arXiv:2302.01509v1 [math.PR] 3 Feb 2023

具有 $|x-y|^{-2}$ 相互作用的Dyson层级模型中的双指数易感性增长

Philip Easo*、Tom Hutchcroft*和Jana Kurrek†

* 物理、数学与天文学部，加州理工学院，电子邮箱：peaso@caltech.edu 和 t.hutchcroft@caltech.edu

† 数学与统计学系，麦吉尔大学，电子邮箱：jana.kurrek@mail.mcgill.ca

2023年2月6日

摘要。我们研究定义在 d维层级格上的长程渗流，其中每条可能的边 $\{x,y\}$ 都以相互独立的随机方式纳入，纳入概率为 $1-\exp(-\beta\|x-y\|^{-d-\alpha})$，其中 $\alpha>0$ 为固定值，$\beta\geq 0$ 为参数。已知该模型在某个 $\beta_c<\infty$ 处发生相变，当且仅当 $\alpha<d$。我们研究参数范围$\alpha\geq d$内的模型，此时 $\beta_c=\infty$，并证明易感性 $\chi(\beta)$（即原点处簇的期望体积）满足

$$\chi(\beta)=\begin{cases}\beta^{\frac{d}{\alpha-d}-o(1)} & \text{if } \alpha>d,\\ e^{e^{\Theta(\beta)}} & \text{if } \alpha=d\end{cases}\qquad \text{as } \beta\uparrow\infty.$$

这解决了 Georgakopoulos 和 Haslegrave（2020）提出的一个问题。他们证明，当 $\alpha=d$ 时，$\chi(\beta)$ 的增长介于指数级和双指数级之间。我们的结果表明，类似的结论也适用于若干相关模型，包括 Dyson 层次 Ising 模型；我们所确立的双指数易感性增长，即便在启发式层面上，对该模型而言似乎也是一种新现象。

1 引言

层级模型 是统计力学中的玩具模型，呈现出与欧几里得对应模型相似的现象，但由于具有精确的递归嵌套结构，研究起来要容易得多。Dyson 首次提出这一模型 [14] 是在 1969 年。如今，数学物理和理论物理领域已有大量关于层级模型的文献，Dyson 的原始论文被引用超过 1000 次；关于层级模型在物理学中的应用概述，读者可参阅[10, 11] ；关于层级模型中临界现象严格分析的综述，则可参阅 [3, 7] 。除用于物理学研究外，层级模型也被用于研究疫情传播 [24]和种群动力学 [25], ，在这些领域，它们或许比欧几里得模型或平均场模型都更贴近现实。

本文研究层级模型在其下临界维数及以下维数中的低温行为；在这些维数下不会发生相变，而这一课题此前在文献中受到的关注相对较少。我们将看到，模型在下临界维数本身呈现出特别有趣的行为，并具有某些精确的自相似性质。我们重点研究层级渗流；凭借标准的随机支配性质，我们的结果可立即推广为其他若干模型的类似结果，包括 Ising 模型和波茨模型。

现在来定义这个模型。给定维数 $d \in \mathbb{N}$ 和边长 $L \in \mathbb{N}$，其中 $L \geq 2$，层级格 $\mathbb{H}_L^d$ 是群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^d$，并配备如下超度量$\|x-y\| := L^{\max\{i:\, x_i \neq y_i\}}$，对所有不同的 x、$y \in \mathbb{H}_L^d$均成立。（该度量不是范数，但我们采用这种记法，以强调它与由范数在 $\mathbb{R}^d$上诱导的 $\mathbb{Z}^d$ 度量之间的相似性。）该空间中半径为 L^n $(n > 0)$的超度量球称为 n-块，其中包含原点的 n-块记作 Λ_n。作为度量空间，$\mathbb{H}_L^d$ 也可以递归构造：先取$\Lambda_0 = \{0\}$，然后对每个 $n \geq 0$，取 Λ_{n+1} 为 L^d 个 Λ_n 的不交副本之并，并将属于 Λ_n的不同副本的每一对 x、$y \in \Lambda_{n+1}$ 之间的距离定义为 $\|x-y\| = L^{n+1}$。给定参数 α、$\beta > 0$，我们构造一个顶点集为 $\mathbb{H}_L^d$ 的随机图 ω，其中每条可能的边 $xy := \{x, y\}$ 都以概率 $1 - \exp(-\beta\|x-y\|^{-d-\alpha})$独立地加入。我们称此模型为层级格上的长程渗流。我们用 $\mathbb{P}_\beta$表示其概率分布，省略 α，因为我们通常将其视为固定值，而 β 则会变化。

我们主要关注随机图ω的连通分支（称为簇）的几何性质。我们用 $K_x = K_x(\omega)$ 表示包含元素 x 的簇；$x \leftrightarrow y$ 表示 $K_x = K_y$，而 $x \leftrightarrow \infty$ 表示 K_x 是无限的。（请注意，所有这些概念都取决于随机图 ω；但只要不会造成混淆，我们便在记号中省略这一点。）已知临界参数 $\beta_c := \sup\{\beta : \mathbb{P}_\beta(o \leftrightarrow \infty) = 0\}$ 有限，当且仅当$d > \alpha$ [8, 14, 23]，因此可以将 $d = \alpha$ 视为该模型的下临界维数。由于有关该模型的许多最有趣的问题都涉及其在$\beta = \beta_c$处及其附近的行为，先前的研究自然聚焦于 $0 < \alpha < d$ 的情形；目前，人们对该模型的临界行为已有相当深入的理解 [19, 20, 23]。

在这篇论文中，我们转而研究情形 $\alpha \geq d$，其中 $\beta_c = \infty$。尽管模型在此参数范围内没有相变，但模型对参数 β 的依赖仍十分有趣。在边缘情形 $\alpha = d$中尤其如此；如第2节所述，模型具有某种精确的自相似性。为研究这种对 β的依赖，我们特别关注模型的易感性 $\chi(\beta) := \mathbb{E}_\beta|K_0|$ 的发散速率，也就是原点簇的期望大小。根据相变锐性，易感性 $\chi(\beta)$ 有限当且仅当 $\beta < \beta_c$ [1, 13, 18],，因此 $\chi(\beta)$ 在 β取有限值时发散，当且仅当 $\alpha < d$。由此看来，边缘情形 $\alpha = d$——模型在此情形下“几乎”发生相变——或许可以用以下特征来描述：当 $\alpha = d$ 时，随着 $\beta \to \infty$，$\chi(\beta)$ 的增长速度远快于当 $\alpha > d$时的增长速度。事实上，Georgakopoulos 和 Haslegrave[1] [16]，此前研究了情形 $\alpha = d$ 下易感性的快速增长，证明了 $e^{\Omega(\beta)} \leq \chi(\beta) \leq e^{e^{O(\beta)}}$，并根据数值模拟指出，实际增长形式可能为 $e^{\Theta(\beta \log \beta)}$。

我们的主要结果出人意料地表明，易感性关于 β 实际上呈双指数增长

[1]有趣的是，这些作者出于自身的动机研究了一个等价于具有 $d = \alpha$ 的层级渗流模型，却不了解此前有关物理学中层级模型的文献。

当 $\alpha = d$时，从而彻底解决了 [16, 问题 8。1]。我们还证明，当 β时，易感性按 $\alpha > d$的幂次增长，因此这两种情形之间确实存在显著的定量差异。

定理 1.1。设 $d \geq 1$ 和 $L \geq 2$ 为整数，设 $\alpha \geq d$，并考虑层级格 $\mathbb{H}_L^d$ 上的长程渗流，其中任意两个顶点以概率1 −exp($-\beta\|x-y\|^{-d-\alpha}$)由一条边连接。那么

$$\chi(\beta) = \begin{cases} e^{e^{\Theta(\beta)}} & if\ \alpha = d \\ \beta^{\frac{d}{\alpha-d}-o(1)} & if\ \alpha > d \end{cases}$$

