arXiv:2302.01519v1 [math.LO] 3 Feb 2023

概率空间的模型论

ALEXANDER BERENSTEIN 和 C. WARD HENSON

Abstract. 这篇综述论文采用连续 $[0,1]$值一阶逻辑的框架，探讨概率空间的模型论。文中讨论的度量结构称为概率代数，它们由概率空间构造而来：将相差一个零测度集的两个可测集视为相同。概率代数这一类可用连续一阶逻辑公理化；我们将其理论记为 Pr。我们证明，这一类中的存在闭结构恰好是底层概率空间无原子的结构。这个子类也可公理化；其理论 APA 是 Pr的模型伴侣。我们证明， APA是可分范畴的（因而是完备的），具有量词消去，是 ω稳定的，并内置典范基；此外，我们还给出其独立关系的一种自然刻画。对于一般的概率代数，我们证明，原子集合（再加入 0）是在 Pr的模型中一致可定义的集合。我们以此为基础，对任意概率空间的模型论作完整论述。本文的核心是全面介绍 APA 的主要模型论性质。我们讨论概率代数的 Maharam 结构定理，并指出其背后的思想与模型论之间的密切联系。我们说明概率熵如何给出一种秩，并使其与概率代数中的模型论分叉相关联。最后一节提及一些开放问题。

1. Introduction

本文采用连续版本的一阶逻辑来研究概率空间（$X, \mathcal{B}, \mu$）。其中， $\mathcal{B}$是 X的子集构成的一个 σ代数（要求满足 $\emptyset, X \in \mathcal{B}$），而 μ是 $\mathcal{B}$上的一个σ可加概率测度。在 $\mathcal{B}$上存在一个典范伪度量 d，其定义是将集合之间的距离设为 $d(A,B) := \mu(A \triangle B)$。（这里，$\triangle$ 表示集合上的对称差运算。）由此得到一个预结构

$$(\mathcal{B}, 0, 1, \cdot^c, \cap, \cup, \mu, d)$$

（我们通常将其写作 $(\mathcal{B}, \mu, d)$，把 $\mathcal{B}$视为布尔代数，并在记号中省略常元和运算）。按照通常的方式，将 d 变为度量，即可得到一个结构。（通常还需要进行度量完备化，但

作者感谢 Itaï Ben Yaacov 的宝贵交流。本文的研究部分得到了美国国家科学基金会的资助，以及 Simons Foundation 的资助（202251 和 422088，授予第二作者）。

这里的度量商自动完备，如下文所示。）由此得到$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$结构 $(\mathcal{B}, \widehat{\mu}, d)$，其中 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$ 关于等价关系 $\mu(A \triangle B) = 0$$\widehat{\ }$所得的商集，而 $\widehat{\mu}$和 d 分别是 $\mathcal{B}$上诱导的规范测度和度量。也就是说，对于每个 $A \in \mathcal{B}$ 和 $\widehat{\ }$ $\prec [A]_\mu := \{B \in \mathcal{B} \mid \mu(A \triangle B) = 0\} \in \mathcal{B}$，都有 $\widehat{\mu}([A]_\mu) = \mu(A)$；类似地，$d([A]_\mu, [B]_\mu) = d(A, B)$ $(= \mu(A \triangle B) = \widehat{\mu}([A \triangle B]_\mu) = \widehat{\mu}([A]_\mu \triangle [B]_\mu))$。可以看出$\mathcal{B}$个完备$\widehat{\ }$（序意义下的）布尔代数，$\widehat{\mu}$ 是定义在 $\mathcal{B}$上的严格$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$正 σ可加测度，而 d 是由 $\widehat{\mu}$规范定义的度量。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$度量结构（$\mathcal{B}$，$\widehat{\mu}$，d）是本文研究的主要对象。

我们采用测度论和分析方面的标准背景知识（将在第2节中概述），以及连续一阶逻辑方面的标准背景知识。本文的模型论背景来自 [7] 和 [8], ，这两篇文献介绍了一阶逻辑的 $[0, 1]$值连续版本。我们在第 3 节中列出本文所需的连续逻辑中一些其他概念和工具的参考文献。

本文的主要内容见第4、5、6和8节。第4节和第5节在连续一阶逻辑的框架下介绍任意概率空间的模型论。我们的结果表明，关于任意概率空间的所有模型论问题都可以系统地归约到无原子情形；第6节和第8节将对此情形作全面论述。

