arXiv:2302.01490v1 [math.AT] 3 Feb 2023

$RO(C_{2^n})$分次的 $H\underline{\mathbb{F}_2}$同伦

GUOQI YAN

Abstract. 我们给出了 $H\underline{\mathbb{F}_2}$的 $RO(C_{2^n})$分次同伦的一个显式公式。

Contents

1. 引言 1 2. 第二行中的计算 3 3. $n = 1$,2 的示例计算 4 4. 主定理的陈述与证明 5 5. $n = 3$,4 的更多示例计算 10 6. 对偶性 10 参考文献 12

1. Introduction

$RO(G)$分次的真正等变谱的同伦群很难计算。即使对于循环群 $G = C_{p^n}$，也没有已知的归纳公式。目前只有 $n = 2$的显式公式，见 [Zen17],[Geo19] 和 [Yan22]。

本文给出了 $RO(C_{2^n})$-分次同伦的显式归纳公式，其中 $H\underline{\mathbb{F}_2}$ 的 $\underline{\mathbb{F}_2}$ 是 $\mathbb{F}_2$ 上的常值 Mackey 函子。本文的主要定理是定理 7。 $H\underline{\mathbb{F}_2}$ 的 $RO(C_{2^n})$-分次同伦之所以能够计算，主要有两个原因：首先，通过在域 $\mathbb{F}_2$ 上进行计算，我们可以避免加法扩张。其次，Mackey 函子 $\underline{\mathbb{F}_2}$ 是常值的，因此我们可以从商群中推导信息。

本文的结果为等变计算数据库增添了新的计算，使我们能够对某一类群（本文中为循环 2-群）给出一般性结论。此前，人们所知的唯一针对某一类群而非特定群的此类计算，是 Holler 和 Kriz [HK17] 对 $RO(C_2^{\times n})$-分次同伦的计算。

我们的结果可能有多种应用。在 [HK01], Hu 和 Kriz 探讨了 Real 定向的上同调理论。真正的 C_2-等变 Steenrod 代数具有若干显著性质，其中包括为我们提供一个真正的 C_2-等变 Adams 谱序列。本文的结果将成为真正的 C_{2^n}-等变 Steenrod 代数和 Adams 谱序列的重要组成部分。在 [May20],[HM20], Eric Hogle 和 Clover May 发现了关于群 C_2 和系数 $\underline{\mathbb{F}_2}$的自由性定理。我们的结果将为自由性定理可能的推广提供信息。更一般地，Mike Hill [Hil22] 提出了 R-自由谱的概念。对于这样的 G-谱 E，其 R-同调将分裂为诱导表示球的 R-同调。当 $R = H\underline{\mathbb{F}_2}$ 时，我们的结果将完整描述 $H\underline{\mathbb{F}_2}$-自由谱的同调。

Date: 2023年2月 6th 日，星期一。

我们将使用的主要工具是 [GM95] 中引入的以下 Tate 方块

(1)
$$\begin{array}{ccccc} H_h & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \widetilde{H} \\ \downarrow\simeq & & \downarrow & & \downarrow \\ H_h & \longrightarrow & H^h & \longrightarrow & H^t \end{array}.$$

这里有 $H = H\underline{\mathbb{F}_2}$、$H_h = EG_+ \wedge H$、$H^h = F(EG_+, H)$、$H^t = H^h \wedge \widetilde{EG}$ 和 $\widetilde{H} = H \wedge \widetilde{EG}$。

回顾一下 C_{2^n}的实表示环

$$RO(C_{2^n}) = \mathbb{Z}\{1, \alpha, \lambda_{n-2}, \cdots, \lambda_1, \lambda_0\},$$

其中 α 是一维符号表示，λ_k表示二维实平面上由 $e^{\frac{2\pi i}{2^{n-k}}}$ 给出的旋转（每个 k对应一个），而 $\mathbb{Z}S$ 表示由集合 S生成的自由阿贝尔群。因此，λ_k 中每个非零向量的稳定子都是 C_{2^k}。

为了说明如何从商群诱导，我们假设已经知道$\pi_\star^{C_{2^{n-1}}} H\mathbb{F}_2$。令 $\varepsilon : C_{2^n} \to C_{2^n}/C_2 = C'_{2^{n-1}}$（这里我们用 $C'_{2^{n-1}}$ 表示商群，以区别于子群）为典范投影。沿着 ε 拉回，得到一个表示环之间的映射

(2)
$$\varepsilon^* : RO(C'_{2^{n-1}}) \to RO(C_{2^n})$$

其中我们有 $\varepsilon^*(1) = 1$、$\varepsilon^*(\alpha) = \alpha$ 和 $\varepsilon^*(\lambda_i) = \lambda_{i+1}$。使用 [LMSM86 第2], 章的术语，令$U$为一个完备的 C_{2^n}-宇宙。令 $i\colon U^{C_2} \to U$为包含映射，$\varepsilon^*\colon Sp^{C'_{2^{n-1}}} U^{C_2} \to Sp^{C_{2^n}} U^{C_2}$为将 $C'_{2^{n-1}}$-谱视为 C_{2^n}-谱的函子，则我们有以下两个伴随和一个同构:

(3)
$$[i_*\varepsilon^* S^V, H]_U^{C_{2^n}} \cong [\varepsilon^* S^V, i^* H]_{U^{C_2}}^{C_{2^n}} \cong [S^V, (i^*H)^{C_2}]_{U^{C_2}}^{C'_{2^{n-1}}} \cong [S^V, H]_{U^{C_2}}^{C'_{2^{n-1}}}.$$

这里，第一个伴随是宇宙变换，第二个是拉回与不动点伴随，而第三个同构来自这样一个事实:

$$(i^* H_{C_{2^n}})^{C_2} = H_{C'_{2^{n-1}}} \in Sp^{C'_{2^{n-1}} U^{C_2}},$$

这恰恰是因为 $\underline{\mathbb{F}_2}$ 是常数。这里我们使用记号 H_K 表示 K-等变的 $H\underline{\mathbb{F}_2}$。在（2）中，$\varepsilon^*$ 的像是那些不包含λ_0的虚 C_{2^n}-表示。若我们记

$$\star_{\perp\lambda_0} = \mathbb{Z}\{1, \alpha, \lambda_{n-2}, \cdots, \lambda_1\} \subset RO(C_{2^n})$$

作为子群，那么我们由此得到

(4)
$$\pi_{\star_{\perp\lambda_0}}^{C_{2^n}} H \xleftarrow[\cong]{\varepsilon^*} \pi_\star^{C_{2^{n-1}}} H$$

由（3）可得。根据（2），右侧的类 a_{λ_i}、u_{λ_i} 分别对应左侧的 $a_{\lambda_{i+1}}$、$u_{\lambda_{i+1}}$，而右侧的类 a_α、u_α 分别对应左侧同名的元素。因此，更明确地说，（4）表示

$$\pi_{ja_\alpha + i_{n-3}\lambda_{n-2} + \cdots + i_0\lambda_1}^{C_{2^n}} H \xleftarrow[\cong]{\varepsilon^*} \pi_{ja_\alpha + i_{n-3}\lambda_{n-3} + \cdots + i_0\lambda_0}^{C_{2^{n-1}}} H \quad \text{for } j, i_k \in \mathbb{Z}.$$

