f_i(x)\phi(a_i)\Big| \\ &= \sup_{\phi\in A_1^*}\Big\|\sum_{i=1}^n f_i(\cdot)\phi(a_i)\Big\|_K = \sup_{\phi\in A_1^*}\sup_{\psi\in\mathfrak{A}_1^*}\Big|\psi\Big(\sum_{i=1}^n f_i(\cdot)\phi(a_i)\Big)\Big| \\ &= \sup_{\psi\in\mathfrak{A}_1^*}\sup_{\phi\in A_1^*}\Big|\sum_{i=1}^n \psi(f_i)\phi(a_i)\Big| = \Big\|\sum_{i=1}^n f_i \otimes a_i\Big\|_\epsilon,\end{aligned}$$

其中，$\mathfrak{A}_1^*$ 和 A_1^* 分别表示 $\mathfrak{A}^*$ 和 A^* 的单位球。因此，Λ_0 延拓为从 $\mathfrak{A} \hat{\otimes}_\epsilon A$ 到 $\overline{\mathfrak{A}A}$ 上的等距映射。给定 $f \in \mathfrak{A}$ 和 $a \in A$，我们可以将 A 值函数 fa 与初等张量 $f \otimes a$ 等同起来。

注 1.2 ([10])。总可以在巴拿赫空间 E 上定义一种乘法 $(a, b) \mapsto ab$，使其成为含幺代数。事实上，取一个非零泛函 $\psi \in E^*$ 和一个向量 $e \in E$，使得 $\psi(e) \neq 0$ 且 $\|e\| = 1$。于是 $E = \ker\psi \oplus \mathbb{C}e$。对于 $a, b \in E$，写作 $a = x + \psi(a)e$ 和 $b = y + \psi(b)e$，其中 $x, y \in \ker\psi$，并定义 $ab = \psi(b)x + \psi(a)y + \psi(a)\psi(b)e$。这样一来，$E$ 就成为以 e 为单位元的代数。在 E 上定义范数 $\|a\|_1 = |\psi(a)| + \|x\|$，其中 $a = x + \psi(a)e$。那么，$\|\cdot\|_1$ 是 E 上的等价范数，使其成为交换含幺巴拿赫代数。由此可见，即使巴拿赫空间 E 最初并未假定为代数，我们也可以将 $\mathscr{C}(K, E)$ 视为巴拿赫代数。

本文研究由有界线性算子 $T\colon\ E \to A$ 生成的、定义在 E 上的所有 A 值多项式构成的空间 $\mathrm{P}(E, A)$。根据定义，$\mathrm{P}(E, A)$ 中的一个 n 次齐次多项式 P 具有如下形式：$P = \sum_{i=1}^\infty T_i^n$，其中 (T_i) 是一列从 E 到 A 的有界线性算子，且满足 $\sum_{i=1}^\infty \|T_i\|^n < \infty$。这类多项式最早在 [10] 中引入，并在 [7] 中得到进一步研究。对于 E 中的一个紧集 K，我们令 $\mathrm{P}(K, A)$ 为多项式 $P \in \mathrm{P}(E, A)$ 在 $\mathscr{C}(K, A)$ 中的限制 $P|_K$ 所构成的闭包。已证明，$\mathrm{P}(K, A)$ 是定义在 K 上的一个可容许的 A 值一致代数，其中 $\mathfrak{A} = \mathcal{P}_N(K)$；$\mathcal{P}_N(K)$ 表示由核多项式生成的定义在 K 上的（复）一致代数。事实上，$f \in$

当且仅当存在一列定义在 E 上的核标量值多项式 (P_k)，使得 $P_k \to f$ 在 K上一致成立。我们证明以下命题等价。

(i) $\mathbb{b}(K,A) = \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon A$，对所有巴拿赫代数 A，(ii) $\mathbb{b}(K,E) = \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon E$（见注 1.2），(iii) $I \in \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon E$，其中 $I: E \to E$是恒等算子。

在这种情况下，特征空间 $\mathfrak{M}(\mathbb{b}(K,A))$ 与 $\hat{} K_N \times \mathfrak{M}(A)$ 等同，其中 $\hat{} K_N$ 表示 E 中 K 的核多项式凸包。

2. 由线性算子生成的多项式代数

首先，让我们回顾巴拿赫空间上的多项式理论中的基本定义、记号和一些结果。关于全面的论述，请参阅 [6], [11] 和 [13]。

设 E 和 F 是定义在 $\mathbb{C}$上的巴拿赫空间。所有连续对称n-线性算子 $T: E^n \to F$所构成的空间记为 $\mathcal{L}_s({}^nE,F)$。对于 $T \in \mathcal{L}_s({}^nE,F)$，定义 $\hat{}T(x) = T(x,\ldots,x)$，$x \in E$。若映射 $P: E \to F$ 满足：对于某个 $T \in \mathcal{L}_s({}^nE,F)$，有 $P = T$，则称其为 n-齐次多项式 $\hat{}$。为方便起见，0-齐次多项式定义为从 E 到 F的常值映射。从 E到 F的所有 n-齐次多项式构成的向量空间记为 $\mathcal{P}({}^nE,F)$。当 $F = \mathbb{C}$ 时，使用简写记号 $\mathcal{P}({}^nE)$。在 $\mathcal{P}({}^nE,F)$上定义的范数为