Ben Yaacov [1] 使用紧致抽象理论的框架研究了无原子概率空间，重点关注模型论稳定性相关的问题。在第 6 节和第 8 节中，我们在连续逻辑的背景下研究无原子概率空间，给出 [1], 中结果的类似版本，以及一些连续一阶框架中特有的其他结果。在第 6 节中，我们为无原子概率代数这一类结构给出公理，并表明这些结构的理论（记作 APA）从模型论的角度来看性质良好：特别是，它是完备的，具有量词消去，是可分范畴的，并且是 ω-稳定的。我们刻画了 APA类型空间上的诱导度量（在等价意义下）。第 8 节中，我们着重考察 APA 中与其稳定性相关的特征。依循 Ben Yaacov [1], 的工作，我们给出 APA独立关系的内在刻画，并证明它具有内建的典范基。我们给出一个直接而初等的证明，证明 APA 是强有限基的；这一事实最初是在 [6] 中借助 APA 模型的优美对证明的。我们还从 Shelah 分类纲领的角度考察 APA，并通过将这些概念自然地转化到连续模型论中，证明 APA 是非多维的，但不是单维的。

第 7 节专门讨论概率代数的 Maharam 结构定理及其与模型论的联系。在第 9 节中，我们说明概率代数中的模型论分叉与概率熵之间的关系。最后一节中，我们指出了一些似乎值得进一步研究的开放问题。

2. Probability spaces

本节介绍概率空间（X，$\mathcal{B}$，μ）及其测度代数商集的基本信息。

回顾一下，若对每个满足 $B \subseteq A$ 且 $\mu(B) > 0$的 $B \in \mathcal{B}$，都存在B_1、$B_2 \in \mathcal{B}$，使得 $B = B_1 \cup B_2$、B_1 互不相交，且 $\mu(B_1) > 0$、$\mu(B_2) > 0$，则称 $A \in \mathcal{B}$ 无原子。若 X 在 $\mathcal{B}$中无原子，则称（X，$\mathcal{B}$，μ）无原子。

回顾一下，若 $\mu(A) > 0$，且对每个满足 $B \subseteq A$ 的 $B \in \mathcal{B}$，都有$\mu(B) = 0$ 或 $\mu(A \setminus B) = 0$，则称 $A \in B$ 为原子。显然，若 A_1、$A_2 \in \mathcal{B}$ 是原子，则 $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$ 或$\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$。此外，存在一个有限或可数的族 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$，其中每个$A \in \mathcal{A}$ 都是原子，并且每当 $A \in \mathcal{B}$ 是原子时，都存在 $A' \in \mathcal{A}$ 使得$\mu(A \triangle A') = 0$。X 的原子部分是 $\mathcal{A}$中各集合的并（并集），其补集是 X的无原子部分；这一划分在零测集的意义下是良定义的。原子部分是原子的，也就是说，若 $A \in \mathcal{B}$ 包含于 X的原子部分中，则 A （除去零测集）是其所包含的原子的并；等价地，这样的 A 中的所有无原子子集测度均为零。同样，X 的无原子部分是 $\mathcal{B}$中的一个无原子成员。我们将0视为原子，因为它包含于原子部分中；根据定义，0也是无原子的。此外，若 A 无原子且 B 是原子的，则 $\mu(A \cap B) = 0$。

我们称 $(A_1, \ldots, A_n)$ 是 $\mathcal{B}$中的一个划分，若当 $i \neq j$时，$A_i \cap A_j = 0$。此外，若 $A_1 \cup \cdots \cup A_n = B$，则称 $(A_1, \ldots, A_n)$ 是 $\mathcal{B}$中 B的一个划分。注意，在这种情况下，我们允许 A_i为 0。

我们称 A_1、$A_2 \in \mathcal{B}$ 确定同一个事件，并记作 $A_1 \sim_\mu A_2$，如果这些集合的对称差的 μ测度为零。显然，$\sim_\mu$ 是一个等价关系。我们用 $[A]_\mu$表示 $A \in \mathcal{B}$ 的等价类。$\mathcal{B}$ 关于 $\sim_\mu$的等价类全体记作 $\mathcal{B}$。补集、并集和交集运算对 $\widehat{\ }$事件定义良好，并使 $\mathcal{B}$ 成为一个布尔代数。此外，μ 在 $\mathcal{B}$ 上诱导出一个 σ可加、严格$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$正的概率测度 $\widehat{\mu}$。如上所述，我们用 d $\widehat{\ }$表示 $\mathcal{B}$ 上的典范度量，并回顾其定义为 $d([A]_\mu, [B]_\mu) = d(A, B)$。本文中一个重要的事实是，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$$(\mathcal{B}, d)$是一个完备度量空间（参见 [15, 引理 323F]中的计算）。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们将 $(\mathcal{B}, \widehat{\mu}, d)$ 称为 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的概率代数。