当 $\beta \to \infty$时。

注 1.2。从我们的角度来看，使 $\alpha = d$ 情形特别有趣的同一自相似性，也使该模型的欧几里得（$\mathbb{Z}^d$）对应模型在超临界区间具有丰富且呈分形状的大尺度几何，其分形维数取决于参数 β [4, 5, 9]。取 $\alpha = d = 1$ 的欧几里得模型也是一个非常有趣的例子，它展示了渗流模型发生不连续相变 [2, 12], ，也就是说，对于 $\alpha < d$ [6, 22] ，长程渗流在层级格和一维欧几里得格上的紧密类比，在 $\alpha = d$处会严重失效。

对其他模型的推论。 定理 1.1立即推出，对于大量由适当参数的伯努利渗流从上方和下方随机占优的相关模型，也成立类似的估计。例如，在 $\mathbb{H}_L^d$ 上参数为 $q \geq 1$的随机簇模型，在有限体积中定义为：对我们所考虑的伯努利渗流模型的概率分布乘以一个与 $q^{\#\text{clusters}}$成正比的权重。该模型总是被伯努利-β 渗流随机占优，同时随机占优伯努利-（β/q）渗流。特别地，若 χ（q， β）表示参数为 $\alpha = d$的模型的易感性（即原点簇的期望大小），则存在正常数 c、 C和 β_0，使得

$$e^{e^{\frac{c}{q}\beta}} \leq \chi(q,\beta) \leq e^{e^{C\beta}} \tag{1.1}$$

对任意 $q \geq 1$ 和 $\beta \geq \beta_0$均成立。（注意，当 $\alpha \geq d$ 时，由于不存在相变且吉布斯测度总是唯一的，因此无需参照边界条件即可定义易感性。）利用随机簇模型与 Potts 模型之间的 Edwards-Sokal [15] 耦合（当 $q \geq 2$ 为整数时），该耦合使两个模型的易感性相同，由此可知，同样的易感性估计也适用于具有相互作用 J（x， y）的层次 Potts 模型 $= \|x-y\|^{-d-\alpha}$，当 $\alpha = d$ 时成立；特别地，也适用于具有相互作用 $|x-y|^{-2}$的 [14] 上的 Dyson 层次 Ising 模型 $\mathbb{H}_2^1$。关于这些模型及其与渗流关系的详细背景，可见 [17]。此前似乎没有人在这些模型中发现过这种显著的双指数增长，即便是启发式层面也没有。

关于证明。两种情形 $\alpha = d$ 和 $\alpha > d$ 的证明大不相同，其中情形 $\alpha = d$ 要微妙得多，因为该模型由此产生了特殊的自相似性质。论文其余部分概述如下：

- 在第 2 节中，我们将介绍所使用的重整化框架，并在 $\alpha > d$ 的情形下给出上界 $\chi(\beta) = O(\beta^{d/(\alpha-d)})$ 的一个非常简单的证明。对于 $\alpha = d$ 的情形，

本节提出的最重要思想是，通过研究某种混合位点-键模型，我们可以用较小尺度上的渗流来控制大尺度上的渗流行为，但需要根据较小尺度上最大簇的大小调整参数。

- 在第 3 节中，我们通过证明该情形下关于 $\alpha > d$ 的定理 1.1 的一个适当下界，完成 $\chi(\beta)$ 情形的证明。下界的证明基于对第二作者在 [19] 中提出的一种尺度归纳论证的改进，该论证用于研究 $\alpha < d$区域；要在 $\alpha > d$ 情形下获得非平凡的结果，则需要对这一论证作更定量的实施。

- 在第 4 节中，我们证明了 $\alpha = d$ 定理 1.1 的撒盐重整化。下界的证明是我们论文的主要新贡献，它依赖于一种我们称为 撒盐重整化 的技术：我们利用第 2 节介绍的重整化技术进行尺度归纳，每次重整化时都略微增大参数 β，同时注意避免重整化次数过多，以致使 β 增至原值的两倍以上。这一证明的一个有趣之处在于，我们在每一步归纳中都将尺度加倍，因此所考虑的块的边长会随着步数呈双指数增长；得益于模型的自相似性，这种做法效果尤其好。最后，为使论文内容自足，我们在第 4.2 节中，基于 [16] 中引入的层级模型的关联长度概念，给出了双指数上界的一个新证明 [21]。

2 基本重整化框架

在本节中，我们将介绍相关记号，用于描述如何利用较小尺度、具有不同有效参数的过程，来控制给定尺度上的渗流过程。在此过程中，我们将推导定理 1.1 在 $\alpha > d$情况下的上界。

块及其边。设 $d \geq 1$ 和 $L \geq 2$ 为整数，$\alpha > 0$ 为常数。对于每个整数 $n \geq 0$，我们将 $\mathbb{H}_L^d$ 中半径为 L^n（$n > 0$）的超度量球称为 n-块。对于每个 $x \in \mathbb{H}_L^d$ 和 $n \geq 0$，我们记包含 x 的 n-块为 $\Lambda_n(x)$，并记包含原点的 n-块为 $\Lambda_n = \Lambda_n(0)$。换言之，Λ_n 是 $\mathbb{H}_L^d$ 的子集，由满足对所有 $i > n$ 均有 $x_i = 0$ 的那些 x 组成。我们将 $\Lambda_n(x)$ 中不同元素的无序对集合记为 $E_n(x)$，将 $\mathbb{H}_L^d$ 中不同元素的无序对集合记为 $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$，并记为 $E_n = E_n(0)$。我们还将所有距离不超过 L^k 的不同元素无序对的集合记为 $F_k = \bigcup_{x\in\mathbb{H}_L^d} E_k(x)$。

块重整化。我们定义 $\pi : \mathbb{H}_L^d \to \mathbb{H}_L^d$ 为左移映射，其定义为 $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$，并定义 $\Phi\colon \{0,1\}^E \to \{0,1\}^E$映射 $\omega \mapsto \Phi[\omega]$，规定$\Phi[\omega](e) = 1$ 当且仅当存在 $xy \in E$ 使得 $\pi(x)\pi(y) = e$ 且 $\omega_{xy} = 1$。这相当于将视野放大一个尺度，并将 Λ_1 的每个副本视为一个顶点。特别地，若构型 $\omega \in \{0,1\}^E$中 x、$y \in \mathbb{H}_L^d$相连，那么我们也必有 $\pi(x)$ 和$\pi(y)$ 在 $\Phi[\omega]$中相连，因为任何连接 x 与 y 的开路径都会映射为一条连接 $\pi(x)$ 与 $\pi(y)$ 的开路径。（反之则不一定成立。）引理 2.1 指出，该映射的作用是

映射 Φ 对长程渗流的作用只是调整参数 β。注意，当 $\alpha = d$时，该模型是自相似的，即 β 保持不变。

引理 2.1。对于所有 $\beta > 0$，推前 $\Phi_*\mathbb{P}_\beta$ 由 $\Phi_*\mathbb{P}_\beta = \mathbb{P}_{L^{d-\alpha}\beta}$ 给出。也就是说，若 ω 的概率分布为 $\mathbb{P}_\beta$，则 $\Phi[\omega]$ 的概率分布为 $\mathbb{P}_{L^{d-\alpha}\beta}$。

证明。独立性显而易见，因此只需检验 $\mathbb{P}_{L^{d-\alpha}\beta}$ 的边缘分布是否正确。任取 $xy \in E$。满足 $\pi(x')\pi(y') = xy$ 的边 $x'y' \in E$ 有 L^{2d} 条，且每条边都有 $\|x' - y'\| = L\|x - y\|$。在 $\Phi_*\mathbb{P}_\beta$ 下，$\omega_{xy} = 0$ 的概率等于这些边中的每一条在 $\mathbb{P}_\beta$ 下都满足 $x'y'$ 的概率，因此

$$\Phi_*\mathbb{P}_\beta\left(\omega_{xy} = 0\right) = \left[e^{-\beta\left(L\|x-y\|\right)^{-d-\alpha}}\right]^{L^{2d}} = \mathbb{P}_{L^{d-\alpha}\beta}\left(\omega_{xy} = 0\right)$$