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \le 1\},\ P \in \mathcal{P}({}^nE,F). \tag{2.1}$$

P（以及相应的对称 n-线性算子 T）的连续性等价于 $\|P\|$有限。给定一个 n-齐次多项式 $P \in \mathcal{P}({}^nE,F)$，产生 P 的对称 n-线性映射 T 可通过若干种极化公式中的任意一种恢复；

$$T(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\epsilon_j=\pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n P\Big(\sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j\Big). \tag{2.2}$$

作为特例，对于 a、$b \in A$ 和 m、$n \in \mathbb{N}$，我们得到

$$a^m b^n = \frac{1}{2^{m+n}(m+n)!} \sum_{\epsilon_\ell=\pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_{m+n} \Big(\sum_{\ell=1}^m \epsilon_\ell a + \sum_{\ell=m+1}^{m+n} \epsilon_\ell b\Big)^{m+n}. \tag{2.3}$$

因此，n-齐次多项式与对称 n-线性算子一一对应，而极化不等式 $\|P\| \le \|T\| \le \frac{n^n}{n!}\|P\|$表明这些空间是同构的；参见 [6, 推论 1.7 和命题 1.8]。

记号。设 $T \in \mathcal{L}_s({}^nE,F)$ 且 $x,y \in E$。对于 $0 \le k \le n$，令

$$T(x^k,y^{n-k}) = T(\underbrace{x,x,\ldots,x}_{k \text{ times}},\underbrace{y,y,\ldots,y}_{n-k \text{ times}}). \tag{2.4}$$

那么，由 [11, 定理 1.8], 可得莱布尼茨公式

$$T\big((x+y)^n\big) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T(x^k,y^{n-k}). \tag{2.5}$$

2.1. 由线性算子生成的 A值一致代数。接下来，我们只考虑巴拿赫代数值多项式。设 A 为含幺交换巴拿赫代数，其单位元为 1。采用 [10], 中的记号，我们用 $\mathbb{b}(^nE, A)$表示定义在 E 上的 n齐次 A值多项式空间，其形式为

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(x)^n,\ x \in E, \tag{2.6}$$

其中，(T_i) 是 $\mathcal{L}(E, A)$ 中的一个序列，满足 $\sum_{i=1}^{\infty} \|T_i\|^n < \infty$。在 $\mathbb{b}(^nE, A)$ 上定义范数为

$$|||P||| = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \|T_i\|^n : P = \sum_{i=1}^{\infty} T_i^n\Big\}, \tag{2.7}$$

其中，下确界取遍 P 在 (2.6) 中的所有可能表示。容易验证，$|||\cdot|||$ 是一个范数，并且对所有 $P \in \mathbb{b}(^nE, A)$，都有 $\|P\| \le |||P|||$。下面说明，关于此范数的收敛蕴含在紧集上的一致收敛。

命题 2.1. 设 K 是 E 中的一个紧集。那么，存在 $M > 0$ 使得

$$\|P\|_K \le M^n |||P|||,\ P \in \mathbb{b}(^nE, A). \tag{2.8}$$

因此，(2.6) 中的级数在 K 上一致收敛。

证明。由于 K 是紧集，存在常数 M 使得对所有 $x \in K$ 都有 $\|x\| \le M$。因此，对每个 $x \in K$ 和 $T \in \mathcal{L}(E, A)$，都有 $\|Tx\| \le M\|T\|$。若多项式 P 由 (2.6) 定义，则

$$\|P\|_K = \sup_{x\in K}\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} T_i(x)^n\Big\| \le \sup_{x\in K}\sum_{i=1}^{\infty}\|T_i(x)\|^n \le M^n\sum_{i=1}^{\infty}\|T_i\|^n.$$

上述不等式对 (2.6) 中 P 的任意表示都成立。像 (2.7) 中那样，对所有这些表示取下确界，我们得到 $\|P\|_K \le M^n|||P|||$。此外，我们还有

$$\Big\|P-\sum_{i=1}^{s} T_i^n\Big\|_K = \Big\|\sum_{i=s+1}^{\infty} T_i^n\Big\|_K \le M^n\Big|\Big|\Big|\sum_{i=s+1}^{\infty} T_i^n\Big|\Big|\Big| \le M^n \sum_{i=s+1}^{\infty}\|T_i\|^n \to 0 \quad (s\to\infty).$$

这表明 (2.6) 中的级数在 K 上一致收敛。 □

若以 $\mathbb{C}$ 替换 A，便得到核（标量值）多项式。根据定义，若一个 n-齐次多项式 $P\colon E \to \mathbb{C}$ 能写成如下形式，则称其为核多项式