2.1. 记号。(a) 若 C 是布尔代数的一个子集，我们用 $C^\#$ 表示由 C 生成的布尔子代数。

设 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 是一个概率空间，$(\mathcal{B},\widehat{\mu},d)$ 是它的概率代数。

(b) 若 S 是 $\mathcal{B}$ 的子集，我们用 $\langle S\rangle$ 表示由 S 生成的 $\mathcal{B}$ 的 σ-子代数。

(c) 若 S 是 $\widehat{\mathcal{B}}$ 的子集，我们用 $\langle S\rangle$ 表示 $S^{\#}$ 的 $\widehat{d}$-闭包。注意，根据 [15, 引理 323F]，$\langle S\rangle$ 等于由 S 生成的 $\mathcal{B}$ 的 σ-子代数；它也等于由 S 生成的 $\widehat{d}$-闭布尔子代数。换言之，$\langle S\rangle$ 是 $\widehat{d}$-闭的，且 $S^{\#}$ 是其 d-稠密子集。

(d) 在本文中，我们用大写字母（如 A、B）表示 σ-代数 $\mathcal{B}$ 的元素，用小写字母（如 a、b）表示 $\mathcal{B}$ 的元素。若 S 是 $\mathcal{B}$ 的子集，我们用 S 表示由 S 中的元素所确定的事件集合；即 $S=\{[A]_\mu \mid A\in S\}\subseteq\mathcal{B}$。

每当 $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{B}$ 是一个 σ-子代数时，$(X,\mathcal{C},\mu\restriction\mathcal{C})$ 本身就是一个概率空间，并且我们已将 $\mathcal{C}$ 定义为 $\mathcal{C}$ 的概率代数，同时（在 2.1(d) 中）也将其定义为 $\mathcal{B}$ 的某个子集。这里并不存在真正的歧义；事实上，$\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{B}$ 的包含映射 j 在两个版本的 $\mathcal{C}$ 之间诱导出一个保测布尔同构 $\widehat{j}$（因此也保持度量）。（对于每个 $A\in\mathcal{C}$，函数 j 将 $[A]_{\mu\restriction\mathcal{C}}$ 从 $(X,\mathcal{C},\mu\restriction\mathcal{C})$ 的意义下映射为 $[A]_\mu$，后者是从 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的意义下理解的。）通过这一识别，$(\mathcal{C},\widehat{\mu},d)$ 是概率空间 $(X,\mathcal{C},\mu\restriction\mathcal{C})$ 的概率代数，并且它是 $(\mathcal{B},\widehat{\mu},d)$ 的一个子结构（典范同构于）。

在下一个结果中，我们记录下来，供以后使用：前一条注的逆命题也成立。

2.2. 引理。设 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 是一个概率空间，$(\mathcal{B},\widehat{\mu},d)$ 是其概率代数。设 S 是 $\mathcal{B}$ 的一个子集，并考虑 2.1(c) 中的 $\langle S\rangle\subseteq\mathcal{B}$。令

$$\mathcal{S}:=\{A\in\mathcal{B}\mid [A]_\mu\in\langle S\rangle\}.$$

那么 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个 σ-子代数，且 $\langle S\rangle=\mathcal{S}$。

特别地，概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的概率代数 $(\mathcal{B},\widehat{\mu},d)$ 的每个子结构 $(\langle S\rangle,\mu\restriction\langle S\rangle,d\restriction\langle S\rangle)$，都同构于某个概率空间 $(X,\mathcal{S},\mu\restriction\mathcal{S})$ 的概率代数，其中 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{B}$的一个 σ-子代数。

证明。对于 A，$B\in\mathcal{S}\subseteq\mathcal{B}$ 有 $[A\cup B]_\mu=[A]_\mu\cup[B]_\mu\in\langle S\rangle$，因此 $\mathcal{S}$ 在 $\mathcal{B}$的并运算下封闭。类似的计算表明，$\mathcal{S}$ 在 $\cap$ 和 $\cdot^c$下封闭。此外，注意到 $\mathcal{S}$ 包含 $\mathcal{B}$ 中所有 μ-测度为 0 的元素。