正如所需。 □

这个观察已经使我们能够证明定理 1.1 在 $\alpha > d$ 的情形下的上界。

引理 2.2. 若 $\alpha > d$，则存在常数 $C = C(d, L, \alpha) < \infty$，使得对每个 $\beta \geq 1$，都有 $\chi(\beta) \leq C\beta^{\frac{d}{\alpha-d}}$。

证明. 回忆一下，$K_0(\omega)$ 表示构型 $\omega \in \{0,1\}^E$ 中的原点簇。对于每个构型 $\omega \in \{0,1\}^E$，我们有

$$|K_0(\omega)| = |\{x \in \mathbb{H}_L^d : 0 \leftrightarrow x\}| \leq |\{x \in \mathbb{H}_L^d : \pi(0) \leftrightarrow \pi(x)\}| = L^d|K_0(\Phi[\omega])|,$$

其中两边 s 可能是无穷的。取期望并应用引理 2.1，我们推得 at

$$\chi(\beta) \leq L^d \cdot \chi\left(L^{-(\alpha-d)}\beta\right)$$

对每个 $\beta > 0$ 都成立，因此由归纳法可得

$$\chi(\beta) \leq L^{dn} \cdot \chi\left(L^{-(\alpha-d)n}\beta\right)$$

对每个 $\beta > 0$ 和 $n \geq 0$ 都成立。取使得 $L^{-(d-\alpha)n}\beta \leq 1$ 成立的最小 $n = \lceil \frac{1}{\alpha-d}\log_L \beta \rceil$，并利用 $\chi(\beta)$ 是关于 β 的递增函数这一事实，我们推得

$$\chi(\beta) \leq L^{d\lceil \frac{1}{\alpha-d}\log_L \beta\rceil} \cdot \chi(1) \leq L^d\chi(1)\beta^{\frac{d}{\alpha-d}}$$

对每个 $\beta \geq 1$。由于 $\chi(\beta) < \infty$ 对每个 $\beta < \beta_c = \infty$ 都成立，因此由 $C = L^d\chi(1)$ 可得该结论 . □

接下来，我们将讨论这一重整化过程的一种变体，它可用于证明下界。

采用混合点键模型进行重整化。 如果我们通过迭代映射 k 将尺度放大 Φ，经过 k 步后，我们会失去关于 F_k 中$=\bigcup_{x\in\mathbb{H}_L^d} E_k(x$的边构型的所有信息；这些边连接距离不超过 L^k的顶点。正如引理2.2所示，在证明原模型的上界时，这未必构成问题，因为或许只需考虑最坏情况估计，即假设 F_k 中的每条边都是开放的。要建立非平凡的下界

然而，要得到下界，我们需要更多关于 F_k中边的状态的信息。我们不会追踪这些小尺度边的所有相关信息，而是定义一种恰当的“良好”块的概念，并在重新缩放时只追踪哪些块是良好的。由于不同 k-块的良好性彼此独立，也独立于不属于 F_k的边的状态，因此自然会考虑混合点边渗流模型。

对于每个 $p \in [0,1]$，令 $\mathbb{Q}_p$ 为随机子集 η 的概率分布，其中该子集从 $\mathbb{H}_L^d$ 中独立地以概率 p 选取每个元素得到。给定 $p \in [0,1]$ 和 $\beta > 0$，令 $\mathbb{P}_{\beta,p}$ 为图 $(\mathbb{H}_L^d, E)$ 的随机子图的概率分布，并将其编码为 $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{H}_L^d} \times \{0,1\}^E$ 中的一个元素，具体构造如下：独立采样 $\eta \sim \mathbb{Q}_p$ 和 $\omega \sim \mathbb{P}_\beta$，然后取顶点集为 $\{x : \eta(x) = 1\}$、边集为 $\{xy : \omega_{xy} = \eta_x = \eta_y = 1\}$的图。照例，我们滥用记号，将 ω 和 η分别等同地视为集合 $\{e : \omega(e) = 1\}$ 和 $\{x : \eta(x) = 1\}$。给定集合 $A \subseteq \mathbb{H}_L^d$，我们将此图中由 $A \cap \eta$ 诱导的子图的连通分支称为 A 中的 (η,ω)-簇，并称两个顶点 $x, y \in A$ 在 A 中是 (η,ω)-连通的，如果它们属于同一个 (η,ω)-簇。也就是说，如果存在一条连接 x 和 y的路径，且路径上的所有顶点都属于 $A \cap \eta$、所有边都属于 ω，那么两点 $x, y \in A$ 在 A 中就是 (η,ω)-连通的。

接下来，我们引入记号，表示按 k 个尺度放大视野，同时仅保留大簇之间的边。固定一个 $\mathbb{H}_L^d = \{x_1, x_2, \ldots\}$ 的枚举。给定 $(\eta,\omega) \in \Omega$ 和一个有限集 $A \subseteq \mathbb{H}_L^d$，我们将 $K_{\max}(A) = K_{\max}(A; (\eta,\omega))$ 定义为 A 中体积最大的 (η,ω) 簇；如果存在多个体积最大的簇，则使用固定的 $\mathbb{H}_L^d$ 枚举来打破平局，即在这些最大体积簇中，取包含标签最小顶点的簇。（这里的“体积”仅指基数。）为简化记号，我们还记作

$$K_n^{\max} = K_{\max}(\Lambda_n; (\eta,\omega)) \qquad \text{and} \qquad K_n^{\max}(z) = K_{\max}(\Lambda_n(z); (\eta,\omega))$$

对每个 $n \geq 0$ 和 $z \in \mathbb{H}_L^d$，当 (η,ω) 的选取明确时。对每个 $\lambda > 0$ 和 $k \geq 1$，我们定义映射 $\Psi^{\lambda,k} : \Omega \to \Omega$，使得 $\Psi^{\lambda,k}(\eta,\omega) = (\eta',\omega')$，其中

$$\eta'_x = \mathbb{I}\Big(x = \pi^k(z) \text{ for some } z \text{ with } |K_k^{\max}(z)| \geq \lambda |\Lambda_k|\Big)$$

and

$$\omega'_{xy} = \mathbb{I}\Big(x = \pi^k(z), y = \pi^k(w) \text{ for some } z, w \text{ with } \omega_{zw} = 1,\ z \in K_k^{\max}(z), \text{ and } w \in K_k^{\max}(w)\Big).$$

这个函数具有以下重要性质。

引理 2.3. 设 $(\eta,\omega) \in \Omega$，设 $k \geq 1$ 且设 $\lambda > 0$。若 $x, y \in \mathbb{H}_L^d$ 和 $n \geq 1$ 满足$x \in K_k^{\max}(x)$、$y \in K_k^{\max}(y)$，且 $\pi^k(x)$ 在 Λ_n 中与 $\pi^k(y)$ $\Psi^{\lambda,k}(\eta,\omega)$-连通，则 x 和 y 在 Λ_{n+k} 中是 (η,ω)-连通的。特别地，

$$\left|K_{\max}\left(\Lambda_{n+k}; (\eta,\omega)\right)\right| \geq \lambda L^{dk} \left|K_{\max}\left(\Lambda_n; \Psi^{\lambda,k}(\eta,\omega)\right)\right|$$

对每个 $n \geq 1$ 均成立。

引理2.4 的 描述了 Ψ 对混合渗流过程 $\mathbb{P}_{\beta,\ p}$ 的影响如何得到界定

通过调整参数 β 和 p 所产生的影响。

引理 2.4. 对每个 p、$\lambda \in [0,1]$、$\beta > 0$ 和 $k \geq 0$，令

$$p' := \mathbb{P}_{\beta,p}(|K_k^{\max}| \geq \lambda L^{dk}) \qquad and \qquad \beta' := \lambda^2 L^{k(d-\alpha)}\beta.$$

顶点集为 $\{x : \eta(x) = 1\}$、边集为 $\{xy : \omega_{xy} = \eta_x = \eta_y = 1\}$ 的随机图在测度 $\Psi^{\lambda,k}_{,*}\mathbb{P}_{\beta,p}$ 下的概率分布随机占优于同一随机图在测度 $\mathbb{P}_{\beta',p'}$ 下的概率分布。