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)^n,\ x \in E, \tag{2.9}$$

其中 (ψ_i) 是 E^* 中满足 $\sum_{i=1}^{\infty}\|\psi_i\|^n < \infty$ 的一个序列。我们用 $\mathcal{P}_N(^nE)$ 表示 E 上所有 n-齐次核（标量值）多项式构成的空间。事实上，$\mathcal{P}_N(^nE) = \mathbb{b}(^nE, \mathbb{C})$。许多作者研究过巴拿赫空间之间的核多项式；参见 [2], [3], [4] 和 [15]。

现在，我们可以介绍由这些多项式生成的 A 值一致代数。我们将 $\mathbb{b}(E, A)$ 定义为 E 上所有形如 $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$ 的多项式所构成的空间，其中 $P_k \in \mathbb{b}(^kE, A)$，$0 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$。在

同样地，定义空间 $\mathcal{P}_N(E)$，它由 E 上所有齐次核多项式的线性组合构成。事实上，$\mathcal{P}_N(E) = \mathbb{L}(E, \mathbb{C})$。

定义 2.2. 设 K 是巴拿赫空间 E 中的一个紧集。定义

$$\mathbb{L}^0(K, A) = \{P|_K : P \in \mathbb{L}(E, A)\}, \quad \mathcal{P}_{N_0}(K) = \{P|_K : P \in \mathcal{P}_N(E)\}.$$

我们将 $\mathbb{L}(K, A)$ 定义为 $\mathbb{L}^0(K, A)$ 在 $\mathscr{C}(K, A)$ 中的闭包。类似地，$\mathcal{P}_N(K)$ 定义为 $\mathcal{P}_{N_0}(K)$ 在 $\mathscr{C}(K)$ 中的闭包。

因此，$f \in \mathbb{L}(K, A)$（分别为 $f \in \mathcal{P}_N(K)$）当且仅当存在一个由 $\mathbb{L}(E, A)$（分别为 $\mathcal{P}_N(E)$）中的多项式构成的序列 (P_k)，使得 $P_k \to f$ 在 K 上一致收敛。

显然，$\mathbb{L}(K, A)$ 是 $\mathscr{C}(K, A)$ 的闭子空间。我们旨在证明 $\mathbb{L}(K, A)$ 是 $\mathscr{C}(K, A)$ 的子代数。为此，可以考虑证明空间 $\mathbb{L}(E, A)$ 本身是一个代数（也就是说，如果 $P \in \mathbb{L}(^m E, A)$ 且 $Q \in \mathbb{L}(^n E, A)$，那么 $PQ \in \mathbb{L}(^{m+n} E, A)$）。这种思路自然是合理的。然而，作者目前没有充分证据支持或反对 $\mathbb{L}(E, A)$ 是一个代数这一可能性。因此，我们采取的方法是直接证明 $\mathbb{L}(K, A)$ 是一个代数，证明如下。

定理 2.3. 对于紧集 $K \text{in } E$，令 $\boldsymbol{A} = \mathbb{L}(K, A)$。那么 $\boldsymbol{A}$ 是 K 上的可容许的 A值一致代数，且满足 $\mathfrak{A} = \mathcal{P}_N(K)$。

证明。由于 $\mathbb{L}(E, A)$包含零次齐次多项式，我们可知 $\boldsymbol{A}$ 包含常函数；又由于 $\mathbb{L}(E, A)$包含形如 $P = \psi \mathbf{1}$ $(\psi \in E^*)$的一次齐次多项式，我们可知 $\boldsymbol{A}$ 分离 K中的点。为证明$\boldsymbol{A}$ 是一个代数，我们证明它在乘法下封闭；也就是说，

$$f, g \in \boldsymbol{A} \Rightarrow fg \in \boldsymbol{A}. \tag{2.10}$$

给定 $f, g \in \boldsymbol{A}$，存在 $\mathbb{L}(E, A)$中的多项式序列 (P_k)和 (Q_k)，使得 $P_k \to f$和 $Q_k \to g$在 K 上一致成立，由此得到 $P_k Q_k \to fg$ 在 K 上一致成立。因此，(2.10) 可化为以下形式；

$$P, Q \in \mathbb{L}(E, A) \Rightarrow PQ \in \boldsymbol{A}. \tag{2.11}$$

由于 $\mathbb{L}(E, A)$中的每个多项式都是齐次多项式的线性组合，我们不妨设 $P \in \mathbb{L}(^m E, A)$且 $Q \in \mathbb{L}(^n E, A)$。

考虑两种情况；(1) $m, n \geq 1$；(2) $m \geq 1$ 和 $n = 0$。

在情形 (1) 中，写作 $P = \sum_{i=1}^{\infty} S_i^m$和 $Q = \sum_{j=1}^{\infty} T_j^n$，其中 (S_i) 和 (T_j) 是 $\mathcal{L}(E, A)$ 中的算子序列。根据命题 2.1，这些级数在 K上均匀收敛；

$$\lim_{s\to\infty} \left\| P - \sum_{i=1}^{s} S_i^m \right\|_K = \lim_{s\to\infty} \left\| Q - \sum_{j=1}^{s} T_j^n \right\|_K = 0.$$