我们将（4）称为归纳公式。

记号。我们用 γ 表示 C_{2^n}的生成元。我们用 $[x]$ 表示多项式生成元，用 $\langle y\rangle$ 表示加法生成元。为简便起见，所有上标（如 i、j、k ）的取值范围都是 $\geqslant 1$。例如，记号 $\mathbb{F}_2\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\lambda_0}^i}\rangle[u_\alpha^{\pm}]\langle 1$、$a_\alpha\rangle$表示对所有$i \geqslant 1$、$s \in \mathbb{Z}$，类 $\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\lambda_0}^i} u_\alpha^s$、$\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\lambda_0}^i} u_\alpha^s a_\alpha$。$\mathbb{F}_2{}^{[u_\alpha^{\pm}, \frac{u_{\lambda_0}^{\pm}}{[u_\alpha\ u_{\lambda_0}]}]}$，表示作为向量空间的商。关于生成元 a_{λ_i}、u_{λ_i}、a_α、u_α，详见 [HHR16] 。我们的类是其中各类在映射 $H\underline{\mathbb{Z}} \to H\underline{\mathbb{F}_2}$ 下的像，但 u_α除外；它不是 $\underline{\mathbb{Z}}$-可定向的，而是 $\underline{\mathbb{F}_2}$-可定向的。

2. Computations in the second row

我们从 Borel 谱 H^h开始计算。 EG 在所有维数上都有自由胞腔，其胞腔链给出 $\mathbb{Z}$的一个自由 $\mathbb{Z}[G]$-分解。由此我们得到同伦不动点谱序列

定理 1. $H\underline{\mathbb{F}_2}$ 的 $RO(C_{2^n})$分次同伦不动点谱序列（HFPSS）形式如下： [Gre18, Def 1.4]

$$E_2^{V,s} = H^s(C_{2^n}; \pi_V^{C_{2^n}/e} H) \Rightarrow \pi_{V-s}^{C_{2^n}/C_{2^n}} H^h, \ |d_r| = (r-1, r) \tag{5}$$

这是一个代数谱序列，并且它在 E_2 处塌缩，因为 $\pi_V^{G/e} H$ 集中在底层次数为 0 的虚表示上。由 [Boa99, Thm 7.1] 及其下方的注释可知，该谱序列强收敛。对于所有 i， E_2 和目标都是 u_{λ_i}, u_α-局部的，见[Yan22]。以 $\mathbb{F}_2$为系数的群上同调为

$$H^*(C_2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x], |x| = 1 \quad \text{for } n = 1$$
$$H^*(C_{2^n}; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y] \otimes \Lambda\langle z\rangle, |y| = 2, |z| = 1 \quad \text{for } n \geqslant 2$$

其中 Λ 表示外代数。容易验证，在第一种情形下， x 收敛到$\frac{a_\alpha}{u_\alpha}$；在第二种情形下，$y$和 z 分别收敛到$\frac{a_{\lambda_0}}{u_{\lambda_0}}$和 $\frac{a_\alpha}{u_\alpha}$。回顾 [HHR17, Lem 3.6]中的黄金关系

$$a_{\lambda_i} u_{\lambda_j} = 2^{i-j} a_{\lambda_j} u_{\lambda_i}, \quad \text{for } n-2 \geqslant i > j \geqslant 0$$
$$a_{2\alpha} u_{\lambda_j} = 2^{n-1-j} a_{\lambda_j} u_{2\alpha}, \quad \text{for } n-2 \geqslant j \geqslant 0$$

这在 $H\underline{\mathbb{Z}}$ 的 C_{2^n}-等变同伦中成立。现在，由于我们研究的是 $H\underline{\mathbb{F}_2}$， $\pi_\star^{C_{2^n}} H\underline{\mathbb{F}_2}$ 中的这些关系变为

$$\begin{aligned} a_{\lambda_i} u_{\lambda_j} &= 0, \quad \text{for } n-2 \geqslant i > j \geqslant 0 \\ a_{2\alpha} u_{\lambda_j} &= 0, \quad \text{for } n-2 \geqslant j \geqslant 0, \end{aligned} \tag{6}$$

这极大地简化了我们的计算。本文将这些关系称为黄金关系。特别地，由于对每个 i， H^h 都是 u_α, u_{λ_i}-局部化的，因此我们有

命题 2. H^h 的 $RO(C_{2^n})$-分次同伦为

$$\pi_\star^{C_{2^n}} H^h = \mathbb{F}_2[a_\alpha, u_\alpha^\pm] \quad \textit{if } n = 1$$
$$\pi_\star^{C_{2^n}} H^h = \mathbb{F}_2[a_\alpha, a_{\lambda_0}]/(a_\alpha^2)[u_\alpha^\pm, u_{\lambda_0}^\pm, \cdots, u_{\lambda_{n-2}}^\pm] \quad \textit{if } n \geqslant 2.$$

当 $n = 1$时，我们有模型 $S^{\infty\alpha} \simeq \widetilde{EC_2}$，而映射 $H \to \widetilde{H}$ 和 $H^h \to H^t$ 是关于 a_α的局部化。当 $n \geqslant 2$时，我们有模型 $S^{\infty\lambda_0} \simeq \widetilde{EC_{2^n}}$。因此，上述映射是关于 a_{λ_0}的局部化。

命题 3. H^t 的 $RO(C_{2^n})$-分次同伦为

$$\pi_\star^{C_{2^n}} H^t = \mathbb{F}_2[a_\alpha^\pm, u_\alpha^\pm] \quad \textit{if } n = 1$$
$$\pi_\star^{C_{2^n}} H^t = \mathbb{F}_2[a_\alpha, a_{\lambda_0}^\pm]/(a_\alpha^2)[u_\alpha^\pm, u_{\lambda_0}^\pm, \cdots, u_{\lambda_{n-2}}^\pm] \quad \textit{if } n \geqslant 2.$$

通过 (1) 第二行中的连接同态，我们推得

推论 4. $RO(C_{2^n})$-分次同伦群 H_h 为

$$\pi_\star^{C_{2^n}} H_h = \mathbb{F}_2\langle \Sigma^{-1} \frac{1}{a_\alpha^i} \rangle [u_\alpha^\pm] \quad \textit{if } n = 1$$
$$\pi_\star^{C_{2^n}} H_h = \mathbb{F}_2\langle \Sigma^{-1} \frac{1}{a_{\lambda_0}^i} \rangle [u_\alpha^\pm, u_{\lambda_0}^\pm, \cdots, u_{\lambda_{n-2}}^\pm] \langle 1, a_\alpha \rangle \quad \textit{if } n \geqslant 2.$$

由此可得

推论 5. 我们有

$$\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar_{\perp\lambda_0}} H_h = \mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}(\frac{u_\alpha}{a_\alpha})^i\rangle \quad if\ n=1,$$
$$\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar_{\perp\lambda_0}} H_h = \mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}(\frac{u_{\lambda_0}}{a_{\lambda_0}})^i\rangle[u_\alpha^{\pm}, u_{\lambda_1}^{\pm}, \cdots, u_{\lambda_{n-2}}^{\pm}]\langle 1, a_\alpha\rangle \quad if\ n\geqslant 2.$$

3. Sample computations for $n = 1,\ 2$

$n = 1,\ 2$ 的情形过于简单，不适用于定理 7 的一般模式。因此我们在此记录这些情形。对于 $n \geqslant 1,$ 令 δ_n 为连接同态

$$\delta_n : \pi^{C_{2^n}}_{\bigstar} \widetilde{H} \to \pi^{C_{2^n}}_{\bigstar_{-1}} H_h.$$

我们分别用 K_n 和 C_n 表示核和余核。

现在我们从 $n = 1$ 开始，然后

$$\pi^{C_2}_{*} H_h = \mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}(\frac{u_\alpha}{a_\alpha})^i\rangle$$

