arXiv:2302.01461v1 [math.NA] 2 Feb 2023

# 随机偏微分方程数值近似的长时间精度：以随机纳维–斯托克斯方程为范例

Nathan E. Glatt-Holtz、Cecilia F. Mondaini

电子邮箱：negh@tulane.edu，cf823@drexel.edu

2023年2月6日

摘要

本文提出了一个通用框架，用于确立可分巴拿赫空间上马尔可夫动力系统的近似的长时间精度。我们的结果阐明了近似动力学的 Wasserstein 收缩率具有某种一致性，这对长时间精度估计所起的作用。特别是，我们的方法在为 $\mathbb{R}^+$ 提供弱一致性界的同时，也避免了近似动力学无法获得某些高阶矩界这一常见情形。此外，为了推进我们方法的分析核心，我们对某些“弱 Harris 定理”作了改进。这一扩展使此类 Wasserstein 收缩估计能够适用于多种有趣的随机偏微分方程实例，其耗散较弱或非线性较强，因而超出现有文献所涵盖的范围。

作为指导性和典范性示例，我们将这一形式体系应用于二维随机纳维–斯托克斯方程，并研究该系统在时间上采用半隐式、空间上采用谱 Galerkin 方法的数值近似。对于数值近似，我们建立了不变测度近似的定量估计，并证明了在 $\mathbb{R}^+$ 上的弱一致性。为获得这些数值分析结果，我们改进了现有文献中的 $L^2_x$ 精度界；这一改进本身也具有独立的研究价值。

关键词：长时间精度、弱 Harris 定理、Wasserstein距离收缩、随机偏微分方程数值分析、随机 Navier–Stokes 方程。
2020年数学主题分类：60H15、76M35、65C30、37L40、37M25。

## 目录

1 引言 **2**
1.1 长时间稳定性的统一收缩框架.31.2 Wasserstein 收缩的弱 Harris 方法贡献.51.3 随机纳维–斯托克斯方程数值近似的结果.61.4 展望与未来工作.9

2 抽象结果。 **9**
2
1 预备知识.92.2 Wasserstein 收缩.102.3 时间一致弱收敛.14

3 二维随机纳维-斯托克斯方程的数值近似 3.1 M **19**
athematical setting an d 矩 bounds .
.203.2 离散化一致的 Wasserstein 收缩.253.3 数值格式的有限时间强误差估计.393.4 数值格式的时间一致弱收敛.46

4 有界区域情形下的 Wasserstein 收缩 **53**
4.1 数学设定.534.2 Wasserstein收缩估计.54

附录 **61**

参考文献 **65**

# 1 引言

对于呈现混沌行为的动力系统而言，近似方法下的长时间精度问题向来难以解决。尽管如此，这仍是一个备受关注的课题，尤其是考虑到流体力学中的湍流统计理论可以通过相对于不变测度的可观测量来表述。根据这一广泛采用的范式，此类测度通过（假定的）遍历平均与基本控制方程联系起来，因此可以视为容纳湍流统计稳健性质的载体。从这个角度来看，自然会提出这样的问题：在适当的数值近似下，或在各种具有物理意义的奇异参数极限中，这些不变测度的基本特征是否得以保留。

遗憾的是，对于纳维–斯托克斯方程及其诸多变体等确定性模型的解，其统计性质的稳健性（即遍历假设的验证）通常远非严格分析所能企及。另一方面，从这一角度来看，这些方程的某些随机版本更易于分析。此外，这类随机模型往往仍具有物理相关性，同时也提供了重要的研究动机和一系列独特挑战，推动了近几十年来无限维马尔可夫过程遍历与混合理论的蓬勃发展。因此，在随机框架下，作为模型参数函数的长时间统计性质稳定性问题，广泛引起了人们对各种非线性、无限维随机强迫系统的兴趣。

本文提出了一种新框架，用于研究波兰空间上依赖参数的马尔可夫过程的长时间稳定性和精度问题。我们的方法利用某种一致的 Wasserstein 收缩条件（指数混合的一种强形式）；正如我们将通过若干典型例子所展示的，该条件适用于范围相当广泛的有限维和无限维随机系统。我们的结果表明，恰当地利用一致收缩性，可以为现有关于某些随机系统在参数扰动下无限时间稳定性的研究提供新的视角 [SS00、KS03、HM08、MST10、HM10、HMS11、JM17、FFGHR17、FGHR19、CGH20]。这里还要指出，文献 [Wan10、GTW$^+$12] 针对确定性动力系统提出的框架，预示了本文的一些研究进展，其中包括引入一致耗散条件。然而，文献 [Wan10、GTW$^+$12] 的适用范围从根本上受到限制，因为该框架无法排除其中所研究的无限维确定性模型的长期统计性质存在非唯一性的可能（更不用说探讨其遍历与混合性质）。

作为开展这一宏大研究计划的重要技术基础，我们改进了所谓的“弱 Harris 方法”，以研究指数混合。这部分工作建立在开创性研究 [HM08、HMS11], 之上；这些研究为处理 Wasserstein 收缩提供了强有力的框架。早期研究采用精巧的范数构造，从而无需进行复杂的显式耦合构造。另一方面， [GHMR17、BKS20], 中给出的典型且自然的例子表明，在常见情形下，有必要改进这一方法：模型可能缺少某些高阶矩估计，或在小尺度上仅具有较弱的平滑性，抑或两者兼有。

我们的框架的一个主要应用领域，是某些随机偏微分方程（SPDEs）数值近似的误差分析。这是应用分析中一个在过去十年间迅速发展的领域；例如，参见 [MSH02，JK09，CP12，BCP13，BM19，BM21] 及其中所含参考文献。为展示我们的方法适用范围，本文以一个典型例子为例，对二维随机纳维–斯托克斯方程进行案例研究：空间上采用谱伽辽金离散，时间上采用半隐式欧拉时间离散。在分析过程中，我们给出了一些新的逼近界，并在现有文献的基础上显著改进了有限时间误差界 [CP12，BM19，BM21] ，这些结果本身也具有独立的研究价值。需要指出的是，我们的一般框架也已应用于若干同期开展的研究项目。在第一作者近期的一项工作中，[GHMN22], 我们利用一致压缩性研究了涉及扩散记忆项的随机偏微分方程的一些奇异极限问题。另见 [GHHKM22],，我们研究了统计抽样算法中的偏差估计应用。

## 1.1 长时间稳定性的统一收缩框架

现在，我们概述本方法的抽象基础。这里给出一个理想化版本，以便读者了解我们框架内在的简洁性。当然，要在实践中实现我们的方案，还需要施加若干技术性假设；有关这些更复杂的表述，请读者参见定理 2.3、定理 2.6和推论 2.8 。

我们的出发点是注意到，对于某些随机马尔可夫系统，只要存在一种强混合形式，即在适当的 Wasserstein 距离下满足收缩估计，就可以建立长时间精度估计。值得注意的是，此类收缩估计此前已在随机微分方程、随机偏微分方程及其他马尔可夫过程的多种具体情形中得到应用 [HM08，HMS11，HM10，JM17，FFGHR17，FGHR19，CGH20] 以对依赖参数的不变测度给出严格的界。这里关键的新要素在于充分利用收缩率对参数具有适当的统一性。

设 $\{P_t^\theta\}_{t\geq 0}$是定义在波兰空间 $(X,\rho)$ 上、以 $\theta\in\Theta$为参数的马尔可夫转移算子集合。这些算子分别作用于概率测度 $\nu$ 和可观测量 $\varphi$，其作用方式如下：

$$\nu P_t^\theta(du):=\int P_t^\theta(v,du)\nu(dv),\qquad P_t^\theta\varphi(u):=\int\varphi(v)P_t^\theta(u,dv),$$

分别如此。设对于某个 $\theta_0$，它对应于我们关注的“真实”或“极限”动力学，并且满足 Wasserstein 收缩。也就是说，对于任意 $t\geq 0$

$$\mathcal{W}(\mu P_t^{\theta_0},\tilde{\mu}P_t^{\theta_0})\leq C_0e^{-\kappa t}\mathcal{W}(\mu,\tilde{\mu}),\tag{1.1}$$

对于任意 Borel 概率测度 $\mu$，$\tilde{\mu}$其中 $C_0$，$\kappa>0$ 是与 $\mu$、$\tilde{\mu}$ 以及 $t\geq 0$无关的常数。这里，与例如 [Vil08] 中一样，$\mathcal{W}$ 是与 $\rho$相对应的 Wasserstein 距离，即

$$\mathcal{W}(\nu_1,\nu_2)=\inf_{\Gamma\in\mathcal{C}(\nu_1,\nu_2)}\int\rho(u,\tilde{u})\Gamma(du,d\tilde{u}),\tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{C}(\nu_1,\ \nu_2)$ 表示 $\nu_1$ 和 $\nu_2$的所有耦合。请注意，这类 Wasserstein 收缩估计可以通过 HM08、HMS11], 中提出的所谓“弱 Harris 方法”获得；我们在下文的 定理 2.1 中针对本文的需要对其进行了改进。

现在假设对于每个 $\theta\in\Theta$，都有一个相应的测度 $\mu_\theta$，它在 $\{P_t^\theta\}_{t\geq 0}$作用下不变，即 $\mu_\theta P_t^\theta=\mu_\theta$ 对于任意 $t\geq 0$均成立。由此我们可以得到以下简单观察。利用不变性、三角不等式和收缩估计（1.1），可得

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\mu_{\theta_0},\mu_\theta)=&\mathcal{W}(\mu_{\theta_0}P_t^{\theta_0},\mu_\theta P_t^\theta)\leq\mathcal{W}(\mu_{\theta_0}P_t^{\theta_0},\mu_\theta P_t^{\theta_0})+\mathcal{W}(\mu_\theta P_t^{\theta_0},\mu_\theta P_t^\theta)\\ \leq&C_0e^{-\kappa t}\mathcal{W}(\mu_{\theta_0},\mu_\theta)+\mathcal{W}(\mu_\theta P_t^{\theta_0},\mu_\theta P_t^\theta)\end{aligned}\tag{1.3}$$

对任意 $\theta\in\Theta$ 和任意 $t\geq 0$ 均成立。因此，选取 $t_*$ 使得例如 $C_0e^{-\kappa t_*}\leq 1/2$，我们可以重新整理上述表达式，得到

$$\mathcal{W}(\mu_{\theta_0},\mu_\theta)\leq 2\mathcal{W}(\mu_\theta P_{t*}^{\theta_0},\mu_\theta P_{t*}^\theta).\tag{1.4}$$

因此，我们得到一个界，它将不变统计意义下的长时间精度问题转化为一个有限时间误差估计问题，同时还需要关于 $\mu_\theta$ 的适当的 $\theta$-一致矩有界。

为使（1.4）的意义更加具体，我们回顾一下，$\mathcal{W}$具有理想的利普希茨结构。例如，对于每个 $u\in X$，我们都能找到一个耦合，$u_{\theta_0}(t,u)$ $u_\theta(t,u)$ 属于 $P_t^{\theta_0}(u,\cdot)$ $P_t^\theta(u,\cdot)$，使得

$$\mathbb{E}\rho(u_{\theta_0}(t,u),u_\theta(t,u))\leq e^{\tilde{C}_0t}f(u)g(\theta,\theta_0),\tag{1.5}$$

其中，$g$ 是 $\Theta$上的一个（有界）距离，因此 $\mathcal{W}$ 的基本性质可推出

$$\mathcal{W}(\mu_\theta P_{t*}^{\theta_0},\mu_\theta P_{t*}^\theta)\leq e^{\tilde{C}_0t_*}g(\theta,\theta_0)\int f(u)\mu_\theta(du).\tag{1.6}$$

因此，由（1.4）可得

$$\mathcal{W}(\mu_{\theta_0},\mu_\theta)\le 2e^{\tilde{C}_0 t_*}g(\theta,\theta_0)\int f(u)\mu_\theta(du). \tag{1.7}$$

当然，对于前文提到的每一项具体研究，即 [HM08、HMS11、JM17、FFGHR17、FGHR19、CGH20]，要得到 (1.1)，并为 $\mathcal{W}(\mu_\theta P_{t*}^{\theta_0},\mu_\theta P_{t*}^{\theta})$提供合适的定性估计，以便像 (1.5)–(1.7) 那样通过 (1.4) 加以利用，都是一项定制的、并非易事的数学挑战。此外，我们强调，接下来若要利用 (1.7)，就必须得到 $\int f(u)\mu_\theta(du)$关于 $\theta$的一致有界。

本文对（1.1）、（1.4）中的约化提出了一种不同且似乎新颖的变体。假设我们不采用（1.1），而是施加更强的一致收缩假设

$$\mathcal{W}(\mu P_t^\theta,\tilde{\mu}P_t^\theta)\le Ce^{-\kappa t}\mathcal{W}(\mu,\tilde{\mu}), \tag{1.8}$$

这里特别强调，常数 $C$、$\kappa>0$ 现在假定与参数 $\theta\in\Theta$无关。与（1.3）相比，我们现在进行如下推导

$$\mathcal{W}(\mu_{\theta_0},\mu_\theta)\le\mathcal{W}(\mu_{\theta_0}P_t^{\theta_0},\mu_{\theta_0}P_t^\theta)+\mathcal{W}(\mu_{\theta_0}P_t^\theta,\mu_\theta P_t^\theta)\le\mathcal{W}(\mu_{\theta_0}P_t^{\theta_0},\mu_{\theta_0}P_t^\theta)+C_0e^{-\kappa t}\mathcal{W}(\mu_{\theta_0},\mu_\theta), \tag{1.9}$$

因此，再次选择 $t_*$ 使得

$$C_0e^{-\kappa t_*}\le 1/2, \tag{1.10}$$

现在可得

$$\mathcal{W}(\mu_{\theta_0},\mu_\theta)\le 2\mathcal{W}(\mu_{\theta_0}P_{t*}^{\theta_0},\mu_{\theta_0}P_{t*}^\theta). \tag{1.11}$$

与（1.4）相比，这一看似无关紧要的差异以收缩率的一致性为代价，换来了极限系统的单个矩有界。事实上，在（1.5）的条件下，我们得到

$$\mathcal{W}(\mu_{\theta_0},\mu_\theta)\le 2e^{\tilde{C}_0t_*}g(\theta,\theta_0)\int f(u)\mu_{\theta_0}(du), \tag{1.12}$$

因此，我们将条件（1.8）替换为一致有界条件 $\sup_{\theta\in\Theta}\int f(u)\mu_\theta(du)$ 。

事实证明，（1.12）与（1.7）之间的差异有时是一种不可或缺的权衡。我们在此利用这一点来处理所关注的数值精度问题，以及其他值得关注的情形，例如同期研究 [GHMN22]。具体而言，正如我们将在下文进一步说明的，对于本文中的应用，$\theta\neq\theta_0$ 表示随机 Navier–Stokes 方程的一个数值近似参数。这些数值近似会破坏（或使之复杂化）某些关键的李雅普诺夫结构；具体来说，当 $\mu_\theta$ 时，我们无法获得 $\theta\neq\theta_0$ 所需的矩，如（1.7）所要求的那样。无论如何，我们提请读者参阅定理 2.3；该定理是在一个适用情境下表述的，而此情境只要求比我们的应用所需的（1.8）一致收缩估计稍弱的形式。

撇开这一点不谈，一致收缩假设（1.8）结合（1.5）中的有限时间误差估计界，将导出其他理想的长时间近似估计。事实上，根据（1.8）并利用不变性，我们得到界

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\mu P_t^\theta,\mu P_t^{\theta_0})\le&\mathcal{W}(\mu P_t^\theta,\mu_\theta P_t^\theta)+\mathcal{W}(\mu_\theta,\mu_{\theta_0})+\mathcal{W}(\mu_{\theta_0}P_t^{\theta_0},\mu P_t^{\theta_0})\\ \le&C_0e^{-\kappa t}(\mathcal{W}(\mu,\mu_\theta)+\mathcal{W}(\mu,\mu_{\theta_0}))+\mathcal{W}(\mu_\theta,\mu_{\theta_0})\\ \le&C_0e^{-\kappa t}\mathcal{W}(\mu,\mu_{\theta_0})+(1+C_0)\mathcal{W}(\mu_\theta,\mu_{\theta_0}),\end{aligned}$$

对于任意“初始”di 分布 $\mu$。因此，结合此界以及在条件 (1.11)、(1.4) 和 (1.5) 下成立的 n

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}(\mu P_t^\theta,\mu P_t^{\theta_0})\\ &\le\min\left\{C_0e^{-\kappa t}\mathcal{W}(\mu,\mu_{\theta_0})+2(1+C_0)e^{\tilde{C}_0t_*}\int f(u)\mu_{\theta_0}(du)\,g(\theta,\theta_0),e^{\tilde{C}_0t}\int f(u)\mu(du)\,g(\theta,\theta_0)\right\},\end{aligned}$$

对任意 $t \geq 0$均成立，其中回顾一下， $t^* > 0$ 由式 (1.10) 给出。因此，在此界中对$t \geq 0$ 作适当优化后，我们得出

$$\sup_{t\geq 0} \mathcal{W}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) \leq C \left( \mathcal{W}(\mu, \mu_{\theta_0}) + \int f(u)\mu_{\theta_0}(du) + \int f(u)\mu(du) \right) g(\theta, \theta_0)^\gamma. \tag{1.13}$$

其中 $C$、$\gamma > 0$ 与 $\mu$ 和 $\theta$ 相互独立。

请注意，在此处关注的数值分析背景下，这个界（1.13）立即给出一个在整个时间区间 $[0, \infty)$ 上均成立的弱阶逼近估计。为处理非线性随机偏微分方程应用而表述的（1.13）的操作性版本见 定理 2.6 和 推论 2.8，其中明确展示了它与随机数值分析中的弱阶收敛之间的联系。

## 1.2 对 Wasserstein 收缩的弱 Harris 方法的贡献

当然，上述讨论优雅而简洁，却掩盖了若干棘手的技术难题；若要在实践中落实这一方案，就必须解决这些难题。其中一个挑战是建立如（1.1）和（1.8）中的（一致）Wasserstein 收缩界。为此，我们在下文提出 定理 2.1 ，为这类收缩估计提供一般性判据。这一结果本身也具有独立价值，近期的研究成果 [GHMR17、BKS20、GHMR21]对此作了强调。

如前所述，定理 2.1 为所谓的“弱 Harris 方法”带来了一种新变体，该方法由 [HM08、HMS11]发展而来。弱 Harris 方法建立在关于马尔可夫链混合速率的丰富且成熟的文献基础之上；例如参见 [DPZ96、MT12、Kul18、DMPS18] ，其中对此作了系统介绍。经典 Harris 定理可追溯至 20 世纪 50 年代，其基础是 Doeblin 耦合方法，用以处理无界相空间中的混合问题。关键在于恰当地纳入李雅普诺夫结构的作用，以促进“大尺度”上的耦合。通常，这类文献中的混合发生在概率测度上的全变差（TV）拓扑或其他相关的“强拓扑”中；近期一篇与本文设定接近的研究见 [HM11b] 。采用全变差拓扑凸显了经典 Harris 方法的一项局限：事实证明，该方法并不适用于无限维情形，因为在这类情形中，测度往往彼此奇异，Feldman–Hájek 定理便是一个例子（例如参见 [DPZ14，定理 2.25]）。

这一 Harris 方法的较新变体，大多是在随机偏微分方程背景下，基于大量研究发展而来，相关工作始于 [Mat02、BKL02、Hai02、KS02], ，旨在研究 Wasserstein 距离（或与之密切相关的对偶利普希茨距离）下的混合性。Wasserstein 距离体现了弱拓扑，避开了无限维随机系统中分布彼此奇异这一问题。该领域中， [HM08、HMS11] 的研究一项重要贡献，是给出了符合本文需求的收缩（或所谓“谱隙”）估计，如式（1.1）所示。与早期文献一样，这些结果基于一些自然条件，分别通过李雅普诺夫结构、不可约性和平滑性质，构造出能在大、中、小尺度上使两点动力学同步的耦合。然而，[HM08、HMS11] 在这一更广泛的混合性研究中，一个优雅之处在于，它们找到了相空间上一类特定的度量（或伪度量），并针对不同尺度下驱动耦合的三种机制进行了精心设计。因此，这种“范数方法”避免了繁复的显式耦合构造，为应用提供了灵活的方法，同时也得出了简洁明了、易于理解的证明。

文献 [HM08, HMS11] 中的方法非常适用于无边界紧区域上的二维随机强迫纳维-斯托克斯方程，以及其他几类值得关注的反应-扩散型模型。然而， [HM08, HMS11] 中的一个关键要求似乎强于对大量有趣的随机偏微分方程实例所能期待的程度；这些实例具有较弱耗散和/或较强非线性，正如 [GHMR17, BKS20, GHMR21]所示。事实上， [HM08] 围绕某个测地度量构建了其理论，该度量适用于二次指数型李雅普诺夫结构，即对某个 $\alpha > 0$，满足 $V(u) = \exp(\alpha|u|^2)$。事实证明，这种测地度量方法需要对马尔可夫动力学使用某种梯度界，该梯度界与此前在[HM06]中引入的所谓“渐近强 Feller”（ASF）条件密切相关。尽管后来在 [HMS11] 中考察的伪度量结构在诸多方面更加灵活，包括对李雅普诺夫结构的要求，[HMS11] 最终仍然依赖于马尔可夫半群上同类的 ASF 型梯度界。总而言之，现有工作 [HM08, HMS11]

要求当两点动力学彼此接近时，整个相空间中的收缩率具有相当程度的一致性。在各种有趣的情形下，这一要求未免过高。

定理 2.1 为弱 Harris 方法提供了新的思路。与此前的表述相比，其主要优势在于无需梯度界。我们的方法建立在近期引入的工具之上 [BKS20], ，该工具提供了一套强大且易于使用的工具箱，通过应对 [GHMR17]中介绍的具有代表性的随机偏微分方程范例集，来研究指数混合。我们的结果可视为收缩拓扑的一种中间表述，介于[HM08] 与 [HMS11], 之间，并专门聚焦于 $V(u) = \exp(\alpha|u|^2)$。这种中间表述的优势在于，使我们能够处理 [GHMR17, BKS20]中的范例集。请注意，由于 $V(u) = \exp(\alpha|u|^2)$周围存在底层的李雅普诺夫结构，我们的伪度量不满足广义三角不等式；而像 (1.3)、(1.9) 这样的界则严格要求满足该不等式。相反，我们利用 $V$更强的“超李雅普诺夫”结构，给出一个“类似收缩”的条件（见 (2.7)、(2.8)）；该条件足够强，从而可以沿用通常的论证思路，得到我们的约化界 (1.12)、(1.13)。

问题列表见 [GHMR17、BKS20] ，其中尤其包括有界区域上满足通常无滑移边界条件的二维随机 Navier–Stokes 方程。我们将在下文第 4 节中完整详述这一情形；我们认为，这充分体现了定理 2.1 在应用中的重要意义。下文的注 4.6 将从技术层面比较我们的定理 2.1 与以下文献中的结果：[HM08] 以及 [HMS11]。

## 1.3 随机纳维–斯托克斯方程数值近似的结果

如上所述，我们当前的目标是展示第 2 节中建立的抽象形式体系在某些类别非线性随机偏微分方程的数值分析中的有效性。作为典型模型问题，我们将详细研究一种全离散数值格式，用于近似具有空间光滑但足够丰富（或“轻度退化”）随机强迫结构的二维随机纳维-斯托克斯方程（SNSE）。

下面我们立即陈述主要结果：定理 1.1 这一结果为随机动力系统数值分析领域的大量研究增添了新的成果。然而，关于随机偏微分方程长时间数值近似的文献寥寥无几；据我们所知，此前尚无关于随机 Navier–Stokes 方程或其他此类“强非线性”方程的相关研究。总而言之，相较于现有的数值分析文献，我们的主要贡献是为不变测度给出严格的逼近界，并建立弱收敛估计， `类似于（1.18），适用于随机 Navier–Stokes 方程的无限时间区间。我们对这一抽象框架的运用提出了一种新方法，可用于数值分析若干其他强非线性无限维系统；这些系统看似无法通过以往的方法处理，而我们的方法与现有文献所采用的一系列方法截然不同。

具体而言，在数值应用中，我们考虑环面上的二维纳维-斯托克斯方程 $\mathbb{T}^2$ ，从而可以采用方便的涡量形式

$$\mathrm{d}\xi + (-\nu\Delta\xi + \mathbf{u}\cdot\nabla\xi)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{d}\sigma_k dW_k = \sigma dW, \quad \mathbf{u} = \mathcal{K} * \xi. \tag{1.14}$$

这里， $\mathcal{K}$ 是毕奥–萨伐尔算子，它可以从 $\xi$ 唯一地恢复出无散度向量场 $\mathbf{u}$（因此 $\xi = \nabla^{\perp}\cdot\mathbf{u}$）。物理参数 $\nu > 0$ 表示流体的运动黏度。该系统受时间白噪声、空间光滑的高斯过程 $\sigma dW = \sum_{k=1}^{d}\sigma_k \mathrm{d}W^k$驱动，其中$W = (W_1, W_2, \ldots, W_d)$是概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上一组独立同分布的布朗运动，而$\sigma_1, \ldots, \sigma_d$是 $L^2(\mathbb{T}^2)$中的（空间）零均值元素。我们采用一种简化假设，即所谓的“本质椭圆情形”：假定存在某个非退化条件，使噪声激励直接作用于若干个低频傅里叶模态上，即

$$\mathrm{span}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_d\} \supset \Pi_K L^2(\mathbb{T}^2) \tag{1.15}$$

对于 $K = K(\nu, \sum_{k=1}^{d} |\sigma_k|_{L^2}^2)$。这是随机 Navier–Stokes 方程文献中的一项标准假设，参见 [Mat03, KS12、GHMR17]。为简便起见，我们考虑空间零均值流；只要噪声本身是零均值的，条件 (1.14) 就能保证这一点。

作为（1.14）的数值近似，我们考虑空间上的谱伽辽金离散和时间上的半隐式欧拉时间离散，表示为

$$\xi_{N,\delta}^{n} = \xi_{N,\delta}^{n-1} + \delta[\nu\Delta\xi_{N,\delta}^{n} - \Pi_N(\mathbf{u}_{N,\delta}^{n-1} \cdot \nabla\xi_{N,\delta}^{n})] + \sqrt{\delta}\sum_{k=1}^{d} \Pi_N \sigma_k \eta_n^k, \quad \text{for } n \geq 1, \tag{1.16}$$

其中，数值离散参数为时间步长 $\delta > 0$，以及 $N \geq 1$ 谱（空间）近似的阶数，使得算子 $\Pi_N$ 投影到前 $2N$ 个傅里叶模态上。如前所述，$\mathbf{u}_N^{n-1}$、$_\delta = \mathcal{K} * \xi_{N\,\delta}^{n-1}$。其中，$\sqrt{\delta}\eta_n^k$ 具有布朗运动 $W^k$增量的分布，因此 $\eta_n^k$ 由一列独立同分布的标准高斯随机变量生成。

我们的主要数值结果在此以启发式表述给出如下。

定理 1.1. 设（1.14）和（1.16）满足适当的非退化条件（1.15），即随机扰动直接作用于足够多的低频（其数量仅取决于 $\nu > 0$和$|\sigma|_{L^2}^2 = \sum_k |\sigma_k|_{L^2}^2$）。则（1.14）具有唯一的统计不变状态 $\mu_*$，且（1.16）对于任意 $N \geq 1$、$\delta > 0$具有唯一的统计不变状态 $\mu^{N,}{}_*{}^{\delta}$。此外，对于任意充分正则的观测量$\varphi$: $L^2(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{R}$，我们有如下界

$$\left| \int \varphi(\xi')\mu_*^{N,\delta}(d\xi') - \int \varphi(\xi')\mu_*(d\xi') \right| \leq C_\varphi(\delta^r + N^{-r'}) \tag{1.17}$$

对于某些不依赖于 $\varphi$ 的 $r = r(\nu, |\sigma|^2) > 0$、$r' = r'(\nu, |\sigma|^2) > 0$，其中 $C_\varphi$、$r$、$r'$ 均与 $\delta$、$N$ 无关。

最后，(1.16) 是 (1.14) 的弱相容逼近(1.14)。也就是说，对于任意这样的观测量 $\varphi$ 以及充分正则的 $\xi_0$，有

$$\sup_{n\geq 0} \left|\mathbb{E}\varphi(\xi_{N,\delta}^{n}(\xi_0)) - \mathbb{E}\varphi(\xi(n\delta;\xi_0))\right| \leq C_\varphi(\delta^r + N^{-r'}), \tag{1.18}$$

其中 $\xi(t;\xi_0)$、$t \geq 0$和$\xi_{N,\ \delta}^{n}(\xi_0)$、$n \in \mathbb{N}$分别表示以初始数据 $\xi_0$为初值的(1.14) 和(1.16)的解。

定理 1.1 的精确完整表述分散在下文的定理 1.1 与定理 3.21 和定理 3.22中。特别是，其证明建立在定理 3.9给出的离散化一致收缩界，以及命题 3.17 和命题 3.18的有限时间误差估计之上；这些估计为（1.8）和（1.5）提供了具体实例，同时对于（1.14）和（1.16）也具有独立的研究价值。

此外，我们注意到，1.17）与定理 3.9 中的收缩不等式结合，可以推导出估计量$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\ (\xi_{N,\ \delta}^{k})$ 作为平稳平均值$\int \varphi\ (\xi')\ \mu_*\ (d\xi')$的近似时的有用误差估计。事实上，在注 3.24 中，我们将在下文概述推导以下偏差估计所涉及的主要步骤

$$\left| \mathbb{E}\left( \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_{N,\delta}^{k}(\xi_0)) - \int \varphi(\xi')\mu_*(d\xi') \right) \right| \leq C_\varphi \left( \frac{1}{n\delta} + \delta^r + N^{-r'} \right), \tag{1.19}$$

以及均方误差估计

$$\mathbb{E}\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_{N,\delta}^{k}) - \int \varphi(\xi')\mu_*(d\xi') \right|^2 \leq C_\varphi \left( \frac{1}{n\delta} + \delta^{2r} + N^{-2r'} \right), \tag{1.20}$$

对于（1.17）中的 $C_\varphi$、$r$、$r'$。显然，这类估计在实际应用中具有直接意义：人们通常会针对一定数量 $n$ 的状态，计算时间离散平均值 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_{N,\delta}^{k})$，以此近似给定观测量 $\varphi$ 关于底层（通常未知的）平稳分布 $\mu_*$ 的均值。

前人研究与本文分析要点

关于随机系统数值分析的文献十分丰富。关于随机微分方程背景下这一主题的一般介绍，可参见例如 [KP92、MT04]，；对于随机偏微分方程，则可参见[JK09、LPS14]。在这一领域，近似结果通常以“强”收敛性和“弱”收敛性来刻画。按本文的记号，前者即强收敛的概念，关注量 $|\xi^j_{N,\delta}(\xi_0) - \xi(j\delta;\xi_0)|_{L^2}$ 的界，这些界可以用均值或概率来衡量。后者即“弱”收敛的概念，涉及对不同类别的测试函数上的 $\mathbb{E}(\phi(\xi^j_{N,\delta}(\xi_0)) - \phi(\xi(j\delta;\xi_0)))$ 进行估计；这可以用瓦瑟斯坦度量的界来表示，见下文（2.51）。对于这些度量所涵盖的可观测量类别，强收敛性蕴含弱收敛性，反之则不然；并且通常弱收敛率优于强收敛率（参见 [DG01、DP09]）。

现有的弱收敛方法主要基于以下观察。将 $\mathbb{E}(\phi(\xi^j_{N,\delta}(\xi_0)) - \phi(\xi(j\delta;\xi_0)))$ 展开为望远镜求和后，便可利用与极限动力系统相关的柯尔莫哥洛夫方程来估计误差。这些方法要求柯尔莫哥洛夫方程的解具有一定的正则性。此外，值得注意的是，为了处理长时间精度问题，需要证明这些估计关于 $j$ in 是一致的。这通常需要获得相应解随时间衰减的性质。对于随机偏微分方程而言，另一个难点在于，柯尔莫哥洛夫方程是一个抛物型偏微分方程，其“空间”变量是无限维的。在我们所研究的情形中，由于噪声仅作用于相空间的有限子集既是必要的，也具有研究价值，柯尔莫哥洛夫方程含有一个退化二阶项。此外，其漂移项涉及一个无界算子和一个强非线性项。

Kolmogorov 弱收敛方法的具体形式会因所研究的模型、所考虑的离散化类型以及建立数值收敛性的拓扑而异，但所得估计通常包含依赖于时间区间长度的界。对于有限维随机微分方程，我们提及开创性工作 [Mil79, Mil95, Tal84, Tal86]，，此后大量研究对其进行了重要改进，参见例如 [TT90, KP92, BT96, STZ01, KH01, CKHL06] 及其中的参考文献。对于随机偏微分方程，近期也取得了类似的弱收敛结果，例如 [AL16, AKL16, BS05, CJK19, DG01, DBD06, DP09, Deb11, Hau10, JK21, KLL12, KLL13, Wan16, WG13] 研究了线性方程或具有全局利普希茨非线性项的方程，而 [BD18, BG20, CGW21, CH19, CHS21, D¨or12] 则研究了更一般的非全局利普希茨情形。另有一系列研究致力于获得如 (1.17)、(1.19) 或 (1.20) 中所示的长时间逼近误差界，研究对象包括随机微分方程 [AVZ14, DF12, MST10, SS00, Tal90, Tal02] 或随机偏微分方程[Br´e14, BK17, Br´e22, CHS21, HW19]。

如前所述，我们证明定理 1.1 所采用的方法，依据的是上文介绍的一致 Wasserstein 收缩框架。具体而言，我们通过建立类似于（1.8）的一致 Wasserstein 收缩估计，并结合类似于（1.5）的有限时间误差估计。对于后者，我们的误差界实际上以 $L^p(\Omega;L^\infty_{\mathrm{loc},t}L^2_x)$ 中的强离散误差表示，其中 $p$足够小；该误差可由下文的命题 3.17 和命题 3.18 估计。显然，这种方法很可能无法保证（1.18）中的弱收敛速率达到最优。事实上，正如前文所述，通常认为弱收敛阶高于强收敛阶，而上文提及的许多弱收敛结果文献，正是着重确立这一阶数优势。

不过，我们强调，我们的方法的主要优势在于，除了给出极限平稳分布的数值近似的长期误差估计，即（1.17）、（1.19）、（1.20），还能够得到时间一致的弱误差估计（1.18）。值得注意的是，这是首次为随机 Navier–Stokes 方程建立此类结果。此前关于随机 Navier–Stokes 方程数值近似的研究，针对不同的空间或时间离散化方案以及不同的噪声类型，考察了概率意义下的强收敛 [BBM14, BD21, BP22, CP12, HR19] 或均值意义下的强收敛[BM19, BM21, BM22, BCP13, D¨or12, MT21]，但所得误差界始终只适用于有限时间区间 $[0,T]$，且常数会随 $T>0$ 指数增长。

关于命题 3.17 和命题 3.18所蕴含的强误差界，我们注意到，对于足够正则的初始点 $\xi_0$，它可以更明确地表示为

$$\mathbb{E}\sup_{j\le J}|\xi^j_{N,\delta}(\xi_0)-\xi(j\delta;\xi_0)|^p_{L^2}\le C\left[\delta^{p'p}+N^{-\frac{p}{2}}\right] \tag{1.21}$$

对任意 $J\in\mathbb{N}$, $p'\in(0,1/2)$，以及仅取决于黏性参数 $\nu$ 且充分小的 $p>0$

以及 $|\sigma|_{L^2}^2 = \sum_k |\sigma_k|_{L^2}^2$，其中 $C = C(p, p', J)$ 是一个正常数。这使得格式 (1.16) 在 $L^\infty_{\mathrm{loc},t} L^2_x$ 中的拓扑意义下于 Ω 上强收敛[1]，收敛速率在时间上几乎为 $1/2$，在空间上为 1（$N \sim h^{-2}$ 对于单元边长为 $h$ 的空间网格）。此外，随着 $\nu$ 增大，$p$ 几乎可以达到 2。由于解具有 $1/2$-H¨older 时间正则性，这一时间收敛速率是最优的；而这种正则性又是由底层随机驱动项的正则性所蕴含的。此前的研究也在速度形式下，为二维随机 Navier–Stokes 方程的其他类型数值近似或噪声项取得了最优速率，尤其是 [BBM14、BD21、BP22] 关于依概率收敛的研究，以及 [BM22] 关于在噪声满足适当小性假设时 Ω 上强收敛 $L^2$的研究。鉴于这些近期成果，我们认为，用于推导 (1.21) 的证明方法本身也具有独立的研究价值。更多细节见下文第 3.3 节。

### 1.4 展望与未来工作

本文的工作自然引出了若干未来发展的方向。首先，[GHMR17、BKS20、GHMR21] 中提出的模型问题为数值分析带来了一系列有趣的挑战。这里需要指出，尽管第 4 节 为研究有界区域上的二维随机 Navier–Stokes 方程迈出了第一步，但要完成与我们在第 3 节周期情形下所实现的类似研究计划，仍有一些细节有待解决。此外，第 3 节 仅讨论了控制方程多种可能数值近似中的一种；事实上，[GHMR17、BKS20、GHMR21] 中的每个模型方程都预计需要各自定制的自然近似格式。数值精度方面的另一项挑战是研究完全亚椭圆情形。要获得一致的收缩速率，想必需要发展一种离散时间版本的无限维 Malliavin 微积分方法，这类方法已在[HM06、HM11a、FGHRT15、KNS20]中提出。当然，除数值近似之外，我们的形式体系也可用于研究其他有趣的参数极限问题，正如我们同期的工作 [GHMN22]所示。

最后值得注意的是，第 2 节 中构建的抽象框架，其适用范围远远超出了本文所关注的随机偏微分方程模型。正如 [JM17], 中所指出的，我们可以利用弱 Harris 结果所得到的压缩性，在计算统计学的多种应用中进行偏差估计。我们即将发表的工作 [GHHKM22] 进一步拓展了这一思路，并特别利用了本文所识别出的统一性。

### 组织结构

本文其余部分安排如下。在第 2 节 中，我们介绍主要的抽象结果，即第 2.2 节 中的 Wasserstein 收缩判据，以及在时间$\infty$ 下的参数收敛/稳定性结果，见第 2.3 节。第 3 节 介绍第一个应用：随机 Navier–Stokes 方程全离散格式的数值分析。最后，第 4 节 给出有界区域上随机 Navier–Stokes 方程的收缩估计。

## 2 抽象结果

在介绍第 2.2 节 和第 2.3 节的一般结果之前，我们先在第 2.1 节 简要回顾有关马尔可夫过程和概率测度空间上 Wasserstein 距离的一些标准定义。更多详情可参阅，例如 [DPZ96、Vil08]。

### 2.1 预备知识

设 $X$ 为一个波兰空间。在本文中，我们用 $\mathcal{B}(X)$ 表示 $X$ 上 Borel 子集构成的 $\sigma$ 代数，并用 $\Pr(X)$ 表示相应的 Borel 概率测度空间。我们还用 $\mathcal{M}_b(X)$ 表示 $X$ 上所有实值、有界且 Borel 可测函数构成的集合。

回顾一下，$P\colon X \times \mathcal{B}(X) \to [0,1]$ 是一个马尔可夫核，当对每个固定的 $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(X)$，$P(\cdot, \mathcal{O})$ 都是可测的；并且对每个固定的 $u \in X$，$P(u, \cdot)$ 都是概率测度。对于任意测度 $\mu \in \Pr(X)$，回顾其

[1]例如参见 [Pri01，定义 2。6]。

在马尔可夫核 $P$ 上的对偶作用定义为

$$\mu P(\mathcal{O}) \coloneqq \int_X P(u,\mathcal{O})\mu(du), \quad \mathcal{O} \in \mathcal{B}(X).$$

若且唯若对于每个 $t \geq 0$, $\mu P_t = \mu$，则称测度 $\mu \in \Pr(X)$ 关于马尔可夫核族 $P_t$, $t \geq 0$ 不变。

此外，马尔可夫转移函数是马尔可夫核族 $P_t$, $t \geq 0$，满足：对于每个$u \in X$ 和 $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(X)$, $P_0(u,\mathcal{O}) = \mathbb{1}_{\mathcal{O}}(u)$，其中 $\mathbb{1}_{\mathcal{O}}$ 表示 $\mathcal{O}$的示性函数，并且该函数满足查普曼-科尔莫戈罗夫关系

$$P_{t+s}(u,\mathcal{O}) = P_t P_s(u,\mathcal{O}) \coloneqq \int_X P_s(v,\mathcal{O})P_t(u,dv).$$

给定这样的马尔可夫转移函数，其对应的马尔可夫半群定义为算子族 $P_t$, $t \geq 0$，作用于函数 $\varphi \in \mathcal{M}_b(X)$，定义如下：

$$P_t\varphi(u) \coloneqq \int_X \varphi(v)P_t(u,dv), \quad u \in X. \tag{2.1}$$

最后，我们回顾一下，映射 $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ 称为类距离函数，若其对称、下半连续，并满足 $\rho(u,\tilde{u}) = 0$ 当且仅当 $u = \tilde{u}$，参见 [HMS11，定义 4。3]. 对于任意这样的类距离函数 $\rho$，其在 $\Pr(X)$ 上的类 Wasserstein 扩展是映射 $\mathcal{W}_\rho$：$\Pr(X) \times \Pr(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$，定义如下：

$$\mathcal{W}_\rho(\mu,\tilde{\mu}) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{C}(\mu,\tilde{\mu})} \int_{X\times X} \rho(u,\tilde{u})\Gamma(du,d\tilde{u}), \tag{2.2}$$

其中 $\mathcal{C}(\mu,\tilde{\mu})$ 表示所有 耦合 的集合，其中 $\mu$ 和 $\tilde{\mu}$，即乘积空间 $\Gamma$ 上的所有概率测度 $X \times X$，其边缘分布分别为 $\mu$ 和 $\tilde{\mu}$。我们注意到，当 $\rho$ 是 $X$上的一个度量时，其对应的扩展 $\mathcal{W}_\rho$ 与通常的 Wasserstein-1 距离一致，参见 [Vil08]。

## 2.2 Wasserstein 收缩

我们的第一个一般性结果，即 定理 2.1，给出了关于给定马尔可夫半群的一组一般假设，这些假设足以保证该半群相对于某个合适的 Wasserstein 距离具有收缩性。我们的表述受到 [HMS11 中弱 Harris 定理（定理 4）的启发。8], 该定理在关于马尔可夫半群的三个主要假设下，得出类似的 Wasserstein 收缩结论。具体而言，这三个假设是：存在李雅普诺夫函数；对于从李雅普诺夫函数某些水平集出发的轨迹，满足一个小性条件；以及对于从彼此足够“接近”的点出发的轨迹，满足一个压缩性假设。

在我们的假设体系中，我们关注具有指数 Lyapunov 结构的随机系统，同时对压缩性要求给予更大的灵活性，见下文（2.5）。具体而言，我们的“收缩”系数定义为一个小于 1 的常数与一个依赖于某个初始点的指数项的乘积。这种设定旨在反映随机偏微分方程应用中的典型情形，尤其是涉及耗散结构的情形。事实上，下文对随机 Navier–Stokes 方程的应用第 3.2 节 和第 4 节 展示了这一点。

定理 2.1. 设 $X$ 是一个范数为 $\|\cdot\|$的可分巴拿赫空间。考虑一个指标集 $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^+$，并令$\{P_t\}_{t\in\mathcal{I}}$ 为 $X$ 上的马尔可夫半群，满足

(A1)（指数 Lyapunov 结构）存在一个连续函数 $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，使得 $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$，并且还存在 $\alpha_0 > 0$，使得对所有 $\alpha \in (0,\alpha_0]$, $t \in \mathcal{I}$ 和 $u_0 \in X$，下列不等式成立：

$$P_t \exp(\alpha\|u_0\|^2) \leq \exp(\alpha(\psi(t)\|u_0\|^2 + C_0)) \tag{2.3}$$