注意，当 $\alpha = d$ 时，参数 β 只需替换为 $\beta' := \lambda^2\beta$。

证明。抽取 $(\eta,\omega) \sim \mathbb{P}_{\beta,p}$，并令 $(\eta',\omega') := \Psi^{\lambda,k}(\eta,\omega)$。注意，$\eta'$ 由 η 和 $\omega \cap F_k$ 决定。根据 Ψ 的构造、p' 的定义以及传递性，我们有 $\eta' \sim \mathbb{Q}_{p'}$。因此，只需验证：若固定 η 和 $\omega \cap F_k$ 的实现，并按照 $\mathbb{P}_\beta$ 下的概率分布独立抽取 $\omega \cap \{xy \in E\backslash F_k : \eta_x = \eta_y = 1\}$，则 ω' 的概率分布随机占优于将 $\mathbb{P}_{\beta'}$ 的一个样本限制在满足 $\eta'_x = \eta'_y = 1$ 的边集 xy 上所得的概率分布。事实上，注意到 ω' 中各边的状态彼此独立；并且仿照引理 2.1 的证明可知，对于每条满足 $\eta'_x = \eta'_y = 1$ 的边 xy，$\omega_{xy} = 0$ 的概率为

$$\prod_{\substack{x' \in \mathbb{H}_L^d: \\ \pi^k(x') = x}} \prod_{\substack{y' \in \mathbb{H}_L^d: \\ \pi^k(y') = y}} \mathbb{P}_\beta\left(\omega_{x'y'} = 0\right) \geq \left[e^{-\beta\left(L^k\|x-y\|\right)^{-d-\alpha}}\right]^{(\lambda L^{dk})^2} = \mathbb{P}_{\beta'}(\omega_{xy} = 0)$$

正如所需。 □

3 $\alpha > d$ 情形下的下界

在本节中，我们证明定理1.1 在 $\alpha > d$情形下的下界。证明采用一种尺度归纳法，将[19, 引理 2。4] 中的思路推广到大 α 区域。与 [19], 的处理相比，我们的论证定量性更强（这是在大 α 区域得到非平凡结论所必需的），并且借助上一小节建立的重整化记号，论证也更加简洁。

我们的论证需要反复放大视野，每次跨越 k 个尺度，其中 k 是一个经过仔细选择、取决于 β 的整数。更准确地说，我们取 $k = k(\beta) := k_0 \vee \lfloor\sqrt{\log\ \beta}\rfloor$，其中 $k_0 \geq 1$ 是一个足够大的整数，以确保

$$\mathbb{Q}_{\frac{1}{2}}\left(\left|\{x \in \Lambda_k : \eta_x = 1\}\right| \geq \frac{1}{3}L^{dk}\right) \geq 1 - \frac{1}{4} \tag{3.1}$$

对每个 $k \geq k_0$ 都成立；由弱大数定律可知，这样的常数 k_0 存在。我们将恰好放大视野 $\ell = \ell(\beta)$ 次，其中 $\ell \geq 1$ 是满足下式的最大整数

$$L^{2dk}\exp\left(-\frac{\beta}{9^\ell L^{(\alpha-d)\ell k}} \cdot \frac{1}{L^{(d+\alpha)k}}\right) \leq \frac{1}{4}. \tag{3.2}$$

如果不存在这样的 ℓ（当 β 较小时可能会出现这种情况），我们就令 $\ell = 0$。

引理 3.1. 对每个 $\beta \geq 1$ 和 $r \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$, $\mathbb{P}_\beta(|K^{\max}_{rk}| \geq 3^{-r} L^{drk}) \geq \frac{1}{2}$。

证明。 固定 $\beta \geq 1$。我们对 r进行归纳法。对于 $r = 0$, 结论显然成立。假设结论对某个 $r \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$成立。令 $\mathbf{1} \in \{0,1\}^{\mathbb{H}^d_L}$ 为全 1 函数, 由引理2.3 可得

$$\left| K_{\max}\left(\Lambda_{(r+1)k}; (\mathbf{1}, \omega)\right)\right| \geq 3^{-r} L^{drk} \left| K_{\max}\left(\Lambda_k; \Psi^{3^{-r}, rk}(\mathbf{1}, \omega)\right)\right|$$

对于每个 $\omega \in \{0,1\}^E$, 因此

$$\mathbb{P}_{\beta,1}\left(\left|K^{\max}_{(r+1)k}\right| \geq 3^{-r-1} L^{d(r+1)k}\right) \geq \Psi_*^{3^{-r}, rk} \mathbb{P}_{\beta,1}\left(\left|K^{\max}_k\right| \geq \frac{1}{3} L^{dk}\right).$$

应用引理 2.4 , 取 $p := 1$, 可推出

$$\mathbb{P}_\beta\left(\left|K^{\max}_{(r+1)k}\right| \geq 3^{-r-1} L^{d(r+1)k}\right) \geq \mathbb{P}_{\beta', p'}\left(\left|K^{\max}_k\right| \geq \frac{1}{3} L^{dk}\right), \tag{3.3}$$

其中

$$p' = \mathbb{P}_\beta\left(\left|K^{\max}_{(r+1)k}\right| \geq 3^{-r} L^{drk}\right) \qquad \text{and} \qquad \beta' := \frac{\beta}{3^{2r} L^{(\alpha-d)rk}}.$$

由归纳假设, $p' \geq \frac{1}{2}$, 因此

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\beta(|K^{\max}_{rk}| \geq 3^{-r} L^{drk}) &\geq \mathbb{P}_{\beta', 1/2}\left(\left|K^{\max}_k\right| \geq \frac{1}{3} L^{dk}\right) \\ &\geq \mathbb{Q}_{1/2}\left(\left|\{x \in \Lambda_k : \eta_x = 1\}\right| \geq \frac{1}{3} L^{dk}\right) \cdot \mathbb{P}_{\beta'}\left(\omega_e = 1 \ \forall e \in E_k\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

我们对 k 的选择保证了 $\mathbb{Q}_{1/2}\left(\left|\{x \in \Lambda_k : \ \eta_x = 1\}\right| \geq \frac{1}{3} L^{dk}\right) \geq \frac{3}{4}$; 而由并集界以及对 ℓ 的选择可得

$$\mathbb{P}_{\beta'}\left(\omega_e = 1 \ \forall e \in E_k\right) \geq 1 - |E_k| \max_{e \in E_k} \mathbb{P}_{\beta'}\left(\omega_e = 0\right) \quad \geq 1 - L^{2dk} \exp\left(-\frac{\beta}{3^{2r} L^{(\alpha-d)rk}} \cdot \frac{1}{L^{(d+\alpha)k}}\right) \geq \frac{3}{4},$$

因此

$$\mathbb{P}_\beta\left(|K^{\max}_{rk}| \geq 3^{-r} L^{drk}\right) \geq \frac{9}{16} \geq \frac{1}{2}$$

正如所述。 □

下面的命题给出了定理 1.1 在 $\alpha > d$ 情形下的下界, 并对该估计中出现的 $o(1)$ 项给出了一个明确的估计。

命题 3.2. 若 $\alpha > d$, 则存在一个常数 $C = C(d, L, \alpha) < \infty$, 使得

$$\chi(\beta) \geq \beta^{\frac{d}{\alpha-d} - \frac{C}{\sqrt{\log \beta}}}$$

对每个 $\beta \geq 2$。

证明。固定 $\beta \geq 2$。由传递性可知

$$\chi(\beta) \geq \mathbb{E}_\beta \left[|K_n^{\max}|_{\mathbb{I}} (0 \in |K_n^{\max}|) \right] = \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{x \in \Lambda_n} \mathbb{E}_\beta \left[|K_n^{\max}|_{\mathbb{I}} (x \in |K_n^{\max}|) \right] = L^{-dn} \mathbb{E}_\beta \left[|K_n^{\max}|^2 \right]$$

对于所有 $n \geq 1$，因此由引理 3.1 可得

$$\chi(\beta) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{L^{dk\ell}}{9^\ell}. \tag{3.5}$$