以及 $\pi^{C_2}_{*} H = \mathbb{F}_2\langle 1\rangle$。由于 $H \to \widetilde{H}$ 是环映射，单位元 $1 \in \pi^{C_2}_0 H$ 应映射到单位元，因此不会被来自 $\pi^{C_2}_{*} H_h$ 的元素消去。我们得到 $\pi^{C_2}_{*} \widetilde{H} = \mathbb{F}_2[\frac{u_\alpha}{a_\alpha}]$，于是

$$\pi^{C_2}_{\bigstar} \widetilde{H} = \mathbb{F}_2[u_\alpha, a_\alpha^{\pm}]$$

由 a_α 周期性可知。连接同态 $\delta_1 : \pi^{C_2}_{\bigstar} \widetilde{H} \to \pi^{C_2}_{\bigstar_{-1}} H_h$ 映射

$$\mathbb{F}_2[u_\alpha]\langle a_\alpha^{-i}\rangle \mapsto \mathbb{F}_2[u_\alpha]\langle\Sigma^{-1}a_\alpha^{-i}\rangle.$$

我们得到

$$\pi^{C_2}_{\bigstar} H = K_1 \oplus C_1 = \mathbb{F}_2[a_\alpha, u_\alpha] \oplus \mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a_\alpha^{-i}u_\alpha^{-j}\rangle.$$

当 $n = 2$ 时，我们有

$$\pi^{C_4}_{\bigstar_{\perp\lambda_0}} H_h = \mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}(\frac{u_{\lambda_0}}{a_{\lambda_0}})^i\rangle[u_\alpha^{\pm}]\langle 1, a_\alpha\rangle$$

由归纳公式 (4) 可得

$$\pi^{C_4}_{\bigstar_{\perp\lambda_0}} H = \mathbb{F}_2[a_\alpha, u_\alpha] \oplus \mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a_\alpha^{-i}u_\alpha^{-j}\rangle. \tag{7}$$

映射 $\pi^{C_4}_{\bigstar_{\perp\lambda_0}} H_h \to \pi^{C_4}_{\bigstar_{\perp\lambda_0}} H$ 为 0。为了证明这一点，我们需要一个引理

引理 6. 对于 $n \geqslant 1,$ 以及本文讨论的所有同伦 Mackey 函子， $ker(a_\alpha) = im(tr^{C_{2^n}}_{C_{2^{n-1}}})$ 和 $im(a_\alpha) = ker(^{C_{2^n}}_{C_{2^{n-1}}})$。

证明。将 $[-,\ S^{-V} \wedge H\underline{\mathbb{F}_2}]^{C_{2^n}}$ 作用于下面的余纤维序列及其斯潘尼尔-怀特海德对偶

$$S^{-1} \xrightarrow{a_\alpha} S^{\alpha-1} \to C_{2^n}/C_{2^{n-1}+} \xrightarrow{res} S^0 \xrightarrow{a_\alpha} S^\alpha.$$

□

现在，由于次数的原因，利用可除性和线性，我们只需考虑这种可能性

$$\Sigma^{-1}(\frac{u_{\lambda_0}}{a_{\lambda_0}})u_\alpha^{-3}a_\alpha \xrightarrow{?} \Sigma^{-1}a_\alpha^{-1}u_\alpha^{-1}.$$

现在这两个类都被 a_α 消去，因此都来自 $tr^{C_4}_{C_2}$。它们都处于次数 $\pi_{2-2\alpha}$，而 u_α 在 C_2 层上是单位。因此，问题归结为映射 $\pi^{C_2}_0 H_h \to \pi^{C_2}_0 H$ 是否为 0。我们从 C_2 情形得知，此映射为 0。由此可得，映射 $\pi^{C_4}_{\bigstar_{\perp\lambda_0}} H_h \to \pi^{C_4}_{\bigstar_{\perp\lambda_0}} H$ 为 0。于是我们有

$$\pi^{C_4}_{\bigstar} \widetilde{H} = (\Sigma\pi^{C_4}_{\bigstar_{\perp\lambda_0}} H_h)[a_{\lambda_0}^{\pm}] \oplus \pi^{C_4}_{\bigstar_{\perp\lambda_0}} H[a_{\lambda_0}^{\pm}].$$

根据 $\tilde{H}$ 的 a_{λ_0}-周期性。对于连接同态，我们先考察 $(\Sigma\pi^{C_4}_{\star_{\perp\lambda_0}}H_h)[a^{\pm}_{\lambda_0}]$ 中的类。我们得到

$$\mathbb{F}_2\langle u^i_{\lambda_0}\rangle[a_{\lambda_0}][u^{\pm}_\alpha]\langle 1, a_\alpha\rangle \in K_2,$$

并将 $(\Sigma\pi^{C_4}_{\star_{\perp\lambda_0}}H_h)[a^{\pm}_{\lambda_0}]$ 的类取商后，我们得到

$$\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_{\lambda_0}\rangle[u^{\pm}_\alpha]\langle 1, a_\alpha\rangle \tag{8}$$

$$\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_{\lambda_0}u^{-j}_{\lambda_0}\rangle[u^{\pm}_\alpha]\langle 1, a_\alpha\rangle \tag{9}$$

C_2 中。由于 u_{λ_0} 的负幂，(9) 中的元素不可能是 δ_2 微分的像。这些类

$$\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_{\lambda_0}\rangle[u_\alpha]\langle 1, a_\alpha\rangle$$

是 δ_2 下来自 $\pi^{C_4}_{\star_{\perp\lambda_0}}H[a^{\pm}_{\lambda_0}]$ 中类的像，因此我们剩下

$$\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_{\lambda_0}\rangle\frac{[u^{\pm}_\alpha]}{[u_\alpha]}\langle 1, a_\alpha\rangle \in C_2,$$

and

$$\begin{aligned}&\mathbb{F}_2[a_\alpha, u_\alpha][a_{\lambda_0}]\\ \oplus&\mathbb{F}_2[u_\alpha]\langle\frac{a^{i+1}_\alpha}{a^j_{\lambda_0}}\rangle\\ \oplus&\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_\alpha u^{-j}_\alpha\rangle[a^{\pm}_{\lambda_0}]\end{aligned}$$

K_2 中。总之，我们有

$$\begin{aligned}\pi^{C_4}_\star H =&\mathbb{F}_2[a_\alpha, u_\alpha, a_{\lambda_0}, u_{\lambda_0}]/(a^2_\alpha u_{\lambda_0})\\ &\oplus\mathbb{F}_2\langle u^i_{\lambda_0}\rangle[a_{\lambda_0}]\frac{[u^{\pm}_\alpha]}{[u_\alpha]}\langle 1, a_\alpha\rangle\\ &\oplus\mathbb{F}_2[u_\alpha]\langle\frac{a^{i+1}_\alpha}{a^j_{\lambda_0}}\rangle\\ &\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_\alpha u^{-j}_\alpha\rangle[a^{\pm}_{\lambda_0}]\\ &\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_{\lambda_0}u^{-j}_{\lambda_0}\rangle[u^{\pm}_\alpha]\langle 1, a_\alpha\rangle\\ &\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_{\lambda_0}\rangle\frac{[u^{\pm}_\alpha]}{[u_\alpha]}\langle 1, a_\alpha\rangle.\end{aligned} \tag{10}$$

4. Statement and proof of the main theorem

对于 $x \in \pi^{C_{2^n}}_\star H$，令 $D(x, n)$ 为 $\pi^{C_{2^n}}_\star H$ 中可被 x 无限整除的类的集合。等价地，它是代数完备化映射 $\pi^{C_{2^n}}_\star H \to (\pi^{C_{2^n}}_\star H)^\wedge_x$ 的核。例如，$D(a_\alpha, 1)$ 是类的集合

$$\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_\alpha u^j_\alpha\rangle.$$

$D(a_{\lambda_0}, 2)$ 包含 (10) 中最后四个直和项，以及正锥中的类 $\mathbb{F}_2[u_\alpha, a_{\lambda_0}]\langle a^i_\alpha\rangle_{i\geqslant 2}$。