对于某个常数 $C_0 > 0$，它与 $t$、$u_0$ 和 $\alpha$ 无关。

此外，我们固定一组类距离函数 $\Lambda$： $\rho$，并考虑关于 $\Lambda$ 和 $\{P_t\}_{t\in\mathcal{I}}$ 的以下一组假设： $X\times X\to[0,1]$

（A2）（有界集最终具有 $\rho$-小性）对于每个 $M>0$ 和 $\rho\in\Lambda$，存在 $T_1=T_1(M,\ \rho)\ >0$ 以及 $\kappa_1=\kappa_1(M)\in(0,\ 1)$，其与 $\rho$ 无关，使得

$$\sup_{t\in\mathcal{I},\,t\geq T_1}\mathcal{W}_\rho(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\leq 1-\kappa_1 \tag{2.4}$$

对于每个 $u_0$、$v_0\in X$，满足 $\|u_0\|\leq M$ 和 $\|v_0\|\leq M$。

（A3）对于 每个 $\kappa_2\in(0,\ 1)$ 以及每个 $r>0$，存在 $\rho\in\Lambda$，使得下述条件成立：

（A3.i）（最终局部 $\rho$-压缩性）存在 $T_2=T_2(\kappa_2,\ r)\ >0$，使得

$$\sup_{t\in\mathcal{I},\,t\geq T_2}\mathcal{W}_\rho(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\leq\kappa_2\exp(r\|u_0\|^2)\rho(u_0,v_0) \tag{2.5}$$

对于每个 $u_0$、$v_0\in X$，满足 $\rho(u_0,\ v_0)\ <1$。

(A3.ii) 对所有 $\tau\geq 0$，存在 $C=C(\tau,\rho)\ >0$ 使得

$$\sup_{t\in\mathcal{I},\ t\in[0,\tau]}\mathcal{W}_\rho(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\leq C\exp(r\|u_0\|^2)\rho(u_0,v_0) \tag{2.6}$$

对于每个满足 $\rho(u_0,v_0)\ <1$ 的 $u_0,v_0\in X$。

那么，在假设 *(A1)*、*(A2)* 和 *(A3.i)* 成立的条件下，对于每个 $m\geq 1$，存在 $\alpha_m>0$，使得对于每个 $\alpha\in(0,\alpha_m]$，存在 $\rho\in\Lambda$，$\kappa\in(0,1)$ 以及 $T>0$，以下不等式成立

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t,\tilde{\mu}P_t)\leq\kappa\mathcal{W}_{\rho_{\alpha/m}}(\mu,\tilde{\mu}) \tag{2.7}$$

对于每个满足 $t\geq T$ 的 $t\in\mathcal{I}$，以及所有 $\mu,\tilde{\mu}\in$ 概率测度空间$(X)$。这里，对于每个 $a>0$，$\rho_a$：$X\times X\to\mathbb{R}^+$ 是定义如下的类距离函数

$$\rho_a(u,v)\coloneqq\rho(u,v)^{1/2}\exp(a\|u\|^2+a\|v\|^2),\quad u,v\in X. \tag{2.8}$$

此外，在额外假设*(A3.ii)* 成立的条件下，对于每个 $m\geq 1$，存在 $\alpha_m>0$，使得对于每个 $\alpha\in(0,\alpha_m]$，存在 $\rho\in\Lambda$，$T>0$ 以及常数 $C_1$，$C_2>0$，使得

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t,\tilde{\mu}P_t)\leq C_1e^{-C_2t}\mathcal{W}_{\rho_{\alpha/m}}(\mu,\tilde{\mu}) \tag{2.9}$$

对每个 $\mu$，$\tilde{\mu}\in$ 概率测度空间$(X)$ 以及所有 $t\in\mathcal{I}$ 满足 $t\geq T$的情形。这里，常数 $C_1$ 和 $C_2$ 仅取决于参数 $m$，$\alpha$，$\rho$，$T$，以及常数 $\alpha_0$，$C_0$、上确界$_{t\geq 0}\,\psi$，这些量来自假设 *(A1)*。

证明。 首先注意到，由于每个 $\rho_\alpha$ 都是下半连续且非负的，根据[Vil08定理 4.8] 可得，对每个 $\mu$，$\tilde{\mu}\in\mathcal{P}(X)$

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t,\tilde{\mu}P_t)\leq\int_{X\times X}\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\Gamma(du_0,dv_0), \tag{2.10}$$

对每个耦合 $\Gamma\in\mathcal{C}(\mu,\ \tilde{\mu})$。因此，要证明（2.7），只需证明对每个 $m\geq 1$ 都存在$\alpha_m>0$，使得对每个 $\alpha\in(0,\alpha_m]$ 都存在 $\rho\in\Lambda$，$\kappa\in(0,\ 1)$ 且 $T>0$ 满足以下条件

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\leq\kappa\rho_{\alpha/m}(u_0,v_0) \tag{2.11}$$

对每个 $t\in\mathcal{I}$满足 $t\geq T$，以及每个 $u_0,v_0\in X$。

固定 $m\geq 1$和 $u_0$，$v_0\in X$。对于某个固定的 $\rho\in\Lambda$，其取值将在后面根据 $m$、$\alpha$和 $\alpha_0$适当选定，$C_0$根据(A1)，并沿用 [HMS11定理 4 中的类似思路，8], 我们将证明分为三种情形：

(i) 首先假设 $\rho(u_0,\ v_0)\ =1$ 且 $\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\le 6mC_0$，其中 $C_0>0$ 如假设 (A1)所述。根据 $\mathcal{W}_{\rho_\alpha}$ 在（2.2）中的定义以及 H¨older 不等式可知，对所有 $t\in\mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot)) &= \inf_{\Gamma\in\mathcal{C}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))}\int_{X\times X}\rho(u,v)^{1/2}\exp\left(\alpha\|u\|^2+\alpha\|v\|^2\right)\Gamma(du,dv)\\ &\le \inf_{\Gamma\in\mathcal{C}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))}\left(\int_{X\times X}\rho(du,dv)\,\Gamma(du,dv)\right)^{1/2}\left(\int_{X\times X}\exp(4\alpha\|u\|^2)\,\Gamma(du,dv)\right)^{1/4}\\ &\qquad\cdot\left(\int_{X\times X}\exp(4\alpha\|v\|^2)\,\Gamma(du,dv)\right)^{1/4}\\ &= \mathcal{W}_\rho(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))^{1/2}\left(P_t\exp(4\alpha\|u_0\|^2)\right)^{1/4}\left(P_t\exp(4\alpha\|v_0\|^2)\right)^{1/4}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

现在我们调用假设 (A2) 与 $M:=(6mC_0)^{1/2}$ 来估计（2.12）中的第一个因子，并调用假设 (A1) 来估计最后两个因子，假设 $\alpha\in(0,\alpha_0/4]$。因此，对于每个$t\in\mathcal{I}$ 满足 $t\ge T_1$

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\le(1-\kappa_1)^{1/2}\exp(2\alpha C_0)\exp(\alpha\psi(t)(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2))\tag{2.13}$$

由于 $\kappa_1\in(0,\ 1)$，我们可以取 $\alpha_m\in(0,\alpha_0/4]$ 充分小，使得对于每个 $\alpha\in(0,\alpha_m]$ 都有

$$\tilde{\kappa}_1:=(1-\kappa_1)^{1/2}\exp(2\alpha C_0)\le(1-\kappa_1)^{1/2}\exp(2\alpha_m C_0)<1.\tag{2.14}$$

此外，由于 $\lim_{t\to\infty}\psi(t)\ =0$，我们可以取 $T_1\ge T_1$ 充分大，使得 $\psi(T_1)\ \le 1/m$，因此由（2.13）可知，对于任意固定的 $\alpha\in(0,\alpha_m]$ 以及每个 $t\in\mathcal{I}$ 满足 $t\ge T_1$

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\le\tilde{\kappa}_1\exp\left(\frac{\alpha}{m}(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2)\right)=\tilde{\kappa}_1\rho_{\alpha/m}(u_0,v_0),\tag{2.15}$$

其中等式由假设 $\rho(u_0,v_0)\ =1$ 得出。

(ii) 接下来，我们假设 $\rho(u_0,v_0)\ =1$ 且 $\|u_0\|^2+\|v_0\|^2>6mC_0$。由于 $\rho(u,v)\ \le 1$ 对所有 $u,v\in X$均成立，结合 H¨older 不等式和假设 (A1) 可得，对于任意固定的 $\alpha\in(0,\alpha_m]$，其中 $\alpha_m$如（2.14）中所示，且对每个 $t\in\mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot)) &= \inf_{\Gamma\in\mathcal{C}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))}\int_{X\times X}\rho(u,v)^{1/2}\exp\left(\alpha\|u\|^2+\alpha\|v\|^2\right)\Gamma(du,dv)\\ &\le\left(P_t\exp(2\alpha\|u_0\|^2)\right)^{1/2}\left(P_t\exp(2\alpha\|v_0\|^2)\right)^{1/2}\\ &\le\exp(2\alpha C_0)\exp(\alpha\psi(t)(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2)).\end{aligned}\tag{2.16}$$

注意到

$$\exp(2\alpha C_0)=\exp(-\alpha C_0)\exp\left(\frac{\alpha}{2m}6mC_0\right)<\exp(-\alpha C_0)\exp\left(\frac{\alpha}{2m}(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2)\right).$$

因此，由（2.16）可得

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\le\exp(-\alpha C_0)\exp\left(\left(\frac{\alpha}{2m}+\alpha\psi(t)\right)(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2)\right).$$

因此，取 $T>0$ 充分大，使得 $\psi(T)\ <1/(2m)$，我们便可推得，对所有满足$t\ge T$的 $t\in\mathcal{I}$

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\le\tilde{\kappa}\exp\left(\frac{\alpha}{m}(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2)\right)=\tilde{\kappa}\rho_{\alpha/m}(u_0,v_0),\tag{2.17}$$

其中 $\tilde{\kappa}:=\exp(-\alpha C_0)\ <1$。

（iii）最后，假设 $\rho(u_0, v_0) < 1$。取 $r := \alpha/m$，其中固定 $\alpha \in (0, \alpha_m]$，并取 (2.14) 中选定的 $\alpha_m \in (0, \alpha_0/4]$。此外，取满足 $\kappa_2 < \exp(-\alpha_0 C_0)$ 的 $\kappa_2 \in (0, 1)$，其中 $\alpha_0, C_0$ 来自假设（A1）。对于这些 $r$ 和 $\kappa_2$ 的取值，我们将 $\rho \in \Lambda$ 固定为相应的类距离函数，使假设（A3）成立。这里需要仔细注意，由于 $\rho$ 依赖于 $r$，而 $r$ 又依赖于 $\alpha$；进而，如 (2.14) 所示，$\alpha$ 依赖于假设（A2）中的 $\kappa_1$，因此 $\rho$ 依赖于 $\kappa_1$。所以，假设（A2）中的 $\kappa_1$ 独立于 $\rho$ 这一事实，对于避免在选择 $\rho \in \Lambda$ 时出现循环论证至关重要。

沿用（2.12）中的同一估计，现在我们用假设 (A3.i) 估计第一个因子，并用假设 (A1) 估计其余两个因子。因此，对于每个 $t \in \mathcal{I}$ 满足 $t \geq T_2$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot), P_t(v_0,\cdot)) \\
&\leq \left[\kappa_2 \exp\left(\frac{\alpha}{m}\|u_0\|^2\right)\rho(u_0, v_0)\right]^{1/2} \exp(2\alpha C_0)\exp(\alpha\psi(t)(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2)) \\
&\leq \kappa_2^{1/2}\exp(2\alpha C_0)\rho(u_0, v_0)^{1/2}\exp\left(\left(\frac{\alpha}{2m} + \alpha\psi(t)\right)(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2)\right). \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

由于 $\alpha \in (0, \alpha_0/4]$，并且根据 $\kappa_2$ 的选取，我们有 $\kappa_2 < \exp(-\alpha_0 C_0)$，于是

$$\tilde{\kappa}_2 := (\kappa_2 \exp(4\alpha C_0))^{1/2} \leq (\kappa_2 \exp(\alpha_0 C_0))^{1/2} < 1. \qquad (2.19)$$

此外，像之前一样，取 $T_2 \geq T_2$ 充分大，使得 $\psi(T_2) < 1/(2m)$，由（2.18）和（2.19）可得，对于所有 $t \in \mathcal{I}$ 满足 $t \geq T_2$

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot), P_t(v_0,\cdot)) \leq \tilde{\kappa}_2 \rho_{\alpha/m}(u_0, v_0). \qquad (2.20)$$

由（2.15）、（2.17）和（2.20），可知对于每个固定的 $m \geq 1$，存在 $\alpha_m > 0$，使得对于每个 $\alpha \in (0, \alpha_m]$，存在 $\rho \in \Lambda$ 和 $T > 0$，使得（2.11）在 $\kappa := \min\{\tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2, \tilde{\kappa}\}$ 时成立，且对于所有$t \in \mathcal{I}$ 满足 $t \geq T$。这就完成了证明的第一部分。

接下来，我们在附加假设 2.9) （A3.ii）下证明不等式，并沿用上述步骤（$\kappa_2$）中的 $r$ 和$iii$。同样，由（2.10）可知，只需证明：对每个 $m \geq 1$，都存在 $\alpha_m > 0$，使得对每个 $\alpha \in$ （0，$\alpha_m$]，都存在 $\rho \in \Lambda$，$T > 0$ 以及常数 $C_1$，$C_2 > 0$，使得

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot), P_t(v_0,\cdot)) \leq C_1 e^{-C_2 t}\rho_{\alpha/m}(u_0, v_0) \qquad (2.21)$$

对所有满足 $t \geq T$ 的 $t \in \mathcal{I}$，以及对所有 $u_0$、$v_0 \in X$，均成立。

固定 $m \geq 1$。取 $K \geq 1$，使得假设（A1）中的函数 $\psi$ 满足 $\psi(t) \leq K$，对所有 $t \geq 0$ 均成立。再取与参数 $2mK$ 对应的（2.14）中的 $\alpha_{2mK} > 0$。固定 $\alpha \in (0, \alpha_{2mK}]$ 及其对应的 $\kappa \in (0, 1)$、$\rho \in \Lambda$ 和 $T > 0$，使得（2.7）成立。显然，我们可以假设 $T \in \mathcal{I}$。于是，对于任意满足 $t \geq T$ 的 $t \in \mathcal{I}$，我们可以写作 $t = jT + s$，其中 $j \in \mathbb{N}$、$j \geq 1$，且 $s \in [0, T) \cap \mathcal{I}$。注意，对所有 $j \in \mathbb{N}$，$jT \in \mathcal{I}$。因此，应用（2.11）$j$ 次，可得对所有 $u_0$、$v_0 \in X$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot), P_t(v_0,\cdot)) &= \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_{(j-1)T+s}(u_0,\cdot)P_T, P_{(j-1)T+s}(v_0,\cdot)P_T) \\
&\leq \kappa\mathcal{W}_{\rho_{\alpha/(2mK)}}(P_{(j-1)T+s}(u_0,\cdot), P_{(j-1)T+s}(v_0,\cdot)) \\
&\leq \kappa\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_{(j-1)T+s}(u_0,\cdot), P_{(j-1)T+s}(v_0,\cdot)) \\
&\leq \ldots \leq \kappa^j \mathcal{W}_{\rho_{\alpha/(2mK)}}(P_s(u_0,\cdot), P_s(v_0,\cdot)). \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

由与（2.12）中类似的计算可知，对所有 $s \in [0, T) \cap \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_{\rho_{\alpha/(2mK)}}(P_s(u_0,\cdot), P_s(v_0,\cdot)) \\
&\leq \mathcal{W}_\rho(P_s(u_0,\cdot), P_s(v_0,\cdot))^{1/2}\left(P_s\exp\left(2\frac{\alpha}{mK}\|u_0\|^2\right)\right)^{1/4}\left(P_s\exp\left(2\frac{\alpha}{mK}\|v_0\|^2\right)\right)^{1/4}.
\end{aligned}$$

因此，回想上文步骤（ $r$ ）中类似地选取 $iii$，即 $r:=\alpha/(2mK)$，其中 $\alpha\in(0,\ \alpha_{2mK}]$且 $\alpha_{2mK}$ 与（2.14）中相同。由假设 （A3.ii）以及假设 （A1）可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}_{\rho_{\alpha/(2mK)}}(P_s(u_0,\cdot),P_s(v_0,\cdot))\\&\quad\le C\exp\left(\frac{\alpha}{4mK}\|u_0\|^2\right)\rho(u_0,v_0)^{1/2}\exp\left(\frac{\alpha}{mK}C_0\right)\exp\left(\frac{\alpha}{2mK}\psi(s)(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2)\right)\\&\quad\le C\exp\left(\frac{\alpha}{4m}\|u_0\|^2\right)\rho(u_0,v_0)^{1/2}\exp\left(\frac{\alpha}{mK}C_0\right)\exp\left(\frac{\alpha}{2m}(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2)\right)\\&\quad\le C\rho_{\alpha/m}(u_0,v_0)\end{aligned}\tag{2.23}$$

将（2.23）代入（2.22），得到

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\le\kappa^jC\rho_{\alpha/m}(u_0,v_0).$$

由于 $t=jT+s<(j+1)T$，因此 $j>(t/T)-1$，进而得到 $\kappa^j<\kappa^{\frac{t}{T}-1}$。于是，

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t(u_0,\cdot),P_t(v_0,\cdot))\le\kappa^{\frac{t}{T}-1}C\rho_{\alpha/m}(u_0,v_0)=\frac{C}{\kappa}e^{t\frac{\ln\kappa}{T}}\rho_{\alpha/m}(u_0,v_0)$$

对所有 $t\in\mathcal{I}$满足 $t\ge T$的情形，以及每个 $u_0$，$v_0\in X$。因此，（2.21）在 $C_1=C/\kappa$和 $C_2=-(\ln\kappa)/T$的条件下成立。证明完毕。 □

注 2.2. 显然，若 $P_t$, $t\in\mathcal{I}$, 是一个满足定理 2.1 假设的马尔可夫半群，且存在与之对应的不变测度 $\mu_*\in$ 概率测度空间$(X)$，即 $\mu_*P_t=\mu_*$ 对所有 $t\in\mathcal{I}$均成立，则不等式（2.7）意味着 $\mu_*$ 也必定是唯一的不变测度。此外，固定 $\rho\in\Lambda$ 为使（2.7）成立的类距离函数，类似于 [HMS11, 推论 4.11]，若在 $X$ 上存在一个完备度量 $\tilde{\rho}$，使得 $\tilde{\rho}\le\sqrt{\rho}$，且 $P_t$ 是 $(X,\tilde{\rho})$ 上的 Feller 半群，那么结合假设（A1）、（A2）和（A3.i），也可以保证存在这样的不变测度。

## 2.3 一致的长时间弱收敛

下面的一般性结果给出了实现类似于（1.7）的长期偏差估计所需的具体假设集合，但其适用情形比 第 1.1 节所考虑的情形更为一般。事实上，我们的估计是相对于由上文（ $\rho_\alpha$ ）中定义的类距离函数所诱导的 Wasserstein 距离给出的，因此该距离未必是度量。主要假设如下：满足广义三角不等式，（H1）；给定参数化马尔可夫核族中的每个成员都存在不变测度，（H2）；近似过程满足有限时间误差估计，（H3）；给定马尔可夫核族满足关于参数的一致 Wasserstein 收缩。在这些假设下，证明基本遵循导出（1.7）时所采用的相同步骤。

定理 2.3. 设 $X$ 是一个范数为 $\|\cdot\|$的可分巴拿赫空间。固定一个类距离函数集合 $\Lambda$ $\rho\colon X\times X\to[0,1]$。考虑定义在 $X$ 上、由 $t\in\mathbb{R}^+$ 索引的一族马尔可夫核 $P_t^\theta$，以及一个在某个集合 $\Theta$中变化的参数 $\theta$。假设满足以下条件：

（H1）存在一个常数 $\gamma\ge1$ 使得对于每个 $\rho\in\Lambda$ 以及 $\alpha>0$ 类距离函数 $\rho_\alpha:X\times X\to\mathbb{R}^+$ 定义于（2.8）满足：

$$\rho_\alpha(u,v)\le C\left[\rho_{\gamma\alpha}(u,w)+\rho_{\gamma\alpha}(w,v)\right]\tag{2.24}$$

对于所有的 $u$、$v$、$w\in X$，以及某个常数 $C>0$（该常数可能取决于 $\rho$、$\alpha$ 和 $\gamma$）。

（H2）对于每个 $\theta\in\Theta$，存在一个概率测度 $\mu_\theta$ 定义在 $X$ 上，并且在 $P_t^\theta$、$t\in\mathbb{R}$ 作用下保持不变，$^+$.

（H3）存在 $\theta_0\in\Theta$ 和 $\alpha'>0$，使得对于每个 $\alpha\in(0,\ \alpha']$，以及对于每个 $\rho\in\Lambda$，存在函数$g:\Theta\to\mathbb{R}^+$、$R:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$，以及一个可测函数 $f:X\to\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}$，使得

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t^\theta(u,\cdot),P_t^{\theta_0}(u,\cdot))\le R(t)f(u)g(\theta),\tag{2.25}$$

对所有 $\theta\in\Theta$、$t\in\mathbb{R}^+$ 和 $u\in X$。

(H4) 对于每个 $m \geq 1$，存在 $\alpha_m > 0$，使得对于每个 $\alpha \in (0, \alpha_m]$，都存在 $\rho \in \Lambda$、$T > 0$ 和常数 $C_1$、$C_2 > 0$，使得以下不等式成立：

$$\sup_{\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}} \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \tilde{\mu} P_t^\theta) \leq C_1 e^{-tC_2} \mathcal{W}_{\rho_{\alpha/m}}(\mu, \tilde{\mu}) \tag{2.26}$$

对每个 $\mu$，$\tilde{\mu} \in$ 概率测度空间$(X)$ 和 $t \geq T$，其中 $\theta_0 \in \Theta$ 如（H3）所述。

~于是，存在 $\alpha_* > 0$，使得对每个固定的 $\alpha \in$（0，$\alpha_*$]，存在 $\rho \in \Lambda$、$T > 0$ 和一个常数 $C > 0$，使得

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu_\theta, \mu_{\theta_0}) \leq C R(\widetilde{T}) g(\theta) \int_X f(u) \mu_{\theta_0}(du), \tag{2.27}$$

对每个 $\theta \in \Theta$。

注 2.4. 定理 2.3 的关键条件 (2.24) 在实践中并不难验证。类距离函数的集合 $\Lambda$ 所需满足的主要条件是它们满足广义三角不等式，即对于 $\rho \in \Lambda$，有界 $\rho(u, w) \leq C(\rho(u, v) + \rho(u, w))$，其中常数 $C$ 独立于任何 $u$、$v$、$w \in X$。关于该条件的精确表述，见下文命题 A.1；其应用示例见第 3.2 节中的 (3.25) 以及第 4.2 节中的 (4.8)。

证明。由于假设（H1）和（H2），结合 命题 A.2，可知对每个 $\rho \in \Lambda$ 和$\alpha > 0$，都存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $t \in \mathbb{R}^+$ 和 $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu_\theta, \mu_{\theta_0}) = \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu_\theta P_t^\theta, \mu_{\theta_0} P_t^{\theta_0}) \leq C \left[ \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu_\theta P_t^\theta, \mu_{\theta_0} P_t^\theta) + \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu_{\theta_0} P_t^\theta, \mu_{\theta_0} P_t^{\theta_0}) \right]. \tag{2.28}$$

现在利用假设（H4），并结合 $m = \gamma$ 来估计（2.28）右端的第一项，可得对于任意固定的 $\alpha \in (0, \alpha_\gamma/\gamma]$ 及相应的 $\rho \in \Lambda$，$T > 0$ 和常数 $C_1$，$C_2 > 0$，有

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu_\theta, \mu_{\theta_0}) \leq C \left[ C_1 e^{-tC_2} \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu_\theta, \mu_{\theta_0}) + \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu_{\theta_0} P_t^\theta, \mu_{\theta_0} P_t^{\theta_0}) \right] \tag{2.29}$$

~对所有 $t \geq T$。取满足以下条件的 $T \geq T$

$$C C_1 e^{-\widetilde{T} C_2} < \frac{1}{2}. \tag{2.30}$$

~因此，在（$t = T$ 代入2.29）并整理各项后，可得

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu_\theta, \mu_{\theta_0}) \leq 2C \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu_{\theta_0} P_{\widetilde{T}}^\theta, \mu_{\theta_0} P_{\widetilde{T}}^{\theta_0}). \tag{2.31}$$

此外，与（2.10）中的推导类似，由 [Vil08，定理 4.8] 可得

$$\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu_{\theta_0} P_{\widetilde{T}}^\theta, \mu_{\theta_0} P_{\widetilde{T}}^{\theta_0}) \leq \int_{X \times X} \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(P_{\widetilde{T}}^\theta(u, \cdot), P_{\widetilde{T}}^{\theta_0}(v, \cdot)) \Gamma(du, dv), \tag{2.32}$$

对于任意耦合 $\Gamma \in \mathcal{C}(\mu_{\theta_0}, \mu_{\theta_0})$。取 $\Gamma(du, dv) = \delta_u(dv) \mu_{\theta_0}(du)$，其中 $\delta_u \in$概率测度空间$(X)$ 表示集中于 $u \in X$ 的狄拉克测度。不难验证，$\Gamma \in \mathcal{C}(\mu_{\theta_0}, \mu_{\theta_0})$。因此，

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu_{\theta_0} P_{\widetilde{T}}^\theta, \mu_{\theta_0} P_{\widetilde{T}}^{\theta_0}) &\leq \int_{X \times X} \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(P_{\widetilde{T}}^\theta(u, \cdot), P_{\widetilde{T}}^{\theta_0}(v, \cdot)) \delta_u(dv) \mu_{\theta_0}(du) \\ &= \int_X \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(P_{\widetilde{T}}^\theta(u, \cdot), P_{\widetilde{T}}^{\theta_0}(u, \cdot)) \mu_{\theta_0}(du). \end{aligned} \tag{2.33}$$

如有必要，我们假设 $\alpha$ 的变化范围较小，从而使（2.25）中的不等式（H3）关于 $\gamma\alpha$成立，即

$$\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(P_t^\theta(u, \cdot), P_t^{\theta_0}(u, \cdot)) \leq R(t) f(u) g(\theta), \tag{2.34}$$

对所有 $\theta \in \Theta$、 $t \in \mathbb{R}^+$、 $u \in X$，并且固定 $\rho$ 如（2.29）所示。由（2.31）、（2.33）以及~（2.34）可知，取 $t = T$ 时，有

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu_\theta, \mu_{\theta_0}) \le 2C\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu_{\theta_0}P_{\widetilde{T}}^{\theta}, \mu_{\theta_0}P_{\widetilde{T}}^{\theta_0}) \le 2CR(\widetilde{T})g(\theta)\int_X f(u)\,\mu_{\theta_0}(du). \tag{2.35}$$

这表明（2.27），并完成了证明。 □

接下来注意到，若满足 $g(\theta) \to 0$ 且 $\theta \to \theta_0$，则如（2.25）所示的有限时间误差估计，结合逼近族 $\{P_t^\theta\}_{t\ge 0}$，$\theta \in \Theta\backslash\{\theta_0\}$ 如（2.26）所示的统一 Wasserstein 收缩，可得极限过程 $\{P_t^{\theta_0}\}_{t\ge 0}$的 Wasserstein 收缩结果。具体表述如下。

引理 2.5。固定定理 2.3 中相同的设定，并假设假设（H1）-（H4）成立。关于（H3），进一步假设对每个 $\alpha \in (0, \alpha']$ 和 $\rho \in \Lambda$，相应函数 $g$ 满足 $\lim_{\theta\to\theta_0} g(\theta) = 0$。那么，对每个 $m \ge 1$，存在 $\alpha_m > 0$，使得对每个 $\alpha \in (0, \alpha_m]$，存在~ ~ ~$\rho \in \Lambda$、 $T > 0$ 以及常数 $C_1$、$C_2 > 0$，使得下列不等式成立：

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^{\theta_0}, \tilde{\mu}P_t^{\theta_0}) \le \widetilde{C}_1 e^{-t\widetilde{C}_2}\mathcal{W}_{\rho_{\alpha/m}}(\mu, \tilde{\mu}) \tag{2.36}$$

~对每个 $t \ge T$ 以及所有 $\mu, \tilde{\mu} \in$，满足 $X$ 的概率测度空间 Pr

$$\int_X f(u)\mu(du) + \int_X f(u)\tilde{\mu}(du) < \infty, \tag{2.37}$$

其中 $f$ 是从 （H3）得到的函数。

证明。任取 $m \ge 1$ 和 $\mu$， $\tilde{\mu}$ 满足（2.37）。两次应用 （H1）和 命题 A.2，可得

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^{\theta_0}, \tilde{\mu}P_t^{\theta_0}) \le C\left[\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu P_t^{\theta_0}, \mu P_t^{\theta}) + \mathcal{W}_{\rho_{\gamma^2\alpha}}(\mu P_t^{\theta}, \tilde{\mu}P_t^{\theta}) + \mathcal{W}_{\rho_{\gamma^2\alpha}}(\tilde{\mu}P_t^{\theta}, \tilde{\mu}P_t^{\theta_0})\right] \tag{2.38}$$

对任意 $\theta \in \Theta\backslash\{\theta_0\}$。现在假设 $\alpha > 0$ 充分小，接着如（2.32）-（2.33）中那样处理，并应用（H3）估计（2.38）右端的第一项和第三项，以及应用 （H4）估计第二项。因此，对于任意这样的 $\alpha$，存在 $\rho \in \Lambda$ 和 $T > 0$ 使得

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^{\theta_0}, \tilde{\mu}P_t^{\theta_0}) \le C\left[R(t)g(\theta)\left(\int_X f(u)\mu(du) + \int_X f(u)\tilde{\mu}(du)\right) + C_1 e^{-tC_2}\mathcal{W}_{\rho_{\alpha/m}}(\mu, \tilde{\mu})\right]$$

对所有 $t \ge T$，其中 $C_1$， $C_2$ 与（2.26）中的相同。因此，令 $\theta \to \theta_0$ 并回想假设 $\lim_{\theta\to\theta_0} g(\theta) = 0$ 以及（2.37），可推出（2.36）。 □

接下来，我们将证明，在定理 2.3 中的相同假设下，并对有限时间误差估计（2.25右端出现的函数施加一些自然条件，可得给定的马尔可夫核参数族 $P_t^\theta$, $\theta \in \Theta$在 $t \ge 0$中一致收敛于 $P_t^{\theta_0}$，其中采用由 $\mathcal{W}_{\rho_\alpha}$确定的 Wasserstein 拓扑。

定理 2.6. 固定定理 2.3 中的相同设定，并假设（H1）-（H4）成立。此外，关于（H3），假设对每个 $\alpha \in (0, \alpha']$ 和 $\rho \in \Lambda$，相应的函数 $R$, $g$以及$f$ 满足：

（H5） $R$ 连续且严格递增；

（H6） $g$ 有界，且 $\lim_{\theta\to\theta_0} g(\theta) = 0$；

（H7） $\int_X f(u)\,\mu_{\theta_0}(du) < \infty$，其中 $\mu_{\theta_0}$ 如 （H2）。

那么，存在 $\hat{\alpha} > 0$ ，使得对于每个固定的 $\alpha \in (0, \hat{\alpha}]$ ，都存在 $\rho \in \Lambda$ ，使得对每个 $\theta \in \Theta$ 和 $\mu \in$ 概率测度空间$(X)$，以下不等式成立，其中 $\int_X f(u)\mu(du) < \infty$:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) \le \tilde{g}(\theta) \left[ \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu, \mu_{\theta_0}) + \int_X f(u)\mu(du) + \int_X f(u)\mu_{\theta_0}(du) \right], \tag{2.39}$$

其中，若 $R$有界，

$$\tilde{g}(\theta) = Cg(\theta),$$

若 $R$ 无界

$$\tilde{g}(\theta) = C \max\left\{ \exp\left(-C_2 R^{-1}(Cg(\theta)^{-q})\right), g(\theta), g(\theta)^{1-q} \right\}, \tag{2.40}$$

对于 $g(\theta) \neq 0$，且 $\tilde{g}(\theta) = 0$ ，否则。这里， $q$ 是 (0,1)中的任意固定数， $C > 0$ 是一个与 $\theta$无关的常数，且 $C_2$ 是 (2.26) 中的常数。

因此，若另外 $\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu, \mu_{\theta_0}) < \infty$，则

$$\lim_{\theta\to\theta_0} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) = 0. \tag{2.41}$$

证明。 由 命题 A.2以及假设 （H1）和 （H2），可得对任意 $\mu \in$概率测度空间$(X)$,$\alpha > 0$, $\rho \in \Lambda$, $t \in \mathbb{R}^+$ 和 $\theta \in \Theta\backslash\{\theta_0\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) &\le C \left[ \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu P_t^\theta, \mu_\theta P_t^\theta) + \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu_\theta, \mu P_t^{\theta_0}) \right] \\ &\le C \left[ \mathcal{W}_{\rho_{\gamma^2\alpha}}(\mu P_t^\theta, \mu_{\theta_0} P_t^\theta) + \mathcal{W}_{\rho_{\gamma^2\alpha}}(\mu_{\theta_0} P_t^\theta, \mu_\theta P_t^\theta) + \mathcal{W}_{\rho_{\gamma^2\alpha}}(\mu_\theta, \mu_{\theta_0}) + \mathcal{W}_{\rho_{\gamma^2\alpha}}(\mu_{\theta_0} P_t^{\theta_0}, \mu P_t^{\theta_0}) \right]. \end{aligned} \tag{2.42}$$

现在我们调用假设（H4）来估计右端 (2.42) 中的第一项和第二项，调用定理 2.3 中的 (2.27) 来估计第三项，并调用引理 2.5 来估计第四项。这里注意，估计第一项、第二项和第四项时，我们可以在任意选择 $m \ge 1$ 的情况下应用（H4）和引理 2.5。但要通过 (2.27) 估计第三项时，正如我们从定理 2.3 的证明中回忆的那样，必须在 $m = \gamma$下调用（H4）。由于满足（H4）中 (2.26) 和引理 2.5 中 (2.36) 的类距离函数 $\rho \in \Lambda$ 尤其取决于 $m$的选择，因此我们也在 $m = \gamma$下估计第一项、第二项和第四项。这表明，对于充分小的 $\alpha > 0$ ，存在 $\rho \in \Lambda$、 $T > 0$以及常数$C_1$、 $C_2 > 0$ ，使得

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) &\le C \left[ C_1 e^{-tC_2} \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu, \mu_{\theta_0}) + C_1 e^{-tC_2} \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu_{\theta_0}, \mu_\theta) + \mathcal{W}_{\rho_{\gamma^2\alpha}}(\mu_\theta, \mu_{\theta_0}) \right] \\ &\le C \left[ e^{-tC_2} \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu, \mu_{\theta_0}) + \mathcal{W}_{\rho_{\gamma^2\alpha}}(\mu_\theta, \mu_{\theta_0}) \right] \\ &\le C \left[ e^{-tC_2} \mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu, \mu_{\theta_0}) + g(\theta) \int_X f(u)\mu_{\theta_0}(du) \right], \end{aligned} \tag{2.43}$$

对于每个 $t \ge T$、 $\theta \in \Theta$和 $\mu \in$概率测度空间$(X)$，使得 $\int_X f(u)\mu(du) < \infty$。这里， $C > 0$是一个依赖于 $\alpha$、$T$，但与 $t$、$\theta$ 无关的常数。

另一方面，按照（2.32）-（2.35）中的类似方法，根据假设直接可得：若有必要，取 $\alpha$ 更小， (H3)

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) \le R(t)g(\theta) \int_X f(u)\mu(du), \tag{2.44}$$

对所有 $\theta \in \Theta$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$。现在我们结合不等式（2.43）和（2.44），得到所需的关于$t \in \mathbb{R}^+$ 的一致估计（2.39）。

我们首先假设 $R$ 是一个有界函数。在这种情况下，由式（2.44）可立即得出

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) \le Cg(\theta) \int_X f(u)\mu(du),$$

对每个 $\theta \in \Theta$，且存在某个常数 $C > 0$，正如所需。

现在假设 $R$ 无界。固定 $q \in (0,1)$，并令 $t_* > 0$ 使得 $R(t_*) \neq 0$。令 $\tilde{R}(\tau) := R(\tau)/R(t_*)$，$\tau \in \mathbb{R}^+$，以及 $\tilde{g}(\theta) := g(\theta)/\overline{g}$，$\theta \in \Theta$，其中 $\overline{g} := \sup_{\theta\in\Theta} g(\theta)$。这里回顾一下我们的˜假设：$R$ 严格递增且连续，而 $g$ 有界，这意味着 $R$ 也严格递增且连续，并且 $\overline{g} < \infty$。

˜固定 $\theta \in \Theta$，首先假设 $g(\theta) \neq 0$，从而 $\tilde{g}(\theta) \neq 0$。注意到 $R(t_*) = 1$，且 $\tilde{g}(\theta) \leq 1$，因此 $\tilde{R}(t_*) \leq \tilde{g}(\theta)^{-q}$。由于 $\tilde{R}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 连续且无界，存在 $\tau_* \in \mathbb{R}^+$ 使得 $\tilde{R}(\tau_*) = \tilde{g}(\theta)^{-q}$。又由于 $R$、$\tilde{R}$ 严格递增，因此它们对应的逆函数 $R^{-1}$、$\tilde{R}^{-1}$ 是良定义的，从而 $\tau_* = \tilde{R}^{-1}(\tilde{g}(\theta)^{-q}) = R^{-1}(g(\theta)^{-q}R(t_*)/\overline{g})$。由 (2.44)，我们因此得到，对于每个$t \leq \tau_*$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) \leq R(\tau_*)g(\theta)\int_X f(u)\mu(du) &= \tilde{R}(\tau_*)\tilde{g}(\theta)R(t_*)\overline{g}\int_X f(u)\mu(du)\\ &= \tilde{g}(\theta)^{1-q}R(t_*)\overline{g}\int_X f(u)\mu(du)\\ &\leq Cg(\theta)^{1-q}\int_X f(u)\mu(du), \end{aligned} \tag{2.45}$$

对于每个 $t \leq T$

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) \leq R(T)g(\theta)\int_X f(u)\mu(du). \tag{2.46}$$

另一方面，由（2.43）可知，对于每个 $t >$最大值$\{\tau_*, T\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) &\leq C\left[e^{-\tau_* C_2}\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu,\mu_{\theta_0}) + g(\theta)\int_X f(u)\mu_{\theta_0}(du)\right]\\ &\leq C\max\{\exp\left(-C_2R^{-1}(g(\theta)^{-q}R(t_*)/\overline{g})\right), g(\theta)\}\left[\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu,\mu_{\theta_0}) + \int_X f(u)\mu_{\theta_0}(du)\right]. \end{aligned} \tag{2.47}$$

由（2.45）、（2.46）和（2.47），我们得到

$$\begin{aligned}\text{上确界}\quad \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) &\leq C\text{最大值}\{\exp\left(-C_2R^{-1}(g(\theta)^{-q}R(t_*)/\overline{g})\right),\\ g(\theta)\ g(\theta)^{1-q}\}^{t\in\mathbb{R}^+}&\\ &\cdot\left[\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu,\mu_{\theta_0}) + \int_X f(u)\mu_{\theta_0}(du) + \int_X f(u)\mu(du)\right], \end{aligned} \tag{2.48}$$

对于所有 $\theta \in \Theta$ 满足 $g(\theta) \neq 0$。此外，如果 $g(\theta) = 0$，则由（2.44）可直接得到

$$\mathcal{W}_{\rho_\alpha}(\mu P_t^\theta, \mu P_t^{\theta_0}) = 0 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}^+.$$

这就完成了（2.39）的证明。最后，在（2.39）及附加条件 $\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\mu, \mu_{\theta_0}) < \infty$下，（2.41）显然成立。□

注 2.7。在假设（H3）以 $R(t) = \widetilde{C}e^{tC'}$ 对某些正的˜常数 $C, C'$成立这一特殊情形下，由假设（H1）-（H3）可得，不等式 (2.39) 成立，其中

$$\tilde{g}(\theta) = C\max\{g(\theta)^{\frac{C_2 q}{C'}}, g(\theta), g(\theta)^{1-q}\}$$

对于任意固定的 $q < 1$ 以及某个常数 $C > 0$。事实上，对于 $R$这一特定情形，直接由 $\tilde{g}(\theta)$ 在 (2.40) 中的一般表达式即可得出。这一特殊情形出现在下文第 3 节所介绍的二维随机 Navier–Stokes 方程的数值离散应用中。

最后，本节直接得到以下推论：由 定理 2.6 可知，与马尔可夫核 $P_t^\theta$, $\theta \in \Theta$相关的随机过程，针对 Lipschitz 测试函数具有关于时间的一致弱收敛性。

推论 2.8. 固定与定理 2.6 相同的设置和假设。对于每个 $u_0 \in X$ 和 $\theta \in \Theta$，设 $u_\theta(t;u_0)$，$t \in \mathbb{R}^+$ 是一个随机过程，使得对于每个 $t \in \mathbb{R}^+$，都有 $\mathcal{L}(u_\theta(t;u_0)) = P_t^\theta(u_0,\cdot)$，其中$\mathcal{L}(u_\theta(t;u_0))$ 表示 $u_\theta(t;u_0)$ 的分布。那么，存在 $\hat{\alpha} > 0$，使得对于每个 $\alpha \in (0,\hat{\alpha}]$，都存在$\rho \in \Lambda$，令下列不等式对每个满足 $f(u_0) < \infty$ 的 $\theta \in \Theta$, $u_0 \in X$，以及每个$\rho_\alpha$-利普希茨函数 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$（其利普希茨常数为 $L_\varphi$）成立：

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |\mathbb{E}[\varphi(u_\theta(t;u_0)) - \varphi(u_{\theta_0}(t;u_0))]| \le L_\varphi \tilde{g}(\theta)\left[\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\delta_{u_0},\mu_{\theta_0}) + f(u_0) + \int_X f(u)\mu_{\theta_0}(du)\right], \tag{2.49}$$

其中 $\tilde{g}(\theta)$ 如 (2.40)所示。

因此，如果 $\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\delta_{u_0},\mu_{\theta_0}) < \infty$，则

$$\lim_{\theta\to\theta_0}\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |\mathbb{E}[\varphi(u_\theta(t;u_0)) - \varphi(u_{\theta_0}(t;u_0))]| = 0. \tag{2.50}$$

证明。取 $\hat{\alpha} > 0$，使得对于每个 $\alpha \in (0,\hat{\alpha}]$ 及相应的 $\rho \in \Lambda$，(2.39) 均成立，并固定任意这样的 $\alpha$ 和 $\rho$。再固定 $\theta \in \Theta$、$u_0 \in X$，使得 $f(u_0) < \infty$，其中 $f$ 如 (2.25) 中所定义；令 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ 为一个 $\rho_\alpha$-利普希茨函数，其利普希茨常数记为 $L_\varphi$。于是，对于每个 $t \in \mathbb{R}^+$ 以及耦合 $\Gamma \in \mathcal{C}(P_t^\theta(u_0,\cdot)\, P_t^{\theta_0}(u_0,\cdot))$，都有

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[\varphi(u_\theta(t;u_0)) - \varphi(u_{\theta_0}(t;u_0))]| &= \left|\int_X \varphi(u)P_t^\theta(u_0,du) - \int_X \varphi(\tilde{u})P_t^{\theta_0}(u_0,d\tilde{u})\right| \\ &= \left|\int_X [\varphi(u)-\varphi(\tilde{u})]\,\Gamma(du,d\tilde{u})\right| \le L_\varphi \int_X \rho_\alpha(u,\tilde{u})\Gamma(du,d\tilde{u}).\end{aligned}$$

对 $\Gamma \in \mathcal{C}(P_t^\theta(u_0,\cdot)\, P_t^{\theta_0}(u_0,\cdot))$ 取下确界，可得

$$|\mathbb{E}[\varphi(u_\theta(t;u_0)) - \varphi(u_{\theta_0}(t;u_0))]| \le L_\varphi \mathcal{W}_{\rho_\alpha}(P_t^\theta(u_0,\cdot), P_t^{\theta_0}(u_0,\cdot)). \tag{2.51}$$