因此，

$$\lim_{s\to\infty} \left\| PQ - \sum_{i=1}^{s} S_i^m \sum_{j=1}^{s} T_j^n \right\|_K = \lim_{s\to\infty} \left\| PQ - \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} S_i^m T_j^n \right\|_K = 0. \tag{2.12}$$

应用极化公式（2.3），我们得到

$$S_i^m T_j^n = \frac{1}{2^{m+n}(m+n)!} \sum_{\epsilon_\ell=\pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_{m+n} \Big(\sum_{\ell=1}^{m} \epsilon_\ell S_i + \sum_{\ell=m+1}^{m+n} \epsilon_\ell T_j \Big)^{m+n}.$$

适当选取标量 α_k 和算子 U_k, $1 \leq k \leq 2^{m+n}$，我们有

$$S_i^m T_j^n = \sum_{k=1}^{2^{m+n}} \alpha_k U_k^{m+n},$$

这意味着 $S_i^m T_j^n \in \mathbb{b}(^{m+n}E, A)$。现在，(2.12) 表明 PQ 在 K 上一致地可由 $\mathbb{b}(^{m+n}E, A)$ 中的元素逼近，因此 $PQ \in \boldsymbol{A}$。

在情形 (2) 中，令 $P = \sum_{i=1}^{\infty} S_i^m$ 和 $Q = b$，其中 $b \in A$ 为常数。由于A 假设具有单位元 $\mathbf{1}$，[10] 中的命题 2.1 的证明表明，若 $\lambda_k = \frac{1}{m^2} e^{\frac{2\pi k i}{m}}$ 且 $a_k = b + e^{\frac{2\pi k i}{m}} \mathbf{1}$, $1 \leq k \leq m$，则 $b = \lambda_1 a_1^m + \cdots + \lambda_m a_m^m$。因此，若

$$b_k = \frac{e^{\frac{2\pi k i}{m^2}}}{\sqrt[m]{m^2}} \Big(b + e^{\frac{2\pi k i}{m}} \mathbf{1} \Big), \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

那么 $b = b_1^m + \cdots + b_m^m$。现在，对每个 $x \in E$，我们有

$$\begin{aligned} (PQ)(x) = P(x)b &= \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)^m \sum_{k=1}^{m} b_k^m \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} (\psi_j(x) b_k)^m = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_j(x) b_k)^m. \end{aligned}$$

令 $T_{jk} = \psi_j b_k$ $P_k = \sum_{j=1}^{\infty} T_{jk}^m$ $P_k \in {}^m E\ A$ $PQ = P_1 + \cdots +$ 和 P_m。则 PQ $\mathbb{b}(\ ,\ )$ 且 m。因此，$E\ A$ 是 $\mathbb{b}(\ ,\ )$ 中的 -齐次多项式。特别地，$PQ \in \boldsymbol{A}$。

最后，我们证明 $\mathbb{b}(K, A)$ 是可容许的；也就是说，

$$f \in \boldsymbol{A}, \phi \in \mathfrak{M}(A) \Rightarrow \phi \circ f \in \boldsymbol{A}. \tag{2.13}$$

给定 $f \in \boldsymbol{A}$，设 (P_k) 是 $\mathbb{b}(E, A)$ 中的一个多项式序列，使得 $P_k \to f$ 在 K 上一致收敛。对于每个 $\phi \in \mathfrak{M}(A)$，由于 $\|\phi\| \leq 1$，我们有

$$\|\phi \circ P_k - \phi \circ f\|_K \leq \|P_k - f\|_K,$$

从而 $\phi \circ P_k \to \phi \circ f$ 在 K 上一致收敛。因此，(2.13) 化为如下形式；

$$P \in \mathbb{b}(E, A), \phi \in \mathfrak{M}(A) \Rightarrow \phi \circ P \in \boldsymbol{A}. \tag{2.14}$$

给定 $P \in \mathbb{b}(E, A)$，由于它是齐次多项式的线性组合，我们可以假设 P 本身是一个 n-齐次多项式，并写作$P = \sum_{i=1}^{\infty} T_i^n$，其中 $T_i \in \mathcal{L}(E, A)$。那么，对于每个 $x \in E$，

$$\begin{aligned} (\phi \circ P)(x) = \phi\Big(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^n(x) \Big) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi\big(T_i(x)^n\big) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi\big(T_i(x)\big)^n = \sum_{i=1}^{\infty} \big(\phi \circ T_i(x)\big)^n. \end{aligned}$$

我们看到 $\phi \circ P$ 是一个核多项式（即 $\phi \circ P \in \mathcal{P}_N(E)$）。令 $\psi_i = \phi \circ T_i$ 和 $S_i = \psi_i \mathbf{1}$。那么 $S_i \in \mathcal{L}(E, A)$、$\|S_i\| \leq \|T_i\|$，并且

$$(\phi \circ P)\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i \mathbf{1})^n = \sum_{i=1}^{\infty} S_i^n \in \mathbb{b}(K, A).$$