要完成证明，我们需要考虑 $\mathcal{S}$ 中的一个递增序列 (A_n)，并证明 (A_n) 在 $\mathcal{B}$ 中的并集是 $\mathcal{S}$ 的一个元素。给定这样一个 (A_n)，序列 $([A_n]_\mu)\subseteq\langle S\rangle$ 必须在 $\mathcal{B}$ 中递增，因此它在度量 d 的意义下收敛到一个元素 $[B]_\mu\in\langle S\rangle$，其中 $B\in\mathcal{S}$。这意味着 $\mu(A_n\triangle B)\to 0$ 在 $\mathcal{B}$ 中。由于 (A_n) 递增，这意味着对所有 n，都有 $\mu(A_n\setminus B)=0$。这还意味着 $\mu(B\setminus(\cup A_n))=0$，因此 B 与 $\cup A_n$ 在 $\mathcal{B}$ 中仅相差一个 μ- 测度为 0 的集合。因此 $\cup A_n\in\mathcal{S}$。□

We 需要用到拉东-尼科迪姆定理的以下熟知特例:

2.3. 定理。 [12, 定理 3.8] 设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个概率空间，设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ 是一个 σ-子代数，并考虑 $A \in \mathcal{B}$。那么存在 $g \in L_1(X, \mathcal{C}, \mu)$，使得对每个$B \in \mathcal{C}$，都有 $\int_B g d\mu = \int_B \chi_A d\mu$。函数 g 由 $a = [A]_\mu$ 唯一确定，差异仅在于μ-几乎处处相等；它称为相对于 $\mathcal{C}$ 的 a 的条件概率，记作 $\mathbb{P}(a|\mathcal{C})$，或等价地记作 $\mathbb{P}(A|\mathcal{C})$。我们也称 g 表示 $\mathbb{P}(a|\mathcal{C})$ 和 $\mathbb{P}(A|\mathcal{C})$。

更一般地，对于 $f \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$，存在 $\mathbb{E}(f|\mathcal{C}) \in L_1(X, \mathcal{C}, \mu)$，使得对每个$B \in \mathcal{C}$，都有 $\int_B \mathbb{E}(f|\mathcal{C}) d\mu = \int_B f d\mu$。函数 $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ 在以下意义下是唯一的：运算 $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ 保持 μ-几乎处处相等这一等价关系。元素 $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ 称为相对于 $\mathcal{C}$ 的 f 的条件期望，也记作 $\mathbb{E}_{\mathcal{C}}(f)$。

请注意，对于任意 $A \in \mathcal{B}$，函数 $\mathbb{P}(A|\mathcal{C})$ 的取值必须几乎处处属于 $[0, 1]$ μ。

2.4. 记号。设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个概率空间，并考虑 $a \in \mathcal{B}$。假设 D 是 $\mathcal{B}$ 的一个布尔子代数，它关于度量 d是闭的；再设 $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{B} \mid [A]_\mu \in D\}$ 是引理 2.2 的证明中讨论的 σ-子代数，因此 $\mathcal{D} = D$。我们用$\mathbb{P}(a|D)$表示 $\mathbb{P}(\chi_A|\mathcal{D})$，其中 $a = [A]_\mu$。类似地，对于 $a \in \mathcal{B}$，我们用 χ_a 表示示性函数 χ_A 之一，其中 $A \in \mathcal{B}$ 且 $a = [A]_\mu$。请注意，若 A_1, A_2 是 a的两个此类集合，则 $\chi_{A_1} = \chi_{A_2}$ 几乎处处成立，因此$\mathbb{P}(\chi_{A_1}|\mathcal{D})$和 $\mathbb{P}(\chi_{A_2}|\mathcal{D})$也有同样的性质。

当给定一个概率代数 $(\mathcal{B}, \mu, d)$，但未指定其底层概率空间，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的闭子代数时，为避免显式引入表示 $(\mathcal{B}, \mu, d)$ 的概率空间以及表示 $\mathcal{A}$ 的 σ-子代数（如引理 2.2 所述），我们称 $\mathbb{P}(b|\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$-可测函数。类似地，当 $a \in \mathcal{A}$ 时，我们称 χ_a 为 $\mathcal{A}$-可测。