接下来，我们对 $t \in \mathbb{R}^+$ 取上确界，并调用 定理 2.6 进一步估计右端。因此，由 (2.39) 和 $\mu = \delta_{u_0}$ 可得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |\mathbb{E}[\varphi(u_\theta(t;u_0)) - \varphi(u_{\theta_0}(t;u_0))]| \le L_\varphi \tilde{g}(\theta)\left[\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\delta_{u_0},\mu_{\theta_0}) + f(u_0) + \int_X f(u)\mu_{\theta_0}(du)\right],$$

其中 $\tilde{g}(\theta)$ 由 (2.40) 给出。这表明 (2.49)。显然，由 (2.50) 和 2.49) 以及 $\mathcal{W}_{\rho_{\gamma\alpha}}(\delta_{u_0},\mu_{\theta_0}) < \infty$这一假设，立即可得 (2.49)。证明至此完成。 □

# 3 二维随机纳维-斯托克斯方程的数值近似

现在，我们转而将上一节的抽象结果应用于二维随机纳维-斯托克斯方程（SNSE）及相应的时空数值离散。在第 3.1 节中，我们介绍本文所考虑的二维随机纳维-斯托克斯方程形式及待分析的具体时空离散格式的预备内容。在第 3.2 节中，我们验证定理 2.1 中的一般假设组对于一类合适的 $\Lambda$ 类距离函数成立。这些函数在下文的（3.25）中定义，用于证明该离散化所生成的马尔可夫半群具有 Wasserstein 收缩。这里，正如上文引言中所提到的，我们特别强调，离散系统得到的收缩系数不依赖于任何离散化参数。这一点对于由定理 2.6推导出数值格式的弱收敛结果至关重要，相关内容将在稍后的第 3.4 节中介绍。我们还将在第 3.4 节 中应用定理 2.3，估计离散系统与连续系统长时间统计之间的偏差。在此之前，我们将在第 3.3 节中给出逐路径有限时间误差估计，以验证（H3）这一必要假设。该假设用于上述最后两个结果，即定理 2.3 和定理 2.6。

## 3.1 数学设定与矩界

### 3.1.1 二维随机 Navier–Stokes 方程

令 $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}^2$ 为二维环面。我们考虑齐次勒贝格空间 $\dot{L}^2 = \dot{L}^2(\mathbb{T}^2) = \{\xi \in L^2(\mathbb{T}^2) : \int_{\mathbb{T}^2} \xi(x)dx = 0\}$，其上赋予 $\dot{L}^2$ 的标准内积和范数，分别记为 $(\cdot,\cdot)$ 和 $|\cdot|$。回顾一下，任意函数 $\xi \in \dot{L}^2$ 都可以写成傅里叶展开 $\xi(x) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^2} \hat{\xi}(\kappa)e^{i\kappa\cdot x}$。

对于每个 $s \geq 0$，我们还考虑齐次索 Sobole夫空间 $\dot{H}^s = \dot{H}^s(\mathbb{T}^2) = \{\xi \in \dot{L}^2(\mathbb{T}^2) : \|\xi\|_{\dot{H}^s} < \infty\}$，其中 $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ 是由内积 $(\cdot,\cdot)_{\dot{H}^s}$ 所诱导的范数，定义如下：

$$(\xi_1,\xi_2)_{\dot{H}^s} = (2\pi)^2 \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^2\setminus\{\mathbf{0}\}} |\kappa|^{2s}\hat{\xi}_1(\kappa)\overline{\hat{\xi}_2(\kappa)}, \quad \hat{\xi}(\kappa) := (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{T}^2} e^{-i\kappa\cdot x}\xi(x)dx,$$

其中 $\bar{\cdot}$ 表示复共轭。显然，对于每个 $s_1 < s_2$，都有 $\dot{H}^{s_2} \subset \dot{H}^{s_1}$。此外，注意到 $\dot{H}^0$ 与 $\dot{L}^2$ 一致，其中 $|\xi| = \|\xi\|_{\dot{H}^0}$。另外，$|\nabla\xi| = \|\xi\|_{\dot{H}^1}$ 和 $|\Delta\xi| = \|\xi\|_{\dot{H}^2}$。

固定一个随机基 $\mathcal{S} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}, \{W^k\}_{k=1}^d)$，即一个滤过概率空间，并配备有限族 $\{W^k\}_{k=1}^d$ 个定义在 $\Omega$ 上、适应于滤过 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 的标准相互独立实值布朗运动。我们考虑由时间白噪声、空间有色的加性噪声驱动的涡量形式的随机受迫二维纳维-斯托克斯方程（SNSE），定义在 $\mathbb{T}^2$ 中，即

$$\mathrm{d}\xi + (-\nu\Delta\xi + \mathbf{u}\cdot\nabla\xi)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^d \sigma_k \mathrm{d}W^k, \quad \mathbf{u} = \mathcal{K} * \xi, \tag{3.1}$$

其中 $\xi = \xi(x\ t)$，$(x\ t) \in \mathbb{T}^2 \times (0,\infty)$ 表示未知的随机涡量场；$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x\ t)$ 表示随机速度场，它由涡量通过式 (3.1) 中的毕奥–萨伐尔核 $\mathcal{K}$ 确定，因此 $\nabla^\perp \cdot \mathbf{u} = (-\partial_y, \partial_x)\cdot(u_1,u_2) = \xi$，且 $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$，参见例如 [MB01]。此外，$\sigma_1$，……，$\sigma_d$ 是 $\dot{L}^2$ 中给定的函数。我们有时使用简记 $\sigma dW$ 表示 $\sum_{k=1}^d \sigma_k dW^k$。另外，我们假设 (3.1) 为无量纲形式，因此参数 $\nu$ 等于 $Re^{-1}$，其中 $Re$ 表示与流体流动相关的雷诺数。

方程（3.1）有时也可方便地写成如下泛函形式：

$$\mathrm{d}\xi + (\nu A\xi + B(\xi,\xi))\mathrm{d}t = \sigma dW, \quad \mathbf{u} = \mathcal{K} * \xi, \tag{3.2}$$

其中 $A = (-\Delta)$：$\dot{H}^2 \to \dot{L}^2$，而 $B$：$\dot{H}^1 \times \dot{H}^1 \to (\dot{H}^1)'$ 是定义为 $B(\xi,\xi) = \mathbf{u}\cdot\nabla\xi = (\mathcal{K}*\xi)\cdot\nabla\xi$ 的双线性映射。这里，$(\dot{H}^1)'$ 表示 $\dot{H}^1$ 的对偶空间。对于每个 $s \geq 0$，我们将 A 的相应幂定义为 $A^s$：$D(A^s) \to \dot{L}^2$，其定义为 $A^s\xi(x) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^2\setminus\{\mathbf{0}\}} |\kappa|^{2s}\hat{\xi}(\kappa)e^{i\kappa\cdot x}$，其中 $D(A^s) = \dot{H}^{2s}$。注意，$|A^s\xi| = \|\xi\|_{\dot{H}^{2s}}$。此外，我们回顾一下，$A$ 是一个正的自伴算子，且具有紧逆算子。因此，它具有一个非递减的正特征值序列 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，其满足 $\lambda_k \sim k$ 渐近成立，从而 $\lambda_k \to \infty$ 当 $k \to \infty$ 时成立；与之对应的特征函数序列 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 构成 $\dot{L}^2$ 的标准正交基。

关于 (3.1) 中的噪声项，我们采用以下额外记号。对于每个 $s \geq 0$，我们用 $\dot{\mathbf{H}}^s$ 表示 $\dot{H}^s$ 的 d 重积，并对每个 $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_d) \in \dot{\mathbf{H}}^s$，定义 $\|\sigma\|_{\dot{H}^s}^2 := \sum_{k=1}^d \|\sigma_k\|_{\dot{H}^s}^2$。类似地，我们考虑 $\dot{\mathbf{L}}^2 = \dot{\mathbf{H}}^0$，并对所有 $\sigma \in \dot{\mathbf{L}}^2$，记 $|\sigma| := \|\sigma\|_{\dot{H}^0}$。接着令 $\sigma W := \sum_{k=1}^d \sigma_k W^k$，于是对于任意 $\sigma \in \dot{\mathbf{H}}^s$，$\sigma W$ 是 $\dot{H}^s$ 上协方差算子为 $tQ_s$ 的布朗运动，其中 $Q_s$：$\dot{H}^s \to \dot{H}^s$ 定义为

$$Q_s\xi = \sum_{k=1}^d (\sigma_k,\xi)_{\dot{H}^s}\sigma_k, \quad \xi \in \dot{H}^s. \tag{3.3}$$

我们注意到，$Q_s$ 是一个紧对称算子，且 $\mathrm{Tr}(Q_s) = \|\sigma\|_{\dot{H}^s}^2$；这里回顾一下，对于 $\dot{H}^s$ 的任意标准正交基 $\{\tilde{e}_j\}_{j\geq 1}$，均有 $\mathrm{Tr}(Q_s) = \sum_{j=1}^\infty (Q_s\tilde{e}_j,\tilde{e}_j)_{\dot{H}^s}$。

稍微滥用一下记号，我们也将给定的 $\sigma \in \dot{\mathbf{H}}^s$ 视为映射 $\sigma$：$\mathbb{R}^d \to \dot{H}^s$，定义为 $\sigma(w_1,\ldots,w_d) = \sum_{k=1}^d \sigma_k w_k$ 对所有 $(w_1,\ldots,w_d) \in \mathbb{R}^d$ 均成立。显然，$\sigma$ 因此是一个有界线性算子，其作用于

$\mathbb{R}^d$，且算子范数不超过 $\|\sigma\|_{\dot{H}^s}$。此外，我们用 $\sigma^{-1}: range(\sigma) \to \mathbb{R}^d$ 表示其对应的伪逆，它是一个有界算子。[2]

下文中，我们将关注方程（3.1）的逐路径解，即概率意义下的强解；这些解是相对于上文所述的固定随机基 $\mathcal{S} = (\Omega\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\ \mathbb{P},\ \{W^k\}_{k=1}^d)$ 定义的。关于这类解，我们有如下适定性结果。

命题 3.1. 设 $\mathcal{S} = (\Omega\ \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}, \{W^k\}_{k=1}^d)$ 为一个随机基。则对于任意序列$\{\sigma_k\}_{k=1}^d \in \dot{L}^2$ 以及任意 $\mathcal{F}_0$-可测随机变量 $\xi_0 \in L^2(\Omega\ \dot{L}^2)$，存在唯一的 $\dot{L}^2$-值随机过程 $\xi$，满足

$$\xi \in L^2(\Omega; L^2_{loc}([0,\infty); \dot{H}^1) \cap C([0,\infty); \dot{L}^2)),$$

该过程是 $\mathcal{F}_t$-适应的，在 $\dot{L}^2$ 中弱解方程 (3.1)，并且几乎必然满足初始条件 $\xi(0) = \xi_0$。此外，$\xi$ 关于初始数据连续依赖，即对于每个 $\xi_0 \in \dot{L}^2$，映射 $\xi_0 \mapsto \xi(t; \xi_0, \{W^k\}_{k=1}^d)$ 在 $\dot{L}^2$ 中连续，任取 $t \in [0,\infty)$ 以及固定的实现 $\{W^k(\cdot,\omega)\}_k$，$\omega \in \Omega$。

在这种加性噪声设定下，命题 3.1 的证明采用标准论证，即定义变量代换 $\xi = \overline{\xi} + v$，其中

$$\frac{d\overline{\xi}}{dt} - \nu\Delta\overline{\xi} + (\mathcal{K} * (\overline{\xi} + v)) \cdot \nabla(\overline{\xi} + v) = 0, \quad \text{and} \quad dv - \nu\Delta v dt = \sigma dW.$$

对于 $v$ 的每个实现，$\overline{\xi}$ 因此满足一个确定性方程。按照与二维纳维-斯托克斯方程类似的论证，可以证明该方程适定，参见例如 [CF88、Tem01]。而 $v$满足一个线性随机偏微分方程，其适定性已得到充分确立，参见例如 [DPZ14]。然而，我们指出，在更一般的噪声设定下也已证明适定性，参见例如 [MR04、GHZ09]。

采用 第 2.1 节 和 命题 3.1 中引入的记号，我们将与（3.1）相关联的转移函数记为 $P_t = P_t(\xi_0,\ \mathcal{O})$，对每个 $t \geq 0$、初始点 $\xi_0 \in \dot{L}^2$ 和博雷尔集 $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(\dot{L}^2)$，定义如下

$$P_t(\xi_0, \mathcal{O}) := \mathbb{P}(\xi(t; \xi_0) \in \mathcal{O}), \tag{3.4}$$

其中 $\xi(t;\ \xi_0)$，$t \geq 0$是方程（3.1）满足以下条件的唯一解：$\xi$（0）$= \xi_0$ 几乎必然成立，具体含义见命题 3.1。相应的马尔可夫半群 $P_t,\ t \geq 0$对每个 $\varphi \in \mathcal{M}_b$（$\dot{L}^2$）定义如下：

$$P_t\varphi(\xi_0) := \mathbb{E}\varphi(\xi(t; \xi_0)), \quad \xi_0 \in \dot{L}^2. \tag{3.5}$$

由于 $\xi(\cdot; \xi_0)$ 关于初始数据 $\xi_0$ 连续，因此 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 也是 $\dot{L}^2$ 上的 Feller 马尔可夫半群。也就是说，记 $\mathcal{C}_b(\dot{L}^2)$ 为 $\dot{L}^2$ 上实值、有界且连续函数构成的空间，则对每个 $\varphi \in \mathcal{C}_b$（$\dot{L}^2$），都有 $P_t\varphi \in \mathcal{C}_b(\dot{L}^2)$。

我们回顾一下，关于半群 $P_t,\ t \geq 0$ 存在不变测度 $\mu_*$ 是一个确立已久的结果；事实上，对于比（3.1）中所规定的更一般的噪声结构，该结果仍然成立，参见例如 [Fla94]。另一方面，要证明不变测度的唯一性，则需要对噪声项作出额外假设，参见例如 [FM95, DPZ96, Mat99, BKL01, EMS01, KS01, BKL02, Kuk02, KS02, Mat02, Mat03, HM06, HM08, HM11a, KS12, Deb13, GHMR17]。按照先前研究中的类似假设，我们在此认为，（3.1）中随机受迫方向的数量 $d$ 足够大，其大小取决于参数 $\nu$ 和系数 $\sigma_k$，见下文（3.28）。尽管如此，我们预计，对于下文的时空离散化（3.20），在 [HM06, HM08]，中所考虑的退化型随机强迫下，也能得到类似结果，不过其所适用的距离函数类别可能与（3.25）不同。然而，这需要更精细的 Malliavin 微积分技术，我们计划在未来的工作中对此展开研究。

我们还回顾一下双线性项的一些基本不等式和性质 $\mathbf{u} \cdot \nabla\xi$ 在（3.1）中。对于任意无散 $\mathbf{u} \in (\dot{H}^1)^2$, 由分部积分可得

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla\xi, \widetilde{\xi}) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla\widetilde{\xi}, \xi) \quad \text{for all } \xi, \widetilde{\xi} \in \dot{H}^1, \tag{3.6}$$

[2]注意，由于 $range(\sigma)$ 是 $\dot{L}^2$ 的有限维子集，因此它是闭集。这意味着伪逆 $\sigma^{-1}$ 是一个有界算子（例如参见 [She56，定理 3。8]）。

这意味着正交性

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla\xi,\xi)=((\mathcal{K}*\xi)\cdot\nabla\xi,\xi)=0\quad\text{ for all }\xi\in\dot{H}^1. \tag{3.7}$$

此外，通过涉及 H¨older 不等式和插值不等式的标准论证，可得到以下不等式：

$$|\,((\mathcal{K}*\xi_1)\cdot\nabla\xi_2,\xi_3)\,|\le c|\xi_1||\nabla\xi_2||\xi_3|^{1-a}|\nabla\xi_3|^a, \tag{3.8}$$

$$|\,((\mathcal{K}*\xi_1)\cdot\nabla\xi_2,\xi_3)\,|\le c|\xi_1|^{1/2}|\nabla\xi_1|^{1/2}|\nabla\xi_2||\xi_3|, \tag{3.9}$$

$$|\,(\nabla\,[(\mathcal{K}*\xi_1)\cdot\nabla\xi_2]\,,\nabla\xi_2)\,|\le c|\xi_1|^{3/4}|\Delta\xi_1|^{1/4}|\nabla\xi_2||\xi_2|^{1/4}|\Delta\xi_2|^{3/4}, \tag{3.10}$$

对于某个正常数绝对常数 $c$，以及所有使上述范数有意义的 $\xi$ 。

注3.2。 在接下来的各节中，我们采用关于常数的以下约定。使用小写字母 $c$、 $\tilde{c}$表示一个正常数绝对常数，即与任何参数都无关。˜而使用大写字母 $C$、$C$、$C_0$、$C_1$、$C_2$表示一个至多取决于参数 的正常数 $\nu$、$|\sigma|$、$|\nabla\sigma|$、$|A\sigma|$，以及参数 $\varepsilon>0$和 $s\in(0,1]$这些参数来自 (3.25) 中距离族的定义$0,1]$，还可能取决于某些特定陈述所涉及的其他参数。这些依赖关系将在每个陈述中明确说明。最重要的是，这些常数始终与任何离散化参数无关。按照关于其依赖关系的这一约定，我们允许这些常数的取值随行而变。

### 3.1.2 谱 Galerkin 离散化

我们先固定一些记号。与前面一样，我们分别用 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 表示 $A=(-\Delta):\dot{H}^2\to\dot{L}^2$ 的特征值和特征函数。于是，对于每个 $N\in\mathbb{N}$，我们用 $\Pi_N:\dot{L}^2\to\dot{L}^2$ 表示投影到 $\dot{L}^2$ 的子空间 $\Pi_N\dot{L}^2$ 上的投影算子，该子空间由 $(-\Delta)$ 的前 $N$ 个特征函数张成。因此， $I-\Pi_N$ 是投影到补空间 $(I-\Pi_N)\,\dot{L}^2$ 上的投影算子。我们有如下 Poincar´e 型不等式：

$$|\nabla(I-\Pi_N)\xi|^2\ge\lambda_{N+1}|(I-\Pi_N)\xi|^2\quad\text{ for all }\xi\in\dot{L}^2. \tag{3.11}$$

对 (3.1) 在空间 $\Pi_N\dot{L}^2$ 中的谱 Galerkin 近似为

$$\mathrm{d}\xi_N+[-\nu\Delta\xi_N+\Pi_N(\mathbf{u}_N\cdot\nabla\xi_N)]\mathrm{d}t=\Pi_N\sigma dW,\quad \mathbf{u}_N=\mathcal{K}*\xi_N. \tag{3.12}$$

满足给定初始条件的 (3.12) 的概率强解的存在唯一性，可类似于 命题 3.1 的证明得出。为完整起见，我们在下面陈述这一结果。

命题3.3。固定一个随机基 $\mathcal{S}=(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0},\mathbb{P},\{W^k\}_{k=1}^d)$。那么，对于任意一族属于 $\dot{L}^2$ 的函数 $\{\sigma_k\}_{k=1}^d$，以及任意 $\mathcal{F}_0$-可测随机变量 $\xi_0\in L^2(\Omega,\dot{L}^2)$，存在唯一一个取值于 $\Pi_N\dot{L}^2$ 的随机过程 $\xi_N$，满足

$$\xi_N\in L^2(\Omega;C([0,\infty);\Pi_N\dot{L}^2)),$$

该过程是 $\mathcal{F}_t$-适应的，在 $\dot{L}^2$ 中弱意义下满足方程（3.12），并且几乎必然满足初始条件 $\xi(0)=\Pi_N\xi_0$ 。此外， $\xi_N$ 关于初始数据连续依赖，也就是说，对每个 $\xi_0\in\dot{L}^2$，映射 $\xi_0\mapsto\xi_N(t;\Pi_N\xi_0,\{W^k\}_{k=1}^d)$ 对任意 $t\in[0,\infty)$ 在 $\dot{L}^2$ 中连续，且对任意固定的实现 $\{W^k(\cdot,\omega)\}_k$, $\omega\in\Omega$。

接下来，我们陈述一组关于 Galerkin系统（3.12）以及极限系统（3.1）解的结果，这些结果在下文的第 3.3 节和第 3.4 节中特别有用。

以下命题给出了 Galerkin格式（3.12）和全连续系统（3.1）解的进一步矩界。证明可由与 [KS12中的推论2.4.11、命题2.4.12], 类似的论证得到；在处理每种情形下的非线性项时，我们使用（3.7）、（3.10）以及下面的不等式，该不等式可通过与 [KS12中的引理2.1类似的方法得到。20]

$$|\,\big((\mathcal{K}*\xi)\cdot\nabla\xi,A^k\xi\big)\,|\le c|\xi|^{\frac{k+2}{2(k+1)}}\|\xi\|_{\dot{H}^1}^{\frac{k+2}{2k}}\|\xi\|_{\dot{H}^k}^{\frac{k(4k+1)-2}{2k(k+1)}},$$

对所有 $\xi\in\dot{H}^k$、 $k\ge2$。

命题 3.4。 任取 $\xi_0 \in \dot{H}^1$ 和 $\sigma \in \dot{\mathbf{H}}^1$。令 $\xi_N(t),\ \ t \geq 0$为 (3.12) 的解，满足$\xi_N(0) = \Pi_N \xi_0$几乎必然。于是，对每个 $T > 0$和 $m \in \mathbb{N}$，有

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \left( |\nabla \xi_N(t)|^2 + \nu \int_0^t |\Delta \xi_N(s)|^2 ds \right)^m \leq C(1 + |\xi_0|^{4m} + |\nabla \xi_0|^{2m}), \tag{3.13}$$

对于某个常数 $C = C(m, \nu, T, |\nabla\sigma|)$。

此外，给定任意 $\xi_0 \in \dot{L}^2$ 和 $\sigma \in \dot{\mathbf{H}}^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$，可知对于每个 $T > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$，都存在$p = p(k)$，使得

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \left( t^k \|\xi_N(t)\|^2_{\dot{H}^k} + \nu \int_0^t s^k \|\xi_N(s)\|^2_{\dot{H}^{k+1}} ds \right)^m \leq \widetilde{C} \left(1 + |\xi_0|^{2mp}\right), \tag{3.14}$$

~ ~对于某个常数 $C = C(m, k, \nu, T, \|\sigma\|_{\dot{H}^k})$。更确切地说，$p(0) = 1$，$p(1) = 2$，且对于每个 $k \geq 2$，$p(k) = (3k + 1)(k + 2)/(3k + 2)$。

此外，令 $\xi(t),\ \ t \geq 0$ 为 (3.1) 的解，满足 $\xi(0) = \xi_0$ 几乎必然。于是，与 (3.13) 和 (3.14) 类似的不等式也成立，其中 $\xi_N(t)$ 替换为 $\xi(t)$。

接下来的两个命题分别给出系统（3.12）和（3.1）的一些指数矩估计和指数型李雅普诺夫不等式。相关证明可见于类似情形，例如[HM06、HM08、KS12、Deb13、GH14、GHMR17], ; 这些结论也可由下文引理 3.15 和命题 3.11 证明的连续版本直接类比得到。

命题 3.5。 任取 $\sigma \in \dot{\mathbf{L}}^2$ 和 $\xi_0 \in \dot{L}^2$。另取 $N \in \mathbb{N}$，并令 $\xi_N(t),\ \ t \geq 0$为方程(3.20)的解，满足 $\xi_N(0) = \Pi_N \xi_0$几乎必然成立。于是，对所有满足 $\alpha \in \mathbb{R}$的

$$0 < \alpha \leq \frac{\nu}{2|\sigma|^2}, \tag{3.15}$$

下列不等式成立

$$\mathbb{E} \sup_{t\geq 0} \exp\left( \alpha|\xi_N(t)|^2 + \alpha\nu \int_0^t |\nabla \xi_N(s)|^2 \mathrm{d}s - \alpha|\sigma|^2 t \right) \leq 2 \exp\left(\alpha|\xi_0|^2\right). \tag{3.16}$$

此外，令 $\xi(t),\ \ t \geq 0$为方程 (3.1) 的解，满足 $\xi(0) = \xi_0$ 几乎必然成立。于是，存在一个与 (3.16) 类似的不等式，其中将 $\xi_N(t)$ 替换为 $\xi(t)$。

命题 3.6。 任取 $\sigma \in \dot{\mathbf{L}}^2$ 和 $\xi_0 \in \dot{L}^2$。另取 $N \in \mathbb{N}$ 并令 $\xi_N(t)$，$t \geq 0$为满足 （3.20）且满足 $\xi_N(0) = \Pi_N \xi_0$几乎必然成立的解。考虑 $\alpha \in \mathbb{R}$满足 （3.15）的情形。则以下不等式成立

$$\mathbb{E} \exp\left(\alpha|\xi_N(t)|^2\right) \leq \exp\left( \alpha \left( e^{-\nu t}|\xi_0|^2 + \frac{|\sigma|^2}{\nu} \right) \right) \quad \textit{for all } t \geq 0. \tag{3.17}$$

此外，令 $\xi(t)$，$t \geq 0$为满足 （3.1）且满足 $\xi(0) = \xi_0$ 几乎必然成立的解。则将 （3.17）中的 $\xi_N(t)$ 替换为 $\xi(t)$ 后，类似的不等式成立。

以下结果表明，Galerkin系统（3.12）的解在时间上具有 H¨older 正则性。我们注意到， [CP12中的引理 2 也给出了类似结果，3] 其中涉及（3.1）的速度形式，并假设具有适当的乘性噪声结构；所得结论表明，相应解相对于比本文所述范数更弱的范数具有 H¨older 正则性。证明见 附录B。

定理 3.7. 任取 $\sigma \in \dot{\mathbf{H}}^1$和 $\xi_0 \in \dot{H}^2$。令 $\xi_N = \xi_N(t)$为满足 (3.12) 且满足 $\xi_N(0) = \Pi_N \xi_0$几乎必然的解。于是，对每个 $T > 0$, $m \in \mathbb{N}$和 $p' \in (0, 1/2)$,

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|\xi_N(t) - \xi_N(s)|^m \leq C|t - s|^{mp'}(1 + |\xi_0|^{4m} + |\nabla \xi_0|^{2m}) \tag{3.18}$$

*and*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|\nabla\xi_N(t)-\nabla\xi_N(s)|^m \le C|t-s|^{mp'}(1+|\xi_0|^{4m}+|\nabla\xi_0|^{2m}+|A\xi_0|^m) \tag{3.19}$$

对所有 $s,t\in[0,T]$，其中 $C=C(m,p',T,\nu,|\sigma|,|\nabla\sigma|)$。此外，令 $\xi(t)$，$t\ge 0$ 为满足 $\xi(0)=\xi_0$ 几乎必然的方程 (3.1) 的解。则将 $\xi(t)$ 替换为 $\xi(t)$ 后，(3.18) 和 (3.19) 的类似不等式仍然成立。

### 3.1.3 时空离散

现在，对于每个固定的时间步长 $\delta>0$，我们引入（3.1）的完全时空离散近似，它由 Galerkin 系统（3.12）的时间半隐式欧拉离散给出，即

$$\xi^n_{N,\delta}=\xi^{n-1}_{N,\delta}+\delta[\nu\Delta\xi^n_{N,\delta}-\Pi_N(\mathbf{u}^{n-1}_{N,\delta}\cdot\nabla\xi^n_{N,\delta})]+\sum_{k=1}^d \Pi_N\sigma_k(W^k(t_n)-W^k(t_{n-1})), \tag{3.20}$$
$$\mathbf{u}^{n-1}_{N,\delta}=\mathcal{K}*\xi^{n-1}_{N,\delta},$$

其中，每个 $\xi^n_{N,\delta}$ 表示在时间 $t_n=n\delta$ 对 $\xi_N$、进而对 $\xi$ 的近似，对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。

Si由于 $\{W^k\}_{k=1}^d$ 是相互独立的实值布朗运动组成的序列，我们可以写成

$$W^k(t_n)-W^k(t_{n-1})\overset{\mathcal{L}}{=}\eta^k_n\delta^{1/2} \tag{3.21}$$

对于一个序列 $\eta^k_n\colon\ \Omega\to\mathbb{R}$，$n\in\mathbb{N}$，$k=1$，……，$d$，其中各项是均值为零、协方差为 1 的独立同分布高斯随机变量。

与上文（3.2）一样，我们采用如下简记

$$\eta_n=(\eta^1_n,\dots,\eta^d_n),\quad \Pi_N\sigma=(\Pi_N\sigma_1,\dots,\Pi_N\sigma_d),\quad \text{and}\ \ \Pi_N\sigma\eta_n=\sum_{k=1}^d\Pi_N\sigma_k\eta^k_n,$$

因此（3.20）可简洁地写为

$$\xi^n_{N,\delta}=\xi^{n-1}_{N,\delta}+\delta[\nu\Delta\xi^n_{N,\delta}-\Pi_N(\mathbf{u}^{n-1}_{N,\delta}\cdot\nabla\xi^n_{N,\delta})]+\Pi_N\sigma\eta_n\delta^{1/2},\quad \mathbf{u}^{n-1}_{N,\delta}=\mathcal{K}*\xi^{n-1}_{N,\delta}. \tag{3.22}$$

注意，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$\sigma\eta_n$ 是 $\dot L^2$ 中的高斯随机变量，其均值为零，协方差算子由 $Q_0$ 在（3.3）中定义。

记号说明：为避免记号过于繁复，在后续各节中，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们常将 $\xi^n_{N,\delta}$ 和 $\mathbf{u}^n_{N,\delta}$ 分别简记为 $\xi^n$ 和 $\mathbf{u}^n$。

以下命题确立了给定初始数据时（3.20）的逐路径适定性。其证明可由标准论证得出，因此省略细节。

命题 3.8. 设 $\mathcal{S}=(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0},\mathbb{P},\{W^k\}_{k=1}^d)$ 是一个随机基。那么，对于任意一族 $\{\sigma_k\}_{k=1}^d$ 取自 $\dot L^2$ 的函数，以及任意一个取值于 $\dot L^2$ 且 $\mathcal{F}_0$-可测的随机变量 $\xi_0\in L^2(\Omega,\dot L^2)$，存在唯一一个取值于 $\Pi_N\dot L^2$ 的离散随机过程 $\{\xi^n_{N,\delta}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$，使得对所有 $n\in\mathbb{Z}^+$，均有 $\xi^n_{N,\delta}\in L^2(\Omega,\dot L^2)$；该过程是 $\{\mathcal{F}_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$-适应的，在 $\dot L^2$ 中求解（3.20），并几乎必然满足初始条件 $\xi^0_{N,\delta}=\Pi_N\xi_0$。此外，$\xi^n_{N,\delta}$ 关于初始数据连续依赖，即对于每个 $\xi_0\in\dot L^2$，映射 $\xi_0\mapsto\xi^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0,\{W^k\}_{k=1}^d)$ 对任意 $n\in\mathbb{Z}^+$ 及任意固定实现 $\{W^k(\cdot,\omega)\}_k$，$\omega\in\Omega$ 均在 $\dot L^2$ 中连续。

对于每个固定的时间步长 $\delta>0$ 和 Galerkin 模态数 $N$，我们将与离散格式 (3.22) 的 $n$ 步相关联的马尔可夫转移函数记为 $P^{N,\delta}_n=P^{N,\delta}_n(\xi_0,\mathcal{O})$，$\xi_0\in\dot L^2$，$\mathcal{O}\in\mathcal{B}(\dot L^2)$。其定义如下：

$$P^{N,\delta}_n(\xi_0,\mathcal{O}):=\mathbb{P}(\xi^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0)\in\mathcal{O}), \tag{3.23}$$

其中 $\xi^n_{N,\ \delta}(\Pi_N\xi_0)$ 是从初始数据 出发的方程 (3.1) 的唯一解，其含义见命题 3.8。因此，对每个 $\varphi \in \mathcal{M}_b(\dot{L}^2)$，相应的马尔可夫半群 $P^{N,}{}_{,\ n}{}^{\delta}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ 定义如下：

$$P^{N,\delta}_n \varphi(\xi_0) := \mathbb{E}\varphi(\xi^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0)), \quad \xi_0 \in \dot{L}^2, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.24}$$

与第 3.1.1 节 中关于马尔可夫半群 $P_t, t \geq 0$ 的论述类似，由上文命题 3.8保证的解 $\xi^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0)$ 关于初始数据 $\Pi_N\xi_0$ 的连续性可知， $P^{N,}{}_{,n}{}^{\delta}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ 是 $\dot{L}^2$ 中的 Feller 马尔可夫半群。

## 3.2 离散化一致的 Wasserstein 收缩

本节中，我们应用定理 2.1 ，证明与数值格式（3.22）相关的马尔可夫半群$P^{N,}{}_{,n}{}^{\delta}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ 的 Wasserstein 收缩结果。该数值格式针对任意固定参数 $N \in \mathbb{N}$,
$\delta > 0$ 2 1, $X \ \|\cdot\| \ = \ \dot{L}^2 \ |\cdot| \ \mathcal{I} = \delta\mathbb{Z}^+ \quad \{P_t\}_{t\in\mathcal{I}}$ ，定义见（3.24）。
在定理 .的框架下，我们考虑 ( , ) ( , ), , 以及由$P^{N,}{}_{,n}{}^{\delta}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ 给出的情形。此外，我们考虑类距离函数 $\Lambda = \{\rho_{\varepsilon,s} : \varepsilon > 0, 0 < s \leq 1\}$，其中每个$\rho_{\varepsilon,s}$ 定义为

$$\rho_{\varepsilon,s}(\xi,\widetilde{\xi}) = 1 \wedge \frac{|\xi-\widetilde{\xi}|^s}{\varepsilon}, \quad \xi,\widetilde{\xi} \in \dot{L}^2. \tag{3.25}$$

事实上，这里的每个 $\rho_{\varepsilon,s}$ 都是 $\dot{L}^2$上的一个实际度量，这一点很容易验证。参数 $\varepsilon$ 经过了适当调节，以便在下文的 (3.58) 中产生局部收缩，这得益于 (A3.i) 假设（见 定理 2.1）。因此，从某种意义上说， $\varepsilon$ 可以理解为分别刻画了由 (3.20) 和 (3.1) 所描述的动力学中的小空间尺度。

与 (2.8) 中一样，对于每个 $a > 0$ ，我们将 $\rho_{\varepsilon,s}$ 的相应 Lyapunov 加权版本记为 $\rho_{\varepsilon,s,a}$，定义如下

$$\rho_{\varepsilon,s,a}(\xi,\widetilde{\xi}) = \rho_{\varepsilon,s}(\xi,\widetilde{\xi})^{1/2} \exp\left(a|\xi|^2 + a|\widetilde{\xi}|^2\right), \quad \xi,\widetilde{\xi} \in \dot{L}^2. \tag{3.26}$$

此外，我们将对应于 $\rho_{\varepsilon,s}$ 和 $\rho_{\varepsilon,s,a}$、定义在 (2.2) 中的 Wasserstein 类扩展到概率测度空间 $\Pr(\dot{L}^2)$，分别记为 $\mathcal{W}_{\varepsilon,s}$ 和 $\mathcal{W}_{\varepsilon,s,a}$。

定理 2.1 中的假设 (A1)-(A3) 将在下文的 命题 3.11 、命题 3.12 和 命题 3.13 中得到验证。由此可得下文的 Wasserstein 收缩结果 定理 3.9 ，其证明将推迟到本节末尾。为了之后应用 定理 2.6 ，以证明数值格式 (3.20) 一致弱收敛至连续系统 (3.1)，我们将 定理 3.9表述为与离散半群 $P^{N,}{}_{,n}{}^{\delta}$,$n \in \mathbb{Z}^+$ 相对应的一个适当的连续马尔可夫核族。具体而言，对每个 $t \in \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{P}^{N,\delta}_t := P^{N,\delta}_n \quad \text{if } t \in [n\delta,(n+1)\delta),\ n \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.27}$$

我们注意到，族 $\mathcal{P}^{N,}{}_{,\ t}{}^{\delta}$ ， $t \in \mathbb{R}^+$，可能并不构成马尔可夫半群。然而，一般弱收敛结果定理 2.6并不要求半群性质。

定理 3.9。固定 $\delta_0 > 0$。假设存在 $K \in \mathbb{N}$ 和 $\sigma \in \dot{\mathrm{L}}^2$ ，使得

$$\Pi_K\dot{L}^2 \subset range(\sigma), \quad and \quad \lambda_{K+1} \geq \frac{c}{\nu}\max\left\{\frac{1}{\delta_0}, \frac{\delta_0^2|\sigma|^4}{\nu^3}, \frac{|\sigma|^4}{\nu^5}\right\} \tag{3.28}$$

对于某个绝对常数 $c > 0$。对于每个 $N \in \mathbb{N}$ 和 $0 < \delta \leq \delta_0$，令 $\mathcal{P}^{N,}{}_{,\ t}{}^{\delta}$， $t \in \mathbb{R}^+$为在(3.27)中定义的相应马尔可夫核族。于是，对于每个 $m > 1$ ，存在 $\alpha_m > 0$ ，使得对于每个$\alpha \in (0,\ \alpha_m]$，存在 $\varepsilon > 0$， $s \in (0,\ 1]$, $T > 0$以及常数 $C_1$， $C_2 > 0$，使得以下结论成立

$$\sup_{N\in\mathbb{N},\,0<\delta\leq\delta_0} \mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mu\mathcal{P}^{N,\delta}_t, \tilde{\mu}\mathcal{P}^{N,\delta}_t) \leq C_1 e^{-tC_2}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha/m}(\mu,\tilde{\mu}) \tag{3.29}$$

对每个 $\mu$、$\tilde{\mu} \in$ 概率测度空间（$\dot{L}^2$）以及 $t \geq T$。

鉴于注 2.2，定理 3.9 结合 $P^N$ 的 Feller 性质，$_n{}^{\delta}$、 $n \in \mathbb{Z}^+$，可推出存在唯一的相应不变测度。我们在下文陈述这一结果。

推论 3.10. 考虑定理 3.9的假设。那么，对于每组固定的离散化参数 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$，离散马尔可夫半群 $P^N{}_{,n}{}^{\delta}, n \in \mathbb{Z}^+$存在唯一的不变测度 $\mu^N{}_{,*}{}^{\delta}$，因此 $\mathcal{P}^N{}_{,t}{}^{\delta}, t \in \mathbb{R}^+$也存在唯一的不变测度。

证明. 不变测度的唯一性直接由不等式（3.29）得到。对于存在性，正如注 2.2中所述，类似于 [HMS11 推论 4.11]，只需证明在 $\dot{L}^2$ 上存在一个完备度量 $\tilde{\rho}$，使得 $\tilde{\rho} \le \sqrt{\rho_{\varepsilon,s}}$，并且 $\{P_n^{N,\delta}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 在（$\dot{L}^2, \tilde{\rho}$）上是 Feller 半群。这里，$\varepsilon > 0$ 和 $s \in (0, 1]$ 是满足（3.29）的任意参数。该结论例如可由 $\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_{\varepsilon,s}} = \rho_{\sqrt{\varepsilon},s/2}$ 得到；这是 $\dot{L}^2$ 上的一个度量，与由范数 $|\cdot|$诱导的距离等价，因此 $\{P_n^{N,\delta}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 在（$\dot{L}^2, |\cdot|$）上的已知 Feller 性质在（$\dot{L}^2, \sqrt{\rho_{\varepsilon,s}}$）上同样成立。显然，如果 $\mu^N{}_{,*}{}^{\delta}$是 $\{P_n^{N,\delta}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$的不变测度，那么由定义（3.27）立即可得，$\mu^N{}_{,*}{}^{\delta}$也是 $\{\mathcal{P}_t^{N,\delta}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$的不变测度。

□

为证明 定理 3.9，我们首先验证是否存在满足假设 (A1) 的指数 Lyapunov 结构，该假设见 定理2.1。

命题 3.11. 任取 $N \in \mathbb{N}, \delta, \delta_0 > 0$，满足 $\delta \le \delta_0, \sigma \in \dot{\mathrm{L}}^2$，和 $\xi_0 \in \dot{L}^2$。设 $\{\xi_{N,\delta}^n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 是参数为 $N, \delta$ 且满足 $\xi_{N,\ \delta}^0 = \Pi_N \xi_0$ 几乎必然的方程 (3.22) 的解。那么，对于所有满足以下条件的 $\alpha \in \mathbb{R}$

$$0 < \alpha \le \frac{\nu}{4|\sigma|^2}, \tag{3.30}$$

有

$$\mathbb{E}\exp\left(\alpha|\xi_{N,\delta}^n|^2\right) \le \exp\left(\alpha\left(\frac{2|\xi_0|^2}{(1+\nu\lambda_1\delta)^n} + C\right)\right) \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}^+, \tag{3.31}$$

其中某个正常数 $C$ 仅取决于 $\nu, |\sigma|, \delta_0$。

因此，回忆马尔可夫半群 $P^N{}_{,n}{}^{\delta}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ 在 (3.24)中的定义，可得对于所有 $n \in \mathbb{Z}^+$

$$P_n^{N,\delta}\exp\left(\alpha|\xi_0|^2\right) \le \exp\left(\alpha\left(ce^{-n\delta\widetilde{C}}|\xi_0|^2 + C\right)\right), \tag{3.32}$$

其中 $C$ 是仅取决于 $\nu, \delta_0$ 的正常数。

证明。 在整个证明过程中，我们采用简化记号 $\xi_{N,\ \delta}^j = \xi^j$、 $j \in \mathbb{Z}^+$，见上文第 3.1.3 节。

固定 $n \in \mathbb{N}$。对于每个 $j \in \{1, \dots, n\}$，我们将（3.22）中的第一个方程与 $\xi^j$ 在$\dot{L}^2$ 中的内积结合，并利用希尔伯特空间恒等式

$$2(\xi - \widetilde{\xi}, \xi) = |\xi|^2 + |\xi - \widetilde{\xi}|^2 - |\widetilde{\xi}|^2 \quad \text{for all } \xi, \widetilde{\xi} \in \dot{L}^2, \tag{3.33}$$

再结合正交性（3.7），可得

$$|\xi^j|^2 + |\xi^j - \xi^{j-1}|^2 - |\xi^{j-1}|^2 + 2\nu\delta|\nabla\xi^j|^2 = 2\delta^{1/2}(\Pi_N\sigma\eta_j, \xi^j) = 2\delta^{1/2}(\sigma\eta_j, \xi^j). \tag{3.34}$$

为在下文的 (3.37) 中获得一个良好定义的鞅，我们在右端加上再减去 $2\delta^{1/2}(\sigma\eta_j, \xi^{j-1})$，并估计

$$\begin{aligned} 2\delta^{1/2}(\sigma\eta_j, \xi^j) &= 2\delta^{1/2}(\sigma\eta_j, \xi^j - \xi^{j-1}) + 2\delta^{1/2}(\sigma\eta_j, \xi^{j-1}) \\ &\le |\xi^j - \xi^{j-1}|^2 + \delta|\sigma\eta_j|^2 + 2\delta^{1/2}(\sigma\eta_j, \xi^{j-1}), \end{aligned}$$

于是，由 (3.34),

$$(1+\nu\delta)|\xi^j|^2+\nu\delta|\nabla\xi^j|^2\le|\xi^j|^2+2\nu\delta|\nabla\xi^j|^2\le|\xi^{j-1}|^2+\delta|\sigma\eta_j|^2+2\delta^{1/2}(\sigma\eta_j,\xi^{j-1}),\tag{3.35}$$

对所有 $j\in\{1,\dots,n\}$。

固定 $m\in\mathbb{N}$，满足 $m\ge n$。记 $b:=(1+\nu\delta)^{-1}$，将（3.35）两边乘以$b^{m-j+1}$并对 $j=1$，.....，$n$求和后，可得

$$b^{m-n}|\xi^n|^2+\nu\delta\sum_{j=1}^n b^{m-j+1}|\nabla\xi^j|^2\le b^m|\xi_0|^2+\sum_{j=1}^n\delta b^{m-j+1}|\sigma\eta_j|^2+M_n\tag{3.36}$$