为完成证明，我们利用 k 和 ℓ 的定义计算得

$$9^\ell L^{(\alpha-d)k\ell} \sim \frac{1}{2d \log L} \frac{k\beta}{L^{(d+\alpha)k}} = \beta \cdot \exp\left[-O(\sqrt{\log \beta}) \right] \qquad \text{as } \beta \to \infty,$$

其中，$\sim$ 表示在相关极限下两边之比收敛于 1，因此

$$\ell \sim \frac{1}{(\alpha - d) \log L} \frac{\log \beta}{k} \sim \frac{1}{(\alpha - d) \log L} \sqrt{\log \beta} \qquad \text{as } \beta \to \infty$$

and

$$\frac{L^{dk\ell}}{9^\ell} = 9^{-\frac{\alpha}{\alpha-d}\ell} \left(9^\ell L^{(\alpha-d)k\ell} \right)^{\frac{d}{\alpha-d}} = \beta^{\frac{d}{\alpha-d}} \cdot \exp\left[-O(\sqrt{\log \beta}) \right] \qquad \text{as } \beta \to \infty,$$

其中所有隐含常数均可能依赖于 d、α和 L。将此估计代入式（3.5）即可得出结论。

□

注 3.3。估计式（3.4）似乎相当粗糙：Erd˝os-R´enyi 随机图在所有边都开放之前很久就已包含一个巨型簇，而对于后续分析，只需满足 $\beta' L^{-(d+\alpha)k} \gg L^{-dk}$，而不是我们所要求的 $\beta' L^{-(d+\alpha)k} \gg k$。然而，结果表明，若采用这一改进（以及由此得到的 k和 ℓ的最优取值）进行分析，最终只会使命题 3.2中的常数 C 取值更优。

4 情形 $\alpha = d$

本节证明 $\alpha = d$ 情形下的定理 1.1。我们先给出下界，这是论文的主要新结果，然后在第 [16]节简要且自成一体地讨论上界（这将得到 [16]中的结果）。第 4.2节的论证依赖于前文构建的重整化框架，而第 4.1 节的论证则采用另一种方法，部分借鉴了[21, 第 4]节的技巧。

4.1 下界

本节证明定理 1.1 在情形 $\alpha = d$下的下界。

命题 4.1. 若 $\alpha = d$ 则存在 $c = c(d, L) > 0$ 使得 $\chi(\beta) \geq e^{e^{c\beta}}$ 对每个 $\beta \geq 1$均成立。

我们将利用“喷洒重整化”论证来证明命题，每次放大观察尺度时都略微增加参数。该证明的一个有趣特点是，我们并非一次提升一个尺度，而是在每个归纳步骤中将尺度加倍，因此

第 i 个归纳步骤中所考虑的块的边长关于 i 呈双指数增长。我们将依赖两个辅助引理，其中第一个概括了归纳步骤。

引理 4.2（归纳估计）。如果 $\alpha = d$，那么蕴含关系

$$\left(\mathbb{P}_{\beta,p}\left(|K_n^{\max}| \geq (1-\varepsilon)|\Lambda_n|\right) \geq p\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\mathbb{P}_{(1+6\varepsilon)\beta,p}\left(|K_{2n}^{\max}| \geq (1-2\varepsilon)|\Lambda_n|\right) \geq p\right)$$

对每个 $p \in [0,1]$、$\beta \geq 1$、$0 < \varepsilon \leq 1/2$ 和 $n \geq 1$ 都成立。

下一个辅助引理确立了归纳法的基础情形。这个基础情形估计比预想的更为微妙，我们选择的基础情形并不是 $n = 0$。相反，为使归纳法奏效，我们需要找到一个基础尺度 n_0，使得在 $\mathbb{P}_{\beta,p}$ 下，$|K_n^{\max}|$ 接近 $|\Lambda_n| = L^{dn}$ 的概率至少为 p，其中 p 是一个远离零的常数。（注意：作为参数出现在 $\mathbb{P}_{\beta,\,p}$ 中的 p，必须与作为相关事件概率下界的 p 相等，这一点至关重要！）为应对归纳过程中 β 的增长，我们从一个较低的初始参数 $\frac{\beta}{2}$ 开始。

引理 4.3（基础情形）。若 $\alpha = d$，则存在常数 $\beta_* = \beta_*(d, L) < \infty$，使得若我们定义

$$\delta = \delta(\beta) = \exp\left[-L^{-9d}\beta\right] \qquad \textit{and} \qquad n_0 = n_0(\beta) = \left\lceil \frac{2\beta}{L^{9d} d \log L} \right\rceil$$

then

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,1-\delta}\left(|K_{n_0}^{\max}| \geq (1-2\delta)L^{dn_0}\right) \geq 1-\delta$$

对每个 $\beta \geq \beta_*$。

在证明这些引理之前，我们先看看它们如何推出命题 4.1。

命题 *4.1* 的证明。思路是从引理 4.3 开始，尽可能多次地反复应用引理 4.2 。这里有两个限制。首先，ε 的值最终会增至超过 $1\,2$，此时引理 4.2 的假设将不再成立。其次，我们的参数初始为 $\frac{1}{2}\beta$，最终会增至超过 β，此时利用当前估计，我们将无法再对 $\mathbb{P}_{\beta,p}$ 作出界定。一个足够理想的下界是我们可以迭代的次数 $\ell := \ell(\beta) = \lceil -\log_2(100\delta) \rceil$，它满足

$$\frac{1}{50} \leq 2^{\ell}\delta \leq \frac{1}{100}$$

对每个 $\beta \geq 1$ 都成立。我们可以假设常数 β_* 足够大，使得对每个 $\beta \geq \beta_*$，$\delta(\beta) \leq 1/2$ 且 $\ell(\beta) \geq 1$。固定 $\beta \geq 2\beta_*$，并对每个 $0 \leq r \leq \ell(\beta)$，令

$$\delta_r = 2^r\delta, \qquad n_r = 2^r n, \qquad \text{and} \qquad \beta_r = \exp\left[12\delta_r\right]\frac{\beta}{2},$$

so 即对每个 $0 \leq r \leq \ell$，通过选择 ℓ，都有 $\beta/2 \leq \beta_r \leq e^{0.12}\beta/2 \leq \beta$。我们断言

$$\mathbb{P}_{\beta_r,1-\delta}\left(|K_{n_r}^{\max}| \geq (1-2\delta_r)L^{dn_r}\right) \geq 1-\delta \tag{4.1}$$

对每个 $0 \le r \le \ell$。我们对 r进行归纳法。当 $r = 0$时，由引理 4.3可得结论，因为 $\beta_0 \ge \beta/2$。假设结论对某个 $r \in \{0, \dots, l-1\}$成立。由于 $r \le \ell$， ℓ 的定义保证 $\delta_r \le \frac{1}{2}$，因此由引理 4.2 (取 $p = 1 - \delta$ 和 $\varepsilon = 2\delta_r$) 可得

$$\mathbb{P}_{(1+12\delta_r)\beta_r, 1-\delta}\left(|K^{\max}_{n_{r+1}}| \ge (1-4\delta_r)L^{dn_{r+1}}\right) \ge 1-\delta.$$

因此，我们只需注意到 $4\delta_r = 2\delta_{r+1}$ and，即可得出归纳步骤

$$(1+12\delta_r)\beta_r \ \le e^{12\delta_r}\beta_r = \exp[24\delta_r]\frac{\beta}{2} = \beta_{r+1}.$$

接下来需要由 $\chi(\beta)$ 推出所声称的下界 4.1。与命题 3.2 的证明类似，由 4.1 和传递性可得

$$\chi(\beta) \ge L^{-dn_\ell}\mathbb{E}_\beta\left[|K^{\max}_{n_\ell}|^2\right] \ge (1-\delta)(1-2\delta_\ell)^2 L^{dn_\ell} \ge \frac{1}{8}L^{dn_\ell}$$

对每个 $\beta \ge 2\beta_*$ 均成立。由于

$$n_\ell = 2^\ell n_0 = \Theta\left(e^{L^{-9d}\beta}\beta\right) = e^{\Theta(\beta)}$$