我们得出结论：$\mathbb{b}(K, A)$ 是可容许的，且 $\mathfrak{A} = \mathcal{P}_N(K)$。 □

2.2. 表示为张量积。现在我们研究哪些条件可以推出等式 $\mathbb{b}(K, A) = \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon A$。下文中，$I\colon E \to E$ 是恒等算子。

定理 2.4. 设 K 是巴拿赫空间 E中的一个紧集。以下陈述等价。

(i) 对每个含幺巴拿赫代数 A，都有 $\mathbb{b}(K, A) = \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon A$。(ii) $\mathbb{b}(K, E) = \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon E$。(iii) $I \in \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon E$。

证明。(i) ⇒ (ii) 的蕴含关系显然成立（见注 1.2）。

(ii) ⇒ (iii) 的蕴含关系也显然成立，因为总有 $I \in \mathbb{b}(K, E)$。

我们证明 (iii) ⇒ (i) 的蕴含关系。设 A 是一个含幺巴拿赫代数。由注 1.1 和定理 2.3 可知，总有 $\mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon A \subset \mathbb{b}(K, A)$。为证明反向包含关系，由于 $\mathbb{b}_0(K, A) = \mathbb{b}(K, A)$，我们只需证明 $\mathbb{b}_0(K, A) \subset \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon A$；也就是说，对于每个多项式 $P \in \mathbb{b}(E, A)$，都有 $P \in \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon A$。

我们对 $n = \deg(P)$ 使用归纳法。

基例 $n = 0$ 显然成立。事实上，如果 $\deg(P) = 0$，那么 P 是一个常数多项式，且属于 $\mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon A$。

对于归纳步骤，取 $n \in \mathbb{N}$ 并假设

$$\text{every polynomial } Q \text{ with } \deg(Q) < n, \text{ belongs to } \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon A, \tag{2.15}$$

并设 P 是一个次数为 $= n$ 的多项式，其中 $\deg(P)$。如有必要，从 P 中减去一个次数为 $\leq n-1$ 的多项式Q，其中 $\deg(Q)$，这样我们可以假设 P是一个 n-齐次多项式，并且 $P = T$，其中 $T \in \mathcal{L}_s({}^n E, A)$。令 $\epsilon > 0$。根据假设$I \in \mathcal{P}_N(K) \hat{\otimes}_\epsilon E$。因此，由注 1.1，存在函数 f_1、.....、f_m，属于$\mathcal{P}_N(K)$，以及向量 a_1、.....、a_m，属于 E，使得

$$\Big\| I(x) - \sum_{i=1}^{m} f_i(x) a_i \Big\| \leq \epsilon, \ x \in K. \tag{2.16}$$

使用记号 (2.4) 和莱布尼茨公式 (2.5)，得到

$$T\Big(\big(x - \sum_{i=1}^{m} f_i(x) a_i\big)^n \Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T\Big(x^k, \big(-\sum_{i=1}^{m} f_i(x) a_i\big)^{n-k} \Big). \tag{2.17}$$

对于 $0 \leq k \leq n-1$ 和 $x \in K$，定义为

$$g_k(x) = \binom{n}{k} T\Big(x^k, \big(-\sum_{i=1}^{m} f_i(x) a_i\big)^{n-k} \Big).$$

事实上，

$$g_{n-1}(x) = -n\sum_{i=1}^{m} f_i(x)T(x^{n-1}, a_i),$$

$$g_{n-2}(x) = n(n-1)\sum_{i,j=1}^{m} f_i(x)f_j(x)T(x^{n-2}, a_i, a_j),$$

$$\vdots$$

$$g_0(x) = (-1)^n \sum_{\alpha} \frac{n!}{\alpha!}\prod_{i=1}^{m} f_i(x)^{\alpha_i} T(a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_m^{\alpha_m}),$$

其中，最后一个求和遍历满足 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$ 的 $\mathbb{N}_0^m$ 中所有多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$。

我们看到，每个 $g_j, 0 \le j \le n-1$ 都是函数 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ 在 $\mathcal{P}_N(K)$ 中的代数组合（乘法和加法），以及一些次数为 j 的多项式。根据假设 (2.15)，这些多项式属于 $\mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon A$。因此，$g_0, g_1, \ldots, g_{n-1} \in \mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon A$。

另一方面，对于每个 $x \in K$，

$$\begin{aligned}\Big\|P(x) + \sum_{j=0}^{n-1} g_j(x)\Big\| &= \Big\|T(x^n) + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} T\Big(x^k, \big(-\sum_{i=1}^{m} f_i(x)a_i\big)^{n-k}\Big)\Big\| \\ &= \Big\|T\Big(\big(x - \sum_{i=1}^{m} f_i(x)a_i\big)^n\Big)\Big\| \\ &\le \|T\|\Big\|x - \sum_{i=1}^{m} f_i(x)a_i\Big\|^n \le \|T\|\epsilon^n,\end{aligned}$$

其中，$\|T\|$ 是 T 在 $\mathcal{L}_s(E, A)$ 中的算子范数。由于 ϵ 是任意的，这意味着 P 在 K 上可由 $\mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon A$ 中的函数一致逼近。因此，$P \in \mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon A$，归纳论证至此完成。