其中 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义如下的鞅

$$M_n:=2\delta^{1/2}\sum_{j=1}^n b^{m-j+1}(\sigma\eta_j,\xi^{j-1})\quad\text{for all } n\in\mathbb{N},\tag{3.37}$$

其对应的二次变差为

$$\langle M\rangle_n=4\delta\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^d b^{2(m-j+1)}(\sigma_k,\xi^{j-1})^2.\tag{3.38}$$

接下来估计 $\langle M\rangle_n$：

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_n&\le 4\delta|\sigma|^2\sum_{j=1}^n b^{2(m-j+1)}|\xi^{j-1}|^2=4\delta|\sigma|^2\sum_{j=0}^{n-1}b^{2(m-j)}|\xi^j|^2\\&\le 4\delta|\sigma|^2\left(b^{2m}|\xi_0|^2+\sum_{j=1}^{n-1}b^{2(m-j)}|\nabla\xi^j|^2\right)\\&\le 4\delta|\sigma|^2\left(b^{m+1}|\xi_0|^2+\sum_{j=1}^{n}b^{m-j+1}|\nabla\xi^j|^2\right),\end{aligned}$$

其中在最后一行我们用到了 $b\le 1$ 以及 $m\ge n\ge 1$。因此，对所有满足（ $\alpha\in\mathbb{R}$ 3.30）的，我们有

$$\alpha\langle M\rangle_n\le b^m|\xi_0|^2+\nu\delta\sum_{j=1}^n b^{m-j+1}|\nabla\xi^j|^2.\tag{3.39}$$

现在，在 $\alpha\langle M\rangle_n$ 两侧同时加上并减去右端，并应用，可得

$$b^{m-n}|\xi^n|^2\le 2b^m|\xi_0|^2+\sum_{j=1}^n\delta b^{m-j+1}|\sigma\eta_j|^2+M_n-\alpha\langle M\rangle_n.\tag{3.40}$$

两边乘以 ，取 $\alpha$两边的指数并求期望值，由（3.40）可推得 t

$$\mathbb{E}\exp\left(\alpha b^{m-n}|\xi^n|^2\right)\le\exp\left(2\alpha b^m|\xi_0|^2\right)\left[\prod_{j=1}^n\mathbb{E}\exp\left(2\alpha\delta b^{m-j+1}|\sigma\eta_j|^2\right)\right]^{1/2}\left(\mathbb{E}\widetilde{M}_n\right)^{1/2},\tag{3.41}$$

其中

$$\widetilde{M}_n=\exp\left(2\alpha M_n-2\alpha^2\langle M\rangle_n\right),\tag{3.42}$$

并且我们利用随机变量 $\sigma\eta_j$、 $j=1$、.....、 $n$的独立性，写出了（3.41）右端的第二个因子。

由（3.37），记 $z_n := b^{m-n+1}(\sigma\eta_n, \xi^{n-1})$，并考虑给定 $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$ 时 $z_n$ 的正则条件概率，即 $\mu_n(\omega, A) := \mathbb{P}(z_n(\omega) \in A \,|\, \mathcal{F}_{t_{n-1}}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{z_n^{-1}(A)} \,|\, \mathcal{F}_{t_{n-1}}]$，其中 $\omega \in \Omega$，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$，参见例如 [Dud02，第 10.2] 节。不难证明，对每个固定的 $\omega \in \Omega$，$\mu_n(\omega, \cdot)$ 是定义在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上、均值为零且方差为 $b^{2(m-n+1)}(Q_0\xi^{n-1}, \xi^{n-1}) = \sum_{k=1}^d b^{2(m-n+1)}(\sigma_k, \xi^{n-1})^2$，的高斯概率测度，其中 $Q_0$ 是（3.3）中定义的 $\widetilde{\ }$。利用这一事实，可以容易地证明 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是相对于 $\widetilde{\ }$ 滤过 $\{\mathcal{F}_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的鞅，并且对所有 $n$ 都有 $\mathbb{E}M_n = 1$（参见例如 [LMS07，附录]）。此外，由于 $\sigma\eta_j \sim \mathcal{N}(0, Q_0), j = 1, \ldots, n$，根据希尔伯特空间上的高斯概率测度的一般结果 [DPZ14，命题 2.17]，可得

$$\mathbb{E}\exp(\gamma|\sigma\eta_j|^2) \le \frac{1}{(1-2\gamma|\sigma|^2)^{1/2}} \quad \text{for all } \gamma < \frac{1}{2|\sigma|^2}, \tag{3.43}$$

其中我们回顾一下 $|\sigma|^2 = \mathrm{Tr}(Q_0)$。特别地，由于 $\alpha \le \nu/(4|\sigma|^2)$ 根据假设 (3.30) 成立，并且由于 $b^{m-j+1} \le b = 1/(1+\nu\delta)$，我们有 (3.43) 在 $\gamma = 2\alpha\delta b^{m-j+1}$ 下成立。因此，由 (3.41)，

$$\mathbb{E}\exp\left(\alpha b^{m-n}|\xi^n|^2\right) \le \exp\left(2\alpha b^m|\xi_0|^2\right) \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1-4\alpha\delta b^{m-j+1}|\sigma|^2)^{1/4}} \quad \text{for all } m \ge n \ge 1. \tag{3.44}$$

特别地，若 $m = n$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp\left(\alpha|\xi^n|^2\right) &\le \exp\left(2\alpha b^n|\xi_0|^2\right) \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1-4\alpha\delta b^j|\sigma|^2)^{1/4}} \\ &= \exp\left(2\alpha b^n|\xi_0|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n \ln\left(1-4\alpha\delta b^j|\sigma|^2\right)\right).\end{aligned} \tag{3.45}$$

由于对所有 $x \in (0,1)$，$-\ln(1-x) \le x(1-x)^{-1}$，我们得到

$$-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n \ln\left(1-4\alpha\delta b^j|\sigma|^2\right) \le \frac{1}{4}\sum_{j=1}^n \frac{4\alpha\delta b^j|\sigma|^2}{1-4\alpha\delta b^j|\sigma|^2}. \tag{3.46}$$

此外，由于 $\alpha \le \nu/(4|\sigma|^2)$ 且 $b^j \le b = 1/(1+\nu\delta)$，可知 $[1-4\alpha\delta b^j|\sigma|^2]^{-1} \le 1+\nu\delta$，因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n \frac{4\alpha\delta b^j|\sigma|^2}{1-4\alpha\delta b^j|\sigma|^2} &\le (1+\nu\delta)\alpha\delta|\sigma|^2\sum_{j=1}^n b^j \\ &\le (1+\nu\delta)\alpha\delta|\sigma|^2\frac{b}{1-b} = (1+\nu\delta)\frac{\alpha|\sigma|^2}{\nu} \le (1+\nu\delta_0)\frac{\alpha|\sigma|^2}{\nu}.\end{aligned} \tag{3.47}$$

因此，由 (3.45)-(3.47)，可知

$$\mathbb{E}\exp\left(\alpha|\xi^n|^2\right) \le \exp\left(\alpha(2b^n|\xi_0|^2 + C)\right),$$

其中 $C = (1+\nu\delta_0)|\sigma|^2/(\nu)$。这表明 (3.31) 成立。

对于剩余的不等式（3.32），我们利用以下事实：对于任意常数 $0 < a < 1$，都有 $\ln(1+x) \ge ax$，对所有 $x \in [0, (1/a) - 1]$均成立。由于 $\delta \le \delta_0$，我们取 $a := 1/(1+\nu\delta_0)$，并得到 $\ln(1+\nu\delta) \ge \nu\delta/(1+\nu\delta_0)$，因此

$$\frac{2}{(1+\nu\delta)^n} = 2\exp\left(-n\ln(1+\nu\delta)\right) \le 2\exp\left(-\frac{\nu}{1+\nu\delta_0}n\delta\right). \tag{3.48}$$

由（3.31）和（3.48）可知，对于每个 $0 < \alpha \le \nu/(4|\sigma|^2)$，

$$\begin{aligned}P_n^{N,\delta}\exp\left(\alpha|\xi_0|^2\right) = \mathbb{E}\exp\left(\alpha|\xi^n|^2\right) &\le \exp\left(\alpha\left(\frac{2|\xi_0|^2}{(1+\nu\delta)^n} + C\right)\right) \\ &\le \exp\left(\alpha\left(2\exp\left(-\frac{\nu}{1+\nu\delta_0}n\delta\right)|\xi_0|^2 + C\right)\right),\end{aligned}$$

这表明（3.32），并由此完成证明。 □

为证明（A2）和（A3）这两个定理 2.1中的假设，我们采用与以往研究类似的渐近耦合策略，例如参见 [BKL01、EMS01、KS01、Mat02、KS02、Mat03、Hai02、EL02、HM06、HM08、DO05、HM11a、HMS11、KS12、FGHRT15、BKS20]。其思路是针对给定的 $\xi_0 \in \dot{L}^2$ 及相应的解 $\xi^n_{N,\delta} = \xi^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0) = \xi^n(\Pi_N\xi_0)$，$n \in \mathbb{N}$，引入以下3.20式的修正方程。具体而言，我们考虑满足下列条件的 $\xi^n_{N,\delta} = \xi^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{\xi}^n = \widetilde{\xi}^{n-1} + \delta[\nu\Delta\widetilde{\xi}^n - \Pi_N(\widetilde{\mathbf{u}}^{n-1}\cdot\nabla\widetilde{\xi}^n) - \beta\Pi_K(\widetilde{\xi}^n - \xi^n(\Pi_N\xi_0))] + \sum_{k=1}^{d}\Pi_N\sigma_k(W^k(t_n) - W^k(t_{n-1})), \quad (3.49)$$

$$\widetilde{\mathbf{u}}^{n-1} = \mathcal{K} * \widetilde{\xi}^{n-1}. \quad (3.50)$$

这里，额外项 $-\beta\delta\Pi_K(\xi^n - \xi^n(\Pi_N\xi_0))$ 旨在对“大”尺度施加适当控制，其中 $K \in \mathbb{N}$ 表示受控模态的数量，并将在下文的（3.76）中适当选取。

类似于命题 3.8，我们可以证明系统（3.49）-（3.50）在路径意义下是适定的。我们略去技术细节。因此，对于每个 $N \in \mathbb{N}$、$\delta > 0$ 以及 $\xi_0 \in \dot{L}^2$，我们可定义

$$\widetilde{P}^{N,\delta,\xi_0}_n(\widetilde{\xi}_0, \mathcal{O}) = \mathbb{P}(\widetilde{\xi}^n_{N,\delta}(\Pi_N\widetilde{\xi}_0; \Pi_N\xi_0) \in \mathcal{O}) \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}^+,\ \widetilde{\xi}_0 \in \dot{L}^2 \text{ and } \mathcal{O} \in \mathcal{B}(\dot{L}^2), \quad (3.51)$$

其中，$\widetilde{\xi}^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0; \Pi_N\xi_0)$是在固定随机基 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}, \{W^k\}_{k=1}^d)$ 下方程（3.49）-（3.50）的唯一（强）解，且其满足初始条件$\widetilde{\xi}^0_{N,\delta} = \Pi_N\widetilde{\xi}_0$ 几乎必然成立。此外，对于每个有界可测函数 $\varphi: \dot{L}^2 \to \mathbb{R}$，我们记

$$\widetilde{P}^{N,\delta,\xi_0}_n\varphi(\widetilde{\xi}_0) = \mathbb{E}\varphi(\widetilde{\xi}^n_{N,\delta}(\Pi_N\widetilde{\xi}_0; \Pi_N\xi_0)) \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ and } \widetilde{\xi}_0 \in \dot{L}^2. \quad (3.52)$$

给定任意 $\xi_0, \widetilde{\xi}_0 \in \dot{L}^2$，其思路是利用族 $\widetilde{P}^{N,\delta}_{n,\xi_0}$，$n \in \mathbb{Z}^+$，来估计 Wasserstein 距离 $\mathcal{W}_{\varepsilon,s}$，即 $P^{N,\delta}_n(\xi_0, \cdot)$ 与 $P^{N,\delta}_n(\widetilde{\xi}_0, \cdot)$ 之间的距离，其估计式为

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P^{N,\delta}_n(\xi_0,\cdot), P^{N,\delta}_n(\widetilde{\xi}_0,\cdot)) \leq \mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P^{N,\delta}_n(\xi_0,\cdot), \widetilde{P}^{N,\delta,\xi_0}_n(\widetilde{\xi}_0,\cdot)) + \mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}^{N,\delta,\xi_0}_n(\widetilde{\xi}_0,\cdot), P^{N,\delta}_n(\widetilde{\xi}_0,\cdot)), \quad (3.53)$$

这是因为 $\mathcal{W}_{\varepsilon,s}$ 是概率测度空间 $\Pr(\dot{L}^2)$ 上的一个度量。接下来，我们从两个不同角度分析系统 (3.49)-(3.50)，以估计 (3.53) 右端的各项。通过在解 $\xi^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0; \Pi_N\xi_0)$ 与解 $\widetilde{\xi}^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0)$ 之间建立适当的收缩，可以估计第一项；前者是 (3.49)-(3.50) 的解，后者是 (3.20) 的解。由于 (3.49) 中存在控制项 $-\beta\Pi_K(\xi^n_{N,\delta} - \widetilde{\xi}^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0))$，只要受控模态的数量 $K \in \mathbb{N}$ 和调节参数 $\beta > 0$ 选择得足够大，这便是可行的（见下文 (3.76)）。

对于右端的第二项（3.53），由于（3.20) 的路径强解具有唯一性，我们推知，$\widetilde{\xi}^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0; \Pi_N\xi_0, W)$ 的解（对应于维纳过程 $W$）与解$\xi^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0; W)$ 相同；后者是方程（3.20）对应于下述平移过程的解

$$\widehat{W}(t) = W(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad (3.54)$$

其中

$$\psi_j = -\beta\sigma^{-1}\Pi_K(\widetilde{\xi}^j_{N,\delta}(\Pi_N\widetilde{\xi}_0; \Pi_N\xi_0, W) - \xi^j_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0; W)) \quad \forall j. \quad (3.55)$$

这里回顾一下，$\sigma^{-1}$ 表示 $\sigma$ 的伪逆（见第 3.1.1 节）。随后可通过全变差距离（见下文（3.88））估计（3.53）右端的第二项，即过程$\widehat{W}$的分布之间的距离 $W$ 和 $\widehat{W}$。进而可利用 Girsanov 型结果进行估计。特别需要注意，为使（3.55）中的表达式有定义，尤其是考虑到$\sigma^{-1}$的定义域，我们假设 $\Pi_K\dot{L}^2 \subset range(\sigma)$。

通过这种方法，我们在此证明以下结果，从而验证定理 2.1 的假设 和 （A2）适用于马尔可夫半群 $P^{N,\delta}_n$，$n \in \mathbb{Z}^+$以及距离类 $\Lambda = \{\rho_{\varepsilon,s}: \varepsilon > 0, s \in (0, 1]\}$定义见上文的（3.25）。

命题 3.12。固定 $\delta_0>0$ 并假设存在 $K\in\mathbb{N}$ 和 $\sigma\in\dot{\mathbf{L}}^2$，使得（3.28）成立。那么，对于任意 $M>0$、$\varepsilon>0$和 $s\in(0,1],$，存在一个时间 $T_1=T_1(M、\varepsilon、s)>0$ 以及一个系数 $\kappa_1=\kappa_1(M)\in(0,1)$，它们与 $\varepsilon$、$s$无关，使得

$$\sup_{N\in\mathbb{N},\,0<\delta\le\delta_0}\ \sup_{n\ge T_1/\delta}\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_n^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot))\le 1-\kappa_1 \tag{3.56}$$

对于所有 $\delta_0>0$，以及任意满足 $|\xi_0|\le M$ 和 $|\widetilde{\xi}_0|\le M$ 的 $\xi_0,\widetilde{\xi}_0\in\dot{L}^2$。

命题 3.13。固定 $\delta_0>0$ 并假设存在 $K\in\mathbb{N}$ 和 $\sigma\in\dot{\mathbf{L}}^2$ 使得 (3.28) 成立。那么，对于任意 $\kappa_2\in(0,1)$ 以及任意 $r>0$ 都存在 $s\in(0,1]$ 使得以下结论成立：

(i) 对于任意 $\varepsilon>0$ 和 $\delta_0>0$，存在一个常数 $C=C(\varepsilon,s,\delta_0)>0$，使得

$$\sup_{N\in\mathbb{N},\,0<\delta\le\delta_0,\,n\in\mathbb{Z}^+}\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_n^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot))\le C\exp(r|\xi_0|^2)\rho_{\varepsilon,s}(\xi_0,\widetilde{\xi}_0) \tag{3.57}$$

对于任意满足 $\rho_\varepsilon$ 的 $\xi_0,\widetilde{\xi}_0\in\dot{L}^2$，$s(\xi_0,\widetilde{\xi}_0)<1$。

(ii) 对于任意 $\delta_0>0$，存在一个参数 $\varepsilon=\varepsilon(\kappa_2,r)>0$ 和一个时间 $T_2=T_2(\kappa_2,r)>0$，使得

$$\sup_{N\in\mathbb{N},\,0<\delta\le\delta_0}\ \sup_{n\ge T_2/\delta}\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_n^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot))\le\kappa_2\exp(r|\xi_0|^2)\rho_{\varepsilon,s}(\xi_0,\widetilde{\xi}_0) \tag{3.58}$$

对于每个 $\xi_0$、$\widetilde{\xi}_0\in\dot{L}^2$，满足 $\rho_\varepsilon,\ s(\xi_0,\widetilde{\xi}_0)<1$。

注 3.14. 我们注意到，命题 3.13 中的条目 $(i)$ 给出的结果略强于定理 2.1中的一般假设*(A3.ii)* 所要求的结果。事实上，不等式 (3.57) 对所有 $n\in\mathbb{Z}^+$ 和 $\varepsilon>0$均成立。相比之下，(2.6) 仅涉及有限时间区间 $[0,\tau]$ 以及类距离函数$\rho_\varepsilon,\ s$的一种特定选取，因此也就同时要求对 $s\in(0,1]$ 和 $\varepsilon>0$作特定选取。

在开始证明命题 3.12 和命题 3.13之前，我们先介绍一些初步事实和术语，以便理解上文（3.53）下方所述的思路。首先给出以下结果，为（3.22）的解建立合适的指数矩估计。

引理 3.15. 任取 $N\in\mathbb{N}$、$\delta$、$\delta_0>0$，使得 $\delta\le\delta_0$、$\sigma\in\dot{\mathbf{L}}^2$ 且满足 $\xi_0\in\dot{L}^2$。设 $\{\xi_{N,\delta}^n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 为与参数 $N$、$\delta$ 相对应，且几乎必然满足 $\xi_{N,\delta}^0=\Pi_N\xi_0$ 的（3.22）的解。则存在一个绝对常数 $c>0$，使得对所有满足以下条件的 $\alpha\in\mathbb{R}$

$$0<\alpha\le\frac{c}{|\sigma|^2}\min\left\{\nu,\frac{1}{\delta_0}\right\}, \tag{3.59}$$

以下不等式成立

$$\mathbb{E}\sup_{n\ge1}\exp\left(\alpha|\xi_{N,\delta}^n|^2+\alpha\nu\delta\sum_{j=1}^n|\nabla\xi_{N,\delta}^j|^2+\frac{n}{4}\ln(1-4\alpha\delta|\sigma|^2)\right)\le\tilde{c}\exp\left(C\alpha|\xi_0|^2\right), \tag{3.60}$$

因此，

$$\mathbb{E}\exp\left(\alpha|\xi_{N,\delta}^n|^2+\alpha\nu\delta\sum_{j=1}^n|\nabla\xi_{N,\delta}^j|^2\right)\le\tilde{c}\exp\left(C\alpha|\xi_0|^2\right)\exp\left(\tilde{c}\alpha|\sigma|^2n\delta\right)\quad\textit{for all } n\in\mathbb{N}. \tag{3.61}$$

其中，$C=\tilde{c}\,(1+\nu\delta_0)$，且 $\tilde{c}>0$ 是一个绝对常数。

证明。按照上述（3.34）-（3.35）的做法，并对 $j=1$，……，$n$ 求和，得到

$$|\xi^n|^2-|\xi_0|^2+2\nu\delta\sum_{j=1}^n|\nabla\xi^j|^2\le\delta\sum_{j=1}^n|\sigma\eta_j|^2+M_n, \tag{3.62}$$

其中， $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义如下的鞅

$$M_n := 2\delta^{1/2}\sum_{j=1}^{n}(\sigma\eta_j, \xi^{j-1}) \tag{3.63}$$

其对应的二次变差为

$$\langle M\rangle_n = 4\delta\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}(\sigma_k, \xi^{j-1})^2. \tag{3.64}$$

我们估计 $\langle M\rangle_n$ 如下

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_n \le 4\delta|\sigma|^2\sum_{j=1}^{n}|\xi^{j-1}|^2 &= 4\delta|\sigma|^2\left(|\xi_0|^2+\sum_{j=1}^{n-1}|\xi^j|^2\right)\\ &\le 4\delta|\sigma|^2|\xi_0|^2+4\delta|\sigma|^2\sum_{j=1}^{n-1}|\nabla\xi^j|^2.\end{aligned} \tag{3.65}$$

因此，在满足关于 3.59 的假设时， $\alpha$ 其中 $c$ 是一个适当的绝对常数，可得

$$\alpha\langle M\rangle_n \le \nu\delta|\xi_0|^2+\nu\delta\sum_{j=1}^{n-1}|\nabla\xi^j|^2.$$

在式 ( $\alpha\langle M\rangle_n$ 3.62) 中加上并减去 ， 得到

$$|\xi^n|^2+\nu\delta\sum_{j=1}^{n}|\nabla\xi^j|^2 \le (1+\nu\delta)|\xi_0|^2+\delta\sum_{j=1}^{n}|\sigma\eta_j|^2+M_n-\alpha\langle M\rangle_n. \tag{3.66}$$

现在从式 ( $R_n$ 3.66) 的两边减去 $=-\frac{n}{2\alpha}\mathrm{Tr}(\ln(1-2\alpha\delta Q_0))$， 其中 $Q_0$ 定义见式 (3.3)。然后，乘以 $\alpha/2$，取指数，对某个 $n\in\{1,\dots,m\}$ 取上确界，并取期望值，可得 $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\sup_{1\le n\le m}\exp\left(\frac{\alpha}{2}|\xi^n|^2+\frac{\alpha\nu\delta}{2}\sum_{j=1}^{n}|\nabla\xi^j|^2-\frac{\alpha}{2}R_n\right)\\ &\qquad\le \exp\left(\frac{\alpha}{2}(1+\nu\delta)|\xi_0|^2\right)\left[\mathbb{E}\sup_{1\le n\le m}\exp\left(\frac{D_n}{2}\right)\right]^{1/2}\left[\mathbb{E}\sup_{1\le n\le m}\exp\left(\frac{E_n}{2}\right)\right]^{1/2},\end{aligned} \tag{3.67}$$

其中

$$D_n = 2\alpha M_n-2\alpha^2\langle M\rangle_n \tag{3.68}$$

and

$$E_n = \alpha\delta\sum_{j=1}^{n}|\sigma\eta_j|^2-\alpha R_n. \tag{3.69}$$

与（3.42）类似，我们有 $\{\exp(D_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是关于滤过 $\{\mathcal{F}_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$的鞅，并且 $\mathbb{E}\exp(D_n)=1$ 对所有 $n$。

显然，每个 $\exp(E_n)$ 都是关于 $\mathcal{F}_{t_n}$ 可测的。要得出 $\{\exp(E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是鞅，还需证明对于所有 $n\in\mathbb{N}$， $\mathbb{E}|\exp(E_n)|=\mathbb{E}\exp(E_n)<\infty$，且 $\mathbb{E}(\exp(E_{n+1})|\mathcal{F}_{t_n})=\exp(E_n)$。由于

$\alpha < c(\delta_0|\sigma|^2)^{-1}$ 且 $\sigma\eta_n \sim \mathcal{N}(0, Q_0)$，再次援引 [DPZ14，命题 2。17] 可得，对于所有 $\delta \le \delta_0$

$$\mathbb{E}\exp(\alpha\delta|\sigma\eta_n|^2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(1-2\alpha\delta Q_0)\right) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(E_{n+1})\,|\,\mathcal{F}_{t_n}) &= \exp\left(\alpha\delta\sum_{j=1}^{n}|\sigma\eta_j|^2\right)\mathbb{E}\exp\left(\alpha\delta|\sigma\eta_{n+1}|^2 + \frac{(n+1)}{2}\mathrm{Tr}\ln(1-2\alpha\delta Q_0)\right)\\ &= \exp\left(\alpha\delta\sum_{j=1}^{n}|\sigma\eta_j|^2 + \frac{n}{2}\mathrm{Tr}\ln(1-2\alpha\delta Q_0)\right) = \exp(E_n).\end{aligned}$$

这意味着，对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[\exp(E_n)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp(E_n)\,|\,\mathcal{F}_{t_1}]] = \mathbb{E}[\exp(E_1)] = \exp\left(\alpha\delta|\sigma\eta_1|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(1-2\alpha\delta Q_0)\right) = 1. \tag{3.70}$$

因此，$\{\exp(E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个鞅，而且，对所有 $n$，$\mathbb{E}\exp(E_n) = 1$。

利用这些事实，我们进一步估计（3.67）的右端，注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{1\le n\le m}\exp\left(\frac{E_n}{2}\right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\sup_{1\le n\le m}\exp(E_n) \ge z^2\right)dz\\ &\le 1 + \int_1^\infty \mathbb{P}\left(\sup_{1\le n\le m}\exp(E_n) \ge z^2\right)dz \le 1 + \int_1^\infty \frac{\mathbb{E}\exp(E_m)}{z^2}dz = 2,\end{aligned} \tag{3.71}$$

其中，最后一个不等式由Doob 鞅不等式得出，而最后一个等式中我们使用了（3.70）。类似地，我们可以证明

$$\mathbb{E}\sup_{1\le n\le m}\exp\left(\frac{D_n}{2}\right) \le 2. \tag{3.72}$$

将估计式（3.71）和（3.72）代入（3.67），可得

$$\mathbb{E}\sup_{1\le n\le m}\exp\left(\frac{\alpha}{2}|\xi^n|^2 + \frac{\alpha\nu\delta}{2}\sum_{j=1}^{n}|\nabla\xi^j|^2 - \frac{\alpha}{2}R_n\right) \le 2\exp\left(\frac{\alpha}{2}(1+\nu\delta)|\xi_0|^2\right), \tag{3.73}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$。将 $\alpha/2$ 替换为 $\alpha$，并注意到 $\mathrm{Tr}(\ln(1-4\alpha\delta Q_0)) \ge \ln(1-4\alpha\delta\mathrm{Tr}(Q_0))$（见 [DPZ14，命题 2.17]）且 $\mathrm{Tr}(Q_0) = |\sigma|^2$，可得对于所有 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \le \delta_0$

$$\mathbb{E}\sup_{1\le n\le m}\exp\left(\alpha|\xi^n|^2 + \alpha\nu\delta\sum_{j=1}^{n}|\nabla\xi^j|^2 + \frac{n}{4}\ln(1-4\alpha\delta|\sigma|^2)\right) \le 2\exp\left(\frac{\alpha}{2}(1+\nu\delta_0)|\xi_0|^2\right) \tag{3.74}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$。现在，利用单调收敛定理，由（3.60）和（3.74）可得（3.61）。对于最后一个不等式（3.60），首先注意到它显然意味着

$$\mathbb{E}\exp\left(\alpha|\xi^n|^2 + \alpha\nu\delta\sum_{j=1}^{n}|\nabla\xi^j|^2\right) \le \frac{\tilde{c}\exp\left(C\alpha|\xi_0|^2\right)}{(1-4\alpha\delta|\sigma|^2)^{n/4}} \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{3.75}$$

现在利用一个基本事实：对于每个 $1-x$，都有 $\ge -ex$。因此，适当选取（$c$中的常数3.59），使得 $4\alpha\delta_0|\sigma|^2 \le 1/e$，即可得到对于所有 $\delta \le \delta_0$

$$(1-4\alpha\delta|\sigma|^2)^{-n/4} = \exp\left(-\frac{n}{4}\ln(1-4\alpha\delta|\sigma|^2)\right) \le \exp(\tilde{c}\alpha|\sigma|^2 n\delta).$$

将此不等式代入（3.75），可得（3.61）。至此，证明完毕。 □

接下来，我们给出以下收缩结果。

引理 3.16. 任取 $N \in \mathbb{N}, \delta, \delta_0 > 0$，使得 $\delta \le \delta_0, \sigma \in \dot{\mathrm{L}}^2$，且 $\xi_0, \widetilde{\xi}_0 \in \dot{L}^2$。令 $\widetilde{\xi}^n_{N,\delta} = \widetilde{\xi}^n_{N,\delta}(\Pi_N\widetilde{\xi}_0; \Pi_N\xi_0)$，$n \in \mathbb{Z}^+$ 为对应于参数 $N, \delta, \xi_0$ 且满足 $\widetilde{\xi}^0_{N,\delta} = \Pi_N\widetilde{\xi}_0$ 几乎必然的 (3.49)-(3.50) 的解。假设 (3.49) 中的 $K$ 和 $\beta$ 满足

$$\nu\lambda_{K+1} \ge 2\beta \tag{3.76}$$

*and*

$$\beta \ge c\max\left\{\frac{1}{\delta_0}, \frac{\delta_0^2|\sigma|^4}{\nu^3}, \frac{|\sigma|^4}{\nu^5}\right\} \tag{3.77}$$

其中某个绝对常数为 $c > 0$。那么，对每个 $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\mathbb{E}|\widetilde{\xi}^n_{N,\delta}(\Pi_N\widetilde{\xi}_0; \Pi_N\xi_0) - \xi^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0)|^2 \le \tilde{c}\frac{\exp\left(C(\nu^3\beta)^{-1/2}|\xi_0|^2\right)}{(1+\beta\delta)^{3n/4}}|\widetilde{\xi}_0 - \xi_0|^2, \tag{3.78}$$

其中 $C > 0$ 是仅依赖于 $\nu, \delta_0$ 的常数。

证明。记 $\zeta^n = \zeta^n_{N,\delta} := \xi^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0; \Pi_N\xi_0) - \xi^n_{N,\delta}(\Pi_N\xi_0)$ 以及 $\mathbf{v}^n = \mathbf{v}^n_{N,\delta} = \widetilde{\mathbf{u}}^n_{N,\delta} - \mathbf{u}^n_{N,\delta}$。将 (3.20) 从 (3.49) 中相减，得到

$$\zeta^n = \zeta^{n-1} + \delta[\nu\Delta\zeta^n - \Pi_N(\mathbf{v}^{n-1}\cdot\nabla\zeta^n) - \Pi_N(\mathbf{v}^{n-1}\cdot\nabla\xi^n) - \Pi_N(\mathbf{u}^{n-1}\cdot\nabla\zeta^n) - \beta\Pi_K\zeta^n]. \tag{3.79}$$

对（3.79）取内积，并利用 $\zeta^n$ 以及（3.7）和（3.33），可得

$$|\zeta^n|^2 - |\zeta^{n-1}|^2 + |\zeta^n - \zeta^{n-1}|^2 + 2\nu\delta|\nabla\zeta^n|^2 = -2\delta(\mathbf{v}^{n-1}\cdot\nabla\xi^n, \zeta^n) - 2\beta\delta|\Pi_K\zeta^n|^2. \tag{3.80}$$

利用（3.8）以及 $a = 1/2$ 和杨氏不等式，可将上面的非线性项估计为

$$\begin{aligned} 2\delta|(\mathbf{v}^{n-1}\cdot\nabla\xi^n, \zeta^n)| &\le \tilde{c}\delta|\zeta^{n-1}||\nabla\xi^n||\zeta^n|^{1/2}|\nabla\zeta^n|^{1/2} \\ &\le \tilde{c}\frac{\delta}{(\nu\beta)^{1/2}}|\zeta^{n-1}|^2|\nabla\xi^n|^2 + \beta\delta|\zeta^n|^2 + \nu\delta|\nabla\zeta^n|^2, \end{aligned} \tag{3.81}$$

其中 $\tilde{c} > 0$ 是某个绝对常数。因此，由（3.80）可得，

$$|\zeta^n|^2 - |\zeta^{n-1}|^2 + |\zeta^n - \zeta^{n-1}|^2 + \nu\delta|\nabla\zeta^n|^2 \le \tilde{c}\frac{\delta}{(\nu\beta)^{1/2}}|\zeta^{n-1}|^2|\nabla\xi^n|^2 + \beta\delta|\zeta^n|^2 - 2\beta\delta|\Pi_K\zeta^n|^2.$$

利用不等式（3.11），我们将左侧的最后一项估计为

$$\begin{aligned} \nu\delta|\nabla\zeta^n|^2 = \nu\delta(|\nabla\Pi_K\zeta^n|^2 + |\nabla(I-\Pi_K)\zeta^n|^2) &\ge \nu\delta(|\nabla\Pi_K\zeta^n|^2 + \lambda_{K+1}|(I-\Pi_K)\zeta^n|^2) \\ &\ge \nu\delta|\nabla\Pi_K\zeta^n|^2 + 2\beta\delta|(I-\Pi_K)\zeta^n|^2, \end{aligned} \tag{3.82}$$

在最后一个不等式中，我们利用了以下假设： $\nu\lambda_{K+1} \ge 2\beta$，（3.76）。重新排列各项后，可得

$$|\zeta^n|^2 - |\zeta^{n-1}|^2 + |\zeta^n - \zeta^{n-1}|^2 + \nu\delta|\nabla\Pi_K\zeta^n|^2 + \beta\delta|\zeta^n|^2 \le \tilde{c}\frac{\delta}{(\nu\beta)^{1/2}}|\zeta^{n-1}|^2|\nabla\xi^n|^2. \tag{3.83}$$

特别是 r，在忽略（3.83）左侧的第三项和第四项后，我们得到 n

$$(1+\beta\delta)|\zeta^n|^2 \le \left(1 + \tilde{c}\delta\frac{|\nabla\xi^n|^2}{(\nu\beta)^{1/2}}\right)|\zeta^{n-1}|^2 \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

因此，由归纳法可得，

$$|\zeta^n|^2 \le \frac{|\zeta_0|^2}{(1+\beta\delta)^n}\prod_{j=1}^n\left(1 + \tilde{c}\delta\frac{|\nabla\xi^j|^2}{(\nu\beta)^{1/2}}\right) \le \frac{|\zeta_0|^2}{(1+\beta\delta)^n}\exp\left(\sum_{j=1}^n\tilde{c}\delta\frac{|\nabla\xi^j|^2}{(\nu\beta)^{1/2}}\right), \tag{3.84}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了 $1+x\le e^x$，对所有 $x\in\mathbb{R}$均成立。对式（3.84）两边取期望值，便得到

$$\mathbb{E}|\zeta^n|^2\le\frac{|\zeta_0|^2}{(1+\beta\delta)^n}\mathbb{E}\exp\left(\sum_{j=1}^n\tilde{c}\delta\frac{|\nabla\xi^j|^2}{(\nu\beta)^{1/2}}\right). \tag{3.85}$$

现在令 $\alpha=\tilde{c}(\nu^3\beta)^{-1/2}$。由关于 $\beta$ 的假设（3.77），显然 $\alpha$ 满足引理 3.15中的条件（3.59）。因此，由（3.75）和（3.85）可得

$$\mathbb{E}|\zeta^n|^2\le\frac{|\zeta_0|^2}{(1+\beta\delta)^n}\frac{\tilde{c}\exp\left(C\alpha|\xi_0|^2\right)}{(1-4\alpha\delta|\sigma|^2)^{n/4}}. \tag{3.86}$$

此外，我们可以假设，关于 $\beta$ 的假设（3.77）中的常数 $c$ 足够大，使得 $\alpha=\tilde{c}(\nu^3\beta)^{-1/2}\le 1/(8\delta_0|\sigma|^2)$ 且 $\beta\ge 1/\delta_0$。于是我们估计

$$\begin{aligned}1-4\alpha\delta|\sigma|^2&\ge 1-\frac{\delta}{2\delta_0}=1-\frac{1}{2\delta_0\beta}\beta\delta\\&\ge 1-\frac{1}{1+\delta_0\beta}\beta\delta\ge 1-\frac{1}{1+\beta\delta}\beta\delta=\frac{1}{1+\beta\delta},\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了 $\delta\le\delta_0$。因此，

$$(1+\beta\delta)^n(1-4\alpha\delta|\sigma|^2)^{n/4}\ge(1+\beta\delta)^n(1+\beta\delta)^{-n/4}=(1+\beta\delta)^{3n/4},$$

因此，由（3.86）可推出

$$\mathbb{E}|\zeta^n|^2\le|\zeta_0|^2\frac{\tilde{c}\exp\left(C\alpha|\xi_0|^2\right)}{(1+\beta\delta)^{3n/4}}. \tag{3.87}$$

这证明了（3.78），并完成了证明。 □

接下来，我们回顾任意可测空间 $(X,\Sigma_X)$ 上的概率测度空间中一些关于距离的其他概念，以及若干相关的有用不等式。这些概念和不等式对于进一步估计（3.53）右端的第二项，即控制代价项，将特别有帮助。首先，我们回顾一下，任意两个测度 $\mu,\tilde{\mu}\in$ 概率测度（$X$）之间的全变差距离定义为

$$\|\mu-\tilde{\mu}\|_{\mathrm{TV}}:=\sup_{A\in\Sigma_X}|\mu(A)-\tilde{\mu}(A)|. \tag{3.88}$$

给定另一个可测空间（$Y$，$\Sigma_Y$）以及一个可测函数 $\phi:\ X\to Y$，由定义（3.88）可立即得出

$$\|\phi^*\mu-\phi^*\tilde{\mu}\|_{\mathrm{TV}}\le\|\mu-\tilde{\mu}\|_{\mathrm{TV}}, \tag{3.89}$$

其中，$\phi^*\mu\in$ 概率测度空间$(Y)$表示 $\mu$ 经函数 $\phi$得到的推前测度，即对所有 $A\in\Sigma_Y$，$\phi^*\mu(A):=\mu(\phi^{-1}(A))$。

其次，回顾一下库尔贝克-莱布勒散度的定义：

$$D_{\mathrm{KL}}(\tilde{\mu}\|\mu):=\int_X\ln\left(\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu}(\xi)\right)\tilde{\mu}(d\xi), \tag{3.90}$$

对于任意满足 $\tilde{\mu}$ 关于 $\mu$绝对连续的 $\mu,\tilde{\mu}\in$ 概率测度空间$(X)$，拉东-尼科迪姆导数 $d\tilde{\mu}/d\mu$ 是良定义的。当 $\tilde{\mu}$ 关于 $\mu$不是绝对连续时，令 $D_{\mathrm{KL}}(\tilde{\mu}\|\mu):=+\infty$。

关于这两种距离概念，我们将用到 [BKS20] 中的两个有用不等式，它们给出了 $d$维维纳过程 $W$ 的分布与相应平移过程之间的距离估计

$$\widehat{W}(t)=W(t)+\int_0^t\varphi(\tau)d\tau \tag{3.91}$$

对于某个渐进可测过程 $\varphi(t)$, $t \geq 0$。在下面的证明中，这些不等式将应用于 $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \mathbb{1}_{[t_{j-1},t_j)}(t)$, 其中 $\psi_j$ 如式 (3.55) 所示。具体而言，记 $\mathcal{L}(W)$ 和 $\mathcal{L}(\widehat{W})$ 分别为 $\widehat{}$ 和 $W$ 的分布， $W$ 由 [BKS20定理 A2] 可得

$$D_{\mathrm{KL}}(\mathcal{L}(\widehat{W})\|\mathcal{L}(W)) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^\infty |\varphi(t)|^2 \mathrm{d}t. \tag{3.92}$$

并且根据 [BKS20，定理 A.5，(A.13)], 可知，对任意 $a \in (0,1]$[3]

$$\left\|\mathcal{L}(\widehat{W}) - \mathcal{L}(W)\right\|_{\mathrm{TV}} \leq 2^{\frac{1-a}{1+a}} \left[\mathbb{E}\left(\int_0^\infty |\varphi(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^a\right]^{\frac{1}{1+a}}. \tag{3.93}$$

我们还回顾下面的不等式，它给出了这两个定义之间的显式关系（例如参见 [Tsy09，不等式(2.25)]）：

$$\|\mu - \tilde{\mu}\|_{\mathrm{TV}} \leq 1 - \frac{1}{2}\exp\left(-D_{\mathrm{KL}}(\tilde{\mu}\|\mu)\right) \tag{3.94}$$

对所有 $\mu, \tilde{\mu} \in$ 概率测度空间$(X)$。

为了进一步将这些定义与定义在概率测度空间(2.2)上的类 Wasserstein 距离联系起来，我们注意到，对于任意类距离函数 $\rho$： $\dot{L}^2 \times \dot{L}^2 \to \mathbb{R}^+$ 满足 $\rho(\xi, \tilde{\xi}) \leq 1$ 对所有 $\xi$, $\tilde{\xi} \in \dot{L}^2$，由耦合引理 [KS12，引理 1.224]可立即得到

$$\mathcal{W}_\rho(\mu, \tilde{\mu}) \leq \|\mu - \tilde{\mu}\|_{\mathrm{TV}} \quad \text{for all } \mu, \tilde{\mu} \in \Pr(\dot{L}^2). \tag{3.95}$$

有了这些记号和事实，我们现在开始证明 命题 3.12 和命题 3.13。

命题 3.12 的证明。 固定 $M > 0$, $\varepsilon > 0$, $s \in (0,1]$, 并令 $\xi_0$, $\tilde{\xi}_0 \in \dot{L}^2$ 使得 $|\xi_0| \leq M$ 且 $|\tilde{\xi}_0| \leq M$。我们从（3.53）中的三角不等式开始，并按照本节引言中所述的策略，对右端的每一项进行估计。对于第一项，根据 $\mathcal{W}_\varepsilon$ 的定义, $s$ 由（2.2）和（3.25），以及 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_n^{N,\delta}(\xi_0,\cdot), \widetilde{P}_n^{N,\delta,\xi_0}(\tilde{\xi}_0,\cdot)) &\leq \mathbb{E}\left(1 \wedge \frac{|\xi^n(\Pi_N\xi_0) - \tilde{\xi}^n(\Pi_N\xi_0; \Pi_N\tilde{\xi}_0)|^s}{\varepsilon}\right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathbb{E}|\xi^n(\Pi_N\xi_0) - \tilde{\xi}^n(\Pi_N\xi_0; \Pi_N\tilde{\xi}_0)|^2\right)^{s/2}. \end{aligned} \tag{3.96}$$

根据假设，存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得（3.28）成立。特别地，（3.28）中的第二个条件意味着我们可以取 $\beta > 0$，使其满足 3.76）和（3.77）中的假设，该引理为 引理 3.16。因此，由（3.78）和（3.96）可得

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_n^{N,\delta}(\xi_0,\cdot), \widetilde{P}_n^{N,\delta,\xi_0}(\tilde{\xi}_0,\cdot)) \leq \frac{|\xi_0 - \tilde{\xi}_0|^s}{\varepsilon} \frac{\tilde{c}^s \exp\left(Cs(\nu^3\beta)^{-1/2}|\xi_0|^2\right)}{(1+\beta\delta)^{3ns/8}} \tag{3.97}$$

$$= \tilde{c}^s \frac{M^s}{\varepsilon} \frac{\exp\left(Cs(\nu^3\beta)^{-1/2}M^2\right)}{(1+\beta\delta)^{3ns/8}}, \tag{3.98}$$

对于某个绝对常数 $\tilde{c} > 0$ 以及某个仅依赖于 $\nu$、$\delta_0$ 的常数 $C > 0$。

我们继续估计（3.53）右端的第二项。记 $\xi^n(\Pi_N\xi_0; W)$ 和 $\tilde{\xi}^n(\Pi_N\tilde{\xi}_0; \Pi_N\xi_0, W)$ 分别为方程（3.20）和（3.49)-（3.50）的解，它们均从 $\Pi_N\tilde{\xi}_0 \in \Pi_N\dot{L}^2$出发，并对应于由 $W = \{W^k\}_{k=1}^d$ 构成的相互独立的实值布朗运动族 $W^k$, $k =$