根据 ℓ 和 n_0 的定义， $\beta \to \infty$ 。 □

现在我们证明两个辅助引理，即引理 4.2 和4.3。我们先证明归纳估计引理 4.2，它是引理 2.3 和 2.4 的简单推论。

引理 *4.2* 的证明。我们可以像引理 2.3 的证明中那样应用引理 3.1 ，从而得到

$$\left|K_{\max}\left(\Lambda_{2n};(\eta,\omega)\right)\right| \ge (1-\varepsilon)L^{dn}\left|K_{\max}\left(\Lambda_n;\Psi^{1-\varepsilon,n}(\eta,\omega)\right)\right|$$

对每个 $(\eta,\omega) \in \Omega$，因此

$$\mathbb{P}_{(1+6\varepsilon)\beta,p}\left(\left|K^{\max}_{2n}\right| \ge (1-\varepsilon)^2 L^{2dn}\right) \ge \Psi_*^{1-\varepsilon,n}\mathbb{P}_{(1+6\varepsilon)\beta,p}\left(|K^{\max}_n| \ge (1-\varepsilon)L^{dn}\right).$$

现在，对于 $0 \le \varepsilon \le 1/2$ 由微积分可得 $(1-\varepsilon)^2(1+6\varepsilon) \ge 1$ 以及 $(1-\varepsilon)^2 \ge 1-2\varepsilon$，应用引理 2.4 (其中 $k = n$ 且 $\lambda = 1-\varepsilon$) 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(1+6\varepsilon)\beta,p}\left(|K^{\max}_{2n}| \ge (1-2\varepsilon)L^{2dn}\right) &\ge \mathbb{P}_{(1-\varepsilon)^2(1+6\varepsilon)\beta,p'}\left(|K^{\max}_n| \ge (1-\varepsilon)L^{dn}\right)\\ &\ge \mathbb{P}_{\beta,p'}\left(|K^{\max}_n| \ge (1-\varepsilon)L^{dn}\right) \qquad (4.2)\end{aligned}$$

其中

$$p' := \mathbb{P}_{(1+6\varepsilon)\beta,p}\left(|K^{\max}_n| \ge (1-\varepsilon)L^{dn}\right) \ge \mathbb{P}_{\beta,p}\left(|K^{\max}_n| \ge (1-\varepsilon)L^{dn}\right).$$

若 $\mathbb{P}_{\beta,\ p}\left(|K^{\max}_n| \ge (\ 1-\varepsilon)|\Lambda_n|\right) \ge p$ 则 $p' \ge p$ 结论立即由等式 (4.2) 得出。 □

最后还需证明引理 4.3。

引理 4.3 的证明。固定 $\beta \geq 1$。考虑混合构型 $(\eta,\omega) \in \Omega$。按照惯例，我们会稍微滥用记号，在适当时将 η 和 ω 视为 $\mathbb{H}_L^d$ 和 E 的子集，并回顾一下，$F_k := \bigcup_{z\in\mathbb{H}_L^d} E_k(z)$ 是由距离至多为 L^k 的不同顶点构成的所有无序对的集合。考虑构型 $(\eta',\omega') := \Psi^{L^{-2d},\,2}(\eta,\omega)$，它满足

$$\eta'_x = \mathbb{1}\Big(x = \pi^2(z) \text{ 对某个 } z \text{ 满足 } |K_2^{\max}(z)| \geq 1\Big) = \mathbb{1}\Big(x = \pi^2(z) \text{ 对某个 } z \text{ 满足 } \eta \cap \Lambda_2(z) \neq \emptyset\Big).$$

要使不等式 $\big|K_{n_0}^{\max}\big| \geq (1-2\delta)L^{dn_0}$ 成立，只需以下四个条件全部成立：

1. $|\eta \cap \Lambda_{n_0}| \geq (1-2\delta)L^{dn_0}$；
2. $\omega_{xy} = 1$ 对所有满足 $\|x-y\| \leq L^2$ 的不同顶点对 $x,y \in \eta \cap \Lambda_{n_0}$；
3. $\Lambda_{n_0-2} \subseteq \eta'$；
4. 对每个 $0 \leq k \leq n_0-3$，构型 $\Phi^k[\omega']$ 都包含 Λ_{n_0-2-k} 中距离恰好为 L 的每一对无序顶点。

事实上，条件 2-4 确保 $\eta \cap \Lambda_{n_0}$ 中的每个顶点都包含在 Λ_{n_0} 中唯一一个 (η,ω)-簇内，而条件 1 则确保该簇具有所需的大小。

对于每个 $1 \leq i \leq 4$，令 $\mathscr{A}_i$ 表示这些条件中的第 i 个成立这一事件。只需证明

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,1-\delta}(\mathscr{A}_i) = 1 - o(\delta)$$

对每个 $1 \leq i \leq 4$，当 $\beta \to \infty$ 时成立，因为这保证了当 β 足够大时，$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,\,1-\delta}(\cap_{i=1}^4 \mathscr{A}_i) \geq 1-\delta$。我们依次对这些概率分别给出界，并将反复用到根据 δ 和 n_0 的定义，$\delta^{-2} \leq L^{dn_0} \leq L^d\delta^{-2}$。

1. 对于事件 $\mathscr{A}_1$，Chernoff 界

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,1-\delta}(\mathscr{A}_1^c) = \mathbb{Q}_{1-\delta}\big(|\Lambda_{n_0} \setminus \eta| \geq 2\delta|\Lambda_{n_0}|\big) &\leq e^{-2\lambda\delta L^{dn_0}}\mathbb{E}e^{\lambda|\Lambda_{n_0}\setminus\eta|} \\ &\leq e^{-2\lambda\delta L^{dn_0}}\Big(1+(e^\lambda-1)\delta\Big)^{L^{dn_0}} \leq \exp\Big[-\Big(2\lambda-(e^\lambda-1)\Big)\delta L^{dn_0}\Big]\end{aligned}$$

对每个 $\lambda > 0$ 都成立，取 $\lambda = \log 2$ 可得

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,1-\delta}(\mathscr{A}_1) \geq 1 - \left(\frac{e}{4}\right)^{\delta L^{dn_0}} \geq 1 - \left(\frac{e}{4}\right)^{\delta^{-1}} = 1 - o(\delta)$$

如所需。

2. 对于事件 $\mathscr{A}_2$，我们有并集界

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,1-\delta}(\mathscr{A}_2) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta}\left(F_2 \cap E_{n_0} \subseteq \omega\right) \geq 1 - |\Lambda_2|^2\big|\Lambda_{n_0-2}\big|\, e^{-\frac{1}{2}L^{-4d}\beta} = 1 - O\left(\delta^{-2}e^{-\frac{1}{2}L^{-4d}\beta}\right),$$

且由于 $e^{-\frac{1}{2}L^{-4d}\beta} = \delta^{\frac{1}{2}L^{5d}} \leq \delta^{16}$，由此可得

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,1-\delta}(\mathscr{A}_2) = 1 - O(\delta^{14}) = 1 - o(\delta)$$

符合要求。

3. 对于事件 $\mathscr{A}_3$，由引理 2.4 和并集界可得

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,1-\delta}(\mathscr{A}_3) \geq 1-(1-p')L^{d(n_0-2)} \qquad \text{where} \qquad p' := \mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,1-\delta}\left(|K_2^{\max}| \geq 1\right) = 1-\delta^{L^{2d}}$$

从而有

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,1-\delta}(\mathscr{A}_3) \geq 1-\delta^{L^{2d}}L^{d(n_0-2)} = 1-O\left(\delta^{L^{2d}-2}\right) = 1-o(\delta)$$

如所需，其中在最后一个估计中我们使用了 $L^{2d}-2 \geq 2 > 1$。（我们恰好使用Ψ 将视野放大了两次，以使这一步成立；当$d=1$ 且 $L \in \{2,3\}$时，放大视野一次是不够的。）