我们得出，$\mathbb{b}(K, A) = \mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon A$。 □

回顾一下（例如，[11, 定义 27.3]）：若巴拿赫空间 E 对每个 $\epsilon > 0$ 以及 E 中的每个紧集 K，都存在一个有限秩算子 $T\colon E \to E$，使得对每个 $x \in K$，$\|T(x) - x\| < \epsilon$，则称该空间具有逼近性质。

命题 2.5. 假设巴拿赫空间 E 具有逼近性质。那么，对 E中的任意紧集 K，$I \in \mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon E$。

证明。设 $\epsilon > 0$。由逼近性质，存在一个有限秩算子$T\colon E \to E$，使得 $\|I - T\|_K \le \epsilon$。有限秩算子 T 可表示为如下形式

$$T = \psi_1 a_1 + \cdots + \psi_m a_m,$$

其中 $\psi_i \in E^*, a_i \in E, 1 \le i \le m$。这意味着 $T \in \mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon E$。由于 ϵ 是任意的，我们得出 $I \in \mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon E$。□

对于巴拿赫代数 A，我们将赋予紧收敛拓扑的空间 A^* 记作 A^*_{cc}（即在 A 的紧子集上一致收敛的拓扑）。给定 A^*中的一个集合 S，若 $\langle S\rangle$ 在 A^*_{cc}中稠密，其中 $\langle S\rangle$ 表示 S 在 A^*中的线性张成，则称 S 生成 A^*_{cc}。

命题 2.6. 假设巴拿赫代数 A 具有逼近性质。若 $\mathfrak{M}(A)$生成 A_{cc}^*，则对于任意巴拿赫空间 E中的任意紧集 K，都有 $\mathbb{b}(K,A) = \mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon A$。

证明。设 K 是巴拿赫空间 E 中的一个紧集，并取函数 $f \in \mathbb{b}(K,A)$。首先，我们证明对每个 $\phi \in A^*$，都有 $\phi \circ f \in \mathcal{P}_N(K)$。由定理 2.3，对每个 $\phi \in \mathfrak{M}(A)$，都有 $\phi \circ f \in \mathcal{P}_N(K)$，因此对每个 $\phi \in \langle \mathfrak{M}(A)\rangle$，均有 $\phi \circ f \in \mathcal{P}_N(K)$；这里 $\mathfrak{M}(A)$ 是 A^*中的线性张成。由于 $\mathfrak{M}(A)$生成 A_{cc}^*，给定 $\phi \in A^*$，存在一个取值于 $\langle \mathfrak{M}(A)\rangle$ 的网 (ϕ_α)，使得 $\phi_\alpha \to \phi$ 在 A^*的紧收敛拓扑下成立。集合 $f(K)$在 A中是紧的，因此 $\phi_\alpha \to \phi$在 $f(K)$上一致收敛。这意味着 $\phi_\alpha \circ f \to \phi \circ f$ 在 K上一致收敛。由于对所有 α，都有$\phi_\alpha \circ f \in \mathcal{P}_N(K)$，故得到 $\phi \circ f \in \mathcal{P}_N(K)$。

现在，令 $\epsilon > 0$。由于 A 具有逼近性质，且 $f(K)$ 在 A 中是紧集，因此存在有限秩算子 $T = \sum_{i=1}^m \phi_i b_i$，使得 $\phi_i \in A^*$, $b_i \in A$,$1 \le i \le m$, $m \in \mathbb{N}$，从而

$$\|y - T(y)\| = \left\| y - \sum_{i=1}^m \phi_i(y) b_i \right\| \le \epsilon,\ y \in f(K).$$

将 y 替换为 $f(x)$，$x \in K$，得到

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^m \phi_i \circ f(x) b_i \right\| \le \epsilon,\ x \in K.$$

由证明的第一部分，我们得到 $\sum_{i=1}^m (\phi_i \circ f) b_i \in \mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon\, A$。由于$\epsilon > 0$ 是任意的，因此有 $f \in \mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon\, A$。□

为支持上述结果，我们给出一些例子。

例 2.7. 设 X 是紧豪斯多夫空间，且 $A = \mathscr{C}(X)$。众所周知，A 具有逼近性质，并且 $\mathfrak{M}(A) = \{\delta_x : x \in X\}$，其中 $\delta_x : f \mapsto f(x)$ 是 x 处的点质量测度。事实上，$\mathfrak{M}(A)$ 与单位球 A_1^* 的极点集合重合。根据 Krein–Milman定理，A_1^* 等于 $\mathfrak{M}(A)$ 的弱*闭凸包。因此，给定 $\phi \in A_1^*$，存在一个由 $\mathfrak{M}(A)$ 的凸包中元素构成的网 (ϕ_α)，使得 $\phi_\alpha \to \phi$ 在弱*拓扑下成立。由于 (ϕ_α) 有界，我们得到 $\phi_\alpha \to \phi$，且在紧集上一致成立。这意味着 $\phi_\alpha \to \phi$ 属于 A_{cc}^*，因此 $\mathfrak{M}(A)$ 生成A_{cc}^*。现在，由命题 2.6，对于巴拿赫空间 E 中的任意紧集 K，都有 $\mathrm{P}(K, \mathscr{C}(X)) = \mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon\, \mathscr{C}(X)$。值得注意的是

$$\mathcal{P}_N(K)\,\hat{\otimes}_\epsilon\, \mathscr{C}(X) = \mathscr{C}(X)\,\hat{\otimes}_\epsilon\, \mathcal{P}_N(K) = \mathscr{C}(X, \mathcal{P}_N(K)).$$