[3]在 [BKS20, 定理 A.5, (A.13)]，中，实际假设 $a \in$ (0,1)。事实上，尽管由 (3.92) 和平克斯不等式可知，在这种情况下成立的界略微更精确（参见例如 [Tsy09, 引理 2.5.(i)]），但不等式 (3.93) 对 $a = 1$ 也成立。即，$\left\|\mathcal{L}(\widehat{W}) - \mathcal{L}(W)\right\|_{\mathrm{TV}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}D_{\mathrm{KL}}(\mathcal{L}(\widehat{W})\|\mathcal{L}(W))} \leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\int_0^\infty |\varphi(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$。

$1,\dots,d$。接着，记 $\mathcal{L}(Z)$ 为随机变量 $Z$ 的分布，则可将（3.23）和（3.51）中定义的马尔可夫转移核等价地写为

$$P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot)=\mathcal{L}(\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;W)) \quad \text{and} \quad \widetilde{P}_n^{N,\delta,\xi_0}(\widetilde{\xi}_0,\cdot)=\mathcal{L}(\widetilde{\xi}^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;\Pi_N\xi_0,W)),$$

分别地。由不等式（3.95），我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_n^{N,\delta,\xi_0}(\widetilde{\xi}_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot)) &\le \left\|\widetilde{P}_n^{N,\delta,\xi_0}(\widetilde{\xi}_0,\cdot)-P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot)\right\|_{\mathrm{TV}}\\ &=\left\|\mathcal{L}(\widetilde{\xi}^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;\Pi_N\xi_0,W))-\mathcal{L}(\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;W))\right\|_{\mathrm{TV}}.\end{aligned} \tag{3.99}$$

令 $\widehat{W}=\{\widehat{W}^k\}_{k=1}^d$ 为式（3.54）—（3.55）中定义的平移独立布朗运动族。这里注意，在式（3.55）中 $\psi_j$ 的定义里，由于式（3.28）中的假设 $\Pi_K\dot{L}^2\subset range\,(\sigma)$，$\sigma^{-1}\Pi_K$ 是良定义的。此外，由式（3.20）的路径强解的唯一性（如命题 3.8 所示），可知对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 几乎必然有 $\xi^n(\Pi_N\xi_0;W)=\xi^n(\Pi_N\xi_0;\Pi_N\xi_0,W)$。因此，由（3.99）可得

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_n^{N,\delta,\xi_0}(\widetilde{\xi}_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot))\le\left\|\mathcal{L}(\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;\widehat{W}))-\mathcal{L}(\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;W))\right\|_{\mathrm{TV}}. \tag{3.100}$$

不难证明，$W\in\mathbb{R}^d\mapsto\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;W)$ 是一个连续映射。因此，由（3.89）可得

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{L}(\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;\widehat{W}))-\mathcal{L}(\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;W))\right\|_{\mathrm{TV}} &= \left\|\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;\cdot)^*\mathcal{L}(\widehat{W})-\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;\cdot)^*\mathcal{L}(W)\right\|_{\mathrm{TV}}\\ &\le\left\|\mathcal{L}(\widehat{W})-\mathcal{L}(W)\right\|_{\mathrm{TV}}.\end{aligned} \tag{3.101}$$

结合不等式（3.94），因此有

$$\left\|\mathcal{L}(\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;\widehat{W}))-\mathcal{L}(\xi^n(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;W))\right\|_{\mathrm{TV}}\le 1-\frac{1}{2}\exp\left(-D_{\mathrm{KL}}(\mathcal{L}(\widehat{W})\|\mathcal{L}(W))\right). \tag{3.102}$$

回顾式（3.54）可知

$$\widehat{W}(t)=W(t)+\int_0^t\varphi(\tau)d\tau,\qquad \text{where } \varphi(\tau):=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j\mathbb{1}_{[t_{j-1},t_j)}(\tau),$$

其中 $\psi_j$ 如式（3.55）所定义。现在利用式（3.92），得到

$$D_{\mathrm{KL}}(\mathcal{L}(\widehat{W})\|\mathcal{L}(W))\le\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^{\infty}|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t=\mathbb{E}\delta\sum_{j=1}^{\infty}|\psi_j|^2. \tag{3.103}$$

现在利用 $\sigma^{-1}$ 有界这一事实，并再次应用引理 3.16，进一步将上面的右端估计为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\delta\sum_{j=1}^{\infty}|\psi_j|^2 &\le \delta\beta^2\|\sigma^{-1}\|^2\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}|\widetilde{\xi}^j(\Pi_N\widetilde{\xi}_0;\Pi_N\xi_0,W)-\xi^j(\Pi_N\xi_0;W)|^2\\ &\le\delta\beta^2\|\sigma^{-1}\|^2\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_0-\widetilde{\xi}_0|^2\frac{\tilde{c}\exp\left(C(\nu^3\beta)^{-1/2}|\xi_0|^2\right)}{(1+\beta\delta)^{3j/4}}\end{aligned} \tag{3.104}$$

for 某个常数 $C>0$，其中 $\|\sigma^{-1}\|$ 表示 $\sigma^{-1}$的算子范数。注意，

$$\begin{aligned}\beta\delta\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\beta\delta)^{3j/4}}=\beta\delta\frac{1}{1-(1+\beta\delta)^{-3/4}}&\le\beta\delta\frac{1}{1-(1+\beta\delta)^{-1/2}}=\beta\delta\frac{(1+\beta\delta)^{1/2}}{(1+\beta\delta)^{1/2}-1}\\ &=\beta\delta\frac{(1+\beta\delta)^{1/2}[(1+\beta\delta)^{1/2}+1]}{\beta\delta}\le 2(1+\beta\delta),\end{aligned}$$

因此，根据（3.104），

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\mathrm{d}t = \mathbb{E}\delta\sum_{j=1}^\infty |\psi_j|^2 \le \tilde{c}\beta(1+\beta\delta)\|\sigma^{-1}\|^2|\xi_0-\widetilde{\xi}_0|^2\exp\left(C(\nu^3\beta)^{-1/2}|\xi_0|^2\right) \tag{3.105}$$

$$\le \tilde{c}\beta(1+\beta\delta)\|\sigma^{-1}\|^2M^2\exp\left(C(\nu^3\beta)^{-1/2}M^2\right). \tag{3.106}$$

由（3.100）-（3.103）和（3.106），因此可得

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_n^{N,\delta,\xi_0}(\widetilde{\xi}_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot)) \le 1-\frac{1}{2}\exp\left\{-\tilde{c}\beta(1+\beta\delta)\|\sigma^{-1}\|^2M^2\exp\left(C(\nu^3\beta)^{-1/2}M^2\right)\right\}. \tag{3.107}$$

因此，将不等式（3.53）与估计（3.98）和（3.107）结合起来，可得

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot)) \le \tilde{c}^s\frac{M^s}{\varepsilon}\frac{\exp\left(Cs(\nu^3\beta)^{-1/2}M^2\right)}{(1+\beta\delta)^{3ns/8}} \tag{3.108}$$

$$+1-\frac{1}{2}\exp\left\{-\tilde{c}\beta\left(1+\beta\delta_0\right)\|\sigma^{-1}\|^2M^2\exp\left(C(\nu^3\beta)^{-1/2}M^2\right)\right\},$$

其中我们利用了 $\delta\le\delta_0$ 来进一步估计（3.107）的右端。

为得到（3.56），我们利用以下事实：对任意常数 $0<a<1$，对于所有$x\in[0$,，都有 $\ln(1+x)\ge ax\,(1/a)-1]$。特别地，取 $a=1/(1+\beta\delta_0)$，可得 $\beta\delta\le\beta\delta_0=(1/a)-1$，因此

$$\frac{1}{(1+\beta\delta)^{3ns/8}} = \exp\left(-\frac{3ns}{8}\ln(1+\beta\delta)\right) \le \exp\left(-\frac{3s}{8}\frac{\beta}{1+\beta\delta_0}n\delta\right). \tag{3.109}$$

因此，我们可以固定一个时间 $T_1>0$，它依赖于 $M$，$s$，$\varepsilon$，$\beta$，$\sigma$，$\delta_0$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $n\delta\ge T_1$，（3.108）右端的第一项可估计为

$$\tilde{c}^s\frac{M^s}{\varepsilon}\frac{\exp\left(Cs(\nu^3\beta)^{-1/2}M^2\right)}{(1+\beta\delta)^{3ns/8}} \le \tilde{c}^s\frac{M^s}{\varepsilon}\exp\left(Cs(\nu^3\beta)^{-1/2}M^2\right)\exp\left(-\frac{3s}{8}\frac{\beta}{1+\beta\delta_0}n\delta\right)$$

$$\le \frac{1}{4}\exp\left\{-\tilde{c}\beta\left(1+\beta\delta_0\right)\|\sigma^{-1}\|^2M^2\exp\left(C(\nu^3\beta)^{-1/2}M^2\right)\right\}. \tag{3.110}$$

由（3.108）和（3.110），我们由此得出

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot)) \le 1-\frac{1}{4}\exp\left\{-\tilde{c}\beta\left(1+\beta\delta_0\right)\|\sigma^{-1}\|^2M^2\exp\left(C(\nu^3\beta)^{-1/2}M^2\right)\right\}$$

$$=: 1-\kappa_1.$$

这表明（3.56）成立，并完成了证明。 □

命题 3.13 的证明。固定 $\kappa_2\in(0,1)$ 和 $r>0$。令 $\xi_0,\widetilde{\xi}_0\in\dot{L}^2$ 满足 $\rho_{\varepsilon,s}(\xi_0,\widetilde{\xi}_0)<1$，其中 $\rho_{\varepsilon,s}$ 如（3.25）中所定义。注意，这意味着 $\rho_{\varepsilon,s}(\xi_0,\xi_0)=|\xi_0-\xi_0|^s/\varepsilon$。

我们仿照命题 3.12的证明进行推导，从不等式（3.53）开始。对于（3.53）右端的第一项，我们首先按照（3.97）进行估计。然后，选择 $s\in(0,1]$ 使得

$$\frac{Cs}{(\nu^3\beta)^{1/2}}\le r, \tag{3.111}$$

其中 $C>0$ 如（3.97）和（3.105）中所述。这里回顾一下，$\beta>0$ 是固定的，因此3.16引理的假设（3.77）成立；由于既定假设（3.28）中的第二个条件，这一点是可能的。

取 $s$，由（3.97）可得

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_n^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),\widetilde{P}_n^{N,\delta,\xi_0}(\widetilde{\xi}_0,\cdot)) \le \tilde{c}^s\frac{|\xi_0-\widetilde{\xi}_0|^s}{\varepsilon}\frac{\exp\left(r|\xi_0|^2\right)}{(1+\beta\delta)^{3ns/8}}. \tag{3.112}$$

对于（3.53）右端的第二项，我们按照（3.99）-（3.101）中的方法进行处理，然后利用（3.93）可得，对于任意 $a\in(0,1]$

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_n^{N,\delta,\xi_0}(\widetilde{\xi}_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot))\le\left\|\mathcal{L}(\widehat{W})-\mathcal{L}(W)\right\|_{\mathrm{TV}}\le 2^{\frac{1-a}{1+a}}\left[\mathbb{E}\left(\int_0^\infty|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t\right)^a\right]^{\frac{1}{1+a}}. \tag{3.113}$$

由 H¨older 不等式，并结合估计式（3.105），可得

$$\begin{aligned}2^{\frac{1-a}{1+a}}\left[\mathbb{E}\left(\int_0^\infty|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t\right)^a\right]^{\frac{1}{1+a}}&\le 2^{\frac{1-a}{1+a}}\left[\mathbb{E}\int_0^\infty|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{a}{1+a}}\\&\le 2^{\frac{1-a}{1+a}}\left(\tilde{c}\beta(1+\beta\delta)\|\sigma^{-1}\|^2\right)^{\frac{a}{1+a}}|\xi_0-\widetilde{\xi}_0|^{\frac{2a}{1+a}}\exp\left(\frac{Ca}{(1+a)(\nu^3\beta)^{1/2}}|\xi_0|^2\right).\end{aligned} \tag{3.114}$$

特别地，取 $a\in(0,1]$ 使得 $2a/(1+a)$, $=s$其中 $s\in(0,1]$ 如（3.111）中所固定，由（3.113）、（3.114）和（3.111）可得

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_n^{N,\delta,\xi_0}(\widetilde{\xi}_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot))&\le 2^{1-s}\left(\tilde{c}\beta(1+\beta\delta)\|\sigma^{-1}\|^2\right)^{s/2}|\xi_0-\widetilde{\xi}_0|^s\exp\left(r|\xi_0|^2\right)\\&\le 2^{1-s}\left(\tilde{c}\beta\left(1+\beta\delta_0\right)\|\sigma^{-1}\|^2\right)^{s/2}|\xi_0-\widetilde{\xi}_0|^s\exp\left(r|\xi_0|^2\right).\end{aligned} \tag{3.115}$$

~ ~因此，由（3.53）、（3.112）、（3.115），并且由于 $\rho_{\varepsilon,\ s}(\xi_0,\xi_0)=|\xi_0-\xi_0|^s/\varepsilon$，可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_n^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),P_n^{N,\delta}(\widetilde{\xi}_0,\cdot))\\&\le\left[\frac{\tilde{c}^s}{(1+\beta\delta)^{3ns/8}}+\varepsilon 2^{1-s}\left(\tilde{c}\beta\left(1+\beta\delta_0\right)\|\sigma^{-1}\|^2\right)^{s/2}\right]\exp\left(r|\xi_0|^2\right)\rho_{\varepsilon,s}(\xi_0,\widetilde{\xi}_0)\end{aligned} \tag{3.116}$$

对每个 $n\in\mathbb{N}$。

特别地，通过估计 $1/(1+\beta\delta)^{3ns/8}\le 1$，我们推得（3.57）成立，其中

$$C(\varepsilon,s)=\tilde{c}^s+\varepsilon 2^{1-s}\left(\tilde{c}\beta\left(1+\beta\delta_0\right)\|\sigma^{-1}\|^2\right)^{s/2}.$$

此外，按照（3.109）中的方法进行，并选取 $T_2=T_2(\kappa_2,\ r)>0$ 和 $\varepsilon=\varepsilon(\kappa_2,\ r)>0$ 使得

$$\tilde{c}^s\exp\left(-\frac{3s}{8}\frac{\beta}{1+\beta\delta_0}T_2\right)+\varepsilon 2^{1-s}\left(\tilde{c}\beta\left(1+\beta\delta_0\right)\|\sigma^{-1}\|^2\right)^{s/2}\le\kappa_2,$$

由（3.116）可得（3.58）对任意 $n\in\mathbb{N}$ 且满足 $n\delta\ge T_2$ 均成立，正如所需。 □

We c最后，结合上述结果，给出 定理 3.9 的证明。

定理 3.9 的证明。固定 $N\in\mathbb{N}$和 $\delta\le\delta_0$。沿用定理 2.1 中的记号，取 $(X,\|\cdot\|)=(\dot{L}^2,|\cdot|)$、$\mathcal{I}=\delta\mathbb{Z}^+$，$\{P_t\}_{t\in\mathcal{I}}$，它们由 $P^{N,}{}_n{}^{\delta}$, $n\in\mathbb{Z}^+$ 给出，并令 $\Lambda$ 为 (3.25) 中定义的距离函数类。由命题 3.11、命题 3.12 和命题 3.13 可知，在此情形下，定理 2.1 的假设 (A1)、(A2) 和 (A3) 均得到满足。因此，由 (2.9) 可得：对任意 $m>1$，存在 $\alpha_m>0$，使得对于每个 $\alpha\in(0,\alpha_m)$，都存在 $\varepsilon>0$, $s\in(0,1]$, $T>0$，以及常数 $C_1$, $C_2>0$，使得以下结论成立

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mu P_n^{N,\delta},\tilde{\mu}P_n^{N,\delta})\le C_1e^{-n\delta C_2}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha/m}(\mu,\tilde{\mu}) \tag{3.117}$$

对每个 $\mu,\tilde{\mu}\in$ 概率测度空间$(\dot{L}^2)$，以及所有满足 $n\delta\ge T$ 的 $n\in\mathbb{Z}^+$。

现在任取满足 $t\ge\delta_0+T$ 的 $t\in\mathbb{R}^+$，并令 $n_0:=\inf_{n\in\mathbb{Z}^+}\{n\delta_0\ge T\}$。由此可得 $(n_0-1)\delta_0<T\le t-\delta_0$，因此对所有 $\delta\le\delta_0$，都有 $t\ge n_0\delta_0\ge n_0\delta$。于是存在 $n\in\mathbb{Z}^+$，使得 $t\in[n\delta,(n+1)\delta)$，因此根据定义（3.27），我们有 $\mathcal{P}^{N,}_{\ t}{}^{\delta}=P^{N,}{}_n{}^{\delta}$。因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mu\mathcal{P}_t^{N,\delta},\tilde{\mu}\mathcal{P}_t^{N,\delta})=\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mu P_n^{N,\delta},\tilde{\mu}P_n^{N,\delta})&\le C_1e^{-n\delta C_2}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha/m}(\mu,\tilde{\mu})\\&\le C_1e^{\delta_0C_2}e^{-tC_2}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha/m}(\mu,\tilde{\mu})\end{aligned} \tag{3.118}$$

对每个 $\mu,\tilde{\mu}\in$ 概率测度空间$(\dot{L}^2)$都成立。此外，根据定理 2.1 的陈述中明确给出的常数 $C_1,C_2$ 的依赖关系，由命题 3.11 可知，$C_1$ 和 $C_2$ 仅依赖于 $m,\alpha,T,\nu,|\sigma|,\delta_0$。因此，我们可以在 (3.118) 中对 $(0,\delta_0]$ 内的 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\delta$ 取上确界，从而得出 (3.29) 对每个 $t\ge\delta_0+T$ 都成立。

□

## 3.3 数值格式的有限时间强误差估计

本节中，我们以适当的强意义给出方程（$\xi(t)$，$t\geq 0$（3.1）的解$\xi_{N,\delta}^{n}$，$n\in\mathbb{Z}^{+}$与数值格式（3.20）的解之间的误差估计。稍后将在第 3.4 节中将其用于证明马尔可夫半群族的一致弱收敛结果$\{P_n^{N,\delta}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$，该半群族定义于（3.24），并作为定理 2.6的应用。具体而言，我们将用它来验证（H3）中的假设定理 2.3。

为此，我们将误差 $|\xi(n\delta)-\xi_{N,\delta}^{n}|$ 分解为空间离散误差 $|\xi(n\delta)-\xi_N(n\delta)|$和时间离散误差 $|\xi_N(n\delta)-\xi_{N,\delta}^{n}|$。这里回顾一下，$\xi_N(t)$，$t\geq 0$ 表示谱伽辽金离散格式 (3.12) 的解。具体而言，我们针对 $L^{\infty}_{\mathrm{loc},t}L^2_x$ 中的拓扑，得到空间离散误差的强 $L^2(\Omega)$ 估计。对于时间离散误差，由于 (3.12) 和 (3.20) 中非线性项所带来的限制，我们只能在 $L^p(\Omega;L^{\infty}_{\mathrm{loc},t}L^2_x)$ 中对充分小的 $p>0$ 得到强收敛。正如我们稍后在命题 3.19 中所示，然而，由于命题 3.11 和命题 3.6 所给出的相应李雅普诺夫不等式，在 Wasserstein 误差估计中，李雅普诺夫函数 $\xi\mapsto\exp(\alpha|\xi|^2)$ 出现在 $\rho_{\varepsilon,s,\alpha}$ 的定义中，从而弥补了这一点。

我们首先给出空间离散误差的一个估计。

命题 3.17。任取 $N\in\mathbb{N}$，$\sigma\in\dot{\mathbf{H}}^{1}$，以及 $\xi_0\in\dot{H}^1$。设 $\xi=\xi(t)$ 和 $\xi_N=\xi_N(t)$ 分别为方程（3.1）和（3.12）的解，且分别满足 $\xi(0)=\xi_0$ 和 $\xi_N(0)=\Pi_N\xi_0$ 几乎必然成立。则对于每个满足 $\alpha$的

$$0<\alpha\leq\frac{\nu}{2|\sigma|^2},$$

对于每个 $T>0$，均可得，

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|\xi(t)-\xi_N(t)|^2\leq\frac{C}{N}\left[\exp(c\alpha|\xi_0|^2)+|\nabla\xi_0|^2\right],\tag{3.119}$$

其中 $C$为仅依赖于 $\nu$、$|\sigma|$、$|\nabla\sigma|$、$\alpha$、$T$的正常数。

证明。我们首先通过低模态和高模态分量来估计空间离散误差，即

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|\xi(t)-\xi_N(t)|^2&=\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|(\Pi_N\xi(t)-\xi_N(t))+(I-\Pi_N)\xi(t)|^2\\&\leq 2\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|\Pi_N\xi(t)-\xi_N(t)|^2+2\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|(I-\Pi_N)\xi(t)|^2.\end{aligned}\tag{3.120}$$

对于第二项，由（3.11）以及针对 $\xi(t)$ 的界（3.13）的类似形式，$t\geq 0$，可得

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|(I-\Pi_N)\xi(t)|^2\leq\lambda_{N+1}^{-1}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|\nabla\xi(t)|^2\leq N^{-1}C(1+|\xi_0|^4+|\nabla\xi_0|^2),\tag{3.121}$$

对于某个正常数 $C=C(\nu,\ T,\ |\sigma|,\ |\nabla\sigma|)$，这里还用到了 $\lambda_j\sim j$，正如第 3.1.1 节中所述。

我们接下来估计式（3.120）中的第一项。记 $\zeta_N=\Pi_N\xi-\xi_N$和 $\mathbf{v}_N=\mathcal{K}*\zeta_N$。将投影 $\Pi_N$ 应用于式（3.1），可得

$$\mathrm{d}\Pi_N\xi+\left[-\nu\Delta\Pi_N\xi+\Pi_N(\mathbf{u}\cdot\nabla\xi)\right]\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{d}\Pi_N\sigma_k\mathrm{d}W^k.\tag{3.122}$$

将（3.12）从（3.122）中相减，可得 $\zeta_N$ 满足

$$\mathrm{d}\zeta_N+\left[-\nu\Delta\zeta_N+\Pi_N\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\xi-\mathbf{u}_N\cdot\nabla\xi_N\right)\right]\mathrm{d}t=0.$$

因此，由伊藤公式可得

$$\mathrm{d}|\zeta_N|^2+2\nu|\nabla\zeta_N|^2\mathrm{d}t=-2\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\xi-\mathbf{u}_N\cdot\nabla\xi_N,\zeta_N\right)\mathrm{d}t. \tag{3.123}$$

记 $Q_N=I-\Pi_N$。注意到

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\xi-\mathbf{u}_N\cdot\nabla\xi_N=\mathbf{u}\cdot\nabla Q_N\xi+Q_N\mathbf{u}\cdot\nabla\Pi_N\xi+\Pi_N\mathbf{u}\cdot\nabla\zeta_N+\mathbf{v}_N\cdot\nabla\Pi_N\xi-\mathbf{v}_N\cdot\nabla\zeta_N.$$

因此，由于正交性（3.7），

$$\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\xi-\mathbf{u}_N\cdot\nabla\xi_N,\zeta_N\right)=\left(\mathbf{u}\cdot\nabla Q_N\xi,\zeta_N\right)+\left(Q_N\mathbf{u}\cdot\nabla\Pi_N\xi,\zeta_N\right)+\left(\mathbf{v}_N\cdot\nabla\Pi_N\xi,\zeta_N\right). \tag{3.124}$$

我们对（3.124）右端的各项分别进行估计。利用（3.6）、（3.9）和（3.11），得到

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathbf{u}\cdot\nabla Q_N\xi,\zeta_N\right)\right|&=\left|\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\zeta_N,Q_N\xi\right)\right|\le c|\xi|^{1/2}|\nabla\xi|^{1/2}|\nabla\zeta_N||Q_N\xi|\\&\le\frac{c}{\lambda_{N+1}^{1/2}}|\xi|^{1/2}|\nabla\xi|^{3/2}|\nabla\zeta_N|\le\frac{\nu}{6}|\nabla\zeta_N|^2+\frac{c}{\nu\lambda_{N+1}}|\xi|\,|\nabla\xi|^3.\end{aligned} \tag{3.125}$$

此外，由（3.8）可得，当 $a=1/2$ 时

$$|(\mathbf{v}_N\cdot\nabla\Pi_N\xi,\zeta_N)|\le c|\nabla\Pi_N\xi|\,|\zeta_N|^{3/2}\,|\nabla\zeta_N|^{1/2}\le\frac{\nu}{6}|\nabla\zeta_N|^2+\frac{c}{\nu^{1/3}}|\nabla\xi|^{4/3}|\zeta_N|^2, \tag{3.126}$$

and

$$\begin{aligned}|(Q_N\mathbf{u}\cdot\nabla\Pi_N\xi,\zeta_N)|&=|(Q_N\mathbf{u}\cdot\nabla\zeta_N,\Pi_N\xi)|\le c|Q_N\xi|\,|\nabla\zeta_N|\,|\Pi_N\xi|^{1/2}\,|\nabla\Pi_N\xi|^{1/2}\\&\le\frac{c}{\lambda_{N+1}^{1/2}}|\xi|^{1/2}|\nabla\xi|^{3/2}|\nabla\zeta_N|\le\frac{\nu}{6}|\nabla\zeta_N|^2+\frac{c}{\nu\lambda_{N+1}}|\xi|\,|\nabla\xi|^3.\end{aligned} \tag{3.127}$$

因此，由（3.123），得到

$$\frac{d}{dt}|\zeta_N|^2+\nu|\nabla\zeta_N|^2\le\frac{c}{\nu^{1/3}}|\nabla\xi|^{4/3}|\zeta_N|^2+\frac{c}{\nu\lambda_{N+1}}|\xi|\,|\nabla\xi|^3.$$

忽略右端的第二项，并应用格朗沃尔不等式，回想 $\zeta_N(0)=0$，可得

$$|\zeta_N(t)|^2\le\frac{c}{\nu\lambda_{N+1}}\int_0^t|\xi(s)|\,|\nabla\xi(s)|^3\exp\left(\frac{c}{\nu^{1/3}}\int_s^t|\nabla\xi(\tau)|^{4/3}d\tau\right)ds. \tag{3.128}$$

对于稍后适当选取的某个 $\alpha>0$，我们估计

$$\frac{c}{\nu^{1/3}}\int_s^t|\nabla\xi(\tau)|^{4/3}d\tau\le\int_s^t\left(\frac{\alpha\nu}{2}|\nabla\xi(\tau)|^2+C_\alpha\right)d\tau\le\frac{\alpha\nu}{2}\int_0^T|\nabla\xi(\tau)|^2d\tau+C_\alpha T, \tag{3.129}$$

其中 $C_\alpha=c(\alpha^2\nu^3)^{-1}$，某个正的绝对常数为 $c$。

将（3.129）代入（3.128），并对 $t\in[0,T]$取上确界、求期望值，再应用 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|\zeta_N(t)|^2\\&\le c\frac{e^{C_\alpha T}}{\nu\lambda_{N+1}}\left(\mathbb{E}\exp\left(\alpha\nu\int_0^T|\nabla\xi(\tau)|^2d\tau\right)\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left(\int_0^T|\xi(s)|\,|\nabla\xi(s)|^3ds\right)^2\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.130}$$

取 $0<\alpha\le \nu/(2|\sigma|^2)$，并应用命题 3.5，我们将上文括号中的第一项估计为

$$\mathbb{E}\exp\left(\alpha\nu\int_0^T|\nabla\xi(\tau)|^2d\tau\right)\le 2\exp\left(\alpha|\xi_0|^2\right)\exp\left(\alpha|\sigma|^2T\right). \tag{3.131}$$

对于（3.130）中的最后一项，我们估计

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^T|\xi(s)|\,|\nabla\xi(s)|^3ds\right)^2&\le\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\xi(t)|^2|\nabla\xi(t)|^2\left(\int_0^T|\nabla\xi(s)|^2ds\right)^2\right]\\&\le C\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(|\xi(t)|^2+\nu\int_0^t|\nabla\xi(s)|^2ds\right)^3\right)\left(\sup_{t\in[0,T]}|\nabla\xi(t)|^2\right)\right].\end{aligned}$$

因此，应用 H¨older 不等式后，由不等式（3.13）和（3.14）在 $k=0$ 满足 $\xi(t)$ 时的类似形式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^T|\xi(s)|\,|\nabla\xi(s)|^3ds\right)^2&\le C(1+|\xi_0|^6)(1+|\xi_0|^4+|\nabla\xi_0|^2)\\&\le C\exp(c\alpha|\xi_0|^2)(1+|\nabla\xi_0|^2),\end{aligned}\tag{3.132}$$

其中正常数 $C$ 取决于 $\nu$、$\alpha$、$T$、$|\nabla\sigma|$。

将（3.131）和（3.132）代入（3.130），可推出

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|\zeta_N(t)|^2\le\frac{C}{N}\exp(c\alpha|\xi_0|^2)(1+|\nabla\xi_0|),\tag{3.133}$$

其中我们再次利用了 $\lambda_j\sim j$。

现在结合（3.133）和（3.121），由（3.120）可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|\xi(t)-\xi_N(t)|^2&\le\frac{2C}{N}\exp(c\alpha|\xi_0|^2)(1+|\nabla\xi_0|)+\frac{2C}{N}(1+|\xi_0|^4+|\nabla\xi_0|^2)\\&\le\frac{C}{N}\left[\exp(c\alpha|\xi_0|^2)+|\nabla\xi_0|^2\right].\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

接下来，我们将证明上文提到的时间离散误差估计。我们注意到，[BM19]（另见 [BM21、BM22]）中给出了一个相关结果，其中作者考虑的是满足周期边界条件、具有乘性噪声或如 (3.1) 中所述的加性噪声的二维随机纳维-斯托克斯方程的速度形式。具体而言，对于采用加性噪声的半隐式欧拉时间离散（类似于 (3.22)），他们的结果给出了近似速度场离散误差的强 $L^2(\Omega)$ 估计，其拓扑为 $L^\infty_{\mathrm{loc},t}L^2_x$，收敛阶为 $1/4$。而下面的结果则给出了近似涡量场在 $L^\infty_{\mathrm{loc},t}L^2_x$ 中的强 $L^p(\Omega)$ 界；当 $p$ 足够小时，这意味着相应速度场在 $L^\infty_{\mathrm{loc},t}H^1_x$ 中的误差界，且收敛阶更高，为 $1/2$。值得注意的是，由下文的 (3.134) 可知，$p$ 几乎可以达到 2，因为 $\nu\to\infty$。与 [BM19] 相比，我们证明中的主要差异在于样本空间中适当局部化集合的定义。这里，我们考虑一列局部化集合，它们与一列适当的离散停止时刻相关，见下文的 (3.145) 和 (3.153)。

命题 3.18. 任取 $N\in\mathbb{N}$, $\delta,\delta_0>0$，满足 $\delta\le\delta_0$, $\sigma\in\dot{\mathrm{H}}^1$，和 $\xi_0\in\dot{H}^2$。设 $\xi_N(t)$、$t\ge0$ 和 $\xi^n_{N,\delta},n\in\mathbb{Z}^+$ 分别为满足 $\xi_N(0)=\Pi_N\xi_0$ 和 $\xi^0_{N,\delta}=\Pi_N\xi_0$ 的方程 (3.12) 和 (3.20) 的解。那么存在正的绝对常数 $c_1,c_2$，使得若

$$0<\alpha\le\frac{c_1}{|\sigma|^2}\min\left\{\nu,\frac{1}{\delta_0}\right\},\quad \textit{and}\quad 0<p<\frac{2\nu^2\alpha}{c_2+\nu^2\alpha},\tag{3.134}$$

那么对每个 $K \in \mathbb{N}$ 和 $p' \in (0, 1/2)$

$$\mathbb{E} \sup_{k \le K} |\xi^k_{N,\delta}(\xi_0) - \xi_N(t_k; \xi_0)|^p \le C\delta^{p'p}(1 + |\nabla\xi_0|^4 + |A\xi_0|^2)^{p/2} \exp\left(\widetilde{C}\alpha|\xi_0|^2\right), \tag{3.135}$$

~ ~其中 $C = c(1 + \nu\delta_0)$ 和 $C = C(p', p, \nu, \delta_0, T, |\sigma|, |\nabla\sigma|, \alpha)$，且 $T \ge (K+1)\delta$。值得注意的是， $C$和 $C$均与 $N$ 和 $\delta$无关。

证明。 对每个 $j \in \mathbb{N}$，令 $\zeta^j_{N,\ \delta} = \zeta^j := \xi^j_{N,\ \delta} - \xi_N(t_j) = \xi^j - \xi_N(t_j)$ 和 $\mathbf{v}^j = \mathcal{K} * \zeta^j$。对 3.12 式关于 $t \in [t_j, t_{j+1}]$积分，

$$\begin{aligned} &\xi_N(t_{j+1}) - \xi_N(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} [-\nu\Delta\xi_N(s) + \Pi_N(\mathbf{u}_N(s) \cdot \nabla\xi_N(s))]\, \mathrm{d}s \\ &\qquad = \Pi_N\sigma(W(t_{j+1}) - W(t_j)). \end{aligned} \tag{3.136}$$

因此，将 3.136 式从 3.20 式中减去，并取 $n = j + 1$，可得

$$\zeta^{j+1} - \zeta^j - \nu\int_{t_j}^{t_{j+1}} (\Delta\xi^{j+1} - \Delta\xi_N(s))\mathrm{d}s + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\Pi_N\left(\mathbf{u}^j \cdot \nabla\xi^{j+1}\right) - \Pi_N(\mathbf{u}_N(s) \cdot \nabla\xi_N(s))\right] \mathrm{d}s = 0$$

在 $\dot{L}^2$ 中与 $\zeta^{j+1}$ 取内积，得到

$$\begin{aligned} |\zeta^{j+1}|^2 + |\zeta^{j+1} - \zeta^j|^2 - |\zeta^j|^2 &= 2\nu\int_{t_j}^{t_{j+1}} (\Delta\xi^{j+1} - \Delta\xi_N(s), \zeta^{j+1})\mathrm{d}s \\ &\quad - 2\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left((\mathbf{u}^j \cdot \nabla\xi^{j+1}) - (\mathbf{u}_N(s) \cdot \nabla\xi_N(s)), \zeta^{j+1}\right) \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.137}$$

注意到

$$\begin{aligned} &2\nu\int_{t_j}^{t_{j+1}} (\Delta\xi^{j+1} - \Delta\xi_N(s), \zeta^{j+1})\mathrm{d}s \\ &\qquad = -2\nu\delta|\nabla\zeta^{j+1}|^2 + 2\nu\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\Delta\xi_N(t_{j+1}) - \Delta\xi_N(s), \zeta^{j+1}\right) \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.138}$$

对 3.138 式右端的第二项分部积分，然后应用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned} &2\nu\left|\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\Delta\xi_N(t_{j+1}) - \Delta\xi_N(s), \zeta^{j+1}\right) \mathrm{d}s\right| \\ &\qquad \le 2\nu\int_{t_j}^{t_{j+1}} |\nabla\xi_N(t_{j+1}) - \nabla\xi_N(s)|\, |\nabla\zeta^{j+1}|\mathrm{d}s \\ &\qquad \le \frac{\nu\delta}{4}|\nabla\zeta^{j+1}|^2 + c\nu\int_{t_j}^{t_{j+1}} |\nabla\xi_N(t_{j+1}) - \nabla\xi_N(s)|^2\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.139}$$

现在来看（3.137）右端的第二项，首先注意到

$$\begin{aligned} &\left((\mathbf{u}^j \cdot \nabla\xi^{j+1}) - (\mathbf{u}_N(s) \cdot \nabla\xi_N(s)), \zeta^{j+1}\right) \\ &= \left(\mathbf{v}^j \cdot \nabla\xi^{j+1}, \zeta^{j+1}\right) + \left((\mathbf{u}_N(t_j) - \mathbf{u}_N(s)) \cdot \nabla\xi_N(t_{j+1}), \zeta^{j+1}\right) - \left(\mathbf{u}_N(s) \cdot \nabla(\xi_N(s) - \xi_N(t_{j+1})), \zeta^{j+1}\right) \end{aligned} \tag{3.140}$$

我们继续估计（3.140）右端的各项。由（3.8）和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} \left|\left(\mathbf{v}^j \cdot \nabla\xi^{j+1}, \zeta^{j+1}\right)\right| &\le c|\zeta^j|\, |\nabla\xi^{j+1}|\, |\zeta^{j+1}|^{1/2}|\nabla\zeta^{j+1}|^{1/2} \\ &\le c|\zeta^j|\, |\nabla\xi^{j+1}|\, |\nabla\zeta^{j+1}| \\ &\le \frac{\nu}{8}|\nabla\zeta^{j+1}|^2 + \frac{c}{\nu}|\zeta^j|^2|\nabla\xi^{j+1}|^2. \end{aligned} \tag{3.141}$$

同理,

$$\left|\left(\mathbf{u}_N(s)\cdot\nabla(\xi_N(s)-\xi_N(t_{j+1})),\zeta^{j+1}\right)\right|\le\frac{\nu}{8}|\nabla\zeta^{j+1}|^2+\frac{c}{\nu}|\xi_N(s)|^2|\nabla\xi_N(s)-\nabla\xi_N(t_{j+1}))|^2. \tag{3.142}$$

现在由（3.6）和（3.9可得

$$\begin{aligned}\left|\left((\mathbf{u}_N(t_j)-\mathbf{u}_N(s))\cdot\nabla\xi_N(t_{j+1}),\zeta^{j+1}\right)\right|&=\left|\left((\mathbf{u}_N(t_j)-\mathbf{u}_N(s))\cdot\nabla\zeta^{j+1},\xi_N(t_{j+1})\right)\right|\\&\le c|\nabla\xi_N(t_j)-\nabla\xi_N(s)|\,|\nabla\zeta^{j+1}|\,|\xi_N(t_{j+1})|\\&\le\frac{\nu}{8}|\nabla\zeta^{j+1}|^2+\frac{c}{\nu}|\nabla\xi_N(t_j)-\nabla\xi_N(s)|^2|\xi_N(t_{j+1})|^2.\end{aligned} \tag{3.143}$$

结合（3.138）-（3.143），由（3.137可得以下对每个 $j\in\mathbb{N}$均成立的不等式

$$\begin{aligned}&|\zeta^{j+1}|^2+|\zeta^{j+1}-\zeta^j|^2-|\zeta^j|^2+\nu\delta|\nabla\zeta^{j+1}|^2\\&\qquad\le c\nu\int_{t_j}^{t_{j+1}}|\nabla\xi_N(t_{j+1})-\nabla\xi_N(s)|^2\mathrm{d}s+\frac{c\delta}{\nu}|\zeta^j|^2|\nabla\xi^{j+1}|^2\\&+\frac{c}{\nu}|\xi_N(t_{j+1})|^2\int_{t_j}^{t_{j+1}}|\nabla\xi_N(t_j)-\nabla\xi_N(s)|^2\mathrm{d}s+\frac{c}{\nu}\int_{t_j}^{t_{j+1}}|\xi_N(s)|^2|\nabla\xi_N(s)-\nabla\xi_N(t_{j+1}))|^2\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.144}$$

固定 $K\in\mathbb{N}$。对于每个 $l\in\mathbb{N}$，我们定义如下离散停止时刻

$$\kappa_l:=\min\left\{k\ge1:\sup_{t\in[0,t_{k+2}]}\frac{|\xi_N(t)|^2}{\nu^2}+\frac{3\delta}{\nu}\sum_{j=1}^{k+2}|\nabla\xi^j|^2\ge l\right\}\wedge K. \tag{3.145}$$

我们还定义相应的离散停止时刻族 $\kappa_l^i$, $i=0,1,\ldots,L$，其中某个 $L=L(l)\in\mathbb{N}$需适当选取，定义如下

$$\kappa_l^0:=0;\quad \kappa_l^i:=\min\left\{k\ge\kappa_l^{i-1}+1:\frac{\delta}{\nu}\sum_{j=\kappa_l^{i-1}+1}^{k+2}|\nabla\xi^j|^2\ge\frac{l}{L}\right\}\wedge\kappa_l,\quad i=1,\ldots,L.$$

不难证明，对于所有 $i=1,\ldots,L$ 和 $\kappa_l^L=\kappa_l$，均有 $\kappa_l^{i-1}<\kappa_l^i$。

忽略（3.144）左侧的第二项和第四项，并对 $j=\kappa_l^{i-1},\ldots,k$ 求和，其中 $\kappa_l^{i-1}\le k\le\kappa_l^i$且 $i\in\{1,\ldots,L\}$，可得

$$\begin{aligned}|\zeta^{k+1}|^2-|\zeta^{\kappa_l^{i-1}}|^2&\le c\nu\sum_{j=\kappa_l^{i-1}}^{\kappa_l^i}\int_{t_j}^{t_{j+1}}|\nabla\xi_N(t_{j+1})-\nabla\xi_N(s)|^2\mathrm{d}s+\frac{c\delta}{\nu}\sup_{\kappa_l^{i-1}\le j\le\kappa_l^i}|\zeta^j|^2\sum_{j=\kappa_l^{i-1}+1}^{\kappa_l^i+1}|\nabla\xi^j|^2\\&+\frac{c}{\nu}\sup_{t\in[0,t_{\kappa_l^i+1}]}|\xi_N(t)|^2\sum_{j=\kappa_l^{i-1}}^{\kappa_l^i}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[|\nabla\xi_N(t_j)-\nabla\xi_N(s)|^2+|\nabla\xi_N(s)-\nabla\xi_N(t_{j+1}))|^2\right]\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.146}$$

注意，根据 $\kappa_l^i$、 $i=1$、...、 $L$ 的定义，我们有

$$\frac{\delta}{\nu}\sum_{j=\kappa_l^{i-1}+1}^{\kappa_l^i+1}|\nabla\xi^j|^2\le\frac{l}{L}\quad\text{for all } i=1,\ldots,L.$$

选择 $L\in\mathbb{N}$ 作为

$$L=\min\{j\in\mathbb{N}:cl/j\le1/2\}, \tag{3.147}$$

与 $c>0$ 如右端第二项所示（3.146）。然后我们对该项进行估计：

$$\frac{c\delta}{\nu}\sup_{\kappa_l^{i-1}\le j\le\kappa_l^i}|\zeta^j|^2\sum_{j=\kappa_l^{i-1}+1}^{\kappa_l^i+1}|\nabla\xi^j|^2\le c\frac{l}{L}\sup_{\kappa_l^{i-1}\le j\le\kappa_l^i}|\zeta^j|^2\le\frac{1}{2}\sup_{\kappa_l^{i-1}\le j\le\kappa_l^i+1}|\zeta^j|^2. \tag{3.148}$$

注意，(3.146) 实际上对所有 $k=(\kappa_l^{i-1}-1)$ $\kappa_l^{i-1}$、……、 $\kappa_l^i$都成立。因此，在 (3.146) 中对 $k=(\kappa_l^{i-1}-1)$ $\kappa_l^{i-1}$、……、 $\kappa_l^i$取上确界，并利用 (3.148)，得到

$$\begin{aligned}\sup_{\kappa_l^{i-1}\le j\le\kappa_l^i+1}|\zeta^j|^2&\le 2|\zeta^{\kappa_l^{i-1}}|^2+c\nu\sum_{j=\kappa_l^{i-1}}^{\kappa_l^i}\int_{t_j}^{t_{j+1}}|\nabla\xi_N(t_{j+1})-\nabla\xi_N(s)|^2\mathrm{d}s\\&+\frac{c}{\nu}\sup_{t\in[0,t_{\kappa_l^i+1}]}|\xi_N(t)|^2\sum_{j=\kappa_l^{i-1}}^{\kappa_l^i}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[|\nabla\xi_N(t_j)-\nabla\xi_N(s)|^2+|\nabla\xi_N(s)-\nabla\xi_N(t_{j+1}))|^2\right]\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.149}$$