定理 7. 对于 $n \geqslant 3$，$H\underline{\mathbb{F}_2}$ 的 $RO(C_{2^n})$-分次同伦具有如下结构。它是以下直和项的直和（我们将它们称为部分 $(1)-(4)$）

(1) 正锥，记为 $\pi^{C_{2^n}}_{pos}H$；(2) $D(a_{\lambda_1}, n) - \pi^{C_{2^n}}_{pos}H$；(3) $D(a_{\lambda_0}, n) - D(a_{\lambda_1}, n) - \pi^{C_{2^n}}_{pos}H$；(4) 不属于 $D(a_{\lambda_0}, n)$ 的类。

上述表示中有 $n^2 + 2n - 2$ 个直和项。这里的减号表示对所涉及的集合取差集，其中我们将向量空间与其基的集合等同起来。各部分的显式公式如下。关于部分 (2) 的封闭公式，参见注 2。

(1) $\pi_{\bigstar}^{C_{2^n}}H$ 的正锥为

$$\pi_{pos}^{C_{2^n}}H=\mathbb{F}_2[a_{\lambda_0},a_{\lambda_1},\cdots,a_{\lambda_{n-2}},a_\alpha,u_{\lambda_0},u_{\lambda_1},\cdots,u_{\lambda_{n-2}},u_\alpha]/(a_{\lambda_i}u_{\lambda_j}=0,for\ n-1\geqslant i\rangle j\geqslant 0).$$

此处为简便起见，我们在黄金关系中使用了记号 $a_{\lambda_{n-1}}=a_{2\alpha}$。

（2） $D(a_{\lambda_1}、\ n)$可归纳地计算为 $D(a_{\lambda_1}、\ n)=\varepsilon^*(D(a_{\lambda_0}、\ n-1))[a_{\lambda_0}^{\pm}]$。此处 ε^*是（4）中的映射，通过重命名将 $\pi_{\bigstar}^{C_{2^{n-1}}}H$ 识别为 $\pi_{\bigstar_{\perp\lambda_0}}^{C_{2^n}}H$ 的一个子集。

（3）以下 $2n$ 直和项由下列3个块的直和组成

$$\begin{aligned}
B_1&=\mathbb{F}_2[u_\alpha]\langle\frac{a_\alpha^{i+1}}{a_{\lambda_0}^j}\rangle\\
&\quad\oplus\mathbb{F}_2\langle a_{\lambda_0}^{-i}\rangle(\frac{[a_{\lambda_1},\cdots,a_{\lambda_{n-2}}]}{\langle 1\rangle}[u_{\lambda_1},\cdots,u_{\lambda_{n-2}}][a_\alpha])/\{gold\ relations\},\\
B_2&=\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a_{\lambda_0}^{-i}\rangle\langle 1,a_\alpha\rangle\langle u_{\lambda_0}^{-j}\rangle[{u_{\lambda_1}}^{\pm},\cdots,u_{\lambda_{n-2}}^{\pm},u_\alpha^{\pm}]\\
&\quad\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a_{\lambda_0}^{-i}\rangle\langle 1,a_\alpha\rangle\langle u_{\lambda_1}^{-j}\rangle[{u_{\lambda_2}}^{\pm},\cdots,u_{\lambda_{n-2}}^{\pm},u_\alpha^{\pm}]\\
&\quad\oplus\cdots\\
&\quad\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a_{\lambda_0}^{-i}\rangle\langle 1,a_\alpha\rangle\langle u_{\lambda_{n-2}}^{-j}\rangle[u_\alpha^{\pm}]\\
&\quad\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a_{\lambda_0}^{-i}\rangle\langle 1,a_\alpha\rangle\langle u_\alpha^{-j}\rangle\\
B_3&=\mathbb{F}_2\frac{[u_\alpha^{\pm}]}{[u_\alpha]}\langle u_{\lambda_{n-2}}^i\rangle\frac{[a_{\lambda_1}]}{\langle 1\rangle}[a_{\lambda_0}^{\pm}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\
&\quad\oplus\mathbb{F}_2\frac{[u_{\lambda_{n-2}}^{\pm},u_\alpha^{\pm}]}{[u_{\lambda_{n-2}},u_\alpha]}\langle u_{\lambda_{n-3}}^i\rangle\frac{[a_{\lambda_1}]}{\langle 1\rangle}[a_{\lambda_0}^{\pm}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\
&\quad\oplus\cdots\\
&\quad\oplus\mathbb{F}_2\frac{[u_{\lambda_{n-2}}^{\pm},\cdots,u_{\lambda_2}^{\pm},u_\alpha^{\pm}]}{[u_{\lambda_{n-2}},\cdots,u_{\lambda_2},u_\alpha]}\langle u_{\lambda_1}^i\rangle\frac{[a_{\lambda_1}]}{\langle 1\rangle}[a_{\lambda_0}^{\pm}]\langle 1,a_\alpha\rangle.
\end{aligned}$$

（4）以下 $(n-1)$ 直和项，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{F}_2\frac{[u_\alpha^{\pm}]}{[u_\alpha]}\langle u_{\lambda_{n-2}}^i\rangle[a_{\lambda_0}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\
\oplus&\mathbb{F}_2\frac{[u_\alpha^{\pm},u_{\lambda_{n-2}}^{\pm}]}{[u_\alpha,u_{\lambda_{n-2}}]}\langle u_{\lambda_{n-3}}^i\rangle[a_{\lambda_0}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\
\oplus&\cdots\\
\oplus&\mathbb{F}_2\frac{[u_\alpha^{\pm},u_{\lambda_{n-2}}^{\pm},\cdots,u_{\lambda_1}^{\pm}]}{[u_\alpha,u_{\lambda_{n-2}},\cdots,u_{\lambda_1}]}\langle u_{\lambda_0}^i\rangle[a_{\lambda_0}]\langle 1,a_\alpha\rangle.
\end{aligned}$$

注1。第 (4) 部分中的每个直和项都必须对 u的非负次幂取模，因为它们包含在正锥中。还请注意，若将 B_1 的第二个直和项视为0，则 $n=2$ 情形也可纳入我们的定理。

注 2。部分 (2) 也可以表示为闭式公式。对于每个 n， $D(a_{\lambda_0}n)$ 由部分 (2)、(3) 以及 $a_{\lambda_0}^m$ 个 B_1 中的元素组成，其中取适当的 m，使所得元素位于正锥中。这些元素将构成群 $C_{2^{n+1}}$的部分 (2)（以及部分 $\pi_{pos}^{C_{2^{n+1}}}$）。如果我们用 $Part_{(i)}^{C_{2^n}}$、$i=2$、3 来表示 C_{2^n}的部分 (2)和 (3)，那么闭式

公式为

$$\begin{aligned}Part_{(2)}^{C_{2^n}} =&((\varepsilon^*)^{n-3}Part_{(2)}^{C_8})[a_{\lambda_{n-4}}^{\pm},\cdots,a_{\lambda_0}^{\pm}]\\ &\oplus((\varepsilon^*)^{n-3}Part_{(3)}^{C_8})[a_{\lambda_{n-4}}^{\pm},\cdots,a_{\lambda_0}^{\pm}]\\ &\oplus((\varepsilon^*)^{n-4}Part_{(3)}^{C_{16}})[a_{\lambda_{n-5}}^{\pm},\cdots,a_{\lambda_0}^{\pm}]\\ &\oplus\cdots\\ &\oplus((\varepsilon^*)^2Part_{(3)}^{C_{2^{n-2}}})[a_{\lambda_1}^{\pm},a_{\lambda_0}^{\pm}]\\ &\oplus((\varepsilon^*)Part_{(3)}^{C_{2^{n-1}}})[a_{\lambda_0}^{\pm}]\end{aligned}$$