例 2.8. 令 S 为任意非空集合，并且对某个 $p \in (1,\infty)$，有 $A = \ell^p(S)$。那么 $A^* = \ell^q(S)$，其中 $1/p + 1/q = 1$。在 A 上按点定义乘法；也就是说，对所有 $s \in S$，$(fg)(s) = f(s)g(s)$。经过计算可验证

$$\sum_{s\in S} |f(s)|^p |g(s)|^p \le \sum_{s\in S} |f(s)|^p \sum_{s\in S} |g(s)|^p \quad (f, g \in A).$$

因此，$(A, \|\cdot\|_p)$ 是一个交换巴拿赫代数。对每个 $s \in S$，求值同态 ϕ_s：$f \mapsto f(s)$ 是 A 的一个特征。反过来，设 $\phi : A \to \mathbb{C}$ 是一个特征。假设 $\{\chi_s : s \in S\}$ 是 S 上所有示性函数的集合。那么，给定 $f \in A$，有 $f = \sum_{s\in S} f(s)\chi_s$，从而 $\phi(f) = \sum_{s\in S} f(s)\phi(\chi_s)$。由于 $\phi \neq 0$，必定存在一点 $s_0 \in S$，使得

$\phi(\chi_{s_0}) \neq 0$。若 $s \neq s_0$，则 $\phi(\chi_s)\phi(\chi_{s_0}) = \phi(\chi_s\chi_{s_0}) = 0$，因此 $\phi(\chi_s) = 0$。此外，$\phi(\chi_{s_0})^2 = \phi(\chi_{s_0})$，从而 $\phi(\chi_{s_0}) = 1$。因此我们有

$$\phi(f) = \sum_{s\in S} f(s)\phi(\chi_s) = f(s_0) = \phi_{s_0}(f).$$

我们得出，$\mathfrak{M}(A) = \{\phi_s : s \in S\}$。由于 $\langle\mathfrak{M}(A)\rangle$ 在范数拓扑下稠密于 $A^* = \ell^q(S)$，因此 $\mathfrak{M}(A)$生成 A^*_{cc}。此外，若S 可数，则 $\ell^p(S)$具有 Schauder基，因而具有逼近性质。

2.3. 特征空间。设 K 是巴拿赫空间 E中的一个紧集。由某类 $\mathcal{P}$ 多项式生成的、定义在 K 上的函数代数的特征空间，与相对于给定类 $\mathcal{P}$而言的 K 的多项式凸包密切相关。

定义2.9。 K 的核多项式凸包定义为

$$\hat{K}_N = \{a \in E : |P(a)| \leq \|P\|_K, P \in \mathcal{P}_N(E)\}. \tag{2.18}$$

$\hat{}$ 称 K 是核多项式凸的，若 $K = K_N$。

定理2.10。 $\mathcal{P}_N(K)$的特征空间与$\hat{}$ K_N同胚，且$\hat{}\mathcal{P}_N(K)$与 $\mathcal{P}_N(K_N)$等距同构。

证明。令 $a \in \hat{}K_N$。给定 $f \in \mathcal{P}_N(K)$，存在一个由 $\mathcal{P}_{N_0}(K)$ 中的多项式构成的序列 (P_k)，使得 $P_k \to f$ 在 K 上一致收敛，因此

$$|P_k(a) - P_j(a)| \leq \|P_k - P_j\|_K \to 0 \quad (k, j \to \infty).$$

这意味着 $(P_k(a))$ 是 $\mathbb{C}$ 中的柯西序列。定义 $\phi_a(f) = \lim_{k\to\infty} P_k(a)$。若 (Q_k) 是 $\mathcal{P}_{N_0}(K)$ 中的另一个多项式序列，且 $Q_k \to f$ 在 K 上一致收敛，则 $|Q_k(a) - P_k(a)| \leq \|Q_k - P_k\|_K \to 0$。这表明 $\phi_a(f)$ 定义良好。通过标准论证可得，对所有 $f, g \in \mathcal{P}_N(K)$，均有 $\phi_a(f+g) = \phi_a(f)+\phi_a(g)$，且 $\phi_a(fg) = \phi_a(f)\phi_a(g)$。因此，$\phi_a \in \mathfrak{M}(\mathcal{P}_N(K))$。