按照惯例，当 $a,b \in \mathcal{B}$ 时，我们记 $\mathbb{P}(a|D) = \mathbb{P}(b|D)$，表示函数 $\mathbb{P}(a|D)$ 和 $\mathbb{P}(b|D)$ 几乎处处相等（相对于 μ），并对 $\mathbb{P}(a|D) \leq \mathbb{P}(b|D)$ 作类似理解。因此，相关的严格偏序 $\mathbb{P}(a|D) < \mathbb{P}(b|D)$（意即 $\mathbb{P}(a|D) \leq \mathbb{P}(b|D)$ 为真，而 $\mathbb{P}(a|D) = \mathbb{P}(b|D)$ 为假）成立，当且仅当 $\mathbb{P}(a|D) \leq \mathbb{P}(b|D)$ 几乎处处成立（相对于 μ），且 $\mathbb{P}(a|D) < \mathbb{P}(b|D)$ 在一个具有正 μ-测度的集合上成立。对其他可测实值函数（例如 χ_a）之间的这些关系，也有类似的说明。

当 $\mathcal{E} = \{\emptyset, X\}$ 是平凡子代数，且 $A \in \mathcal{B}$ 时，对于所有 $x \in X$，$\mathbb{P}(A|\mathcal{E})$ 都是常值函数 $f(x) := \mu(A)$。事实上，这个 f 是 $\mathcal{E}$-可测的，并且 $\int_E f d\mu = \mu(A \cap E) =$

$\int_E \chi_A d\mu$ 对所有 $E \in \mathcal{E}$ 都成立，也就是说，对于 $E = \emptyset$ 和 $E = X$。更一般地，对于有限子代数 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$，我们有以下关于 $\mathbb{P}(A|\mathcal{E})$ 的公式，它在下文许多地方都很有用。

2.5. 引理。设 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$ 是一个有限子代数，且 $A \in \mathcal{B}$。假设 E_1，……，E_n 是 $\mathcal{E}$ 中的原子。那么

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{E}) = \sum_j \frac{\mu(A \cap E_j)}{\mu(E_j)} \chi_{E_j}.$$

证明。根据积分的可加性，只需证明所显示函数在每个原子 E_j 上的积分等于 $\int_{E_j} \chi_A \, d\mu$，而这等于 $\mu(A \cap E_j)$。由于集合 E_j 两两不交，这一点显然成立。□

2.6. 事实。设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个概率空间，并设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ 是一个 σ-子代数。条件期望算子 $\mathbb{E}_\mathcal{C}$ 限制在 $L_2(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上时，是从 $L_2(X, \mathcal{B}, \mu)$ 到子空间 $L_2(X, \mathcal{C}, \mu)$ 的希尔伯特空间正交投影。（参见 $[10, \text{命题 } 4.2]$。）

设 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ 是 σ-子代数，且 $A \in \mathcal{B}$。那么 $\mathbb{P}(A|\mathcal{D}) = \mathbb{E}_\mathcal{D}(\chi_A) = \mathbb{E}_\mathcal{D}(\mathbb{E}_\mathcal{C}(\chi_A))$ 是 $\mathbb{P}(A|\mathcal{C}) = \mathbb{E}_\mathcal{C}(\chi_A)$ 在 $L_2(X, \mathcal{D}, \mu)$ 中的正交投影，因此

$$\|\mathbb{P}(A|\mathcal{C})\|_2^2 - \|\mathbb{P}(A|\mathcal{D})\|_2^2 = \|\mathbb{P}(A|\mathcal{C}) - \mathbb{P}(A|\mathcal{D})\|_2^2.$$

此外，由于我们是在概率空间上进行运算，对所有 L_2 函数 f，根据柯西-施瓦茨不等式，我们有 $\|f\|_2 = \|f\|_2 \|1\|_2 \geq |\langle f, 1\rangle| = \|f\|_1$，因此

$$\|\mathbb{P}(A|\mathcal{C}) - \mathbb{P}(A|\mathcal{D})\|_2 \geq \|\mathbb{P}(A|\mathcal{C}) - \mathbb{P}(A|\mathcal{D})\|_1.$$

这些为 $\mathbb{P}(A|\mathcal{C}) \neq \mathbb{P}(A|\mathcal{D})$ 提供了有用的定量条件。它们用于证明注 8.2、事实 9.4(5) 和推论 9.5。

若 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ 且 $A \in \mathcal{B}$，则前面的讨论得出

$$\|\mathbb{P}(A|\mathcal{C}) - \mathbb{P}(A|\mathcal{D})\|_1 \leq \|\mathbb{P}(A|\mathcal{C}) - \mathbb{P}(A|\mathcal{D})\|_2 \leq \|\mathbb{P}(A|\mathcal{C}) - \mathbb{P}(A|\mathcal{E})\|_2,$$