对于 $n\geqslant 4$。这里 $(\varepsilon^*)^i$ 表示重命名过程的迭代。

我们将通过归纳法证明该定理。首先回顾正锥的定义

$$\pi_{pos}^{C_{2^n}}H=\underset{n\in\mathbb{Z},m_i\geqslant 0}{\oplus}\pi_{n-m_0\lambda_0-m_1\lambda_1-\cdots-m_{n-2}\lambda_{n-2}-m_{n-1}\alpha}^{C_{2^n}}H.$$

它是 $\pi_\star^{C_{2^n}}H$ 的子环，并且有一种特别简单的描述。整个同伦群是这个子环上的代数。

引理 8. 我们有 $D(a_{\lambda_1}、\ n)\subset D(a_{\lambda_0}、\ n)$。

证明。正如之前提到的，$a_{\lambda_1}=0$ 在 $\pi_\star^{C_{2^n}}H_h$ 中。由于 $\pi_\star^{C_{2^n}}H$ 中的类来自 $\pi_\star^{C_{2^n}}H_h$ 的一个商（因为我们讨论的是向量空间，所以它也是一个子空间），或是 $\pi_\star^{C_{2^n}}\tilde{H}$ 的一个子空间，因此若取 $x\in D(a_{\lambda_1}、\ n)$，它不可能来自 $\pi_\star^{C_{2^n}}H_h$。由此，x 是从 $\pi_\star^{C_{2^n}}\tilde{H}$ 提升而来的，其中 x 生成一个 a_{λ_0}-塔 $\langle x\rangle[a_{\lambda_0}^{\pm}]$。同样，由于这些类可被 a_{λ_1} 整除，它在连接同态 δ_n 下不可能映到任何元素。我们推得，若 $x\in D(a_{\lambda_1}、\ n)$，则 $\langle x\rangle[a_{\lambda_0}^{\pm}]\in\pi_\star^{C_{2^n}}H$，因此 $x\in D(a_{\lambda_0}、\ n)$。□

引理 9。$D(a_{\lambda_1}、\ n)$可以归纳地计算为 $D(a_{\lambda_1}、\ n)=\varepsilon^*(D(a_{\lambda_0}、\ n-1))[a_{\lambda_0}^{\pm}]$。这里，$\varepsilon^*$是（4）中的映射，它通过重命名将 $\pi_\star^{C_{2^{n-1}}}H$ 识别为$\pi_{\star_{\perp\lambda_0}}^{C_{2^n}}H$ 的子集。

证明。我们已在前一个引理中证明，任意 $x\in D(a_{\lambda_1}、\ n)$ 都会生成一个无限的a_{λ_0}塔 $\langle x\rangle[a_{\lambda_0}^{\pm}]\in\pi_\star^{C_{2^n}}H$。令 $D(\overline{a_{\lambda_1}}、\ n)\subset D(a_{\lambda_1}、\ n)$为该子集

$$D(\overline{a_{\lambda_1}},n)=\{y\in D(a_{\lambda_1},n)|y\,\text{does not involve the class }a_{\lambda_0}\}.$$

那么 $D(\overline{a_{\lambda_1}}、\ n)[a_{\lambda_0}^{\pm}]=D(a_{\lambda_1}、\ n)$以及 $D(\overline{a_{\lambda_1}}、\ n)=\varepsilon^*(D(a_{\lambda_0}、\ n-1))$。 □

证明。（定理（7）的证明）

下一节的直接计算表明，当 $n=3$ 时定理成立。假设定理对 $n-1$ 成立。我们如下证明它对 n 成立。

我们首先证明映射 $\pi_{\star_{\perp\lambda_0}}^{C_{2^n}}H_h\to\pi_{\star_{\perp\lambda_0}}^{C_{2^n}}H$为 0。左侧的类为

$$\pi_{\star_{\perp\lambda_0}}^{C_{2^n}}H_h=\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}(\frac{u_{\lambda_0}}{a_{\lambda_0}})^i\rangle[u_\alpha^{\pm},u_{\lambda_1}^{\pm},\cdots,u_{\lambda_{n-2}}^{\pm}]\langle 1,a_\alpha\rangle$$

根据推论 (5)。它们必须映射到可被 $u_\alpha,u_{\lambda_1},\cdots,u_{\lambda_{n-2}}$ 无限整除的类。由归纳公式 (4)，

$$\pi_{\star_{\perp\lambda_0}}^{C_{2^n}}H\xleftarrow[\cong]{\varepsilon^*}\pi_\star^{C_{2^{n-1}}}H,$$

它们在 $\pi_\star^{C_{2^{n-1}}}H$ 中对应于无限可 $u_\alpha,u_{\lambda_0},\cdots,u_{\lambda_{n-3}}$ 整除的类。根据归纳，唯一无限可 u_{λ_0} 整除的类位于 B_2 的第 (3) 部分。通过考察次数，并运用可除性和线性，我们只需证明这些映射

$$\Sigma^{-1}(\frac{u_{\lambda_0}}{a_{\lambda_0}})^iu_{\lambda_1}^{-i-1}\xrightarrow{?}\Sigma^{-1}a_{\lambda_1}^{-i}u_{\lambda_1}^{-1}\tag{11}$$

在次数 $(i+1)\lambda_1-3, i\geqslant 1$ 上为 0。我们通过计算麦基函子 $\pi^{C_{2^n}}_{(i+1)\lambda_1-3}H=\underline{H^3_{C_{2^n}}}(S^{(i+1)\lambda_1};\ \underline{\mathbb{F}_2})$, $i\geqslant 1$ 来证明这一点。由于 $S^{(i+1)\lambda_1}$ 是维数大于或等于 4 的 C_{2^n}-CW 复形，而我们只关心它们的三阶上同调，因此这些值不依赖于 i，我们只需计算 $\underline{H^3_{C_{2^n}}}(S^{2\lambda_1};\ \underline{\mathbb{F}_2})$。现在考察用于计算上同调的不动点麦基函子的胞腔链的最高两个层次，得到

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{F}_2 & \xrightarrow{N} & \mathbb{F}_2[C_{2^n}/C_2]^{C_{2^n}} & \xrightarrow{1-\gamma=0} & \mathbb{F}_2[C_{2^n}/C_2]^{C_{2^n}} & \xrightarrow{N=0} & \mathbb{F}_2[C_{2^n}/C_2]^{C_{2^n}} & \xrightarrow{1-\gamma=0} & \mathbb{F}_2[C_{2^n}/C_2]^{C_{2^n}} \\
{\scriptstyle 1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle 0} & & & & & & {\scriptstyle res}\downarrow\uparrow{\scriptstyle tr} & & \\
\mathbb{F}_2 & \xrightarrow{N} & \mathbb{F}_2[C_{2^n}/C_2]^{C_{2^{n-1}}} & \xrightarrow{1-\gamma} & \mathbb{F}_2[C_{2^n}/C_2]^{C_{2^{n-1}}} & \xrightarrow{N=0} & \mathbb{F}_2[C_{2^n}/C_2]^{C_{2^{n-1}}} & \xrightarrow{1-\gamma} & \mathbb{F}_2[C_{2^n}/C_2]^{C_{2^{n-1}}}
\end{array}$$