根据 $\kappa_l$ 的定义，并且由于对所有 $i=1$、……、 $L$， $\kappa_l^i\le\kappa_l^L=\kappa_l$，我们有

$$\sup_{t\in[0,t_{\kappa_l^i+1}]}\frac{|\xi_N(t)|^2}{\nu^2}\le\sup_{t\in[0,t_{\kappa_l+1}]}\frac{|\xi_N(t)|^2}{\nu^2}\le\sup_{t\in[0,t_{\kappa_l+1}]}\frac{|\xi_N(t)|^2}{\nu^2}+\frac{3\delta}{\nu}\sum_{j=1}^{\kappa_l+1}|\nabla\xi^j|^2\le l. \tag{3.150}$$

Usi根据 (3.150) 估计 (3.149) 右端的第三项，可得

$$\sup_{\kappa_l^{i-1}\le j\le\kappa_l^i+1}|\zeta^j|^2\le 2|\zeta^{\kappa_l^{i-1}}|^2+\mathcal{A}_i,$$

其中

$$\mathcal{A}_i:=c\nu l\sum_{j=\kappa_l^{i-1}}^{\kappa_l^i}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[|\nabla\xi_N(t_j)-\nabla\xi_N(s)|^2+|\nabla\xi_N(s)-\nabla\xi_N(t_{j+1}))|^2\right]\mathrm{d}s. \tag{3.151}$$

因此，对于每个 $i=1$、……、 $L$，

$$\begin{aligned}\sup_{j\le\kappa_l^i}|\zeta^j|^2&\le\sup_{j\le\kappa_l^{i-1}}|\zeta^j|^2+\sup_{\kappa_l^{i-1}\le j\le\kappa_l^i+1}|\zeta^j|^2\\&\le\sup_{j\le\kappa_l^{i-1}}|\zeta^j|^2+2|\zeta^{\kappa_l^{i-1}}|^2+\mathcal{A}_i\\&\le 3\sup_{j\le\kappa_l^{i-1}}|\zeta^j|^2+\mathcal{A}_i.\end{aligned}$$

由归纳法可知，对每个 $l\in\mathbb{N}$ 和 $L=L(l)\in\mathbb{N}$ 如（3.147）所示，

$$\sup_{j\le\kappa_l}|\zeta^j|^2=\sup_{j\le\kappa_l^L}|\zeta^j|^2\le 3^L|\zeta^0|^2+\sum_{i=1}^{L}3^{L-i}\mathcal{A}_i=\sum_{i=1}^{L}3^{L-i}\mathcal{A}_i, \tag{3.152}$$

因为 $\zeta^0=0$。

现在，对于 $K\in\mathbb{N}$ 如（3.145）所示，我们对每个 $l\in\mathbb{N}$

$$\Omega_l^K:=\left\{\omega\in\Omega:l-1\le\sup_{t\in[0,t_{K+2}]}\frac{|\xi_N(t)|^2}{\nu^2}+\frac{3\delta}{\nu}\sum_{j=1}^{K+2}|\nabla\xi^j|^2<l\right\}. \tag{3.153}$$

由于 $\Omega = \bigcup_{l\in\mathbb{N}}\Omega_l^K$，我们对任意 $p>0$ 均可得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{j\le K}|\zeta^j|^p &= \mathbb{E}\left(\sup_{j\le K}|\zeta^j|^p\sum_{l=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\Omega_l^K}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\sup_{j\le K}|\zeta^j|^p\mathbb{1}_{\Omega_l^K}\right)\\ &\le\sum_{l=1}^{\infty}\left(\mathbb{E}\sup_{j\le K}|\zeta^j|^2\mathbb{1}_{\Omega_l^K}\right)^{p/2}\mathbb{P}(\Omega_l^K)^{\frac{2-p}{2}},\end{aligned}\tag{3.154}$$

其中最后一步由 H¨older 不等式得出。此外，根据 $\kappa_l$ 和 $\Omega_l^K$的定义可知，若 $\omega\in\Omega_l^K$则 $\kappa_l(\omega)=K$。因此，由 (3.152) 和 (3.151) 可得,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{j\le K}|\zeta^j|^2\mathbb{1}_{\Omega_l^K}&=\mathbb{E}\sup_{j\le\kappa_l}|\zeta^j|^2\mathbb{1}_{\Omega_l^K}\le\sum_{i=1}^{L}3^{L-i}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\Omega_l^K}\mathcal{A}_i)\\ &\le c\nu l3^{L-1}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\Omega_l^K}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=\kappa_l^{i-1}}^{\kappa_l^i}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[|\nabla\xi_N(t_j)-\nabla\xi_N(s)|^2+|\nabla\xi_N(s)-\nabla\xi_N(t_{j+1})|^2\right]\mathrm{d}s\right)\\ &\le c\nu l3^{L-1}\mathbb{E}\sum_{j=0}^{K}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[|\nabla\xi_N(t_j)-\nabla\xi_N(s)|^2+|\nabla\xi_N(s)-\nabla\xi_N(t_{j+1})|^2\right]\mathrm{d}s\\ &= c\nu l3^{L-1}\sum_{j=0}^{K}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\mathbb{E}|\nabla\xi_N(t_j)-\nabla\xi_N(s)|^2+\mathbb{E}|\nabla\xi_N(s)-\nabla\xi_N(t_{j+1})|^2\right]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

任取 $T\ge(K\quad+1)\delta$。根据 定理 3.7 以及 $m=2$，对每个 $p'\in(0,1/2)$ 和 $s,\quad t\in[0,T\qquad]$

$$\mathbb{E}|\nabla\xi_N(t)-\nabla\xi_N(s)|^2\le CR_0|t-s|^{2p'},\tag{3.155}$$

其中 $R_0=(1+|\xi_0|^8+|\nabla\xi_0|^4+|A\xi_0|^2)$，且 $C$是一个依赖于 $p'$、$T$、$\nu$、$|\sigma|$、$|\nabla\sigma|$的正常数。因此,

$$\mathbb{E}\sup_{j\le K}|\zeta^j|^2\mathbb{1}_{\Omega_l^K}\le c\nu l3^{L-1}\sum_{j=0}^{K}CR_0\delta^{2p'+1}\le CR_0\delta^{2p'}l3^{L-1},$$

其中 $C=C(p'、T、\nu、|\sigma|、|\nabla\sigma|)$。

此外，根据 $L$ 在 (3.147) 中的定义可知 $2cl\le L\le 2cl+1$，因此 $l3^{L-1}\le 3^{cl}$ 和

$$\mathbb{E}\sup_{j\le K}|\zeta^j|^2\mathbb{1}_{\Omega_l^K}\le CR_0\delta^{2p'}3^{cl}.\tag{3.156}$$

根据集合 $\Omega_l^K$在（3.153）中的定义并应用马尔可夫不等式，可得对于任意$\tilde{\alpha}>0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega_l^K)&\le\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,t_{K+2}]}\frac{|\xi_N(t)|^2}{\nu^2}+\frac{3\delta}{\nu}\sum_{j=1}^{K+2}|\nabla\xi^j|^2\ge l-1\right)\\ &=\mathbb{P}\left(\exp\left(\tilde{\alpha}\sup_{t\in[0,t_{K+2}]}\frac{|\xi_N(t)|^2}{\nu^2}+\tilde{\alpha}\frac{3\delta}{\nu}\sum_{j=1}^{K+2}|\nabla\xi^j|^2\right)\ge e^{\tilde{\alpha}(l-1)}\right)\\ &\le e^{-\tilde{\alpha}(l-1)}\mathbb{E}\left(\exp\left(\tilde{\alpha}\sup_{t\in[0,t_{K+2}]}\frac{|\xi_N(t)|^2}{\nu^2}+\tilde{\alpha}\frac{3\delta}{\nu}\sum_{j=1}^{K+2}|\nabla\xi^j|^2\right)\right)\\ &\le e^{-\tilde{\alpha}(l-1)}\left(\mathbb{E}\exp\left(2\tilde{\alpha}\sup_{t\in[0,t_{K+2}]}\frac{|\xi_N(t)|^2}{\nu^2}\right)\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\exp\left(c\tilde{\alpha}\frac{\delta}{\nu}\sum_{j=1}^{K+2}|\nabla\xi^j|^2\right)\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

现在我们假设 $0<\tilde{\alpha}\le \tilde{c}\nu^2|\sigma|^{-2}\min\{\nu,\delta_0^{-1}\}$ 对于某个 $\tilde{c}>0$ 足够小的绝对常数，使我们可以应用3.61）中的界，其中 引理 3.15 以及 3.16）中的界，其中 命题 3.5 ，从而得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega_l^K)&\le ce^{-\tilde{\alpha}(l-1)}\exp\left(\widetilde{C}\frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2}|\xi_0|^2\right)\exp\left(c\frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2}|\sigma|^2(K+2)\delta\right)\\&\le Ce^{-\tilde{\alpha}(l-1)}\exp\left(\widetilde{C}\frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2}|\xi_0|^2\right),\end{aligned}\tag{3.157}$$

~其中 $C=C(\nu,\delta_0,T,|\sigma|)$ 和 $C=c(1+\nu\delta_0)$。

因此，由3.154）、（3.156）和（3.157）可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{j\le K}|\zeta^j|^p&\le\sum_{l=1}^{\infty}\left(CR_0\delta^{2p'}3^{cl}\right)^{p/2}\left(Ce^{-\tilde{\alpha}(l-1)}\exp\left(\widetilde{C}\frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2}|\xi_0|^2\right)\right)^{\frac{2-p}{2}}\\&\le CR_0^{p/2}\exp\left(\widetilde{C}\frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2}|\xi_0|^2\right)\delta^{p'p}\left(\sum_{l=1}^{\infty}3^{cpl}e^{-\frac{\tilde{\alpha}(2-p)}{2}l}\right)e^{\tilde{\alpha}\frac{(2-p)}{2}}.\end{aligned}\tag{3.158}$$

对于依赖于初始数据 $\xi_0$的项，根据 $R_0$ 在（3.155）中的定义可得

$$\begin{aligned}R_0^{p/2}\exp\left(\widetilde{C}\frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2}|\xi_0|^2\right)&=(1+|\xi_0|^8+|\nabla\xi_0|^4+|A\xi_0|^2)^{p/2}\exp\left(\widetilde{C}\frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2}|\xi_0|^2\right)\\&\le C(1+|\nabla\xi_0|^4+|A\xi_0|^2)^{p/2}\exp\left(\widetilde{C}\frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2}|\xi_0|^2\right),\end{aligned}\tag{3.159}$$

对于 $C=C(p,\nu,\delta_0,|\sigma|,\tilde{\alpha})$。

此外，对于（3.158）中涉及求和的项，注意到

$$\sum_{l=1}^{\infty}3^{cpl}e^{-\tilde{\alpha}\frac{(2-p)}{2}l}=\sum_{l=1}^{\infty}e^{\ln(3)cpl}e^{-\tilde{\alpha}\frac{(2-p)}{2}l}=\sum_{l=1}^{\infty}e^{-\gamma l},\tag{3.160}$$

其中 $\gamma=[\tilde{\alpha}(2-p)/2]-cp$。我们选择 $p<2\tilde{\alpha}/(c+\tilde{\alpha})$，使得 $\gamma>0$，因此（3.160）中的最后一个求和是有限的。由（3.158）和（3.159）可得

$$\mathbb{E}\sup_{j\le K}|\zeta^j|^p\le C\delta^{p'p}(1+|\nabla\xi_0|^4+|A\xi_0|^2)^{p/2}\exp\left(\widetilde{C}\frac{\tilde{\alpha}}{\nu^2}|\xi_0|^2\right),$$

对于某个正常数 $C=C(p'，\ p，\ \nu，\ \delta_0，\ T，\ |\sigma|，\ |\nabla\sigma|，\ \tilde{\alpha})$。令3.135中的 $\alpha:=\tilde{\alpha}\nu^{-2}$即可得到该式，并完成证明。 □

## 3.4 数值格式的一致长时间弱收敛

本节着重讨论定理 2.3 和定理 2.6 在式 (3.20) 中引入的二维随机 Navier–Stokes 方程时空离散化中的应用。沿用定理 2.3 中的记号，与第 3.2 节类似，我们取 $(X,\|\cdot\|)=(\dot{L}^2,|\cdot|)$，并再次将 $\Lambda$ 视为距离函数类$\rho_{\varepsilon,s}$, $\varepsilon>0$, $s\in(0,1]$,，其定义见式 (3.25)。我们令 $\Theta$ 为所有满足 $N\in\mathbb{N}$, $\delta>0\}\cup\{(\infty,0)\}$ 的有序对 $\{(N,\delta)$ 的集合。于是，对于任意满足 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\delta>0$ 的 $\theta=(N,\delta)$，我们令 $\{P_t^\theta\}_{t\ge0}$ 为与数值格式 (3.22) 相关联的马尔可夫核族 $\{\mathcal{P}_t^{N,\delta}\}_{t\ge0}$，其定义见式 (3.27) 和 (3.24)。对于 $\theta_0:=(\infty,0)$，我们令 $\{P_t^{\theta_0}\}_{t\ge0}$ 为与二维随机 Navier–Stokes 方程 (3.1) 相关联的马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\ge0}$，其定义见式 (3.5)。

关于假设 （H1）-（H4），定理 2.6的（H3）需要额外工作来验证。下面的命题将完成这一验证，其证明关键依赖于上文命题 3.17和命题 3.18中得到的强误差估计，并结合命题 3.11和命题 3.6中的指数型李雅普诺夫不等式。

命题 3.19。任取 $N\in\mathbb{N}$， $\delta$， $\delta_0>0$ 满足 $\delta\le\delta_0$，且 $\sigma\in\dot{\mathbf{H}}^1$。令 $\{P_t\}_{t\ge0}$ 和 $\{\mathcal{P}_t^{N,\delta}\}_{t\ge0}$ 分别为与系统 (3.1) 和 (3.22)对应的马尔可夫核族，定义见(3.5) 和 (3.27)。那么，存在一个正的绝对常数 $c_1$ 使得，若

$$\alpha'=\frac{c_1}{|\sigma|^2}\min\left\{\nu,\frac{1}{\delta_0}\right\} \tag{3.161}$$

那么，对于每个 $\alpha\in(0,\alpha']$, $s\in(0,1]$, $\varepsilon>0$ 和 $p'\in(0,1/2)$都有

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mathcal{P}_t^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),P_t(\xi_0,\cdot))\\&\qquad\le\frac{Ce^{C't}}{\varepsilon^{1/2}}\left[\max\{\delta^s,\delta^{p/2}\}^{p'/2}+N^{-s/4}\right]\exp(\widetilde{C}\alpha'|\xi_0|^2)(1+|\nabla\xi_0|+|A\xi_0|^{1/2})^s,\end{aligned} \tag{3.162}$$

对于每个 $t\ge0$和 $\xi_0\in\dot{H}^2$。这里， $0<p<\frac{2\nu^2\alpha'}{c_2+\nu^2\alpha'}$，其中某个绝对常数为 $c_2$，且 $\widetilde{C}=c(1+\nu\delta_0)$、$C'=C'(\nu,|\sigma|)$、 $C=C(p',p,\nu,\delta_0,|\sigma|,|\nabla\sigma|,\alpha)$。

证明。任取 $\alpha\in(0,\alpha']$, $s\in(0,1]$, $\varepsilon>0$, $p'\in(0,1/2)$、 $\xi_0\in\dot{H}^2$和 $t\ge0$。令 $n\in\mathbb{Z}^+$ 使得$t\in[n\delta,(n+1)\delta)$。由 $\{P_t\}_{t\ge0}$、 $\{\mathcal{P}_t^{N,\delta}\}_{t\ge0}$ 和 $\mathcal{W}_{\varepsilon,\ s,\ \alpha}$ 的定义立即可得

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mathcal{P}_t^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),P_t(\xi_0,\cdot))&\le\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha'}(\mathcal{P}_t^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),P_t(\xi_0,\cdot))=\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha'}(P_n^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),P_t(\xi_0,\cdot))\\&\le\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\mathbb{E}\left[|\xi^n(\xi_0)-\xi(t;\xi_0)|^{s/2}\exp\left(\alpha'|\xi^n(\xi_0)|^2+\alpha'|\xi(t;\xi_0)|^2\right)\right].\end{aligned}$$

由 H¨older 不等式,

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha'}(\mathcal{P}_t^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),P_t(\xi_0,\cdot))\\&\qquad\le\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\left(\mathbb{E}|\xi^n(\xi_0)-\xi(t;\xi_0)|^s\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\exp\left(4\alpha'|\xi^n(\xi_0)|^2\right)\right)^{1/4}\left(\mathbb{E}\exp\left(4\alpha'|\xi(t;\xi_0)|^2\right)\right)^{1/4}.\end{aligned} \tag{3.163}$$

我们假设 $c_1$ （3.161）中的常数以及 $c_2$ 在 $p$ 的定义中足够小，从而可以在后续估计中应用命题 3.11、命题 3.6、命题 3.17和命题 3.18 的结果。特别地，分别利用命题 3.11中的指数型李雅普诺夫不等式（3.31）以及命题 3.6中针对 $\xi(t)$ 的（3.17）的类似版本，我们将（ $t\ge0$3.163）中括号内最后两项估计为

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\exp\left(4\alpha'|\xi^n(\xi_0)|^2\right)\right)^{1/4}\left(\mathbb{E}\exp\left(4\alpha'|\xi(t;\xi_0)|^2\right)\right)^{1/4}&\le C\exp\left(\frac{2\alpha'|\xi_0|^2}{(1+\nu\lambda_1\delta)^n}\right)\exp\left(\alpha'e^{-\nu t}|\xi_0|^2\right)\\&\le C\exp(3\alpha'|\xi_0|^2),\end{aligned} \tag{3.164}$$

其中 $C=C(\nu,\delta_0,|\sigma|)$。

关于（3.163）中括号内的第一项，我们首先估计为

$$\mathbb{E}|\xi^n(\xi_0)-\xi(t;\xi_0)|^s\le\mathbb{E}|\xi^n(\xi_0)-\xi_N(n\delta;\xi_0)|^s+\mathbb{E}|\xi_N(n\delta;\xi_0)-\xi(n\delta;\xi_0)|^s+\mathbb{E}|\xi(n\delta;\xi_0)-\xi(t;\xi_0)|^s, \tag{3.165}$$

其中我们回顾一下， $s\in(0,1]$。接下来，我们利用定理 3.7、命题 3.17和命题 3.18 以及 $T=t$来估计 3.165）右端中的各项。这里我们将显式写出 $t$对（ $C$ 3.18）、（3.119）和（3.135）中的常数 $e^{C't}$的依赖关系，记为 $C'=C'$（$\nu$， $|\sigma|$），这可由相应的证明直接看出。

特别地，利用命题 3.17 中的不等式（3.119）以及 H¨older 不等式，我们将（3.165）右端的第二项估计为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\xi_N(n\delta;\xi_0)-\xi(n\delta;\xi_0)|^s&\le\left(\mathbb{E}|\xi_N(n\delta;\xi_0)-\xi(n\delta;\xi_0)|^2\right)^{s/2}\\&\le\left(\frac{Ce^{C't}}{N}\left[\exp(c\alpha'|\xi_0|^2)+|\nabla\xi_0|^2\right]\right)^{s/2}\\&\le\frac{Ce^{C't}}{N^{s/2}}\exp(c\alpha'|\xi_0|^2)(1+|\nabla\xi_0|^2)^{s/2},\end{aligned} \tag{3.166}$$

其中 $C = C(\nu, |\sigma|, |\nabla\sigma|, \alpha')$.

对于右端（3.165）中的第三项，我们调用定理 3.7 中不等式（3.18）的相应版本，取 $\xi(t)$，得到

$$\mathbb{E}|\xi(n\delta;\xi_0) - \xi(t;\xi_0)|^s \le (\mathbb{E}|\xi(n\delta;\xi_0) - \xi(t;\xi_0)|)^s \le Ce^{C't}\delta^{sp'}(1 + |\xi_0|^4 + |\nabla\xi_0|^2)^s, \tag{3.167}$$

其中 $C = C(p', \nu, |\sigma|, |\nabla\sigma|)$。

最后，为估计右端（3.165）中的第一项，我们先假设 $s < p$，其中 $p$如（3.134）所示。在这种情况下，由 H¨older 不等式以及命题 3.18 中的（3.135），可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\xi^n(\xi_0) - \xi_N(n\delta;\xi_0)|^s &\le (\mathbb{E}|\xi^n(\xi_0) - \xi_N(n\delta;\xi_0)|^p)^{s/p} \\ &\le \left(Ce^{C't}\delta^{p'p}\exp(\widetilde{C}\alpha'|\xi_0|^2)(1 + |\nabla\xi_0|^4 + |A\xi_0|^2)^{p/2}\right)^{s/p} \\ &\le Ce^{C't}\delta^{p's}\exp(\widetilde{C}\alpha'|\xi_0|^2)(1 + |\nabla\xi_0|^4 + |A\xi_0|^2)^{s/2},\end{aligned} \tag{3.168}$$

~其中 $C = c(1 + \nu\delta_0)$ 且 $C = C(p', p, \nu, \delta_0, |\sigma|, |\nabla\sigma|)$。另一方面，如果 $s \ge p$，则按如下方式进行

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\xi^n(\xi_0) - \xi_N(n\delta;\xi_0)|^s &= \mathbb{E}\left[|\xi^n(\xi_0) - \xi_N(n\delta;\xi_0)|^{p/2}|\xi^n(\xi_0) - \xi_N(n\delta;\xi_0)|^{s-\frac{p}{2}}\right] \\ &\le \mathbb{E}\left[|\xi^n(\xi_0) - \xi_N(n\delta;\xi_0)|^{p/2}\left(|\xi^n(\xi_0)|^{s-\frac{p}{2}} + |\xi_N(n\delta;\xi_0)|^{s-\frac{p}{2}}\right)\right] \\ &\le C\,\mathbb{E}\left[|\xi^n(\xi_0) - \xi_N(n\delta;\xi_0)|^{p/2}\left(\exp(\alpha'|\xi^n(\xi_0)|^2) + \exp(\alpha'|\xi_N(n\delta;\xi_0)|^2)\right)\right],\end{aligned}$$

其中 $C = C(\alpha')$。因此，由 H¨older 不等式以及命题 3.11中的不等式（3.31）、（3.17）和（3.135），分别根据命题 3.6和 命题 3.18，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|\xi^n(\xi_0) - \xi_N(n\delta;\xi_0)|^s \\ &\le C\left(\mathbb{E}|\xi^n(\xi_0) - \xi_N(n\delta;\xi_0)|^p\right)^{1/2}\left[\mathbb{E}\exp(2\alpha'|\xi^n(\xi_0)|^2) + \mathbb{E}\exp(2\alpha'|\xi_N(n\delta;\xi_0)|^2)\right]^{1/2} \\ &\le C\left(e^{C't}\delta^{p'p}\exp(\widetilde{C}\alpha'|\xi_0|^2)(1 + |\nabla\xi_0|^4 + |A\xi_0|^2)^{p/2}\right)^{1/2} \\ &\quad\cdot\left[\exp\left(\frac{4\alpha'|\xi_0|^2}{(1 + \nu\lambda_1\delta)^n}\right) + \exp\left(2\alpha' e^{-\nu n\delta}|\xi_0|^2\right)\right]^{1/2} \\ &\le Ce^{C't}\delta^{p'p/2}\exp(\widetilde{C}\alpha'|\xi_0|^2)(1 + |\nabla\xi_0|^4 + |A\xi_0|^2)^{s/4},\end{aligned} \tag{3.169}$$

其中 $C = C(p', p, \nu, \delta_0, |\sigma|, |\nabla\sigma|, \alpha')$。结合（3.168）和（3.169），由此可知，对于每个 $s \in (0, 1]$

$$\mathbb{E}|\xi^n(\xi_0) - \xi_N(n\delta;\xi_0)|^s \le Ce^{C't}\max\{\delta^s, \delta^{p/2}\}^{p'}\exp(\widetilde{C}\alpha'|\xi_0|^2)(1 + |\nabla\xi_0|^4 + |A\xi_0|^2)^{s/2}. \tag{3.170}$$

将（3.166）、（3.167）和（3.170）代入（3.165），由此得到

$$\mathbb{E}|\xi^n(\xi_0) - \xi(n\delta;\xi_0)|^s \le Ce^{C't}\left[\max\{\delta^s, \delta^{p/2}\}^{p'} + N^{-s/2}\right]\exp(\widetilde{C}\alpha'|\xi_0|^2)(1 + |\nabla\xi_0|^4 + |A\xi_0|^2)^{s/2}. \tag{3.171}$$

现在，将（3.164）和（3.171）代入（3.163），我们推得

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha'}(\mathcal{P}_t^{N,\delta}(\xi_0,\cdot), P_t(\xi_0,\cdot)) \\ &\qquad\le \frac{Ce^{C't}}{\varepsilon^{1/2}}\left[\max\{\delta^s, \delta^{p/2}\}^{p'/2} + N^{-s/4}\right]\exp(\widetilde{C}\alpha'|\xi_0|^2)(1 + |\nabla\xi_0| + |A\xi_0|^{1/2})^s,\end{aligned}$$

~其中 $C = C(p', p, \nu, \delta_0, |\sigma|, |\nabla\sigma|, \alpha')$，并回忆 $C = c(1 + \nu\delta_0)$，$C' = C'(\nu, |\sigma|)$。这证明了（3.162），并完成了证明。 □

在本设定中应用 定理 2.3 和 定理 2.6 之前，我们先给出以下引理，证明 $P_t$，$t \ge 0$的不变测度的某些矩有限。这将确保关于 $\mu_{\theta_0}$ 的 (2.27) 和 (2.39) 中的各项均为有限值。

引理 3.20。 任取 $\sigma \in \dot{\mathbf{L}}^2,$ ， 并设 $\mu_*$ 是相应马尔可夫半群$P_t$， $t \geq 0$在 (3.5)中定义的不变测度。那么， 以下结论成立：

(i) 对每个 $\alpha > 0$ 满足条件 (3.15)，

$$\int_{\dot{L}^2} \exp(\alpha|\xi_0|^2)\mu_*(d\xi_0) \leq C, \tag{3.172}$$

其中某个常数为 $C = C(\nu, |\sigma|)$。

(ii) 进一步假设 $\sigma \in \dot{\mathbf{H}}^k$，其中某个固定的 $k \in \mathbb{N}$。那么，对每个 $m \in \mathbb{N}$，

$$\int_{\dot{L}^2} \|\xi_0\|_{\dot{H}^k}^{2m} \mu_*(d\xi_0) \leq C, \tag{3.173}$$

其中某个常数为 $C = C(\nu, m, k, \|\sigma\|_{\dot{H}^k})$。因此， $\mu_*$ 支撑在 $\dot{H}^k$ 上，即

$$\mu_*(\dot{L}^2 \setminus \dot{H}^k) = 0.$$

证明。 (3.172) 的证明可由 3.17) 对 $\xi(t)$ 的指数型李雅普诺夫不等式的类似版本推出， $t \geq 0$与 [KS12定理 2.5 的证明类似。3]。随后，结合 3.172) 与不等式 (3.14) 对 $\xi(t)$， $t \geq 0$，通过估计 $1 + |\xi_0|^{2mp} \leq C(m, p, \alpha)\exp(\alpha|\xi_0|^2)$，即可得到后续的界 (3.173)。此处省略更多细节。 □

现在我们可以应用 定理 2.3 ，并推导出 $\{\mathcal{P}_t^{N,\delta}\}_{t\geq 0}$ 与 $\{P_t\}_{t\geq 0}$的不变测度之间的偏差估计。

定理 3.21（长时间偏差估计）。任取 $N \in \mathbb{N}, \delta, \delta_0 > 0$ ，满足 $\delta \leq \delta_0$。假设存在 $K \in \mathbb{N}$ 和 $\sigma \in \dot{\mathbf{H}}^2$ ，使得

$$\Pi_K \dot{L}^2 \subset range(\sigma), \quad and \quad \lambda_{K+1} \geq \frac{c}{\nu} \max\left\{1, \frac{1}{\delta_0}, \frac{\delta_0^2|\sigma|^4}{\nu^3}, \frac{|\sigma|^4}{\nu^5}\right\} \tag{3.174}$$

对于某个绝对常数 $c > 0$。令 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 和 $\{\mathcal{P}_t^{N,\delta}\}_{t\geq 0}$ 分别为与系统（3.1）和（3.22）相关联的马尔可夫核族，它们分别由（3.5）和（3.27）定义。令 $\mu_*$ 和 $\mu^{N,*^{\delta}}$ 分别为 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 和 $\{\mathcal{P}_t^{N,\delta}\}_{t\geq 0}$ 的不变测度。

那么，存在 $\alpha_* > 0$，使得对于每个固定的 $\alpha \in (0, \alpha_*]$，都存在 $\varepsilon > 0$ 和 $s \in (0, 1]$，使得以下不等式对每个 $p' \in (0, 1/2)$ 均成立

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mu_*^{N,\delta}, \mu_*) \leq Cg(N, \delta), \tag{3.175}$$

其中

$$g(N, \delta) = \max\{\delta^s, \delta^{p/2}\}^{p'/2} + N^{-s/4}, \tag{3.176}$$

*with*

$$0 < p < \frac{2\nu^2\alpha'}{c_2 + \nu^2\alpha'}, \quad \alpha' = \frac{c_1}{|\sigma|^2} \min\left\{\nu, \frac{1}{\delta_0}\right\}, \tag{3.177}$$

其中，对某些绝对常数 $c_1$、 $c_2$， 且 $C = C(\varepsilon, s, \alpha, \nu, \delta_0, |\sigma|, |\nabla\sigma|, \|\sigma\|_{\dot{H}^2}, p')$ .

证明。 我们验证 定理 2.3 中的所有假设$X$、 $\|\cdot\|$) 均成立，其中取 $\Lambda$、 $\Theta$、 $\{P_t^{\theta}\}_{t\geq 0}$ $\{P_t^{\theta_0}\}_{t\geq 0}$ 以及本节引言中给出的取值。

假设 （H1）可由将 命题 A.1 应用于度量 $\rho_{\varepsilon,s}$得出。事实上， (i) 和 (ii) 这两项 命题 A.1 在 $M = K = 1$下成立。此外，在第 $c = 1$ 项 (iii)中取值，我们注意到

若 $\rho_{\varepsilon,\ s}(\xi_1,\ \xi_2)\ <1$ 那么 $|\xi_1-\xi_2|^s<\varepsilon$。因此，根据三角不等式，$|\xi_1|^2<2|\xi_2|^2+2\varepsilon^{2/s}$，于是第 (iii)项在 $\gamma=2$ 和 $C=2\varepsilon^{2/s}$下成立。由此，根据 (A.2) 以及证明中 $\tilde{K}$ 的定义可得

$$\rho_{\varepsilon,s,\alpha}(\xi_1,\xi_2)\le\exp(2\alpha\varepsilon^{2/s})\left[\rho_{\varepsilon,s,2\alpha}(\xi_1,\xi_3)+\rho_{\varepsilon,s,2\alpha}(\xi_3,\xi_2)\right]\quad\text{for all }\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\dot{L}^2,$$

如所需。

关于假设 （H2），$\{\mathcal{P}_t^{N,\delta}\}_{t\ge0}$的不变测度存在性已在 推论 3.10中证明。而对于 $\{P_t\}_{t\ge0}$的不变测度存在性，如第 3.1.1 节所述，这是一个众所周知的结果，对比本文所考虑的更一般的噪声结构也成立，参见例如 [Fla94]。

假设 （H4）直接由定理 3.9得出。最后，假设 （H3）由命题 3.19得出，其中 $g$（$N$，$\delta$）、$R$（$t$）和 $f$（$\xi_0$）对任意固定的 $\varepsilon>0$ 以及 $s\in(0,1]$如下给出

$$g(N,\delta)=\max\{\delta^s,\delta^{p/2}\}^{p'/2}+N^{-s/4},\quad\text{for all }N\in\mathbb{N},\ 0<\delta\le\delta_0,\tag{3.178}$$

$$R(t)=\frac{Ce^{C't}}{\varepsilon^{1/2}},\quad\text{for all }t\ge0,\tag{3.179}$$

$$f(\xi_0)=\begin{cases}\exp(\widetilde{C}\alpha'|\xi_0|^2)(1+|\nabla\xi_0|+|A\xi_0|^{1/2})^s & \text{for }\xi_0\in\dot{H}^2,\\ \infty & \text{for }\xi_0\in\dot{L}^2\backslash\dot{H}^2,\end{cases}\tag{3.180}$$

~其中 $p$，$p'$，$\alpha'$，$C$，$C'$，$C$如（3.162）中所示。

因此，由定理 2.3 可得

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mu_*^{N,\delta},\mu_*)\le Cg(N,\delta)\int_{\dot{L}^2}f(\xi_0)\mu_*(d\xi_0),\tag{3.181}$$

~其中 $C=C(\varepsilon,s,\alpha,\nu,\delta_0,|\sigma|,|\nabla\sigma|,p')$。此外，根据命题 3.19 中给出的 $C$和 $\alpha'$的定义，不难证明 $\widetilde{C}\alpha'\le c\nu|\sigma|^{-2}$。由此，我们可以应用 H¨older 不等式和引理 3.20，得到 $\int_{\dot{L}^2}f(\xi_0)\mu_*(d\xi_0)\le C$，其中 $C=C(\nu,\|\sigma\|_{\dot{H}^2})$。将其代入（3.181），即可得出（3.175）。 □

我们在本节最后应用定理 2.6证明 $\{\mathcal{P}_t^{N,\delta}\}_{t\ge0}$ 在 Wasserstein 距离下收敛于 $\{P_t\}_{t\ge0}$，进而证明$\xi_{N,\ \delta}^n$，$n\in\mathbb{Z}^+$收敛于 $\xi$（$t$），$t\ge0$，这是推论 2.8的结果。

定理 3.22（时间一致弱收敛）。任取 $N\in\mathbb{N},\delta,\delta_0>0$，使得 $\delta\le\delta_0$。假设存在 $K\in\mathbb{N}$ 和满足 (3.174) 的 $\sigma\in\dot{H}^2$。令 $\{P_t\}_{t\ge0}$ 和 $\{\mathcal{P}_t^{N,\delta}\}_{t\ge0}$ 分别为与系统 (3.1) 和 (3.22) 相关联的马尔可夫核族，定义见 (3.5) 和 (3.27)。

那么，存在 $\hat{}\alpha>0$，使得对于每个固定的 $\alpha\in(0,\hat{}\alpha]$，都存在 $\varepsilon>0$ 和 $s\in(0,1]$，使得以下不等式成立

$$\sup_{t\ge0}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mu\mathcal{P}_t^{N,\delta},\mu P_t)\le C\max\{g(N,\delta)^{qC'},g(N,\delta),g(N,\delta)^{1-q}\},\tag{3.182}$$

取 $g$与 (3.176)中相同的情形，对于每个 $p'\in(0,1/2)$、$q\in(0,1)$，以及满足以下条件的 $\mu\in$概率测度空间$(\dot{L}^2)$：

$$\int_{\dot{L}^2}\left[\exp(c\alpha|\xi_0|^2)+\exp(\widetilde{C}\alpha'|\xi_0|^2)(1+|\nabla\xi_0|+|A\xi_0|^{1/2})^s\right]\mu(d\xi_0)<\infty\tag{3.183}$$

~对于某个绝对常数 $c$，其中 $C$ 和 $\alpha'$ 分别与(3.162)和(3.177)中的相同。此外，$C=C(\varepsilon,s,\alpha,\nu,\delta_0,|\sigma|,|\nabla\sigma|,\|\sigma\|_{\dot{H}^2},p',\mu)$且 $C'=C'(\varepsilon,s,\alpha,\nu,|\sigma|)$。

因此，在相同假设下可知，对于所有 $\xi_0\in\dot{H}^2$ 和$\rho_{\varepsilon,\ s,\ \alpha}$-利普希茨函数$\varphi$：$\dot{L}^2\to\mathbb{R}$ 其利普希茨常数为 $L_\varphi$，

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\mathbb{E}\left[\varphi(\xi(n\delta;\xi_0))-\varphi(\xi_{N,\delta}^n(\xi_0))\right]\right|\le L_\varphi C\max\{g(N,\delta)^{qC'},g(N,\delta),g(N,\delta)^{1-q}\},\tag{3.184}$$

其中 $C$和 $C'$如（3.182）所示。这里，$\xi(t;\xi_0)$、$t\ge0$和$\xi_{N,\ \delta}^n(\xi_0)$、$n\in\mathbb{N}$分别表示（3.1）和（3.22）的唯一解，且满足 $\xi(0;\xi_0)=\xi_0$ 和 $\xi_{N,\ \delta}^0(\xi_0)=\xi_0$。

注3.23。这里我们参考 [GHM22, 命题 46], 给出了一个充分条件，在该条件下，任何具有适当正则性的函数 $\varphi$ 都是关于某个距离函数 $\tilde{\rho}$ 的 $\tilde{\rho}$-利普希茨函数，而该距离函数具有与 $\rho_{\varepsilon,\ s,\ \alpha}$相似的结构。

证明. 下面验证定理 2.6 的假设成立。假设 (H1)-(H4) 的验证与定理 3.21 的证明相同。此外，根据 (3.178) 和 (3.179) 中 $g(N,\delta)$ 和 $R(t)$ 的定义，显然 $R$ 关于 $t$ 连续且严格递增，并且 $g$ 关于 $(N,\delta) \in \mathbb{N}\times(0,\delta_0]$ 有界。进一步，如定理 3.21 证明的最后所述，记 $\mu_*$ 为 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 的一个不变测度，由 (3.180) 中 $f$ 的定义和引理 3.20 可得 $\int_{\dot{L}^2} f(\xi_0)\mu_*(d\xi_0) \leq C<\infty$，其中 $C=C(\nu,\|\sigma\|_{\dot{H}^2})$。

因此，由定理 2.6 和注 2.7 可得

$$\sup_{t\geq 0}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mu\mathcal{P}_t^{N,\delta},\mu P_t)\leq \tilde{g}(N,\delta)\left[\mathcal{W}_{\varepsilon,s,2\alpha}(\mu,\mu_*)+\int_{\dot{L}^2} f(\xi_0)\mu(d\xi_0)+\int_{\dot{L}^2} f(\xi_0)\mu_*(d\xi_0)\right], \tag{3.185}$$

对每个 $\mu\in$ 概率测度空间$(\dot{L}^2)$，只要满足（3.183），其中

$$\tilde{g}(N,\delta)=C\max\{g(N,\delta)^{qC'},g(N,\delta),g(N,\delta)^{1-q}\},$$

对任意固定的 $q<1$。如定理 2.6 的证明及所调用的结果所示，可知 $C$和 $C'$是正常数，其中 $C=C(\varepsilon,\ s,\ \alpha,\ \nu,\ \delta_0,\ |\sigma|,\ |\nabla\sigma|,\ p')$ 以及 $C'=C'(\varepsilon,\ s,\ \alpha,\ \nu,\ |\sigma|)$。

此外，根据$\mathcal{W}_{\varepsilon,\ s,\ \alpha}$的定义，结合引理 3.20 并在条件（3.183）下，不难看出，对于 $\alpha>0$ 充分小的$\mathcal{W}_{\varepsilon,\ s,\ 2\alpha}(\mu,\ \mu_*)\leq C<\infty$，其中 $C=C(\nu,\ |\sigma|,\ \mu)$。至此，（3.182）的证明完成。最后的不等式（3.184）显然可直接由推论 2.8得到。 □

注 3.24。如第 1.3 节所述，Wasserstein 收缩结果 (3.29) 与定理 3.21 中得到的长时间偏差估计 (3.175) 结合，可用于估计平稳平均值 $\int\varphi(\xi')\mu_*(d\xi')$ 与其估计量 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\varphi(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0))$ 之间的误差，其中给定 $n\in\mathbb{N}$，$\xi_0\in\Pi_N\dot{L}^2$ 以及适当的观测量 $\varphi\colon\ \dot{L}^2\to\mathbb{R}$。这里，$\mu_*$ 表示与二维随机 Navier–Stokes 方程 (3.1) 相关、并在 (3.4) 中定义的马尔可夫半群$P_t$, $t\geq 0$ 的不变测度。通常，人们关注估计量偏差

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\varphi(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0))-\int\varphi(\xi')\mu_*(d\xi')\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n P_k^{N,\delta}\varphi(\xi_0)-\int\varphi(\xi')\mu_*(d\xi'), \tag{3.186}$$

以及均方误差

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\varphi(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0))-\int\varphi(\xi')\mu_*(d\xi')\right)^2. \tag{3.187}$$

简要概述一下推导这些估计的部分步骤。我们假设 $\varphi$ 是一个 $\rho_{\varepsilon,\ s,\ \alpha}$-利普希茨函数，且 $\varepsilon,\ s,\ \alpha$ 固定，使得 (3.29) 成立，并用 $L_\varphi$表示其利普希茨常数。

为估计偏差 (3.186)，我们首先将其分解为

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n P_k^{N,\delta}\varphi(\xi_0)-\int\varphi(\xi')\mu_*^{N,\delta}(d\xi')\right)+\left(\int\varphi(\xi')\mu_*^{N,\delta}(d\xi')-\int\varphi(\xi')\mu_*(d\xi')\right). \tag{3.188}$$

由 $\varphi$ 的利普希茨性以及压缩不等式 (3.29)，第一项可估计为

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n P_k^{N,\delta}\varphi(\xi_0)-\int\varphi(\xi')\mu_*^{N,\delta}(d\xi')\right|\leq\frac{L_\varphi}{n}\sum_{k=1}^n\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(P_k^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),\mu_*^{N,\delta}).$$

取 $T>0$ 如 定理 3.9所示。接着固定 $0<\delta\leq\delta_0$ 并考虑 $k_0\in\mathbb{N}$ 充分大，使得 $k_0\delta\geq T$。由 (3.29)，可得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n P_k^{N,\delta}\varphi(\xi_0)-\int\varphi(\xi')\mu_*^{N,\delta}(d\xi')\right|\\&\quad\leq\frac{L_\varphi}{n}k_0\sup_{1\leq k\leq k_0}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(P_k^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),\mu_*^{N,\delta})+\frac{L_\varphi}{n}\sum_{k=k_0+1}^n C_1e^{-k\delta C_2}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\delta_{\xi_0},\mu_*^{N,\delta}).\end{aligned} \tag{3.189}$$

由上文的 (3.26) 和 (3.32)，可以证明

$$\sup_{1\le k\le k_0} \mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(P_k^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),\mu_*^{N,\delta}) < \infty \quad \textit{and also} \quad \mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\delta_{\xi_0},\mu_*^{N,\delta}) < \infty,$$

两者的界均与 $0<\delta\le\delta_0$ 无关，因此由 (3.189) 可推出

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_k^{N,\delta}\varphi(\xi_0) - \int \varphi(\xi')\mu_*^{N,\delta}(d\xi')\right| = O\left(\frac{1}{n\delta}\right) \quad \textit{as } n\to\infty. \tag{3.190}$$

将 (3.188) 中的第二项估计为 $L_\varphi \mathcal{W}_{\varepsilon,\ s,\ \alpha}(\mu^{N,\ *\ \delta},\ \mu_*)$ 并调用上文的偏差估计 (3.175)，即可得到 (1.19)。

对于均方误差 (3.187)，我们可以类似地按照例如 *[GHM22, 附录]*（另见其中的参考文献）中的方法进行推导，并写为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0)) - \int \varphi(\xi')\mu_*^{N,\delta}(d\xi') = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(P_k^{N,\delta}\bar{\varphi}(\xi_0) - P_k^{N,\delta}\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^n(\xi_0))\right) + \frac{M_n^\varphi}{n} =: T_1^{(n)} + T_2^{(n)},$$

其中 $\bar{\varphi}(\xi_0) := \varphi(\xi_0) - \int \varphi(\xi')\mu^{N,\ *\ \delta}(d\xi')$，且

$$\begin{aligned} M_n^\varphi &:= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathbb{E}\left(\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0))|\mathcal{F}_{n\delta}\right) - \mathbb{E}\left(\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0))\right)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0)) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(P_{k+1}^{N,\delta}\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^n(\xi_0)) - P_k^{N,\delta}\bar{\varphi}(\xi_0)\right), \end{aligned}$$

$n\in\mathbb{N}$是一个鞅（相对于由噪声增量生成的滤过）。鉴于 (3.175)，只需估计 $\mathbb{E}(T_1^{(n)})^2$ 和 $\mathbb{E}(T_2^{(n)})^2$。