这在处理 $\mathbb{P}(A|\mathcal{C})$ 的近似时可能很有用，下面我们将对此加以说明。

2.7. 引理。设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个概率空间，$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ 是一个 σ-子代数，且 $A \in \mathcal{B}$。对于每个 $k \geq 1$，都存在 $(E_1, \ldots, E_k) \in \mathcal{C}^k$，它是 X 的一个划分，使得对于任意满足 $\{E_1, \ldots, E_k\} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ 的 σ-子代数 $\mathcal{D}$，都有 $\|\mathbb{P}(A|\mathcal{C}) - \mathbb{P}(A|\mathcal{D})\|_1 \leq 1/k$。

证明。设 $f = \mathbb{P}(\chi_A|\mathcal{C})$，则 f 是一个 $\mathcal{C}$-可测的 $[0,1]$ 值函数。令 $I_1, \ldots, I_k$ 为区间 $I_j = [\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k})$，其中 $j = 1, \ldots, k-1$ 和 $I_k = [\frac{k-1}{k}, 1]$。因此，这些区间两两不交，且它们的并为 $[0,1]$。对每个 j，令 $E_j = \{x \in X \mid f(x) \in I_j\}$。那么 $(E_1, \ldots, E_k)$ 是 $\mathcal{C}$ 中 X 的一个划分。对于任意满足对所有 j 都有 $r_j \in I_j$ 的序列 $(r_1, \ldots, r_k)$，我们有 $|f - \sum_j r_j \chi_{E_j}| \leq 1/k$ 在 X 上逐点成立，因此 $\|f - \sum_j r_j \chi_{E_j}\|_2 \leq 1/k$。

现在令 $r_j = {}^{\mu(A\cap E_j)}\!/_{\mu(E_j)}$。由于对于 $x \in E_j$， $f(x)$ 属于 I_j，因此对所有 j，都有 $\frac{j-1}{k}\mu(E_j) \leq \int_{E_j} f d\mu \leq \frac{j}{k}\mu(E_j)$。注意到 $\int_{E_j} f d\mu = \int_{E_j} \chi_A d\mu = \mu(A\cap E_j)$，我们看到对于所有 $j = 1, \ldots, k$，都有 $r_j \in I_j$。由引理 2.5 可知

$$\|f - \mathbb{P}(\chi_A|\{E_1, \ldots, E_k\}^{\#})\|_2 = \|f - \sum_j \frac{\mu(A\cap E_j)}{\mu(E_j)}\chi_{E_j}\|_2 \leq 1/k.$$

此外，如果 $\mathcal{D}$ 是包含 $\{E_1, \ldots, E_k\}$ 的 $\mathcal{B}$ 的任意 σ-子代数，那么根据事实 2.6 中最后一条陈述， $\|f - \mathbb{P}(\chi_A|\mathcal{D})\|_1 \leq 1/k$，因此 $(E_1, \ldots, E_k)$ 满足所述条件。□

概率独立性在本文中非常重要。对于 A、$B \in \mathcal{B}$，如果 A 与 B（概率上）独立，即 $\mu(A\cap B) = \mu(A)\mu(B)$，我们记作 $A \perp\!\!\!\perp B$。此外，如果 S、T 是 $\mathcal{B}$ 的子集，我们称 S 与 T（概率上）独立，并在 $A \perp\!\!\!\perp B$ 对每个 $A \in \langle S\rangle$ 和 $B \in \langle T\rangle$ 都成立时记作 $S \perp\!\!\!\perp T$。对模型论学家而言，这并不令人意外：我们需要一种更一般的独立性概念，它是相对于一组参数而言的：

2.8. 定义。若 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$ 的 σ-子代数，我们称 A 与 B 在 $\mathcal{E}$ 上（条件）独立，并记作 $A \perp\!\!\!\perp_{\mathcal{E}} B$，如果

$$\mathbb{P}(A\cap B|\mathcal{E}) = \mathbb{P}(A|\mathcal{E}) \cdot \mathbb{P}(B|\mathcal{E}).$$

更一般地，若 S、T、W 是 $\mathcal{B}$ 的子集，我们称 S 与 T 在 W 上（条件）独立，并记作 $S \perp\!\!\!\perp_W T$，如果对每个 $A \in \langle S\rangle$ 和 $B \in \langle T\rangle$， $A \perp\!\!\!\perp_{\langle W\rangle} B$ 都成立。

注意，当 $W = \emptyset$ 时， $\perp\!\!\!\perp_{\langle W\rangle}$ 化为 $\perp\!\!\!\perp$，因为 $\langle\emptyset\rangle = \{\emptyset, X\}$。此外， $S \perp\!\!\!\perp_W T$ 当且仅当对每个 $A \in S^{\#}$ 和 $B \in T_{\#}$， $A \perp\!\!\!\perp_{\langle W\rangle} B$ 都成立。