4. 对于事件 $\mathscr{A}_4$，我们将证明 $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,\,1-\delta}(\mathscr{A}_3 \setminus \mathscr{A}_4) = o(\delta)$。由引理 2.4可知，给定 $\mathscr{A}_3$ 时，$\omega \cap E_{n_0-2}$ 的条件分布随机占优于 $\mathbb{P}_{\beta'}$，其中 $\beta' = L^{-4d}\beta$。由于根据引理 2.1 我们还对所有 k 有 $\Phi_*^k\mathbb{P}_{\beta'} = \mathbb{P}_{\beta'}$，由并集界可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,1-\delta}(\mathscr{A}_3 \setminus \mathscr{A}_4) &\leq \sum_{k=0}^{n_0-3} \mathbb{P}_{\beta'}(\omega \nsubseteq F_1 \cap E_{n_0-2-k}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0-3} |\Lambda_1|^2|\Lambda_{n_0-3-k}|e^{-L^{-2d}\beta'} = O(L^{dn_0}e^{-L^{-6d}\beta}) = O\left(\delta^{L^{3d}-2}\right) = O(\delta^6) = o(\delta).\end{aligned}$$

由于我们还知道 $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,\,1-\delta}(\mathscr{A}_3) = 1-o(\delta)$，因此 $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}\beta,\,1-\delta}(\mathscr{A}_4) = 1-o(\delta)$，如所需。

证明到此结束。 □

4.2 上界

我们以一个简短的证明结束本文，该证明给出了定理 1.1 在 $\alpha = d$ 情形下的上界，并重新得到 [16] 的一个结果。

命题 4.4。如果 $\alpha = d$，那么存在 $C = C(d,L) < \infty$，使得对于每个$\beta \geq 1$，都有 $\chi(\beta) \leq e^{e^{C\beta}}$。

我们将通过证明 4.4 的一个等价的 关联长度$\xi(\beta)$ 上界来证明 [21, 第 4] 节中的命题。按照 Duminil-Copin 和 Tassion [13], ，对于每个 $\beta \geq 0$，以及包含原点的有限子集 $S \subseteq \mathbb{H}_L^d$，我们考虑以下量

$$\phi_\beta(S) = \phi_\beta(S,0) := \sum_{y \notin S}\sum_{x \in S}\left(1-e^{-\beta\|x-y\|^{-d-\alpha}}\right)\mathbb{P}_\beta(0 \overset{S}{\longleftrightarrow} x),$$

其中我们用 $\{0 \overset{S}{\longleftrightarrow} x\}$ 表示 0 与 x 通过一条开路径相连，且该路径的所有顶点都属于 S。根据 [21, 引理中所述，这可直接由 BK 不等式推出

4.2] 即

$$\sum_{x\in S'}\mathbb{P}_\beta(0\overset{S'}{\longleftrightarrow}x)\le\sum_{x\in S}\mathbb{P}_\beta(0\overset{S}{\longleftrightarrow}x)+\phi_\beta(S)\cdot\sup_{u\in S'}\sum_{x\in S'}\mathbb{P}_\beta(u\overset{S'}{\longleftrightarrow}x)$$

对于每个 $\beta\ge 0$ 以及每一对有限集 $S\subseteq S'\subseteq\mathbb{H}_L^d$。因此，如果 $\phi_\beta(S)<1$，那么我们可以令 S' 遍历穷尽 $\mathbb{H}_L^d$ 的集合并取极限，从而得到

$$\sum_{x\in S}\mathbb{P}_\beta(0\overset{S}{\longleftrightarrow}x)\le\chi(\beta)\le\frac{1}{1-\phi_\beta(S)}\sum_{x\in S}\mathbb{P}_\beta(0\overset{S}{\longleftrightarrow}x).$$

对于每个 $n\ge 0$，我们定义

$$\beta_n=\sup\left\{\beta\ge 0:\phi_\beta(\Lambda_n,0)\le\frac{1}{2}\right\}\qquad\text{and}\qquad\beta_n^*=\max_{0\le m\le n}\beta_m,$$

因此 $(\beta_n^*)_{n\ge 0}$ 是一个非递减序列。对于每个 $0\le\beta<\beta_c$，我们将关联长度 $\xi(\beta)$ 定义为

$$\xi(\beta)=L^{n(\beta)}\qquad\text{where}\qquad n(\beta)=\inf\{n\ge 0:\beta\le\beta_n^*\},\tag{4.3}$$

它具有如下性质：全局易感度 $\chi(\beta)$ 与半径为 $\xi(\beta)$ 的球内与 0 连通的点数的期望相差不超过一个因子 2：

$$\sum_{x\in\Lambda_{n(\beta)}}\mathbb{P}_\beta(0\overset{\Lambda_{n(\beta)}}{\longleftrightarrow}x)\le\chi(\beta)\le 2\sum_{x\in\Lambda_{n(\beta)}}\mathbb{P}_\beta(0\overset{\Lambda_{n(\beta)}}{\longleftrightarrow}x).\tag{4.4}$$

（注意，此估计对每个 $\alpha>0$ 都成立。）由于右侧显然至多为$2|\Lambda_{n(\beta)}|=2\xi(\beta)^d$，命题 4.4 由（4.4）及以下命题得出。

命题 4.5。若 $\alpha=d$，则存在常数 $c=c(d,L)>0$ 和 $C=C(d,L)<\infty$，使得对每个 $\beta\ge 1$，关联长度满足 $e^{e^{c\beta}}\le\xi(\beta)\le e^{e^{C\beta}}$。

证明。由命题 4.1 可得下界，因为 $\chi(\beta)\le 2\xi(\beta)^d$；因此只需证明上界。我们先通过探索论证，对足够大的 n，给出 $\mathbb{P}_\beta(0\leftrightarrow\Lambda_n^c)$ 的上界。定义随机序列 $(n_i)_{i\ge 0}$：令 $n_0=0$，并递归地将 n_{i+1} 设为满足存在一条连接 Λ_{n_i} 与 $\Lambda_{n_{i+1}}\setminus\Lambda_{n_{i+1}-1}$的开放边的最大值；若没有与 Λ_{n_i}相连的开放边，则取 $n_{i+1}=n_i$。我们将 τ 定义为满足 $n_{i+1}=n_i$的最小 i，因此只有当 $n_\tau>n$时才有 $0\leftrightarrow\Lambda_n^c$。对每个 $i\ge 0$，令 $\mathcal{F}_i$为由 n_0、……、n_i生成的 σ-代数。由于我们可以通过仅揭示至少有一个端点位于Λ_{n_i} 中的边来计算 n_0、……、n_i，并且任何一个端点位于 $\Lambda_{n_i}^c$ 中的已揭示边都是闭合的，因此有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\beta(n_{i+1}>n_i+k\mid\mathcal{F}_i)&\le\mathbb{P}_\beta(\text{there is an open edge connecting }\Lambda_{n_i}\text{ and }\Lambda_{n_i+k}^c)\\&=\mathbb{P}_\beta(\text{there is an open edge connecting }\Lambda_0\text{ and }\Lambda_k^c)\end{aligned}$$

对每个 i，$k\ge 0$，几乎必然成立，其中最后一个等式由引理 2.1（其中 $L^{d-\alpha}\beta=\beta$因为 $\alpha=d$）得出。令 X_1，X_2，... 为分布为

$$\mathbb{P}(X_1>k)=\mathbb{P}_\beta(\text{there is an open edge connecting }\Lambda_0\text{ and }\Lambda_k^c)$$

并令 $T = \min\{i : X_i = 0\}$，则可得

$$\mathbb{P}(n_\tau \geq n) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{T} X_i \geq n\right).$$

现在，我们可以计算得出

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 > k) &= \mathbb{P}_\beta(\text{there is an open edge connecting } \Lambda_0 \text{ and } \Lambda_k^c) \\ &= 1 - \exp\left[-\beta \sum_{\ell=k+1}^{\infty} L^{-2d\ell}(L^{d\ell} - L^{d(\ell-1)})\right] = 1 - \exp\left[-\beta L^{-d(k+1)}\right]\end{aligned}$$

从而 $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \exp\left[-L^{-d}\beta\right]$ 且

$$\mathbb{E}X_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 > k) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 - \exp\left[-\beta L^{-d(k+1)}\right] \leq \beta \sum_{k=0}^{\infty} L^{-d(k+1)} = \frac{L^{-d}}{1 - L^{-d}}\beta.$$