这里有 $N=1+\gamma+\gamma^2+\cdots+\gamma^{2^{n-1}-1}$。我们从上图推得 $\underline{H}^3(C_{2^n}/C_{2^n})=\mathbb{F}_2\langle N\rangle$和 $\underline{H^3}(C_{2^n}/C_{2^{n-1}})=\mathbb{F}_2\langle N\rangle$，以及 $res=1, tr=0$。注意，对于 $i\geqslant 3$, $i^*_{C_4}\lambda_1=2\alpha$和 $i^*_{C_2}\lambda_1=i^*_e\lambda_1=2$，有 $i^*_{C_{2^i}}\lambda_1=\lambda_1$。归纳可知 $\underline{\pi^{C_{2^n}}_{2\lambda_1-3}H}$ 是

$$\begin{array}{c}
\mathbb{F}_2 \\
{\scriptstyle 1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle 0} \\
\mathbb{F}_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
{\scriptstyle 1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle 0} \\
\mathbb{F}_2 \\
\downarrow\uparrow \\
0 \\
\downarrow\uparrow \\
0
\end{array}$$

其中 $res^{C_{2^i}}_{C_{2^{i-1}}}=1, tr^{C_{2^i}}_{C_{2^{i-1}}}=0, i\geqslant 3$。因此，映射 (11) 是否为 0 可归结为 C_4 级，而这已经证明为 0。

现在我们知道映射 $\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar\perp\lambda_0}H_h\to\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar\perp\lambda_0}H$ 为 0。由于 $\widetilde{H}$ 是 a_{λ_0}-局部的，我们得到

$$\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar}\widetilde{H}=(\Sigma\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar\perp\lambda_0}H_h)[a^{\pm}_{\lambda_0}]\oplus\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar\perp\lambda_0}H[a^{\pm}_{\lambda_0}]. \tag{12}$$

这里的 Σ 表示在连接同态下取原像

$$\delta_n:\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar}\widetilde{H}\to\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar-1}H_h.$$

我们分别用 K_n 和 C_n 表示核和余核。对于 $\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar\perp\lambda_0}H_h[a^{\pm}_{\lambda_0}]$ 中的元素，容易验证我们得到

$$\mathbb{F}_2\langle u^i_{\lambda_0}\rangle[a_{\lambda_0}][u^{\pm}_{\alpha},u^{\pm}_{\lambda_1},\cdots,u^{\pm}_{\lambda_{n-2}}]\langle 1,a_{\alpha}\rangle\in K_n, \tag{13}$$

and

$$\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_{\lambda_0}\rangle[u^{\pm}_{\alpha},u^{\pm}_{\lambda_1},\cdots,u^{\pm}_{\lambda_{n-2}}]\langle 1,a_{\alpha}\rangle \tag{14}$$

$$\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}a^{-i}_{\lambda_0}u^{-j}_{\lambda_0}\rangle[u^{\pm}_{\alpha},u^{\pm}_{\lambda_1},\cdots,u^{\pm}_{\lambda_{n-2}}]\langle 1,a_{\alpha}\rangle \tag{15}$$

C_n 中的结果。注意，由于 u_{λ_0} 的负幂，(15) 中的类不可能被 δ_n 命中。它们是 B_2 的第一批直和项。(13) 中的类分解为

$$\begin{aligned}&\mathbb{F}_2\langle u_{\lambda_0}^i\rangle[a_{\lambda_0}][u_\alpha,u_{\lambda_1},\cdots,u_{\lambda_{n-2}}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\ \oplus&\mathbb{F}_2\langle u_{\lambda_0}^i\rangle[a_{\lambda_0}]\frac{[u_\alpha^\pm,u_{\lambda_1}^\pm,\cdots,u_{\lambda_{n-2}}^\pm]}{[u_\alpha,u_{\lambda_1},\cdots,u_{\lambda_{n-2}}]}\langle 1,a_\alpha\rangle.\end{aligned}$$

第一组直和项与 $\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar\perp\lambda_0}H[a_{\lambda_0}]$（见下一段）共同构成 C_{2^n} 的新正锥。第二个直和项是第 (4) 部分中的最后几个直和项。注意

$$\begin{aligned}\pi^{C_{2^n}}_{pos}H=&\mathbb{F}_2[a_{\lambda_1},\cdots,a_{\lambda_{n-2}},a_\alpha,u_{\lambda_1},\cdots,u_{\lambda_{n-2}},u_\alpha]/\{\text{gold relations}\}[a_{\lambda_0}]\\ &\oplus\mathbb{F}_2\langle u_{\lambda_0}^i\rangle[a_{\lambda_0}][u_\alpha,u_{\lambda_1},\cdots,u_{\lambda_{n-2}}]\langle 1,a_\alpha\rangle.\end{aligned}$$

现在我们来看来自 $\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar\perp\lambda_0}H[a_{\lambda_0}^\pm]$ 的元素。由于 δ_n 的目标仅由 a_{λ_0} 的负幂构成，因此有 $\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar\perp\lambda_0}H[a_{\lambda_0}]\in K_n$。对于 $\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar\perp\lambda_0}H\langle a_{\lambda_0}^{-i}\rangle$，首先有以下映射

$$[u_{\lambda_1},\cdots,u_{\lambda_{n-2}},u_\alpha]\langle a_{\lambda_0}^{-i}\rangle\langle 1,a_\alpha\rangle\mapsto[u_{\lambda_1},\cdots,u_{\lambda_{n-2}},u_\alpha]\langle\Sigma^{-1}a_{\lambda_0}^{-i}\rangle\langle 1,a_\alpha\rangle.$$

由黄金关系以及 Tate 方块第二行中的每个谱都是 u_{λ_0}-局部的这一事实，可知

$$a_{2\alpha}=a_{\lambda_i}=0,\quad \text{for } n-2\geqslant i\geqslant 0 \tag{16}$$

在 $\pi^{C_{2^n}}_\bigstar H_h$ 中。因此我们在 K_n 中得到以下类

$$\mathbb{F}_2[u_\alpha]\langle a_\alpha^j\rangle_{j\geqslant 2}\langle a_{\lambda_0}^{-i}\rangle \tag{17}$$

$$\oplus\langle a_{\lambda_0}^{-i}\rangle(\frac{[a_{\lambda_1},\cdots,a_{\lambda_{n-2}}]}{\langle 1\rangle}[u_{\lambda_1},\cdots,u_{\lambda_{n-2}}][a_\alpha])/\{\text{gold relations}\}. \tag{18}$$

这里，$\frac{[a_{\lambda_1},\cdots,a_{\lambda_{n-2}}]}{\langle 1\rangle}$ 表示 $\mathbb{F}_2$-代数映射的增广理想

$$\mathbb{F}_2[a_{\lambda_1},\cdots,a_{\lambda_{n-2}}]\to\mathbb{F}_2,a_{\lambda_i}\mapsto 0.$$

它们是 B_1 第 (3) 部分中的类。

我们还需要考虑第 (4)、B_3 部分以及 B_2 的其余直和项。根据归纳假设，(4) 中的 $C_{2^{n-1}}$ 部分有以下 $(n-2)$ 个直和项（我们通过 ϵ^* 对它们重新命名，以便将它们视为 $\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar\perp\lambda_0}H$ 的一个子集）

$$\begin{aligned}&\mathbb{F}_2\frac{[u_\alpha^\pm]}{[u_\alpha]}\langle u_{\lambda_{n-2}}^i\rangle[a_{\lambda_1}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\ \oplus&\mathbb{F}_2\frac{[u_\alpha^\pm,u_{\lambda_{n-2}}^\pm]}{[u_\alpha,u_{\lambda_{n-2}}]}\langle u_{\lambda_{n-3}}^i\rangle[a_{\lambda_1}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\ \oplus&\cdots\\ \oplus&\mathbb{F}_2\frac{[u_\alpha^\pm,u_{\lambda_{n-2}}^\pm,\cdots,u_{\lambda_2}{}^\pm]}{[u_\alpha,u_{\lambda_{n-2}},\cdots,u_{\lambda_2}]}\langle u_{\lambda_1}^i\rangle[a_{\lambda_1}]\langle 1,a_\alpha\rangle.\end{aligned} \tag{19}$$