对我们而言，以下条件独立性的刻画至关重要。按照模型论中的惯例，若 Y、Z 是参数集，我们用 YZ 表示 $Y \cup Z$。

2.9. 引理。若 S、T、W 是 $\mathcal{B}$ 的子集，则以下陈述等价：

(i) $S \perp\!\!\!\perp_W T$。(ii) 对所有 $A \in S^{\#}$， $\mathbb{P}(A|\langle WT\rangle) = \mathbb{P}(A|\langle W\rangle)$。(iii) 对所有 $A \in S^{\#}$， $\mathbb{P}(A|\langle WT\rangle)$ 是 $\langle W\rangle$-可测的。(iv) 对所有 $A \in S^{\#}$， $\|\mathbb{P}(A|\langle WT\rangle)\|_2 = \|\mathbb{P}(A|\langle W\rangle)\|_2$。

证明。(i) $\Leftrightarrow$ (ii)：应用 [18, 定理 8.9], ，注意到 (ii) 等价于将 $S^{\#}$ 替换为 $\langle S\rangle$ 后得到的同一陈述，因为 $S^{\#}$ 在 $\langle S\rangle$ 中稠密。

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)：显然成立。(iv) $\Leftrightarrow$(ii)：令 $A \in \mathcal{B}$。由于 $\langle W\rangle \subseteq \langle WT\rangle$，由事实 2.6 可得

$$\|\mathbb{P}(A|\langle WT\rangle)\|_2^2 - \|\mathbb{P}(A|\langle W\rangle)\|_2^2 = \|\mathbb{P}(A|\langle WT\rangle) - \mathbb{P}(A|\langle W\rangle)\|_2^2$$

由此可得

$$\|\mathbb{P}(A|\langle WT\rangle)\|_2 = \|\mathbb{P}(A|\langle W\rangle)\|_2 \text{ if and only if } \mathbb{P}(A|\langle WT\rangle) = \mathbb{P}(A|\langle W\rangle).$$

应用量词“对所有 $A \in S^{\#}$”即可得到所需的等价关系。 □

接下来的结果表明，文献中常见的几种不同的 $\perp\!\!\!\perp$ 定义是等价的。

2.10. 推论。若 S、T、W 是 $\mathcal{B}$ 的子集，则以下陈述等价：

(i) $S \perp\!\!\!\perp_W T$。

(ii) $S \perp\!\!\!\perp_W \langle WT\rangle$

(iii) $\langle WS\rangle \perp\!\!\!\perp_W \langle WT\rangle$

证明。(ii) $\Rightarrow$ (i) 显然。现在假设 $S \perp\!\!\!\perp_W T$ 成立，并证明 (ii)。由引理 2.9(ii)，对于所有 $A \in S^{\#}$，我们有 $\mathbb{P}(A|\langle WT\rangle) = \mathbb{P}(A|\langle W\rangle)$，因此 $S \perp\!\!\!\perp_W \langle WT\rangle$ 成立，这同样是利用引理 2.9(ii) 得出的。(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) 的证明类似，因为独立性的定义对左侧和右侧的族是对称的。□

2.11. 注记。当 $W \subseteq \mathcal{B}$ 有限时，我们有对 $\perp\!\!\!\perp$ 的如下简单刻画。也就是说，$S \perp\!\!\!\perp_W T$ 当且仅当 $\mu(A \cap B \cap C)\mu(C) = \mu(A \cap C)\mu(B \cap C)$ 对每个 $A \in S^{\#}$ 都成立，且 $B \in T^{\#}$ 并且对每个原子 $C \in W_{\#}$。

通过比较引理 2.5 给出的 $\mathbb{P}(A \cap B|W^{\#})$ 和 $\mathbb{P}(A|W^{\#}) \cdot \mathbb{P}(B|W^{\#})$ 的表达式中的系数，很容易证明这一点。

2.12. 记号。设 C、D、E 是 $\mathcal{B}$ 的子集，且 S、T、W 是 $\mathcal{B}$ 的子集，使得 $\langle C\rangle = \langle S\rangle$、$\langle D\rangle = \langle T\rangle$，并且 $\langle E\rangle = \langle W\rangle$。我们用 $C \perp\!\!\!\perp_E D$ 表示与 $S \perp\!\!\!\perp_W T$ 相同的意思。