对于第一项，我们有

$$\mathbb{E}(T_1^{(n)})^2 \le \frac{L_\varphi^2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(P_k^{N,\delta}(\xi_0,\cdot),\mu_*^{N,\delta}) + \mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(P_k^{N,\delta}(\xi_{N,\delta}^n(\xi_0),\cdot),\mu_*^{N,\delta})\right)^2,$$

因此，仿照(3.189)-(3.190) 中的推导，我们得到 $\mathbb{E}(T_1^{(n)})^2 = O((n\delta)^{-2})$，当 $n\to\infty$时成立。对于第二项，利用鞅的标准性质可得

$$\mathbb{E}\left(\frac{M_n^\varphi}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(M_k^\varphi - M_{k-1}^\varphi)^2 \le 2\left(T_{2,1}^{(n)} + T_{2,2}^{(n)}\right),$$

其中

$$T_{2,1}^{(n)} := \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0))\right)^2, \quad T_{2,2}^{(n)} := \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{\infty}P_l^{N,\delta}\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0)) - P_l^{N,\delta}\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^{k-1}(\xi_0))\right)^2.$$

现在，对于 $T_{2\ 1}^{(n)}$，我们固定 $\bar{\xi}\in\dot{L}^2$ 并估计

$$\mathbb{E}\left(\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0))\right)^2 \le 2\left\{\mathbb{E}\left[\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0)) - \bar{\varphi}(\bar{\xi})\right]^2 + \bar{\varphi}(\bar{\xi})^2\right\} \le 2\left\{L_\varphi\mathbb{E}\rho_{\varepsilon,s,\alpha}(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0),\bar{\xi})^2 + \bar{\varphi}(\bar{\xi})^2\right\}.$$

再次由（3.26）和（3.32），我们得到 $\sup_k \mathbb{E}\left(\bar{\varphi}(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0))\right)^2 < \infty$，从而有 $T_{2\ ,1}^{(n)} \le C/n$，其中 $C$ 为某个常数。

最后，我们对 $T$进行估计 $_{2,2}^{(n)}$ 作为

$$T_{2,2}^{(n)} \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{\infty}L_\varphi\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(P_l^{N,\delta}(\xi_{N,\delta}^k(\xi_0),\cdot),P_l^{N,\delta}(\xi_{N,\delta}^{k-1}(\xi_0),\cdot))\right)^2.$$

取 $k_0$ 如 (3.189)，经过进一步估计后可得

$$T_{2,2}^{(n)} \le \frac{C}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{\infty} C_1 e^{-l\delta C_2}\rho_{\varepsilon,s,\alpha}(\xi_{N,\delta}^{k}(\xi_0),\xi_{N,\delta}^{k-1}(\xi_0))\right)^2.$$

根据 (3.20) 估计差值 $|\xi_{N,\delta}^{k}-\xi_{N}^{k-1},_{\delta}|$，并适当选取 $s$，可以证明 $\rho_{\varepsilon,s,\alpha}(\xi_{N,\delta}^{k}(\xi_0)\,\xi_{N\,\delta}^{k-1},(\xi_0)) \lesssim \delta^{1/2}$，最终得到当 $n\to\infty$ 时，$T_2^{(n)},_2 = O((n\delta)^{-1})$。因此，结合偏差估计 (3.175)，即可推出 (1.20)。

# 4 有界区域情形下的 Wasserstein 收缩

本节中，我们应用 定理 2.1 证明有界区域上与二维随机纳维-斯托克斯方程相关的马尔可夫核具有 Wasserstein 收缩性质。正如引言中所述，我们纳入这个区域的例子，是为了说明 定理 2.1 的适用范围和重要意义。事实上，先前关于这一方向的相关研究所采用的方法似乎无法推出这种恰当形式的收缩，[HM08、HMS11、BKS20] 正如我们将在下文的 注 4.6 中详细说明。

## 4.1 数学设定

我们先简要回顾第 4.1 节中的相关数学设定。更多细节可参见例如 [CF88、FMRT01、Tem01、AFS08]。设 $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$ 为一个边界光滑的开有界区域 $\partial\mathcal{D}$。与第 3.1.1 节类似，我们固定一个随机基 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0},\ \mathbb{P},\ \{W^k\}_{k=1}^d)$，其上配备一族有限的 $\{W^k\}_{k=1}^d$ 标准相互独立的实值布朗运动，它们关于滤过 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$是适应的。接下来，我们考虑 $\mathcal{D}$中的以下随机强迫二维纳维-斯托克斯方程

$$d\mathbf{u} + (-\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p)\,dt = \mathbf{f}dt + \sum_{k=1}^{d}\sigma_k dW^k,\quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{4.1}$$

满足无滑移（狄利克雷）边界条件

$$\mathbf{u}|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \tag{4.2}$$

其中 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t)$ 和 $p=p(\mathbf{x}\ t),(\mathbf{x}\ t)\in\mathcal{D}\times[0,\infty)$ 是未知量，分别表示速度向量场和标量压力场；而 $\nu>0$ 和 $\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in\mathcal{D}$ 是给定的，分别表示运动黏度参数和确定性体力。此外，$\{\sigma_k\}_{k=1}^d$ 是 $\mathcal{D}$ 中给定的向量场。我们假设 $\mathbf{f}\ \sigma_1,\ldots,\sigma_d\in L^2(\mathcal{D})^2$。

考虑以下函数空间

$$H=\{\mathbf{u}\in L^2(\mathcal{D})^2\ :\ \nabla\cdot\mathbf{u}=0,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\mathcal{D}}=0\},$$
$$V=\{\mathbf{u}\in H^1(\mathcal{D})^2\ :\ \nabla\cdot\mathbf{u}=0,\ \mathbf{u}|_{\partial\mathcal{D}}=0\},$$

其中，$\mathbf{n}$ 表示 $\partial\mathcal{D}$ 的外向单位法向量。参见例如 [CF88、Tem01]。我们在 $H$ 上赋予来自 $L^2(\mathcal{D})^2$, 的标准内积及相应范数，分别记为 $(\cdot,\cdot)$ 和 $|\cdot|$。对于 $V$，我们考虑内积 $((\mathrm{u},\mathrm{v}))\coloneqq(\nabla\mathrm{u}\ \nabla\mathrm{v})$，其相应范数为 $\|\mathrm{u}\|\coloneqq((\mathrm{u},\mathrm{u}))^{1/2}=|\nabla\mathrm{u}|$。由于下文的不等式（4.4）中的 Poincar´e 不等式，该范数定义良好。我们将 $H$ 与其对偶空间 $H'$ 视为相同，从而$V\subseteq H\equiv H'\subseteq V'$，且二者之间存在连续嵌入，其中 $V'$ 表示 $V$ 的对偶空间。

记 $P_L$ 为 $L^2$（$\mathcal{D}$）$^2$ 到 $H$上的 Leray投影，并对 $P_L$ （4.1）应用，得到以下泛函表述

$$d\mathbf{u} + (\nu A\mathbf{u} + B(\mathbf{u},\mathbf{u}))dt = \mathbf{f}dt + \sigma dW, \tag{4.3}$$

其中，我们不失一般性地假设 $P_L\mathbf{f}=\mathbf{f}$ 和 $P_L\sigma_k=\sigma_k$，并采用简记 $\sigma dW\coloneqq\sum_{k=1}^d\sigma_k dW^k$。这里，$A\colon V\cap H^2(\mathcal{D})^2\to H$, $A\mathrm{u}=-P_L\Delta\mathrm{u}$ 是 Stokes算子，而 $B\colon V\times V\to$

$V'$ 是双线性映射 $B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = P_L(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}$。与周期情形类似，我们有，$A$ 是一个正的自伴算子，且具有紧逆算子。因此，它存在一个非递减的正特征值序列 $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $\lambda_k \to \infty$ 作为 $k\to\infty$，该序列对应于一列特征函数$\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，它们构成 $H$的标准正交基。对于每个 $K\in\mathbb{N}$，我们记 $\Pi_K: H\to H$ 为投影算子，它投影到 $H$ 的子空间 $\Pi_K H$ 上；该子空间由 $A$的前 $K$ 个特征函数张成。

我们回顾 Poincar´e 不等式

$$|\mathbf{u}| \le \lambda_1^{-1/2}\|\mathbf{u}\| \quad \text{for all } \mathbf{u}\in V, \tag{4.4}$$

其中，$\lambda_1$ 表示 Stokes算子 $A$ 的最小特征值。此外，对于每个 $K\in\mathbb{N}$，我们有

$$|(I-\Pi_K)\mathbf{u}| \le \lambda_{K+1}^{-1/2}\|(I-\Pi_K)\mathbf{u}\| \quad \text{for all } \mathbf{u}\in V. \tag{4.5}$$

还回顾双线性项的以下性质

$$(B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w}) = -(B(\mathbf{u},\mathbf{w}),\mathbf{v}) \quad \text{for all } \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V,$$

由此可得

$$(B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{v}) = 0 \quad \text{for all } \mathbf{u},\mathbf{v}\in V. \tag{4.6}$$

关于噪声项 $\sigma dW$，我们采用与第 3.1.1 节类似的记号。具体而言，令 H 表示 $d$ 重积 $H$，并对每个 $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_d)\in\mathbf{H}$，定义 $|\sigma|^2 := \sum_{k=1}^d |\sigma_k|^2$。我们也略去记号上的区别，将任意 $\sigma\in\mathbf{H}$ 视为映射 $\sigma:\mathbb{R}^d\to H$，其中 $\sigma(w_1,\dots,w_d)=\sum_{k=1}^d \sigma_k w_k$，并将其对应的伪逆记为 $\sigma^{-1}: range(\sigma)\to\mathbb{R}^d$。显然，$\sigma$ 和 $\sigma^{-1}$ 都是有界算子。

满足给定初始条件的方程 (4.1)-(4.2) 的路径意义解的存在唯一性，可通过对命题 3.1作适当修改，类似地得到。具体而言，只需将 $\dot{L}^2$ 和 $\dot{H}^1$ 分别替换为 $H$ 和 $V$即可。因此，我们对所有$\mathbf{u}_0\in H$ 以及博雷尔集 $\mathcal{O}\in\mathcal{B}(H)$ 定义相应的转移函数如下：

$$P_t(\mathbf{u}_0,\mathcal{O}) := \mathbb{P}(\mathbf{u}(t;\mathbf{u}_0)\in\mathcal{O}),$$

其中，$\mathbf{u}(t;\mathbf{u}_0)$，$t\ge 0$是方程 (4.1)-(4.2) 的唯一$\mathbf{u}(0;\mathbf{u}_0)=\mathbf{u}_0$几乎必然成立的路径解。相应的 Feller 马尔可夫半群 $P_t$, $t\ge 0$, 定义如下：

$$P_t\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbb{E}\varphi(\mathbf{u}(t;\mathbf{u}_0)), \quad \mathbf{u}_0\in H, \tag{4.7}$$

对于每个有界可测函数 $\varphi: H\to\mathbb{R}$。

## 4.2 Wasserstein 收缩估计

接下来验证在此情形下(A1)-(A3) 假设定理 2.1 均成立。具体而言，沿用定理 2.1中的记号，我们取 $(X,\|\cdot\|)=(H,|\cdot|)$，$\mathcal{I}=\mathbb{R}^+$，并令 $\{P_t\}_{t\in\mathcal{I}}$ 为 (4.7) 中定义的马尔可夫半群。此外，我们令 $\Lambda$ 为以下距离类

$$\Lambda = \left\{\rho_{\varepsilon,s} : \varepsilon>0,\ 0<s\le c\frac{\nu^3\lambda_1}{|\sigma|^2}\right\} \tag{4.8}$$

对于某个正的绝对常数 $c$，其中$\rho_{\varepsilon,s}$ 的定义与 (3.25) 类似，即

$$\rho_{\varepsilon,s}(\mathbf{u},\tilde{\mathbf{u}}) = 1\wedge\frac{|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}|^s}{\varepsilon} \quad \text{for all } \mathbf{u},\tilde{\mathbf{u}}\in H. \tag{4.9}$$

我们注意到，在 (4.8) 中，我们对 $s$ 施加了不同于第 3.2 节中的假设，其中 $s\in(0,1]$。更多细节见下文的注 4.6。

在下一个命题中，我们利用（4.12）证明，在此设定下 (A1) 成立。我们还给出能量型不等式（4.11），以便稍后验证 (A2)-(A3)。

命题 4.1。 任取 $\sigma \in \mathbf{H}$ 和 $\mathbf{u}_0 \in H$。令 $\mathbf{u}(t)$, $t \geq 0$为方程 (4.3) 的解，满足 $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$几乎必然。则对所有满足 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的

$$0 < \alpha \leq \frac{\nu\lambda_1}{4|\sigma|^2} \tag{4.10}$$

以下不等式成立：

$$\mathbb{E} \sup_{t\geq 0} \exp\left(\alpha|\mathbf{u}(t)|^2 + \alpha\nu \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2 ds - \alpha t\left(|\sigma|^2 + \frac{2}{\nu\lambda_1}|\mathbf{f}|^2\right)\right) \leq 2\exp(\alpha|\mathbf{u}_0|^2), \tag{4.11}$$

*and*

$$P_t \exp(\alpha|\mathbf{u}_0|^2) = \mathbb{E}\exp(\alpha|\mathbf{u}(t)|^2) \leq C\exp\left(e^{-\nu\lambda_1 t}|\mathbf{u}_0|^2\right) \quad \textit{for all } t \geq 0, \tag{4.12}$$

其中 $C = C(\nu, \lambda_1, |\mathbf{f}|, |\sigma|)$。

证明。 (4.11) 的证明通过对映射应用伊藤公式 $\mathbf{u} \mapsto |\mathbf{u}|^2$，并运用标准的指数鞅论证得出。更多细节请参见 [HM08、KS12、GHMR17、BKS20] 。

(4.12) 的证明本质上是命题 3.11 的连续版本。事实上，固定$T > 0$，对映射 $(\tau, \mathbf{u}) \mapsto e^{-\nu\lambda_1(T-\tau)}|\mathbf{u}(\tau)|^2$ 并应用 (4.6)，可得对所有 $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} &e^{-\nu\lambda_1(T-t)}|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu\int_0^t e^{-\nu\lambda_1(T-\tau)}\|\mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \\ &\quad = e^{-\nu\lambda_1 T}|\mathbf{u}_0|^2 + \nu\lambda_1\int_0^t e^{-\nu\lambda_1(T-\tau)}|\mathbf{u}(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t e^{-\nu\lambda_1(T-\tau)}\left[2(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{f}) + |\sigma|^2\right] d\tau + M_t, \end{aligned} \tag{4.13}$$

其中 $M_t := 2\int_0^t e^{-\nu\lambda_1(T-\tau)}(\mathbf{u}\ \sigma) dW(\tau)$, $t \in [0, T]$ 是一个鞅。我们估计其二次变差$\langle M\rangle_t$ 如下

$$\langle M\rangle_t = 4\int_0^t e^{-2\nu\lambda_1(T-\tau)}(\mathbf{u}, \sigma)^2 d\tau \leq 4\frac{|\sigma|^2}{\lambda_1}\int_0^t e^{-\nu\lambda_1(T-\tau)}\|\mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau, \tag{4.14}$$

这里我们应用了柯西-施瓦茨不等式和庞加莱′不等式（4.4）。此外，再次由（4.4）和杨氏不等式可得

$$(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{f}) \leq \frac{1}{\lambda_1^{1/2}}\|\mathbf{u}(\tau)\|\,|\mathbf{f}| \leq \frac{\nu}{4}\|\mathbf{u}(\tau)\|^2 + \frac{1}{\nu\lambda_1}|\mathbf{f}|^2. \tag{4.15}$$

现在，对于满足（ $\alpha\langle M\rangle_t/2$ 4.10）的 $\alpha$，我们在（4.13）中加上并减去，并再次利用（4.4）来估计（4.13）右端的第二项。代入估计式（4.14）–（4.15），整理各项后可得

$$e^{-\nu\lambda_1(T-t)}|\mathbf{u}(t)|^2 \leq e^{-\nu\lambda_1 T}|\mathbf{u}_0|^2 + \left(\frac{2}{\nu\lambda_1}|\mathbf{f}|^2 + |\sigma|^2\right)\frac{e^{-\nu\lambda_1 T}(e^{\nu\lambda_1 t} - 1)}{\nu\lambda_1} + M_t - \frac{\alpha}{2}\langle M\rangle_t.$$

两边乘以 $\alpha$ 并取期望值，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\exp\left(\alpha e^{-\nu\lambda_1(T-t)}|\mathbf{u}(t)|^2\right) \\ &\qquad \leq \exp\left(\alpha e^{-\nu\lambda_1 T}|\mathbf{u}_0|^2\right)\exp\left(\alpha\left(\frac{2}{\nu\lambda_1}|\mathbf{f}|^2 + |\sigma|^2\right)\frac{e^{-\nu\lambda_1 T}(e^{\nu\lambda_1 t} - 1)}{\nu\lambda_1}\right), \end{aligned} \tag{4.16}$$

这里用到了 $\{N_t\}_{t\geq 0} = \{\exp(\alpha M_t - (\alpha^2/2)\langle M\rangle_t)\}_{t\geq 0}$是一个上鞅（例如参见[KS12，附录 A。11]），因此 $\mathbb{E}N_t \leq \mathbb{E}N_0 = 1$ 对所有 $t \geq 0$均成立。特别地，在（ $T = t$ 式（4.16）中取4.12），可推出（$C = \exp\left(\frac{\alpha}{\nu\lambda_1}\left(\frac{2}{\nu\lambda_1}|\mathbf{f}|^2 + |\sigma|^2\right)\right)$。 □

为验证其余假设(A2)-(A3) （属于定理 2.1），我们仿照第 3.2 节，考虑以下修正系统

$$d\tilde{\mathbf{u}} + \left[\nu A\tilde{\mathbf{u}} + B(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\Pi_K\left(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}(\mathbf{u}_0)\right)\right]dt = \mathbf{f}dt + \sigma dW \tag{4.17}$$

对于每个固定的 $\mathbf{u}_0 \in H$ 及相应的路径解 $\mathbf{u}(t;\mathbf{u}_0)$， $t \geq 0$，满足（4.3）的解 $\mathbf{u}(0;\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0$几乎必然成立。这里， $K \in \mathbb{N}$ 是一个需要在下文（4.23）中适当选取的参数。

采用与命题 3.1中类似的论证，可以证明（4.17）在路径意义下适定。因此，对任意固定的 $\mathbf{u}_0 \in H$，我们可以定义映射

$$\widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\mathcal{O}) = \mathbb{P}(\tilde{\mathbf{u}}(t;\tilde{\mathbf{u}}_0,\mathbf{u}_0) \in \mathcal{O}) \quad \text{for all } t \geq 0,\ \tilde{\mathbf{u}}_0 \in H \ \text{ and } \ \mathcal{O} \in \mathcal{B}(H), \tag{4.18}$$

其中， ˜u(*t*; ˜u0,u0)， $t \geq 0$，是满足 ˜u(0; ˜u0,u0) = ˜u0 几乎必然成立的（4.17）的唯一逐路径解。下一个命题给出了（4.17）的解˜u(˜u0,u0)与（4.3）的相应解 u(u0)之差的路径收缩估计。证明见 [GHMR17, BKS20]，但为求完整起见，我们在此给出主要思路。

命题4.2。任取 $\sigma \in$ H、u0、 ˜u0 $\in H$ 和 $K \in \mathbb{N}$。令 ˜u(*t*) = ˜u(*t*; ˜u0,u0)， $t \geq 0$ 为对应于这些数据且满足 ˜u(0) = ˜u0 几乎必然的方程（4.17）的解。那么，对所有 $t \geq 0$，以下不等式几乎必然成立

$$|\tilde{\mathbf{u}}(t;\tilde{\mathbf{u}}_0;\mathbf{u}_0) - \mathbf{u}(t;\mathbf{u}_0)|^2 \leq |\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}_0|^2 \exp\left(-\nu\lambda_{K+1}t + \frac{c}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{u}(\tau;\mathbf{u}_0)\|^2 d\tau\right). \tag{4.19}$$

*Pro*。 记 $\mathbf{v}(t)$ = ˜u(*t*; ˜u0,u0) − u(*t*; u0)。从（4.3）中减去（4.17），可得

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nu A\mathbf{v} + B(\mathbf{v},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},\mathbf{u}) + B(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\Pi_K\mathbf{v} = 0.$$

在 $H$ 中与 $\mathbf{v}$ 取内积，并利用（4.6），

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{v}|^2 + \nu\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}|\Pi_K\mathbf{v}|^2 = -(B(\mathbf{v},\mathbf{u}),\mathbf{v}).$$

根据经典的 H¨older、不等式插值和 Young 不等式，我们估计非线性项 a s

$$|(B(\mathbf{v},\mathbf{u}),\mathbf{v})| \leq |\mathbf{v}|\,\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\| \leq \frac{\nu}{2}\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{c}{\nu}\|\mathbf{u}\|^2|\mathbf{v}|^2, \tag{4.20}$$

因此

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{v}|^2 + \nu\|\mathbf{v}\|^2 + \nu\lambda_{K+1}|\Pi_K\mathbf{v}|^2 \leq \frac{c}{\nu}\|\mathbf{u}\|^2|\mathbf{v}|^2, \tag{4.21}$$

此外，由（4.5），

$$\nu\|\mathbf{v}\|^2 = \nu\|\Pi_K\mathbf{v}\|^2 + \nu\|(I-\Pi_K)\mathbf{v}\|^2 \geq \nu\|\Pi_K\mathbf{v}\|^2 + \nu\lambda_{K+1}|(I-\Pi_K)\mathbf{v}|^2.$$

代回（4.21），得到

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{v}|^2 + \left(\nu\lambda_{K+1} - \frac{c}{\nu}\|\mathbf{u}\|^2\right)|\mathbf{v}|^2 \leq 0,$$

由此，对 $[0,t]$ 积分后即可推出（4.19）。 □

在接下来的两个命题中，我们借助逐路径收缩（4.19），证明假设定理 2.1中的(A2) 和(A3) 成立。具体而言，对于(A2)中的小性性质，我们还将用到以下估计：维纳过程$W$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的分布与相应平移过程 $\widehat{W}$ （见（3.91））之间的全变差距离为:

$$\left\|\mathcal{L}(\widehat{W}) - \mathcal{L}(W)\right\|_{\mathrm{TV}} \leq 1 - \frac{1}{6}\min\left\{\frac{1}{8}, \exp\left[-\left(2^{2-a}\,\mathbb{E}\left(\int_0^\infty |\varphi(t)|^2 dt\right)^a\right)^{\frac{1}{a}}\right]\right\} \tag{4.22}$$

对于任意 $a \in (0,1]$[4], 参见 [BKS20，定理 A.5，(A.14)]。

命题 4.3. 假设存在 $K \in \mathbb{N}$ 和 $\sigma \in \mathbf{H}$，使得

$$\Pi_K H \subset range(\sigma) \quad and \quad \lambda_{K+1} \geq \frac{c}{\nu^3}\left(|\sigma|^2 + \frac{2}{\nu\lambda_1}|\mathbf{f}|^2\right) \tag{4.23}$$

对于某个绝对常数 $c > 0$。那么，对于任意 $M > 0$，以及 $\varepsilon$，$s$ 如 (4.8)中所述，存在一个时间 $T_1 = T_1(M, \varepsilon, s) > 0$ 和一个系数 $\kappa_1 = \kappa_1(M) \in (0, 1)$，其与 $\varepsilon$、$s$无关，并且满足以下不等式

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot), P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) \leq 1 - \kappa_1$$

对于所有 $t \geq T_1$ 以及每个 $\mathbf{u}_0$，$\tilde{}\mathbf{u}_0 \in H$，满足 $|\mathbf{u}_0| \leq M$ 且 $|\tilde{}\mathbf{u}_0| \leq M$。

证明。固定 $M > 0$，并取如 (4.8) 中的 $\varepsilon$、$s$。令 $\mathbf{u}0, \tilde{}\mathbf{u}_0 \in H$，使得 $|\mathbf{u}_0| \leq M$ 且 $|\tilde{}\mathbf{u}_0| \leq M$。回顾$\tilde{}$在 (2.2)、(3.25) 中对 $\mathcal{W}_\varepsilon$、$s$ 的定义，以及在 (4.18) 中对 $P_t$、$_{\mathbf{u}_0}(\tilde{}\mathbf{u}0, \cdot)$ 的定义，调用命题 A.2 可得

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot), P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) \leq \mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot), \widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) + \mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot), P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)). \tag{4.24}$$

对于（4.24）右端的第一项，我们有

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot), \widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}|\mathbf{u}(t;\mathbf{u}_0) - \tilde{\mathbf{u}}(t;\tilde{\mathbf{u}}_0,\mathbf{u}_0)|^s, \tag{4.25}$$

因此，利用路径估计（4.19），可得

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot), \widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) \leq \frac{1}{\varepsilon}|\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}_0|^s \exp\left(-\frac{s}{2}\nu\lambda_{K+1}t\right)\mathbb{E}\exp\left(\frac{cs}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau\right). \tag{4.26}$$

令 $\alpha = cs/\nu^2$。由于 $0 < s \leq c\nu^3\lambda_1/|\sigma|^2$，则 $\alpha$ 满足（4.10）。因此，我们可以利用（4.11）进一步估计（4.26，得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot), \widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) \\
&\qquad \leq \frac{c}{\varepsilon}|\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}_0|^s \exp\left(-\frac{s}{2}\nu\lambda_{K+1}t\right)\exp\left(\frac{cs}{\nu^2}|\mathbf{u}_0|^2\right)\exp\left(\frac{cst}{\nu^2}\left(|\sigma|^2 + \frac{2}{\nu\lambda_1}|\mathbf{f}|^2\right)\right) \\
&\qquad \leq \frac{c}{\varepsilon}|\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}_0|^s \exp\left(-\frac{s}{4}\nu\lambda_{K+1}t\right)\exp\left(\frac{cs}{\nu^2}|\mathbf{u}_0|^2\right) &(4.27)\\
&\qquad \leq \frac{c}{\varepsilon}(2M)^s \exp\left(\frac{cs}{\nu^2}M^2\right)\exp\left(-\frac{s}{4}\nu\lambda_{K+1}t\right), &(4.28)
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由关于 $K$的假设（4.23）得出。

对于（4.24）右端的第二项，我们仿照（3.99）-（3.101）中的做法，得到

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot), P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) \leq \left\|\mathcal{L}(\widehat{W}) - \mathcal{L}(W)\right\|_{\mathrm{TV}}, \tag{4.29}$$

其中

$$\widehat{W}(t) \coloneqq W(t) - \int_0^t \frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\sigma^{-1}\Pi_K(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(\tau)d\tau, \quad t \geq 0.$$

由（4.22）可知，对于任意 $a \in (0,1]$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot), P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) &(4.30)\\
&\qquad \leq 1 - \frac{1}{6}\min\left\{\frac{1}{8}, \exp\left[-\left(2^{2-a}\,\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \left|\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\sigma^{-1}\Pi_K(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\right|^2 dt\right)^a\right)^{\frac{1}{a}}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

[4]与（3.93）类似，这里注意到，在 [BKS20，定理 A.5，式（A.14）] 中假设的是 $a \in (0, 1)$。事实上，上面的（3.94）和（3.92）意味着（4.22）对 $a = 1$也成立，不过界甚至更紧。

再次运用（4.19），我们可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \left|\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\sigma^{-1}\Pi_K(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})(t)\right|^2 dt\right)^a &\le \left(\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\|\sigma^{-1}\|\right)^{2a}\mathbb{E}\left(\int_0^\infty |\tilde{\mathbf{u}}(t)-\mathbf{u}(t)|^2 dt\right)^a \\
&\le \left(\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\|\sigma^{-1}\|\right)^{2a}\mathbb{E}\left(\int_0^\infty |\tilde{\mathbf{u}}_0-\mathbf{u}_0|^2\exp\left(-\nu\lambda_{K+1}t+\frac{c}{\nu}\int_0^t\|\mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau\right)dt\right)^a \\
&\le \left(\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\|\sigma^{-1}\|\right)^{2a}|\tilde{\mathbf{u}}_0-\mathbf{u}_0|^{2a} \\
&\quad\cdot\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \exp\left(-\nu\lambda_{K+1}t+\frac{c}{\nu^2}|\sigma|^2 t\right)dt\right)^a \sup_{t\ge0}\exp\left(\frac{ca}{\nu}\int_0^t\|\mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau-\frac{ca}{\nu^2}|\sigma|^2 t\right)\right] \\
&\le \left(\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\|\sigma^{-1}\|\right)^{2a}|\tilde{\mathbf{u}}_0-\mathbf{u}_0|^{2a}\left(\int_0^\infty e^{-\frac{\nu\lambda_{K+1}t}{2}}dt\right)^a\mathbb{E}\left[\sup_{t\ge0}\exp\left(\frac{ca}{\nu}\int_0^t\|\mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau-\frac{ca}{\nu^2}|\sigma|^2 t\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.31}$$

其中，最后一个不等式由关于 $K$ 的假设（4.23）得出。现在假设 $a\le c\nu^3\lambda_1/|\sigma|^2$，从而可以使用（4.11），进一步得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \left|\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\sigma^{-1}\Pi_K(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})(t)\right|^2 dt\right)^a &\le c(\nu\lambda_{K+1})^a\|\sigma^{-1}\|^{2a}|\tilde{\mathbf{u}}_0-\mathbf{u}_0|^{2a}\exp\left(\frac{ca}{\nu^2}|\mathbf{u}_0|^2\right) \\
&\le c(\nu\lambda_{K+1})^a\|\sigma^{-1}\|^{2a}M^{2a}\exp\left(\frac{ca}{\nu^2}M^2\right).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

代回（4.30），

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot),P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot))\le 1-\frac{1}{6}\min\left\{\frac{1}{8},\exp\left[-c\nu\lambda_{K+1}\|\sigma^{-1}\|^2M^2\exp\left(c\frac{M^2}{\nu^2}\right)\right]\right\}. \tag{4.33}$$

因此，由（4.24）、（4.28）和（4.33），

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot),P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) &\le \frac{c}{\varepsilon}(2M)^s\exp\left(\frac{cs}{\nu^2}M^2\right)\exp\left(-\frac{s}{4}\nu\lambda_{K+1}t\right) \\
&\quad+1-\frac{1}{6}\min\left\{\frac{1}{8},\exp\left[-c\nu\lambda_{K+1}\|\sigma^{-1}\|^2M^2\exp\left(c\frac{M^2}{\nu^2}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

因此，我们可以将 $T_1=T_1(\nu,K,\|\sigma^{-1}\|,M,\varepsilon,s)>0$ 取为充分大的值，使得对所有 $t\ge T_1$

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot),P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot))\le 1-\frac{1}{12}\min\left\{\frac{1}{8},\exp\left[-c\nu\lambda_{K+1}\|\sigma^{-1}\|^2M^2\exp\left(c\frac{M^2}{\nu^2}\right)\right]\right\}.$$

证明至此完成。 □

命题 4.4。 假设存在 $K\in\mathbb{N}$ 和 $\sigma\in\mathbf{H}$ 使得 (4.23) 成立。那么，对每个 $\kappa_2\in(0,1)$以及每个 $r>0$，都存在 $s>0$ 使得下列结论成立：

(i) 对每个 $\varepsilon>0$，都存在一个常数 $C=C(\varepsilon,s)>0$ 使得

$$\sup_{t\ge0}\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot),P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot))\le C(\varepsilon,s)\exp\left(r|\mathbf{u}_0|^2\right)\rho_{\varepsilon,s}(\mathbf{u}_0,\tilde{\mathbf{u}}_0) \tag{4.34}$$

对每个 $\mathbf{u}_0$，$\tilde{\mathbf{u}}_0\in H$，且满足 $\rho_{\varepsilon,s}(\mathbf{u}_0,\tilde{\mathbf{u}}_0)<1$。

(ii) 存在一个参数 $\varepsilon>0$ 和一个时间 $T_2>0$ 使得

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot),\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)))\le\kappa_2\exp\left(r|\mathbf{u}_0|^2\right)\rho_{\varepsilon,s}(\mathbf{u}_0,\tilde{\mathbf{u}}_0) \tag{4.35}$$

对所有 $t\ge T_2$ 以及每个 $\mathbf{u}_0$，$\tilde{\mathbf{u}}_0\in H$ 满足 $\rho_{\varepsilon,s}(\mathbf{u}_0,\tilde{\mathbf{u}}_0)<1$。

证明。任取 $\kappa_2$ $\in (0,1)$ 和 $r>0$。令 $\mathrm{u}_0$, $\tilde{\mathrm{u}}_0 \in H$ 使得 $\rho_{\varepsilon,s}(\mathrm{u}_0, \tilde{\mathrm{u}}_0) < 1$。现在取 $s$ 使得 at

$$0 < s \le c \min\left\{ r\nu^2, \frac{\nu^3\lambda_1}{|\sigma|^2+\nu^3\lambda_1} \right\}, \tag{4.36}$$

对于某个绝对常数 $c$。我们按照 (4.24) 估计 Wasserstein 距离 $\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathrm{u}0,\cdot)\ P_t(\tilde{}\mathrm{u}0,\cdot))$，然后按照 (4.27) 估计右端的第一项。由于 $\rho_{\varepsilon,s}(\mathrm{u}0, \tilde{}\mathrm{u}_0) < 1$，因此 $|\tilde{}\mathrm{u}_0 - \mathrm{u}_0|^s\varepsilon^{-1} = \rho_{\varepsilon,s}(\mathrm{u}0, \tilde{}\mathrm{u}_0)$。于是，由 (4.27) 得，

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot), \widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) \le c\rho_{\varepsilon,s}(\mathbf{u}_0,\tilde{\mathbf{u}}_0)\exp\left(-\frac{s}{4}\nu\lambda_{K+1}t\right)\exp\left(\frac{cs}{\nu^2}|\mathbf{u}_0|^2\right). \tag{4.37}$$

对于第二项，我们首先按照（4.29）进行估计，然后调用（3.93）可得，对任意 $a \in (0,1]$

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot), P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) \le 2^{\frac{1-a}{1+a}}\left[\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \left|\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\sigma^{-1}\Pi_K(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})(t)\right|^2 dt\right)^a\right]^{\frac{1}{1+a}}. \tag{4.38}$$

取 $a \in (0,1]$ 使得 $\frac{2a}{1+a} = s$。根据 $s$ 在（4.36）中的选取，特别可知 $a \le c\nu^3\lambda_1/|\sigma|^2$。因此，我们可以按照（4.31）-（4.32）继续进行，并得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(\widetilde{P}_{t,\mathbf{u}_0}(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot), P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot)) &\le c(\nu\lambda_{K+1})^{\frac{a}{1+a}}\|\sigma^{-1}\|^{\frac{2a}{1+a}}|\tilde{\mathbf{u}}_0-\mathbf{u}_0|^{\frac{2a}{1+a}}\exp\left(\frac{c}{\nu^2}\frac{a}{1+a}|\mathbf{u}_0|^2\right)\\
&\le c(\nu\lambda_{K+1})^{s/2}\|\sigma^{-1}\|^s|\tilde{\mathbf{u}}_0-\mathbf{u}_0|^s\exp(r|\mathbf{u}_0|^2)\\
&= c\varepsilon(\nu\lambda_{K+1})^{s/2}\|\sigma^{-1}\|^s\rho_{\varepsilon,s}(\mathbf{u}_0,\tilde{\mathbf{u}}_0)\exp(r|\mathbf{u}_0|^2),
\end{aligned} \tag{4.39}$$

其中在第二个不等式中，我们用了 $s \le cr\nu^2$。由（4.24）、（4.37）和（4.39），于是得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_{\varepsilon,s}(P_t(\mathbf{u}_0,\cdot), P_t(\tilde{\mathbf{u}}_0,\cdot))\\
&\quad\le c\left[\exp\left(-\frac{s}{4}\nu\lambda_{K+1}t\right) + \varepsilon(\nu\lambda_{K+1})^{s/2}\|\sigma^{-1}\|^s\right]\exp(r|\mathbf{u}_0|^2)\rho_{\varepsilon,s}(\mathbf{u}_0,\tilde{\mathbf{u}}_0)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

对所有 $t \ge 0$成立。这说明（4.34）。

对于（4.35），我们选取 $T_2 = T_2(s, K, \kappa_2) > 0$和 $\varepsilon = \varepsilon(s, K, \|\sigma^{-1}\|, \kappa_2) > 0$，使得（4.40）中括号内的表达式对所有 $\kappa_2$ 小于 $t \ge T_2$。证明至此完成。 □

由（4.12）、命题 4.3 和命题 4.4，现在可立即由定理 2.1得到以下 Wasserstein 收缩结果。

定理 4.5。假设存在 $K \in \mathbb{N}$ 和 $\sigma \in \mathbf{H}$，使得(4.23) 成立。令 $P_t$, $t \ge 0$为（(4.7)中定义的马尔可夫半群。则对每个 $m>1$，都存在 $\alpha_m > 0$，使得对每个 $\alpha \in (0, \alpha_m]$，都存在 $\varepsilon$, $s$, $T>0$ 以及常数 $C_1$, $C_2 > 0$，使得下列不等式成立

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha}(\mu P_t, \tilde{\mu}P_t) \le C_1 e^{-tC_2}\mathcal{W}_{\varepsilon,s,\alpha/m}(\mu,\tilde{\mu}) \tag{4.41}$$

对任意 $\mu$, $\tilde{\mu} \in \Pr(H)$ 以及所有 $t \ge T$。这里回顾一下，对于任意 $a>0$, $\mathcal{W}_{\varepsilon,\ s,\ a}$ 表示距离类函数在 $\Pr(H)$ 上的类 Wasserstein 扩展 $\rho_{\varepsilon,\ s,\ a}$ 其定义方式与 (3.26)相同，只需将 $\dot{L}^2$ 替换为 $H$。

注 4.6。 在 命题 4.3 和 命题 4.4的证明中，也就是为了满足 *(A2)*和 *(A3)* 这两个 定理 2.1中的条件，我们将采用路径估计 (4.19)。正是在运用这种形式颇具挑战性的“Foias-Prodi”估计时，定理 2.1 优于 *[HM08*、*HMS11*和 *BKS20]*中弱 Harris 定理的先前表述。实际上，对于系统 `采用类似 (4.41) 的形式来建立合适的收缩界 (4.1)、(4.2)，显然无法直接应用这些先前结果。

正如现有随机偏微分方程文献一贯所述，(4.19) 代表了动力学的一项关键结构性质，它导向了*(A2)*和*(A3)*中所体现的“不可约性”和“平滑性”条件。然而，此处(4.19)的形式揭示了一个典型难题：如何建立

适用于马尔可夫动力系统的压缩性形式。据我们所知，这一问题此前在文献中尚未得到充分探讨。这是由于 (4.19) 中积分项前的系数通常预期会很大。进而，这一系数的大小使得解的分布所具有的指数矩难以满足要求；具体而言，命题 4.1 中的二次指数矩界 (4.11) 会随着 $O(\nu^2)$ 而退化，而积分项 (4.19) 的要求则会随着小 $\nu$ 而按 $O(\nu^{-1})$ 增长。值得注意的是，在第 3 节的周期边界条件情形下，并不会出现类似问题，这要归功于该周期情形下非线性项 (3.1) 的性质更好，参见 (3.81) 和 (4.20)。另一方面，在其他模型中也会出现与 (4.19) 类似的困难形式（甚至更难），例如 [GHMR17、BKS20、GHMR21]。

在为 $P_t$ 建立平滑估计时，这一问题尤为明显。弱 Harris 方法由 [HMS11] 提出，并在后续文献中得到发展；其中恰当的平滑条件是$\rho$-压缩条件。与我们在 (A3) 中的表述不同（参见定理 2.1），这里假设 $\rho$-压缩性在整个相空间上一致成立。具体而言，[HMS11] 要求他们最终用于构造收缩距离的有界距离$\rho$ （构造方式与(2.8)非常相似）满足：对某个 $\alpha \in (0,1)$，

$$\mathcal{W}_\rho(P_{t_*}(\mathbf{u}_0,\cdot), P_{t_*}(\mathbf{v}_0,\cdot)) \le \alpha\rho(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0), \qquad whenever\ \rho(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0) < 1. \tag{4.42}$$

我们注意到，即使不存在边界，对于适当调节的 $s, \epsilon > 0$，使用（4.9）中给出的形式为 $\rho(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \rho_{\varepsilon,s}(\mathrm{u},\mathrm{v})$ 的距离，也只能得到这种收缩估计的局部形式（4.42）；参见上文（3.58）。为克服这一困难，[HMS11 的命题 5.4] 建议采用 [HM08 第 4] 节中构造的一种测地距离，该距离适用于现有形式的“Lyapunov”结构$V(\mathrm{u}) = \exp(\alpha|\mathrm{u}|^2)$。他们证明，马尔可夫半群梯度估计的时间渐近平滑估计，能够进而给出（4.42）所需的全局形式。这是一种无穷小方法，因为我们试图用 $\nabla P_{t_*}(\mathrm{u}_0,\cdot)(\mathrm{u}_0-\mathrm{v}_0)$ 来界定 $P_{t_*}(\mathrm{u}_0,\cdot)$ 与 $P_{t_*}(\mathrm{v}_0,\cdot)$ 之间的距离。

在我们的语境下，我们可以尝试重复 [HM08 第 4] 节以及 [HMS11 命题 5 中的这一策略。4]具体如下。注意，对于任意 $C^1$ 观测量 $\phi$ 以及任意 $\xi \in H$，由 (4.7)

$$\nabla P_t\phi(\mathbf{u}_0)\xi = \mathbb{E}\left(\nabla\phi(\mathbf{u}(t;\mathbf{u}_0)\mathbf{v}\right) + \mathbb{E}\left(\phi(\mathbf{u}(t;\mathbf{u}_0)\int_0^t\left(\sigma^{-1}\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\Pi_K\mathbf{v}\right)\cdot dW\right), \tag{4.43}$$

其中

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nu A\mathbf{v} + B(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},\mathbf{u}) + \frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\Pi_K\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}(0) = \xi.$$

恒等式 (4.43) 可通过在其噪声变量中沿方向 $\mathbf{u}(t;\mathbf{u}_0)$ 加上再减去 $\mathbf{u}(t;\mathbf{u}_0)$ 的梯度得到，其中方向为 $\mathbf{w} = \sigma^{-1}\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\Pi_K\mathbf{v}$。随后进行 Malliavin 分部积分——在此实际上只需应用 Girsanov 定理，因为 $\mathbf{w}$ 是适应的——从而得到 (4.43)中的第二项。现在可以将 (4.43) 视为通过两个与 (4.24)类似的项，估计两个邻近解发生耦合的可能性。

这一类比正是 [HMS11 命题 5 的证明中所采用的方法。4]若要遵循这一思路，可以将第一项视为

$$(P_t|\nabla\phi|^2(\mathbf{u}_0))^{1/2}(\mathbb{E}|\mathbf{v}|^2)^{1/2}, \tag{4.44}$$

将其与我们的界 (4.37)进行比较。第二项的估计如下

$$\sup_{\mathbf{u}}|\phi(\mathbf{u})|\left(\mathbb{E}\int_0^t\left|\sigma^{-1}\frac{\nu\lambda_{K+1}}{2}\Pi_K\mathbf{v}\right|^2 dt\right)^{1/2}, \tag{4.45}$$

我们可以将其与 (4.38)进行比较。然而，在我们的设定中，无法证明这两项中的任何一项是有限的。目前尚不清楚如何在上述论证中引入适当的局部化，以避免这些矩问题。

这里我们注意到，选择 $s$ 足够小，具体如(4.8)所示，才能利用指数矩界(4.11) 继续推导(4.26)、(4.39)中的估计。不过，这些估计

本身并不足够，因为它们无法导出全局形式(4.42)。另一方面， *[BKS20]*类似地采用了伪度量

$$\rho(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 1 \wedge \left(\frac{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^s}{\varepsilon}\exp(\alpha|\mathbf{u}|^2)\right) \wedge \left(\frac{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^s}{\varepsilon}\exp(\alpha|\mathbf{v}|^2)\right)$$

以达到 （4.42）。虽然 *[BKS20]* 的这一方法会直接根据 *[HMS11，定理 4.8]*, 得到相关伪度量中的收缩，但尚不清楚该伪度量是否满足任何可用形式的广义三角不等式。显然，若要采用我们在 第 1.1 节 概述并在 第 2.3 节 和 第 3 节中使用的策略，建立某些随机系统长时间统计的连续参数依赖性，这种广义三角不等式必不可少。

## 类距离函数

这里我们给出一些关于波兰空间上类距离函数的简单一般性结果 $X$ 及其在 $\mathrm{Pr}(X)$ 上相应的类 Wasserstein 扩展，正如 第 2.1 节中所回顾的那样。

我们首先证明，若给定的类距离函数 $\rho$ 满足广义形式的三角不等式，即下文的（A.1），并满足一组合适的条件，则相应的类距离函数 $\rho_\alpha$ 对于固定参数 $\alpha > 0$，按（2.8）定义，满足由 假设 （H1）在 定理 2.3中推出的（2.24）形式的不等式。下面的证明沿用了 [HMS11，引理 4.14]中的类似思路。

命题 A.1. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为一个巴拿赫空间，且 $\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}^+$ 是定义在 $X$ 上的类距离函数，满足以下条件：

*(i)* $\rho$ 有界，即存在常数 $M>0$，使得对所有 $u,v\in X$， $\rho(u,v)\le M$ .