由于 $a_{\lambda_1}=0$ 属于 $\pi^{C_{2^n}}_\bigstar H_h$，含有 a_{λ_1} 正幂的类将属于 K_n，而它们正是构成 B_3 的类。(19) 中不含 a_{λ_1} 的类，以及它们在 $C_{2^{n-1}}$ 正锥中的对应类（再次通过 ε^* 重新命名），与 $a_{\lambda_0}^{-i}$ 配对时会命中 (14) 中的类。以这种方式被消去的 (14) 中的类为

$$\begin{aligned}&\mathbb{F}_2[u_\alpha^\pm]\langle\Sigma^{-1}a_{\lambda_0}^{-i}\rangle\langle u_{\lambda_{n-2}}^i\rangle[a_{\lambda_1}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\ \oplus&\mathbb{F}_2[u_\alpha^\pm,u_{\lambda_{n-2}}^\pm]\langle\Sigma^{-1}a_{\lambda_0}^{-i}\rangle\langle u_{\lambda_{n-3}}^i\rangle[a_{\lambda_1}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\ \oplus&\cdots\\ \oplus&\mathbb{F}_2[u_\alpha^\pm,u_{\lambda_{n-2}}^\pm,\cdots,u_{\lambda_2}{}^\pm]\langle\Sigma^{-1}a_{\lambda_0}^{-i}\rangle\langle u_{\lambda_1}^i\rangle[a_{\lambda_1}]\langle 1,a_\alpha\rangle.\end{aligned}$$

现在，类 $\mathbb{F}_2[u_\alpha]\langle a_{\lambda_0}^{-i}\rangle\langle 1、\ a_\alpha\rangle \in \pi_{pos}^{C_{2^{n-1}}} H\langle a_{\lambda_0}^{-i}\rangle$ 也会消去 **(14)** 中相应的类，而商类就是 B_2 的其余直和项。**(19)** 中与 $[a_{\lambda_0}]$ 配对的类构成了第 (4) 部分中的类。□

5. More sample computations for $n = 3, 4$

本节给出 $n = 3, 4$ 的计算。 $n = 3$ 情形是定理（7）归纳证明的起始情形，因此我们手工完成了计算，并在此呈现。 $n = 4$情形则用于说明如何运用我们的归纳方法，快速计算更大的 n。

命题 10. 我们有

$$
\begin{aligned}
&\pi_\star^{C_8} H = \mathbb{F}_2[a_\alpha, a_{\lambda_1}, a_{\lambda_0}, u_\alpha, u_{\lambda_1}, u_{\lambda_0}]/\{\textit{gold relations}\}\\
&(L2) \oplus \mathbb{F}_2\langle a_\alpha^{i+1} a_{\lambda_1}^{-j}\rangle [u_\alpha][a_{\lambda_0}^{\pm}]\\
&(L3) \oplus \mathbb{F}_2\langle \Sigma^{-1} a_\alpha^{-i} u_\alpha^{-j}\rangle [a_{\lambda_1}^{\pm}][a_{\lambda_0}^{\pm}]\\
&(L4) \oplus \mathbb{F}_2\langle \Sigma^{-1} a_{\lambda_1}^{-i} u_{\lambda_1}^{-j}\rangle [u_\alpha^{\pm}]\langle 1, a_\alpha\rangle [a_{\lambda_0}^{\pm}]\\
&(L5) \oplus \mathbb{F}_2\langle \Sigma^{-1} a_{\lambda_1}^{-i} u_\alpha^{-j}\rangle \langle 1, a_\alpha\rangle [a_{\lambda_0}^{\pm}]\\
&(L6) \oplus \mathbb{F}_2\langle a_\alpha^{i+1} a_{\lambda_0}^{-j}\rangle [u_\alpha]\\
&(L7) \oplus \mathbb{F}_2 \frac{[a_{\lambda_1}]}{\langle 1\rangle}[u_{\lambda_1}][a_\alpha]/\{\textit{gold relations}\}\langle a_{\lambda_0}^{-j}\rangle\\
&(L8) \oplus \mathbb{F}_2\langle \Sigma^{-1} \frac{1}{a_{\lambda_0}^i u_{\lambda_0}^j}\rangle \langle 1, a_\alpha\rangle [u_{\lambda_1}^{\pm}, u_\alpha^{\pm}]\\
&(L9) \oplus \mathbb{F}_2\langle \Sigma^{-1} \frac{1}{a_{\lambda_0}^i u_{\lambda_1}^j}\rangle \langle 1, a_\alpha\rangle [u_\alpha^{\pm}]\\
&(L10) \oplus \mathbb{F}_2\langle \Sigma^{-1} \frac{1}{a_{\lambda_0}^i u_\alpha^j}\rangle \langle 1, a_\alpha\rangle\\
&(L11) \oplus \mathbb{F}_2 \frac{[u_\alpha^{\pm}]}{[u_\alpha]}\langle u_{\lambda_1}^i\rangle \frac{[a_{\lambda_1}]}{\langle 1\rangle}[a_{\lambda_0}^{\pm}]\langle 1, a_\alpha\rangle\\
&(L12) \oplus \mathbb{F}_2 \frac{[u_\alpha^{\pm}]}{[u_\alpha]}\langle u_{\lambda_1}^i\rangle [a_{\lambda_0}]\langle 1, a_\alpha\rangle\\
&(L13) \oplus \mathbb{F}_2 \frac{[u_{\lambda_1}^{\pm}, u_\alpha^{\pm}]}{[u_{\lambda_1}, u_\alpha]}\langle u_{\lambda_0}^i\rangle [a_{\lambda_0}]\langle 1, a_\alpha\rangle.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

在上述表示中， $(L2) - (L5)$属于 (2)， $(L6) - (L11)$属于 (3)，而 $(L12)$ –属于 (4)。 $(L13)$

为了计算 C_{16}，注意到 $(L2) - (L11)$经由 ε^*重命名后，对于 C_{16} 而言都可被 a_{λ_1} 无限整除（对于 C_8而言即为 a_{λ_0} ），因此通过加上$[a_{\lambda_0}^{\pm}]$，对$\pi_\star^{C_{16}} H$ 的 (2) 部分作出了贡献。再结合正锥，以及由显式公式给出的 (3) 和 (4)部分，我们便得到 $\pi_\star^{C_{16}} H$。

6. 对偶性

考虑正锥的以下子空间

$$\mathbb{F}_2[a_{\lambda_0}, u_\alpha, u_{\lambda_{n-2}}, \cdots, u_{\lambda_0}]\langle 1, a_\alpha\rangle.$$

它与部分 (4) 的直和为

$$\begin{aligned}&\mathbb{F}_2[u_\alpha]\\ \oplus&\mathbb{F}_2[u_\alpha^{\pm}]\langle u^i_{\lambda_{n-2}}\rangle[a_{\lambda_0}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\ \oplus&\mathbb{F}_2[u_\alpha^{\pm},u^{\pm}_{\lambda_{n-2}}]\langle u^i_{\lambda_{n-3}}\rangle[a_{\lambda_0}]\langle 1,a_\alpha\rangle\\ \oplus&\cdots\\ \oplus&\mathbb{F}_2[u_\alpha^{\pm},u^{\pm}_{\lambda_{n-2}},\cdots,u^{\pm}_{\lambda_1}]\langle u^i_{\lambda_0}\rangle[a_{\lambda_0}]\langle 1,a_\alpha\rangle.\end{aligned}\tag{21}$$