反过来，假设 $\phi : \mathcal{P}_N(K) \to \mathbb{C}$ 是一个特征。将对偶空间 E^* 视为 $\mathcal{P}_N(E)$ 中由一次齐次多项式组成的子空间。于是，将 ϕ 限制在 E^* 上，得到 E^* 上的线性泛函。我们证明，ϕ 在 E^* 的范数有界子集上弱*连续。设 (ψ_α) 是 E^* 中的有界网，且在弱*拓扑下收敛于某个 $\psi_0 \in E^*$。那么 $\psi_\alpha \to \psi_0$ 在 K 上一致收敛。由于 ϕ 关于 $\|\cdot\|_K$ 连续，因此得到 $\phi(\psi_\alpha) \to \phi(\psi_0)$。这表明 ϕ 在 E^* 的有界子集上弱*连续，符合要求。根据第 250] 页的推论4，ϕ 在 E^* 上弱*连续，因此存在 $a \in E$，使得对所有 $\psi \in E^*$，$\phi(\psi) = \psi(a)$。现在，取一个 n 齐次核多项式$P = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^n$，其中 $\psi_i \in E^*$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\|^n < \infty$。根据命题 2.1，该级数在 K 上一致收敛，因此

$$\phi(P) = \phi\Big(\lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} \psi_i^n\Big) = \lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} \phi(\psi_i)^n = \lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} \psi_i(a)^n = P(a).$$

注意，对每个 $P \in \mathcal{P}_N(E)$，$|P(a)| = |\phi(P)| \leq \|P\|_K$，这表明 $\hat{}a \in K_N$。因此，$\phi = \phi_a$ 在 $\mathcal{P}_{N_0}(K)$ 上成立；它是 $\mathcal{P}_N(K)$ 的稠密子空间，由此 $\phi = \phi_a$ 在 $\hat{}\mathcal{P}_N(K)$ 上成立。最后，映射 $K_N \to \mathfrak{M}(\mathcal{P}_N(K))$，$a \mapsto \phi_a$，是将 K嵌入到 $\mathfrak{M}(\mathcal{P}_N(K))$ 中的嵌入；参见 [5, 第 4] 章。□

我们以如下关于 $\mathbb{b}(K,A)$ 的特征空间的结果作为本文结尾。

定理 2.11。特征空间 $\mathfrak{M}(_{\mathbb{b}}(K,A))$ 包含作为闭子集的 $\hat{}\, K_N \times \mathfrak{M}(A)$。如果定理 2.4、命题 2.5 或命题 $\hat{}$ 2.6 中的任一条件成立，则 $\mathfrak{M}(\mathbb{b}(K,A)) = K_N \times \mathfrak{M}(A)$。

证明。由先前的结果以及 Tomiyama 在 [14] 中的一个定理可得。 □

References

[1] Abtahi M. *Vector-valued characters on vector-valued function algebras*, 《Banach J. Math. Anal.》2016，10(3)，608–620。[2] Carando D. *Extendible polynomials on Banach spaces*, 《J. Math. Anal. Appl.》1999，233(1)，359–372。[3] Carando D., Dimant V. *Duality in spaces of nuclear and integral polynomials*, 《J. Math. Anal. Appl.》2000，241(1)，107–121。[4] Cilia R., Guti´errez J.M. *Nuclear and integral polynomials*, 《J. Aust. Math. Soc.》2004，76(2)，269–280。[5] Dales H.G. Banach 代数与自动连续性。伦敦数学会专著，新系列 24，牛津科学出版物，克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，2000 年。[6] Dineen S. 无限维空间上的复分析。施普林格出版社，伦敦，1999 年。[7] Galindo P., Lourenco M., Moraes L. *Polynomials generated by linear operators*, 《Proc. Amer. Math. Soc.》2004，132(10)，2917–2927。[8] Hausner A. *Ideals in a certain Banach algebra*, 《Proc. Amer. Math. Soc.》1957，8(2)，246–249。[9] Horv´ath J. 拓扑向量空间与广义函数。第 I 卷，艾迪生-韦斯利出版社，雷丁，马萨诸塞州，1966 年。[10] Lourenco M.L., Moraes L.A. *A class of polynomials from Banach spaces into Banach algebras*。《Publ. Res. Inst. Math. Sci.》，京都大学，2001，37(4)，521–529。[11] Mujica J. 巴拿赫空间中的复分析。北荷兰数学研究 120，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1986 年。[12] Nikou A., O´farrell A.G. *Banach algebras of vector-valued functions* 2014, , **56**, 419 246

《Glasgow Math. J.》–。[13] Prolla J.B. 向量值函数的逼近，北荷兰出版社，阿姆斯特丹、纽约、牛津，1977 年。[14] Tomiyama J. *Tensor products of commutative Banach algebras* 1960, **12**, , 147 154

《Tohoku Math. J.》–。[15] Zalduendo I. *Extending Polynomials On Banach Spaces A Survey*, 阿根廷数学联合会，2005 年。

School of Mathematics and Computer Sciences, Damghan University, Damghan, P.O.BOX36715-364, Iran*Email address*: abtahi@du.ac.ir (M. Abtahi)