(ii) 存在常数 $K>0$ ，使得

$$\rho(u,v)\le K\left[\rho(u,w)+\rho(w,v)\right] \quad \textit{for all } u,v,w\in X. \tag{A.1}$$

(iii) 存在常数 $c>0$，使得以下条件成立：若对某些 $u,v\in X$ 有 $\rho(u,v)<c$，则对某些常数 $\gamma>1$ 和 $C>0$，有 $\|u\|^2\le\gamma\|v\|^2+C$；这些常数与 $u$ 和 $v$ 无关。

那么，对于由固定参数 $\alpha>0$ 定义的类距离函数 $\rho_\alpha\colon X\times X\to\mathbb{R}^+$，

$$\rho_\alpha(u,v)=\rho(u,v)^{1/2}\exp\left(\alpha\|u\|^2+\alpha\|v\|^2\right) \quad \textit{for all } u,v\in X,$$

˜可知，存在常数 $K>0$ ，使得

$$\rho_\alpha(u,v)\le\tilde{K}\left[\rho_{\gamma\alpha}(u,w)+\rho_{\gamma\alpha}(w,v)\right] \quad \textit{for all } u,v,w\in X, \tag{A.2}$$

其中， $\gamma>0$ 是由假设（*iii*）给出的常数。

证明。 设 $u$， $v$， $w\in X$。由于对于任意 $\alpha>0$， $\rho_\alpha$ 具有对称性，因此不失一般性，我们可以假设 $\|v\|\le$ （$\gamma-1$）$^{1/2}\|u\|$，其中 $\gamma>1$ 是由假设 （iii）给出的常数。

首先，假设 $\rho$（$u$， $w$） $\ge c$。那么，根据假设 （i）可得

$$\begin{aligned}\rho_\alpha(u,v)&\le M^{1/2}\exp\left(\alpha\|u\|^2+\alpha\|v\|^2\right)\le M^{1/2}\frac{\rho(u,w)^{1/2}}{c^{1/2}}\exp\left(\alpha\|u\|^2+\alpha(\gamma-1)\|u\|^2\right)\\&\le\frac{M^{1/2}}{c^{1/2}}\rho_{\gamma\alpha}(u,w)\le\frac{M^{1/2}}{c^{1/2}}\left[\rho_{\gamma\alpha}(u,w)+\rho_{\gamma\alpha}(w,v)\right].\end{aligned} \tag{A.3}$$

On 另一方面，如果 $\rho$（$u$， $w$） $<c$，那么根据假设 （ii）和 （iii）可知 t

$$\begin{aligned}\rho_\alpha(u,v)&\le K^{1/2}\left[\rho(u,w)^{1/2}+\rho(w,v)^{1/2}\right]\exp\left(\alpha\|u\|^2+\alpha\|v\|^2\right)\\&\le K^{1/2}\left[\rho(u,w)^{1/2}\exp\left(\gamma\alpha\|u\|^2\right)+\rho(w,v)^{1/2}\exp\left(\alpha\gamma\|w\|^2+\alpha C+\alpha\|v\|^2\right)\right]\\&\le\tilde{C}\left[\rho_{\gamma\alpha}(u,w)+\rho_{\gamma\alpha}(w,v)\right],\end{aligned} \tag{A.4}$$

其中 $\tilde{C}=K^{1/2}\exp(\alpha C)$。

由（A.3）和（A.4），我们得出（A.2）成立，其中 $\tilde{K}=\max\{$（$M/c$）$^{1/2}$， $\tilde{C}\}$。 □

在下面的结果中，我们将证明，给定的类距离函数所满足的广义三角不等式，即下文的（A.6），会导出相应的类 Wasserstein 扩张所满足的类似不等式（A.7）。证明主要依赖析取定理（例如参见 [AGS05，引理 5.3。2]）：固定测度 $\mu$，$\nu$，$\tilde{\nu} \in \Pr(X)$，并给定任意耦合 $\Gamma \in \mathcal{C}(\mu, \tilde{\nu})$，$\Gamma' \in \mathcal{C}(\tilde{\nu}, \nu)$，该定理提供了一种构造耦合 $\Gamma'' \in \mathcal{C}(\mu, \nu)$ 的方法，从而可以从（A.6）推导出（A.7）。在陈述结果之前，我们先回顾几个定义。

设 $(\mathcal{X}, \Sigma_{\mathcal{X}})$ 和 $(\mathcal{Y}, \Sigma_{\mathcal{Y}})$ 为可测空间。给定可测函数 $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 以及测度 $\mu \in \Pr(\mathcal{X})$，$\mu$ 在 $\phi$ 下的推前记为 $\phi^*\mu$，定义为 $\mathcal{Y}$ 上的测度

$$\phi^*\mu(A) \coloneqq \mu(\phi^{-1}(A)) \quad \text{for any } A \in \Sigma_{\mathcal{X}},$$

其中，$\phi^{-1}(A)$ 表示集合 $A$ 在 $\phi$ 下的原像。此外，给定一个 $(\phi^*\mu)$-可积函数 $\psi\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$，可知复合函数 $\psi \circ \phi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 是 $\mu$-可积的，且下列变量替换公式成立

$$\int_{\mathcal{Y}} \psi(u)(\phi^*\mu)(du) = \int_{\mathcal{X}} \psi(\phi(u))\mu(du). \tag{A.5}$$

命题 A.2. 设 $X$ 为波兰空间。假设存在类距离函数 $\rho_1, \rho_2, \rho_3\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$，使得存在常数 $C > 0$ 满足

$$\rho_1(u, v) \le C\left[\rho_2(u, w) + \rho_3(w, v)\right] \quad \textit{for all } u, v, w \in X. \tag{A.6}$$

设 $\mathcal{W}_{\rho_1}$，$\mathcal{W}_{\rho_2}$ 和 $\mathcal{W}_{\rho_3}$ 分别是 $\rho_1$、$\rho_2$ 和 $\rho_3$根据 实数集$(X)$中定义 (2.2)的定义在 概率测度空间$(X)$上的类 Wasserstein 扩展。那么，

$$\mathcal{W}_{\rho_1}(\mu, \mu') \le C\left[\mathcal{W}_{\rho_2}(\mu, \tilde{\mu}) + \mathcal{W}_{\rho_3}(\tilde{\mu}, \mu')\right] \quad \textit{for all } \mu, \mu', \tilde{\mu} \in \Pr(X). \tag{A.7}$$

证明。令 $\pi_1, \pi_2\colon X \times X \to X$ 分别表示到第一和第二个分量的投影函数。也就是说，对于所有 $u, v \in X$，有 $\pi_1(u, v) = u$，且 $\pi_2(u, v) = v$。然后，回顾第 2.1 节中给出的任意两个测度 $\mu, \mu' \in \in \Pr(X)$ 的耦合集合 $\mathcal{C}(\mu, \mu')$ 的定义，可知对于任意$\Gamma \in \mathcal{C}(\mu, \mu') \in \Pr(X \times X)$，有 $\pi_1^*\Gamma = \mu$，且 $\pi_2^*\Gamma = \mu'$。

固定 $\mu$，$\mu'$，$\tilde{\mu} \in \Pr(X)$。由（2.2）可知，对于任意给定的 $\tilde{\varepsilon} > 0$，存在 $\Gamma \in \mathcal{C}(\mu, \tilde{\mu})$和$\Gamma' \in \mathcal{C}(\tilde{\mu}, \mu')$，使得

$$\int_{X \times X} \rho_2(u, v)\Gamma(du, dv) < \mathcal{W}_{\rho_2}(\mu, \tilde{\mu}) + \tilde{\varepsilon},$$

and

$$\int_{X \times X} \rho_3(u, v)\Gamma'(du, dv) < \mathcal{W}_{\rho_3}(\tilde{\mu}, \mu') + \tilde{\varepsilon}.$$

此外，令 $\pi_{i,\ j}\colon X \times X \times X \to X \times X$, $i, j = 1, 2, 3$ 表示投影函数

$$\pi_{i,j}(u_1, u_2, u_3) = (u_i, u_j), \quad \text{for all } u_1, u_2, u_3 \in X.$$

由于 $\pi_2^*\Gamma = \tilde{\mu} = \pi_1^*\Gamma'$，根据析取定理（例如参见 [AGS05，引理 5.3.2]）可知，存在 $\Gamma \in \Pr(X \times X \times X)$，使得 $\pi_{1,2}^*\Gamma = \Gamma$ 且 $\pi_{2,3}^*\Gamma = \Gamma'$。因此，$\pi_{1,3}^*\Gamma \in \mathcal{C}(\mu, \mu')$ 且

$$\mathcal{W}_{\rho_1}(\mu, \mu') \le \int_{X \times X} \rho_1(u, v)\pi_{1,3}^*\tilde{\Gamma}(du, dv) = \int_{X \times X \times X} \rho_1(\pi_{1,3}(u, w, v))\tilde{\Gamma}(du, dw, dv). \tag{A.8}$$

根据假设（A.6），我们有，对于任意 $u$，$v$，$w \in X$

$$\begin{aligned} \rho_1(\pi_{1,3}(u, w, v)) = \rho_1(u, v) &\le C\left[\rho_2(u, w) + \rho_3(w, v)\right] \\ &= C\left[\rho_2(\pi_{1,2}(u, w, v)) + \rho_3(\pi_{2,3}(u, w, v))\right]. \end{aligned} \tag{A.9}$$

将（A.9）代入（A.8），并按照（A.5）进行变量替换，我们推得

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\rho_1}(\mu,\mu') &\le C\left[\int_{X\times X}\rho_2(u,w)\pi^*_{1,2}\tilde{\Gamma}(du,dw)+\int_{X\times X}\rho_3(w,v)\pi^*_{2,3}\tilde{\Gamma}(dw,dv)\right]\\ &= C\left[\int_{X\times X}\rho_2(u,w)\Gamma(du,dw)+\int_{X\times X}\rho_3(w,v)\Gamma'(dw,dv)\right]\\ &< C\left[\mathcal{W}_{\rho_2}(\mu,\tilde{\mu})+\mathcal{W}_{\rho_3}(\tilde{\mu},\mu')+2\tilde{\varepsilon}\right].\end{aligned} \tag{A.10}$$

由于 $\tilde{\varepsilon}>0$ 是任意的，在（ $\tilde{\varepsilon}$ 趋于 0 时，对（A.10）取极限，我们得出（A.7）。 □

# B 定理 3.7 的证明

沿用（3.2）中的记号，我们将 Galerkin系统（3.12）写成如下泛函形式

$$\mathrm{d}\xi_N+[\nu A\xi_N+\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)]\,\mathrm{d}t=\Pi_N\sigma\mathrm{d}W. \tag{B.1}$$

下面的预备引理给出了由算子 $-\nu A$生成的解析半群 $e^{-\nu tA}$, $t\ge 0$的一些适当界。证明参见 [Paz12，第 2] 章定理 6.13。下文中的记号$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\dot{L}^2)}$ 表示 $\dot{L}^2$ 上线性算子的标准算子范数。

引理 B.1. 对每个 $a\ge 0$ 和 $b\in(0,1],$ ，都存在常数 $c_a>0$ 和 $c_b>0$ ，使得

$$\|A^a e^{-\nu tA}\|_{\mathcal{L}(\dot{L}^2)}\le c_a(\nu t)^{-a}, \tag{B.2}$$

$$\|A^{-b}(I-e^{-\nu tA})\|_{\mathcal{L}(\dot{L}^2)}\le c_b(\nu t)^{b}, \tag{B.3}$$

对所有 $t>0$。

在确定了必要的术语后，我们继续证明 Galerkin 系统(¨3.12) 的解具有所需的 Hlder 正则性。

定理3.7 的证明。 我们只证明不等式(3.19)，因为(3.18)的证明较为简单，且完全类似。固定 $T>0$, $m\in\mathbb{N}$ 以及 $p'\in(0,\ 1/2$。我们考虑解$\xi_N$ 的温和形式，它由泛函表述(B.1)得到，即

$$\xi_N(t)=e^{-\nu tA}\Pi_N\xi_0-\int_0^t e^{-\nu(t-\tau)A}\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)\mathrm{d}\tau+\int_0^t e^{-\nu(t-\tau)A}\Pi_N\sigma\mathrm{d}W(\tau),$$

对每个 $t\ge 0$ 都成立。因此，对每个 $s,t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}\nabla\xi_N(t)-\nabla\xi_N(s)&=\left(e^{-\nu tA}-e^{-\nu sA}\right)\nabla\Pi_N\xi_0\\ &\quad-\left(\int_0^t e^{-\nu(t-\tau)A}\nabla\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)\mathrm{d}\tau-\int_0^s e^{-\nu(s-\tau)A}\nabla\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)\mathrm{d}\tau\right)\\ &\quad+\left(\int_0^t e^{-\nu(t-\tau)A}\nabla\Pi_N\sigma\mathrm{d}W(\tau)-\int_0^s e^{-\nu(s-\tau)A}\nabla\Pi_N\sigma\mathrm{d}W(\tau)\right)\\ &=(I)+(II)+(III).\end{aligned} \tag{B.4}$$

接下来，我们估计（B.4）右端的每一项。不失一般性，设 $s<t$。我们将（$I$）估计为

$$\begin{aligned}|(I)|=|\left(e^{-\nu tA}-e^{-\nu sA}\right)\nabla\Pi_N\xi_0|&=|e^{-\nu sA}(e^{-\nu(t-s)A}-I)\nabla\Pi_N\xi_0|\\ &\le\|e^{-\nu sA}\|_{\mathcal{L}(\dot{L}^2)}\|A^{-p'}(e^{-\nu(t-s)A}-I)\|_{\mathcal{L}(\dot{L}^2)}|A^{p'}\nabla\xi_0|\\ &\le c|t-s|^{p'}|A\xi_0|,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由引理 B.1以及 $A^{p'}\nabla\xi_0 = A^{p'}A^{1/2}\xi_0 = A^{p'+1/2}\xi_0$这一事实推出，因此，由于 $p' \in (0,\ 1/2)$，我们有$|A^{p'}\nabla\xi_0| = \|\xi_0\|_{\dot{H}^{2p'+1}} \le \|\xi_0\|_{\dot{H}^2}$，参见第 3.1.1 节。因此，

$$\mathbb{E}|(I)|^m \le c|t-s|^{mp'}|A\xi_0|^m. \tag{B.5}$$

现在，对于项 $(II)$，我们有

$$\begin{aligned}
|(II)| &= \left|\int_0^t e^{-\nu(t-\tau)A}A^{1/2}\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)\mathrm{d}\tau - \int_0^s e^{-\nu(s-\tau)A}A^{1/2}\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)\mathrm{d}\tau\right| \\
&\le \left|\int_0^s (e^{-\nu(t-\tau)A} - e^{-\nu(s-\tau)A})A^{1/2}\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)\mathrm{d}\tau\right| + \left|\int_s^t e^{-\nu(t-\tau)A}A^{1/2}\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)\mathrm{d}\tau\right| \\
&= |(II_a)| + |(II_b)|.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|(II_a)|^m &= \mathbb{E}\left|\int_0^s e^{-\nu(s-\tau)A}(e^{-\nu(t-s)A} - I)A^{1/2}\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)\mathrm{d}\tau\right|^m \\
&\le \mathbb{E}\left(\int_0^s \|A^{p'+1/2}e^{-\nu(s-\tau)A}\|_{\mathcal{L}(\dot{L}^2)}\|A^{-p'}(e^{-\nu(t-s)A} - I)\|_{\mathcal{L}(\dot{L}^2)}\,|\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)|\mathrm{d}\tau\right)^m \\
&\le \frac{c}{\nu^{m/2}}\mathbb{E}\sup_{0\le\tau\le T}|\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)|^m\left(\int_0^s |s-\tau|^{-p'-1/2}|t-s|^{p'}\mathrm{d}\tau\right)^m,
\end{aligned} \tag{B.6}$$

其中在最后一个不等式中，我们再次使用了引理 B.1 。

利用非线性项的不等式（3.9）以及命题 3.4中的估计（3.13），可得

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\nu^{m/2}}\mathbb{E}\sup_{0\le\tau\le T}|\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)|^m \le \frac{c}{\nu^{m/2}}\mathbb{E}\sup_{0\le\tau\le T}|B(\xi_N,\xi_N)|^m &\le \frac{c}{\nu^{m/2}}\mathbb{E}\sup_{0\le\tau\le T}|\nabla\xi_N|^{2m} \\
&\le C(1+|\xi_0|^{4m} + |\nabla\xi_0|^{2m}),
\end{aligned}$$

其中 $C$ 为 一个依赖于 $m$、$T$、$\nu$、$|\sigma|$ 和 $|\nabla\sigma|$的常数。因此，由（B.6）以及由于 $p' \in (0,\ 1/2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|(II_a)|^m &\le C(1+|\xi_0|^{4m} + |\nabla\xi_0|^{2m})|t-s|^{mp'}\left(\int_0^s |s-\tau|^{-p'-1/2}\mathrm{d}\tau\right)^m \\
&\le C(1+|\xi_0|^{4m} + |\nabla\xi_0|^{2m})|t-s|^{mp'}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

类似地，对于 $(II_b)$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|(II_b)|^m &\le \mathbb{E}\left(\int_s^t \|A^{1/2}e^{-\nu(t-\tau)A}\|_{\mathcal{L}(\dot{L}^2)}|\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)|\mathrm{d}\tau\right)^m \\
&\le \frac{c}{\nu^{m/2}}\mathbb{E}\sup_{0\le\tau\le T}|\Pi_N B(\xi_N,\xi_N)|^m\left(\int_s^t |t-\tau|^{-1/2}\mathrm{d}\tau\right)^m \\
&\le C(1+|\xi_0|^{4m} + |\nabla\xi_0|^{2m})|t-s|^{m/2} \\
&\le C(1+|\xi_0|^{4m} + |\nabla\xi_0|^{2m})|t-s|^{mp'}T^{(-p'+1/2)m}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

最后，我们将 $(III)$ 估计为

$$\begin{aligned}
|(III)| &\le \left|\int_0^s (e^{-\nu(t-\tau)A} - e^{-\nu(s-\tau)A})\nabla\Pi_N\sigma\mathrm{d}W(\tau)\right| + \left|\int_s^t e^{-\nu(t-\tau)A}\nabla\Pi_N\sigma\mathrm{d}W(\tau)\right| \\
&= |(III_a)| + |(III_b)|.
\end{aligned}$$

对于每个固定的 $s$、$t \in [0,T]$，我们对每个 $r \in [0,s]$ 定义

$$M_r := \int_0^r (e^{-\nu(t-\tau)A} - e^{-\nu(s-\tau)A})\nabla\Pi_N\sigma\mathrm{d}W(\tau).$$

那么， $\{M_r\}_{0\le r\le s}$ 是一个鞅。根据 Burkholder-Davis-Gundy 不等式 [KS91，定理 3。28], 对于每个$p\in(0,\ \infty)$,

$$\mathbb{E}|M_s|^p \le \mathbb{E}\sup_{0\le r\le s}|M_r|^p \le c\,\mathbb{E}\left(\langle M\rangle_s^{p/2}\right),$$

其中

$$\langle M\rangle_s = \int_0^s |(e^{-\nu(t-\tau)A}-e^{-\nu(s-\tau)A})\nabla\Pi_N\sigma|^2\mathrm{d}\tau.$$

因此，再次运用引理 B.1 ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|(III_a)|^m = \mathbb{E}|M_s|^m &\le c\left(\int_0^s |(e^{-\nu(t-\tau)A}-e^{-\nu(s-\tau)A})\nabla\Pi_N\sigma|^2\mathrm{d}\tau\right)^{m/2}\\
&\le c\left(\int_0^s |e^{-\nu(s-\tau)A}(e^{-\nu(t-s)A}-I)\nabla\Pi_N\sigma|^2\mathrm{d}\tau\right)^{m/2}\\
&\le c\left(\int_0^s \|A^{p'}e^{-\nu(s-\tau)A}\|^2_{\mathcal{L}(\dot L^2)}\|A^{-p'}(e^{-\nu(t-s)A}-I)\|^2_{\mathcal{L}(\dot L^2)}|\nabla\sigma|^2\mathrm{d}\tau\right)^{m/2}\\
&\le c\left(\int_0^s |s-\tau|^{-2p'}|t-s|^{2p'}|\nabla\sigma|^2\mathrm{d}\tau\right)^{m/2}\\
&= c|t-s|^{mp'}|\nabla\sigma|^m\left(\int_0^s |s-\tau|^{-2p'}\mathrm{d}\tau\right)^{m/2}\\
&\le c|t-s|^{mp'}|\nabla\sigma|^m s^{(-p'+1/2)m} \le c|t-s|^{mp'}|\nabla\sigma|^m T^{(-p'+1/2)m},
\end{aligned}\tag{B.9}$$

其中最后一个不等式成立，是因为假设 $p'\in(0,1/2)$。

类似地，我们估计 $\mathbb{E}|(III_b)|^m$ 如下:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|(III_b)|^m \le \left(\int_s^t |e^{-\nu(t-\tau)A}\nabla\Pi_N\sigma|^2\mathrm{d}\tau\right)^{m/2} &\le \left(\int_s^t \|e^{-\nu(t-\tau)A}\|^2_{\mathcal{L}(\dot L^2)}|\nabla\sigma|^2\mathrm{d}\tau\right)^{m/2}\\
&\le |\nabla\sigma|^m|t-s|^{m/2}\\
&\le |t-s|^{mp'}\,|\nabla\sigma|^m\,T^{(-p'+1/2)m}
\end{aligned}\tag{B.10}$$

因此，由（B.4）以及上面的估计式（B.5）、（B.7）-（B.10）可知，对于所有 $s$， $t\in[0,T]$ 满足$s\le t$

$$\mathbb{E}|\nabla\xi_N(t)-\nabla\xi_N(s)|^m \le C|t-s|^{mp'}\left[1+|\xi_0|^{4m}+|\nabla\xi_0|^{2m}+|A\xi_0|^m\right],\tag{B.11}$$

其中 $C=C(m,\ p',\ T,\ \nu,\ |\sigma|,\ |\nabla\sigma|)$。至此，式（3.18）的证明完成。显然，按照上述类似步骤可证明，若以式（3.18）和（3.19）中的 $\xi_N(t)$ 替换为满足 $\xi(0)=\xi_0$ 几乎必然成立的式（ $\xi(t)$， $t\ge0$，且满足（3.1）的解 $\xi(0)=\xi_0$ 几乎必然。 □

## 致谢

我们的研究工作获得了 DMS-1816551、DMS-2108790（NEGH）和 DMS-2009859（CFM）项目的资助。

## 参考文献

[AFS08] S. Albeverio、F. Flandoli 和 Y.G. Sinai。《流体动力学中的随机偏微分方程：近期进展与展望：2005年8月29日至9月3日在意大利切特拉罗举行的 CIME 暑期学校讲座》。施普林格，2008年。

[AGS05] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e。《度量空间与概率测度空间中的梯度流》。Birkh¨auser Verlag，2005年。[AKL16] A. Andersson、R. Kruse 和 S. Larsson。精细 Sobolev–Malliavin 空间中的对偶性与随机偏微分方程的弱近似。《随机过程与偏微分方程：分析与计算》，4(1):113–149，2016年。[AL16] A. Andersson 和 S. Larsson。非线性随机热方程空间近似的弱收敛。《计算数学》，85(299):1335–1358，2016年。[AVZ14] A. Abdulle、G. Vilmart 和 K.C. Zygalakis。遍历随机微分方程不变测度的高阶数值近似。《SIAM 数值分析杂志》，52(4):1600–1622，2014年。[BBM14] H. Bessaih、Z. Brze´zniak 和 A. Millet。二维随机 Navier– Stokes 方程的分裂方法。《随机偏微分方程：分析与计算》，2(4):433–470，2014年。[BCP13] Z. Brze´zniak、E. Carelli 和 A. Prohl。带乘性随机强迫的不可压 Navier–Stokes 方程的基于有限元的离散。《IMA 数值分析杂志》，33(3):771–824，2013年。[BD18] C.-E. Br´ehier 和 A. Debussche。非线性扩散系数随机偏微分方程的 Kolmogorov 方程与弱阶分析。《纯粹与应用数学杂志》，119:193– 254，2018年。[BD21] D. Breit 和 A. Dodgson。二维随机 Navier–Stokes 方程数值近似的收敛率。《数值数学》，147(3):553–578，2021年。[BG20] C.-E. Br´ehier 和 L. Gouden`ege。随机 Allen–Cahn 方程分裂格式的弱收敛速率。《BIT 数值数学》，60(3):543–582，2020年。[BK17] C.-E. Br´ehier 和 M. Kopec。随机偏微分方程不变分布的近似：利用全离散格式的 Poisson 方程进行误差分析。《IMA 数值分析杂志》，37(3):1375–1410，2017年。[BKL01] J. Bricmont、A. Kupiainen 和 R. Lefevere。随机强迫下二维纳维–斯托克斯方程的遍历性。《数学物理通讯》，224(1):65–81，2001年。[BKL02] J. Bricmont、A. Kupiainen 和 R. Lefevere。二维随机 Navier- Stokes 动力学的指数混合。《数学物理通讯》，230(1):87–132，2002年。[BKS20] O. Butkovsky、A. Kulik 和 M. Scheutzow。随机偏微分方程及其他马尔可夫模型的广义耦合与遍历速率。《The Annals of Applied Probability》，30(1):1–39，2020年。[BM19] H. Bessaih 和 A. Millet。随机二维 Navier–Stokes 方程时间数值格式的强收敛。《IMA 数值分析杂志》，39(4):2135–2167，2019年。[BM21] H. Bessaih 和 A. Millet。随机二维 Navier– Stokes 方程的时空 Euler 离散格式。《随机偏微分方程：分析与计算》，第1–44页，2021年。[BM22] H. Bessaih 和 A. Millet。带加性噪声的二维 Navier–Stokes 方程时空离散格式的强收敛率。《随机性与动力学》，第2240005页，2022年。[BP22] D. Breit 和 A. Prohl。有界区域内带 Dirichlet 边界数据的二维随机 Navier–Stokes 方程误差分析。arXiv 预印本 arXiv:2109.06495，2022年。

[Br´e14] C.-E. Br´ehier. 使用欧拉格式近似由时空白噪声驱动的随机偏微分方程的不变测度。《Potential Analysis》，40(1):1–40，2014年。[Br´e22] C.-E. Br´ehier. 使用显式驯化指数欧拉格式近似一类遍历随机偏微分方程的不变分布。ESAIM：数学建模与数值分析，56(1):151–175，2022年。[BS05] E. Buckwar 和 T. Shardlow。随机时滞微分方程的弱近似。IMA 数值分析杂志，25(1):57–86，2005年。[BT96] V. Bally 和 D. Talay。随机微分方程欧拉格式的分布：I. 分布函数的收敛率。概率论及相关领域，104(1):43–60，1996年。[CF88] P. Constantin 和 C. Foias。纳维–斯托克斯方程。Chicago Lectures in Mathematics。芝加哥大学出版社，1988年。[CGH20] S. Cerrai 和 N.E. Glatt-Holtz。无限维系统的 Smoluchowski-Kramers 近似中平稳解的收敛性。Journal of Functional Analysis，278(8):108421，2020年。[CGW21] M. Cai、S. Gan 和 X. Wang。加性噪声下随机 Allen–Cahn 方程显式全离散格式的弱收敛速率。Journal of Scientific Computing，86(3):1–30，2021年。[CH19] J. Cui 和 J. Hong。具有单侧 Lipschitz 系数的随机偏微分方程空间近似的强、弱收敛速率。SIAM 数值分析杂志，57(4):1815–1841，2019年。[CHS21] J. Cui、J. Hong 和 L. Sun。具有非全局 Lipschitz 系数的抛物型随机偏微分方程全离散格式的弱收敛与不变测度。Stochastic Processes and their Applications，134:55–93，2021年。[CJK19] D. Conus、A. Jentzen 和 R. Kurniawan。具有非线性扩散系数的随机偏微分方程谱 Galerkin 近似的弱收敛速率。The Annals of Applied Probability，29(2):653–716，2019年。[CKHL06] E. Cl´ement、A. Kohatsu-Higa 和 D. Lamberton。随机微分方程弱近似的对偶方法。The Annals of Applied Probability，16(3):1124–1154，2006年。[CP12] E. Carelli 和 A. Prohl。随机不可压纳维–斯托克斯方程离散化的收敛率。SIAM 数值分析杂志，50(5):2467–2496，2012年。[DBD06] A. De Bouard 和 A. Debussche。随机非线性 Schr¨odinger 方程半离散格式的弱、强收敛阶。Applied Mathematics and Optimization，54(3):369–399，2006年。[Deb11] A. Debussche。随机偏微分方程的弱近似：非线性情形。计算数学，80(273):89–117，2011年。[Deb13] A. Debussche。随机纳维–斯托克斯方程的遍历性结果：导论。载于 Topics in Mathematical Fluid Mechanics，第23–108页。施普林格，2013年。[DF12] A. Davie 和 J. Gaines。抛物型随机偏微分方程数值求解格式的收敛性。计算数学，70(233):121–134，2001年。

[DMPS18] R. Douc、E. Moulines、P. Priouret 和 P. Soulier。马尔可夫链。施普林格，2018年。[DO05] A. Debussche 和 C. Odasso。弱阻尼随机非线性 Schr¨odinger 方程的遍历性。《演化方程期刊》，5(3):317–356，2005年。[D¨or12] P. D¨orsek。随机纳维–斯托克斯方程的半群分裂与求积近似。SIAM 数值分析杂志，50(2):729–746，2012年。[DP09] A. Debussche 和 J. Printems。随机热方程离散化的弱阶。计算数学，78(266):845–863，2009年。[DPZ96] G. Da Prato 和 J. Zabczyk。无限维系统的遍历性，第229卷。剑桥大学出版社，1996年。[DPZ14] G. Da Prato 和 J. Zabczyk。无限维随机方程。剑桥大学出版社，第2版，2014年。[Dud02] R.M. Dudley。实分析与概率，第74卷《剑桥高等数学研究丛书》。剑桥大学出版社，2002年。[EL02] W. E 和 D. Liu。随机耗散型偏微分方程的吉布斯动力学与不变测度。统计物理学杂志，108(5):1125–1156，2002年。[EMS01] W. E、J.C. Mattingly 和 Y. Sinai。随机驱动纳维–斯托克斯方程的吉布斯动力学与遍历性。《数学物理通讯》，224(1):83–106，2001年。[FFGHR17] J. Foldes、S. Friedlander、N.E. Glatt-Holtz 和 G. Richards。随机强迫磁流体动力学的渐近分析。SIAM 数学分析杂志，49(6):4440–4469，2017年。[FGHR19] J. F¨oldes、N.E. Glatt-Holtz 和 G. Richards。随机强迫湍流对流中的大普朗特数渐近。《非线性微分方程与应用》NoDEA，26(6):1–43，2019年。[FGHRT15] J. F¨oldes、N.E. Glatt-Holtz、G. Richards 和 E. Thomann。具有退化随机强迫的布辛涅斯克方程的遍历性与混合性质。Journal of Functional Analysis，269(8):2427–2504，2015年。[Fla94] F. Flandoli。随机纳维–斯托克斯方程的耗散性与不变测度。《非线性微分方程与应用》NoDEA，1(4):403–423，1994年。[FM95] F. Flandoli 和 B. Maslowski。随机扰动下二维纳维–斯托克斯方程的遍历性。《数学物理通讯》，172(1):119–141，1995年。[FMRT01] C. Foias、O. Manley、R. Rosa 和 R. Temam。纳维–斯托克斯方程与湍流，第83卷。剑桥大学出版社，2001年。[GH14] N.E. Glatt-Holtz。随机驱动流体流动中统计不变状态札记。arXiv 预印本 arXiv:1410.8622，2014年。[GHHKM22] N.E. Glatt-Holtz、A. J. Holbrook、J. A. Krometis 和 C. F. Mondaini。Metropolis–Hastings 类采样算法偏差估计的严格框架。2022年。（即将发表）。[GHM22] N.E. Glatt-Holtz 和 C.F. Mondaini。有限维与无限维哈密顿蒙特卡洛算法的混合速率。《随机过程与偏微分方程：分析与计算》，10(4):1318–1391，2022年。[GHMN22] N.E. Glatt-Holtz、V.R. Martinez 和 H.D. Nguyen。随机科尔曼–格廷热传导模型长时间统计的短记忆极限。arXiv 预印本 arXiv:2212.05646，2022年。

[GHMR17] N.E. Glatt-Holtz、J.C. Mattingly 和 G. Richards。《非线性随机偏微分方程的唯一遍历性》。统计物理学杂志，166(3-4):618–649，2017年。[GHMR21] N.E. Glatt-Holtz、V.R. Martinez 和 G.H. Richards。《弱阻尼、随机驱动的 KdV 方程光滑解的长期统计行为》。arXiv 预印本 arXiv:2103.12942，2021年。[GHZ09] N.E. Glatt-Holtz 和 M. Ziane。《随机纳维-斯托克斯系统的强路径解》。微分方程进展，14(5/6):567–600，2009。[GTW+12] S. Gottlieb、F. Tone、C. Wang、X. Wang 和 D. Wirosoetisno。《二维纳维–斯托克斯方程经典高效格式的长时间稳定性》。SIAM 数值分析杂志，50(1):126–150，2012年。[Hai02] M. Hairer。《通过渐近耦合研究随机偏微分方程的指数混合性质》。概率论及相关领域，124(3):345–380，2002年。[Hau10] E. Hausenblas。《随机波动方程的弱近似》。计算与应用数学杂志，235(1):33–58，2010。[HM06] M. Hairer 和 J.C. Mattingly。《退化随机强迫下二维纳维-斯托克斯方程的遍历性》。数学年刊，页码 993–1032，2006。[HM08] M. Hairer 和 J.C. Mattingly。《Wasserstein 距离中的谱隙与二维随机 Navier–Stokes 方程》。概率年刊，36(6):2050–2091，2008。[HM10] M. Hairer 和 A.J. Majda。《为线性响应理论提供依据的简单框架》。非线性，23(4):909，2010。[HM11a] M. Hairer 和 J. Mattingly。《半线性随机偏微分方程的亚椭圆性与唯一遍历性理论》。电子概率杂志，16:658–738，2011年。[HM11b] M. Hairer 和 J.C. Mattingly。《再论马尔可夫链的 Harris 遍历定理》。载于《随机分析、随机场与应用研讨会 VI》，页码 109–117。施普林格，2011年。[HMS11] M. Hairer、J. C. Mattingly 和 M. Scheutzow。《渐近耦合与 Harris 定理的一般形式及其在随机时滞方程中的应用》。概率论及相关领域，149(1-2):223–259，2011年。[HR19] E. Hausenblas 和 T.A. Randrianasolo。《采用惩罚投影法对二维 Navier–Stokes 方程进行时间离散化》。数值数学，143(2):339–378，2019年。[HW19] J. Hong 和 X. Wang。《随机非线性薛定谔方程的不变测度：数值近似与辛结构》，第 2251 卷。施普林格·自然，2019年。[JK09] A. Jentzen 和 P.E. Kloeden。《随机偏微分方程的数值近似》。米兰数学杂志，77(1):205–244，2009。[JK21] A. Jentzen 和 R. Kurniawan。《具有非线性扩散系数的半线性随机演化方程欧拉型逼近的弱收敛速率》。计算数学基础，21(2):445–536，2021年。[JM17] J.E. Johndrow 和 J.C. Mattingly。《贝叶斯采样中所用马尔可夫链逼近的误差界》。arXiv 预印本 arXiv:1711.05382，2017年。[KH01] A. Kohatsu-Higa。《弱近似：一种 Malliavin 微积分方法》。计算数学，70(233):135–172，2001年。

[KLL12] M. Kov´acs、S. Larsson 和 F. Lindgren。《具有加性噪声的线性随机演化方程有限元近似的弱收敛》。BIT 数值数学，52(1):85–108，2012年。[KLL13] M. Kov´acs、S. Larsson 和 F. Lindgren。《具有加性噪声的线性随机演化方程有限元近似的弱收敛 II：全离散格式》。BIT 数值数学，53:497–525，2013年。[KNS20] S. Kuksin、V. Nersesyan 和 A. Shirikyan。《具有有界退化噪声的一类耗散型偏微分方程的指数混合》。《几何与泛函分析》，30(1):126–187，2020年。[KP92] P.E. Kloeden 和 E. Platen。《随机微分方程》。载于《随机微分方程的数值求解》，页码 103–160。施普林格，1992年。[KS91] I. Karatzas 和 S. Shreve。《布朗运动与随机微积分》，数学研究生教材第 113 卷。纽约施普林格出版社，1991年。[KS01] S. Kuksin 和 A. Shirikyan。《随机强迫非线性偏微分方程的耦合方法 I》。《数学物理通讯》，221(2):351–366，2001年。[KS02] S. Kuksin 和 A. Shirikyan。《白噪声强迫非线性偏微分方程的耦合方法》。《纯粹与应用数学杂志》，81(6):567–602，2002年。[KS03] S. Kuksin 和 A. Shirikyan。《随机强迫二维纳维–斯托克斯方程的一些极限性质》。爱丁堡皇家学会学报 A 辑：数学，133(4):875–891，2003年。[KS12] S. Kuksin 和 A. Shirikyan。《二维湍流数学》。剑桥数学专著丛书第 194 卷。剑桥大学出版社，2012年。[Kuk02] A.and Shirikyan A. Kuksin, S.and Piatniski。《随机强迫非线性偏微分方程的耦合方法 II》。《数学物理通讯》，230(1):81–85，2002年。[Kul18] A. Kulik。《马尔可夫过程的遍历行为》，第 67 卷。柏林：德格鲁伊特出版社，2018年。[LMS07] H. Lamba、J.C. Mattingly 和 A.M. Stuart。《随机微分方程的自适应欧拉–丸山格式：收敛性与稳定性》。IMA 数值分析杂志，27(3):479–506，2007年。[LPS14] G.J. Lord、C.E. Powell 和 T. Shardlow。《计算随机偏微分方程导论》，第 50 卷。剑桥大学出版社，2014年。[Mat99] J.C. Mattingly。《具有随机强迫和大黏度的二维纳维–斯托克斯方程的遍历性》。《数学物理通讯》，206(2):273–288，1999年。[Mat02] J.C. Mattingly。《随机强迫 Navier–Stokes 方程及其他部分耗散动力系统的指数收敛》。《数学物理通讯》，230(3):421–462，2002年。[Mat03] J. Mattingly。《随机 Navier–Stokes 方程的最新进展》。偏微分方程日，页码 1–52，2003年。[MB01] A.J. Majda 和 A.L. Bertozzi。《涡量与不可压缩流》。剑桥应用数学教材。剑桥大学出版社，2001年。[Mil79] G.N. Milshtein。《随机微分方程的二阶精度积分方法》。《概率论及其应用》，23(2):396–401，1979年。[Mil95] G.N. Milshtein。《随机微分方程组解的弱近似》。载于《随机微分方程的数值积分》，页码 101–134。施普林格，1995年。

[MR04] R. Mikulevicius 和 B.L. Rozovskii。湍流的随机 Navier–Stokes 方程。SIAM 数学分析杂志，35(5):1250–1310，2004年。[MSH02] J.C. Mattingly、A.M. Stuart 和 D.J. Higham。随机微分方程及其近似的遍历性：局部利普希茨向量场与退化噪声。Stochastic Processes and their Applications，101(2):185–232，2002年。[MST10] J.C. Mattingly、A.M. Stuart 和 M.V. Tretyakov。通过泊松方程研究数值时间平均与平稳测度的收敛性。SIAM 数值分析杂志，48(2):552–577，2010年。[MT04] G.N. Milstein 和 M.V. Tretyakov。数学物理的随机数值计算，第456卷。施普林格，2004年。[MT12] S.P. Meyn 和 R.L. Tweedie。马尔可夫链与随机稳定性。Springer Science & Business Media，2012年。[MT21] G.N. Milstein 和 M.V. Tretyakov。涡量-速度表述下带加性噪声的 Navier–Stokes 方程的均方近似。数值数学理论方法与应用，14(1):1–30，2021年。[Paz12] A. Pazy。线性算子半群及其在偏微分方程中的应用，第44卷。Springer Science & Business Media，2012年。[Pri01] J. Printems。抛物型随机偏微分方程的时间离散化。ESAIM：数学建模与数值分析，35(6):1055–1078，2001年。[She56] R.D. Sheffield。巴拿赫空间中线性变换的伪逆。技术报告，橡树岭国家实验室（田纳西州），1956年。[SS00] T. Shardlow 和 A.M. Stuart。遍历马尔可夫链的扰动理论及其在数值近似中的应用。SIAM 数值分析杂志，37(4):1120–1137，2000年。[STZ01] A. Szepessy、R. Tempone 和 G.E. Zouraris。随机微分方程的自适应弱近似。纯粹与应用数学通讯，54(10):1169–1214，2001年。[Tal84] D. Talay。用于近似随机微分方程解的泛函期望的高效数值格式及其应用。载于《随机过程的滤波与控制》，第294–313页。施普林格，1984年。[Tal86] D. Talay。随机微分方程的离散化及其解的泛函期望的近似计算。ESAIM：数学建模与数值分析，20(1):141–179，1986年。[Tal90] D. Talay。用于计算不变分布的随机微分系统二阶离散格式。随机学：概率与随机过程国际期刊，29(1):13–36，1990年。[Tal02] D. Talay。随机哈密顿系统：向不变测度的指数收敛，以及隐式欧拉格式离散化。Markov Process. Related Fields，8(2):163–198，2002年。[Tem01] R. Temam。Navier–Stokes 方程：理论与数值分析。AMS Chelsea 出版社，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。1984年版重印。[Tsy09] A.B. Tsybakov。《非参数估计导论》。施普林格统计学丛书，2009年。[TT90] D. Talay 和 L. Tubaro。求解随机微分方程的数值格式的全局误差展开。随机分析与应用，8(4):483–509，1990年。

[Vil08] C. Villani。《最优传输：新旧理论》，第338卷。Springer Science & Business Media，2008年。[Wan10] X. Wang。耗散动力系统平稳统计性质的近似：时间离散化。计算数学，79(269):259–280，2010年。[Wan16] X. Wang。无需 Malliavin 微积分的半线性随机偏微分方程指数欧拉格式弱误差估计，2016年。[WG13] X. Wang 和 S. Gan。带加性噪声的半线性随机偏微分方程线性隐式欧拉方法的弱收敛分析。数学分析与应用杂志，398(1):151–169，2013年。

NathanE. Glatt-Holtz杜兰大学数学系 网址： http://www.math.tulane.edu/~negh/
电子邮箱： negh@tulane.edu

CeciliaF. Mondaini德雷塞尔大学数学系 网址： https://www.math.drexel.edu/~cf823/
电子邮箱： cf823@drexel.edu