这些类看起来像是 B_2 中的那些类，只不过每个元素都取了逆元，并且整体平移了一点，这并非巧合。它们通过安德森对偶性相关联。仔细考察并进行简单的胞腔计算可知，我们有

$$\underline{\pi^{C_{2^n}}_{\lambda_0-*}H}=\begin{cases}\underline{\mathbb{F}_2}^*, & *=2,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{22}$$

其中 $\pi^{C_{2^n}}_{\lambda_0-2}H=\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\lambda_0}}\frac{a_\alpha}{u_\alpha}\rangle$。也就是说，我们有

$$H\underline{\mathbb{F}_2}^*\simeq\Sigma^{2-\lambda_0}H\underline{\mathbb{F}_2}.$$

为方便起见，我们记 $\Lambda=\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\lambda_0}}\frac{a_\alpha}{u_\alpha}$。

回忆一下，对于任意内射阿贝尔群 A，函子 $Hom_{Ab}(-,A)$ 是正合的，而 $X\mapsto Hom_{Ab}(\pi_{-*}(X),A)$ 在 G-谱范畴上定义了一个上同调理论，因此由一个 G-谱 I_A 表示。群 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是内射的，因此我们有 $I_{\mathbb{Q}}$ 和 $I_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$。$I_{\mathbb{Z}}$ 由纤维序列定义

$$I_{\mathbb{Z}}\to I_{\mathbb{Q}}\to I_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}.$$

G-谱 E的安德森对偶 $I_{\mathbb{Z}}(E)=F(E$定义为 $I_{\mathbb{Z}})$。关于安德森对偶，我们有以下结果，见 [Zen17, 命题 4.20]

命题 11. 对于 G-谱 E 和 X，我们有一个 $RO(C_{2^n})$-分次麦基函子的短正合列

$$0\to Ext_L(E_{\bigstar-1}(X),\mathbb{Z})\to I_{\mathbb{Z}}(E)^{\bigstar}(X)\to Hom_L(E_{\bigstar}(X),\mathbb{Z})\to 0.$$

这里 Ext_L,Hom_L 是逐层函子。例如，麦基函子 $Ext_L(E_{\bigstar-1}(X),\mathbb{Z})$是通过对 $E_{\bigstar-1}(X)$ 的每一层应用 $Ext^1(-,\mathbb{Z})$：$Ab\to Ab$ 得到的，并利用第一个变量的反变性得到限制映射和迁移映射。

由以下显然事实 $Hom(\underline{\mathbb{F}_2},\mathbb{Q})=\underline{0},Hom(\underline{\mathbb{F}_2},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=\underline{\mathbb{F}_2}^*,$，其中 $\underline{\mathbb{F}_2}^*$ 是 $\underline{\mathbb{F}_2}$的逐层对偶，我们得到

$$I_{\mathbb{Z}}(H\underline{\mathbb{F}_2})\simeq\Sigma^{-1}H\underline{\mathbb{F}_2}^*\simeq\Sigma^{1-\lambda_0}H\underline{\mathbb{F}_2}.$$

本文只关注（11）中麦基函子的 C_{2^n}/C_{2^n} 级。代入 $E=H\underline{\mathbb{F}_2}$、$X=S^0$，并在 C_{2^n}/C_{2^n} 级处求值，我们得到一个阿贝尔群短正合列

$$0\to Ext^1(\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar-1}H,\mathbb{Z})\to\pi^{C_{2^n}}_{\lambda_0-1-\bigstar}H\to Hom_{Ab}(\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar}H,\mathbb{Z})\to 0.$$

由于 $\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar}H$ 始终是 2-扭元，最后一个群变为 0，因此我们得到一个同构

$$Ext^1(\pi^{C_{2^n}}_{\bigstar-1}H,\mathbb{Z})\xrightarrow[D]{\cong}\pi^{C_{2^n}}_{\lambda_0-1-\bigstar}H.\tag{23}$$

这个同构给出了 (21) 与 B_2 之间的对偶性。为方便起见，我们将其称为 D。在 D 下，我们有如下显然的对偶性

$$D(1)=\Lambda, D(\Lambda)=1, D(a_\alpha)=\Lambda/a_\alpha=\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\lambda_0}u_\alpha},$$
$$D(a_{\lambda_0}^k u_\alpha^{i_{n-1}}u_{\lambda_{n-2}}^{i_{n-2}}\cdots u_{\lambda_1}^{i_1}u_{\lambda_0}^{i_0})=\Lambda/(a_{\lambda_0}^k u_\alpha^{i_{n-1}}u_{\lambda_{n-2}}^{i_{n-2}}\cdots u_{\lambda_1}^{i_1}u_{\lambda_0}^{i_0}),$$
$$D(a_\alpha a_{\lambda_0}^k u_\alpha^{i_{n-1}}u_{\lambda_{n-2}}^{i_{n-2}}\cdots u_{\lambda_1}^{i_1}u_{\lambda_0}^{i_0})=\Lambda/(a_\alpha a_{\lambda_0}^k u_\alpha^{i_{n-1}}u_{\lambda_{n-2}}^{i_{n-2}}\cdots u_{\lambda_1}^{i_1}u_{\lambda_0}^{i_0}).$$

References

[Boa99] J. Michael Boardman. 条件收敛谱序列。载于 *Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998)* 239 *Contemp. Math.* 49 84 , 第 卷，页 码 – 。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999。[Geo19] Nick Georgakopoulos. 一点的整系数同调。 *arXiv:1912.06758*，2019。[GM95] J. P. C. Greenlees 和 J. P. May. 广义Tate上同调。 *Mem. Amer. Math. Soc.*, 113 543 +178 1995 ( ):viii , . [Gre18] J. P. C. Greenlees. 具有实结构的上同调理论的四种方法。载于 *An alpine bouquet of algebraic topology* 708 *Contemp. Math.* 139 156 [ ], [2018] , 第 卷，页 码 – 。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，©2018。[HHR16] M. A. Hill、M. J. Hopkins 和 D. C. Ravenel. 关于 Kervaire不变量为一的元素不存在性。 *Ann. of Math. (2)*, 184(1):1–262, 2016。[HHR17] Michael A. Hill、Michael J. Hopkins 和 Douglas C. Ravenel. 实 K-理论的类比的切片谱序列。 *Forum Math.*, 29(2):383–447, 2017。[Hil22] Michael A. Hill. 自由性与等变稳定同伦。 *J. Topol.*, 15(2):359–397, 2022。[HK01] Po Hu 和 Igor Kriz. 实定向同伦论及 Adams-Novikov 谱序列的一个类比。 *Topology*, 40(2):317–399, 2001。[HK17] John Holler 和 Igor Kriz. 关于 RO(G)-分次等变"普通"上同调，其中 G 是 $\mathbb{Z}/2$的幂。 *Algebr. Geom. Topol.*, 17(2):741–763, 2017。[HM20] Eric Hogle 和 Clover May. Rep(C_2)-复形等变上同调的自由性定理。*Topology Appl.*, 285:107413, 30, 2020。[LMSM86] L. G. Lewis, Jr.、J. P. May、M. Steinberger 和 J. E. McClure. *Equivariant stable homotopy theory*, *Lecture Notes in Mathematics*第1213卷。Springer-Verlag，柏林，1986。另有 J. E. McClure 撰写的内容。[May20] Clover May. $RO(C_2)$-分次 Bredon上同调的结构定理。 *Algebr. Geom. Topol.*, 20 4 1691( ): –1728, 2020。[Yan22] Guoqi Yan. $H\underline{\mathbb{Z}}$ 的 $RO(C_4)$-分次同伦及 C_{p^n}的局部化定理。 *arXiv:2208.14368*, 2022。[Zen17] Mingcong Zeng. 循环 p-群中的等变 Eilenberg-Mac Lane 谱。 *arXiv:1710.01769*, 2017。

Email address: gyan@nd.edu