因此，由马尔可夫不等式可得

$$\mathbb{P}_\beta(0 \leftrightarrow \Lambda_n^c) \leq \mathbb{P}_\beta(n_\tau \geq n) \leq \mathbb{P}(T \geq t) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{t} X_i \geq n\right) \leq (1 - e^{-L^{-d}\beta})^t + \frac{L^{-d}}{1 - L^{-d}}\frac{\beta t}{n}$$

对每个 $n, t \geq 1$均成立。取 $t = \lceil \beta^{-3} n \rceil$，我们推得存在常数 C_1 和 C_2，使得若$n \geq C_1 \beta^4 e^{L^{-d}\beta}$ 则

$$\mathbb{P}_\beta(0 \leftrightarrow \Lambda_n^c) \leq (1 - e^{-L^{-d}\beta})^{\lceil \beta^{-3} n \rceil} + O(\beta^{-2}) \leq C_2 \beta^{-2}. \tag{4.5}$$

为完成证明，我们注意到（利用 $1 - e^{-\beta \|x-y\|^{-2d}} \leq \beta \|x - y\|^{-2d}$）存在一个常数 C_3，使得

$$\phi_\beta(\Lambda_n) \leq \sum_{y \in \Lambda_n^c} \sum_{x \in \Lambda_n} \beta \|x - y\|^{-2d} \mathbb{P}_\beta(0 \xleftrightarrow{\Lambda_n} x) \leq C_3 \beta L^{-dn} \sum_{x \in \Lambda_n} \mathbb{P}_\beta(0 \xleftrightarrow{\Lambda_n} x)$$

对每个 $n \geq 1$ 均成立，并且

$$\sum_{x \in \Lambda_n} \mathbb{P}_\beta(0 \xleftrightarrow{\Lambda_n} x) \leq 1 + \sum_{k=0}^{n} L^{d(k+1)} \mathbb{P}_\beta(0 \leftrightarrow \Lambda_k^c),$$

因此，存在常数 C_4 和 C_5，使得若 $n \geq 2C_1 \beta^4 e^{L^{-d}\beta}$，则

$$\begin{aligned}\sum_{x \in \Lambda_n} \mathbb{P}_\beta(0 \xleftrightarrow{\Lambda_n} x) &\leq 1 + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} L^{d(k+1)} + \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n} L^{d(k+1)} C_2 \beta^{-2} \\ &\leq 1 + \sqrt{L^{d(n+1)}} + C_4 \beta^{-2} L^{dn} \leq C_5 \beta^{-2} L^{dn},\end{aligned}$$

这里我们利用了 $\lceil n/2 \rceil \geq C_1 \beta^4 e^{L^{-d}\beta}$ 来应用（4.5）中的第一个不等式。由此可知，若 $n \geq 2C_1\beta^4 e^{L^{-d}\beta}$ 则 ϕ_β（Λ_n）$\leq C_3 C_5 \beta^{-1}$，当 $1/2$ 足够大时，它小于 β。这意味着 n（β）$= O\left(\beta^4 e^{L^{-d}\beta}\right) = e^{O(\beta)}$，因此 ξ（β）$= e^{e^{O(\beta)}}$，如所需。 □

命题4.4的证明。结论可由命题4.5 和不等式立即推出$\chi(\beta) \leq 2\xi(\beta)^d$。

□

定理1.1的证明。情形 $\alpha > d$ 由引理2.2 和命题3.2 推出，而情形$\alpha = d$ 则由命题4.1 和4.4推出。

□

致谢

本研究是加州理工学院2022年暑期本科生研究奖学金（SURF）项目的一部分，期间 JK 由 PE 和 TH 指导。研究期间，JK 还获得了加拿大自然科学与工程研究委员会本科生研究奖的资助。感谢 Louigi Addario-Berry 和 Johannes B¨aumler 对论文初稿提出的宝贵意见。

参考文献

[1] M. Aizenman、D. J. Barsky 和 R. Fern´andez。一般一类伊辛型模型中的相变具有锐性。 *J. Statist. Phys.*, 47(3-4):343–374，1987。[2] M. Aizenman、J. Chayes、L. Chayes 和 C. Newman。一维伊辛模型和 Potts 模型中的磁化强度不连续性。 *Journal of Statistical Physics*, 50(1):1–40，1988。[3] R. Bauerschmidt、D. C. Brydges 和 G. Slade。 *Introduction to a renormalisation group method*，第2242卷，收录于 *Lecture Notes in Mathematics*。施普林格，新加坡，2019。[4] J. B

¨ $1/|x - y|^{2d}$ *arXiv preprint* aumler。 *arXiv:2208.04793* 2022
长程渗流中距离指数的行为。，。[5] J. B¨aumler。所有维数下渗流模型中的距离。 *arXiv preprint arXiv:2208.04800*, 2022。[6] J. B

¨ *arXiv* aumler 和 *preprint arXiv:2204.12410* 2022
N. Berger。长程渗流临界指数的等周下界。，。[7] P. Bleher 和 P. Major。统计物理中的临界现象与普适指数：关于Dyson层级模型。 *The Annals of Probability*，第431–477页，1987。[8] D. Dawson 和 L. Gorostiza。超度量空间中的渗流。 *Electronic Journal of Probability* 18 1 26, , : –。[9] 2013
J. Ding 和 A. Sly。临界长程渗流中的距离。 *arXiv preprint arXiv:1303.3995*，2013。[10] B. Dragovich、A. Y. Khrennikov、S. Kozyrev、I. Volovich 和 E. Zelenov。p进数数学物理：前三十年。 *P-Adic numbers ultrametric analysis and applications*，9(2):87–121，2017。[11] B. Dragovich、A. Y. Khrennikov、S. V. Kozyrev 和 I. V. Volovich。论p进数数学物理。 *P-Adic Numbers* 1 1 1

Ultrametric Analysis and Applications，( ):–17，2009。[12] H. Duminil-Copin、C. Garban 和 V. Tassion。重新审视d维长程模型。，。

1 *arXiv preprint* H. *arXiv:2011.04642* 2020
Duminil-Copin 和 V. Tassion。伯努利渗流与伊辛模型相变锐性的新证明。 *Comm. Math. Phys.*，343(2):725–745，2016。[14] F. J. Dyson。一维伊辛铁磁体中相变的存在性。 *Communications in Mathematical Physics* 12 2 91 107, 1969 , ( ):–。

[15] R. G. Edwards 和 A. D. Sokal。Fortuin–Kasteleyn–Swendsen–Wang表示及蒙特卡罗算法的推广。 *Physical review D*, 38(6):2009，1988。

[16] A. Georgakopoulos 和 J. Haslegrave。无限生成群上的渗流。 *Combinatorics Probability* , , ( ):–。[17] G. Grimmett。 *The random-cluster model* 333 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* , *[Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 2006 第卷，收录于。施普林格出版社，柏林，。[18] T. Hutchcroft。渗流与随机簇模型的新临界指数不等式。 *Probab. Math.* , ( ):–。[19] T. Hutchcroft。层级格上长程渗流的临界二点函数。 *preprint arXiv:2103.17013* 2021 *arXiv* , 。[20] T. Hutchcroft。层级渗流中的临界簇体积。 *arXiv preprint arXiv:2211.05686*，2022年。[21] T. Hutchcroft。由三角条件推导平均场渗流临界指数。 *J.* , *Stat. Phys.* 189 1 6, 33, 2022 ( ):论文编号。[22] T. Hutchcroft。$\mathbb{Z}^d$上长程渗流临界二点函数的锐利层级上界。 *J. Math. Phys.*，63(11):论文编号113301，18，2022年。[23] V. Koval、R. Meester 和 P. Trapman。层级格上的长程渗流。 *Electronic Journal of Probability* 17 1 21, 2012 , : –。[24] T. Ouboter、R. Meester 和 P. Trapman。具有家庭和学校的种群中的随机SIR流行病。*Journal of Mathematical Biology*, 72(5):1177–1193，2016。[25] S. Sawyer 和 J. Felsenstein。层级聚类种群中的距离隔离。 *Journal of Applied Probability* 20 1 1 10, 1983 , ( ):–。