接下来我们证明一个引理，它将在定理 8.1 的证明中用到。

2.13. 引理（扩张）。设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个概率空间。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的有限子代数，其原子为 $A_1, \ldots, A_m$，并设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{B}$ 的闭子代数。那么存在一个概率空间 $(X', \mathcal{B}', \mu')$，以及从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{B}'$ 的布尔保测嵌入 $B \mapsto B'$，还有 $\mathcal{B}'$ 的一个有限子代数 $\mathcal{E}$，其原子 $E_1, \ldots, E_m$ 满足：对于所有 $i = 1, \ldots, m$ 和 $\mathcal{E} \perp\!\!\!\perp_{\mathcal{C}'} \mathcal{D}'$，$\mathbb{P}(E_j|\mathcal{C}') = \mathbb{P}(A'_j|\mathcal{C}')$。（这里，对于 $\mathcal{Z} = \mathcal{C}$ 或 $\mathcal{D}$，我们用 $\mathcal{Z}'$ 表示 $\{B' | B \in \mathcal{Z}\}$。）

证明。设 $([0,1], \mathcal{F}, \lambda)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的勒贝格测度空间，并取 $(X \times [0,1], \mathcal{B}', \mu')$ 为乘积测度空间，其中 $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ 和 $\mu' = \mu \otimes \lambda$。

对于每个 $B \in \mathcal{B}$，令 $B' := B \times [0,1]$。对应关系 $B \mapsto B'$ 显然是从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{B}'$的布尔保测嵌入。此外，对于任意 $\mathcal{B}$-可测函数f：$X \to [0,1]$，令 f'表示 $\mathcal{B}'$-可测函数 $(x, y) \mapsto f(x)$。容易看出

该嵌入保持积分；也就是说，对于任意 $B \in \mathcal{B}$ 以及任意 $\mathcal{B}$-可测 $f\colon X \to [0,1]$，由 Fubini 定理有 $\int_{B'} f'\, d(\mu \otimes \lambda) = \int_B \left(\int_{[0,1]} f'\, d\lambda \right) d\mu = \int_B f\, d\mu$。我们还注意到，对于任意 $B \in \mathcal{B}$ 以及 $\mathcal{B}$的任意 σ-子代数 $\mathcal{C}$，都有 $\mathbb{P}(B'|\mathcal{C}') = \mathbb{P}(B|\mathcal{C})'$。（利用引理 2.7，只需证明 $\mathcal{C}$ 为有限的情形；这可通过应用引理 2.5 得出。注意，若C_1、……、C_k是 $\mathcal{C}$的原子，那么 C'_1、……、C'_k 是 $\mathcal{C}'$的原子，并且对于每个 $j = 1$、……、k，都有 $(\mu \otimes \lambda)(B' \cap C'_j) = \mu(B \cap C_j)$、$(\mu \otimes \lambda)(C'_j) = \mu(C_j)$，以及 $\chi_{C'_j} = (\chi_{C_j})'$。）

对于每个 $i = 1, \ldots, m$，令 $f_i := \mathbb{P}(A_i|\mathcal{C})$，并注意到由于 $A_1, \ldots, A_m$ 是 1 的划分，因此我们有 $f_1(x) + \cdots + f_m(x) = 1$ 在 X μ-几乎处处成立。现在令 $E_1 = \{(x, y) \in X \times [0,1] \colon 0 \le y \le f_1(x)\}$，并且对于 $1 < i \le m$，令 $E_i = \{(x, y) \in X \times [0,1] \colon f_1(x) + \cdots + f_{i-1}(x) < y \le f_1(x) + \cdots + f_i(x))\}$。集合 $\{E_i\}_{i \le m}$ 是 $\mathcal{B}'$-可测且两两不交的，并且 $X' = X \times [0,1] = \bigcup_{i \le m} E_i$（除了可能存在一个 μ'-测度为零的集合）。

注意，对于任意的 $B \in \mathcal{B}$和 $i = 1, \ldots, m$，我们有

$$(\mu \otimes \lambda)(B' \cap E_i) = \int_{B'} \chi_{E_i}\, d(\mu \otimes \lambda) = \int_B \left(\int_{[0,1]} \chi_{E_i}\, d\lambda \right) d\mu = \int_B f_i\, d\mu$$

根据定义和 Fubini 定理。如果 $C \in \mathcal{C}$，则得到

$$\int_{C'} \chi_{E_i}\, d(\mu \otimes \lambda) = \int_C f_i\, d\mu = \int_{C'} \mathbb{P}(A_i|\mathcal{C})'\, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{C'} \mathbb{P}(A'_i|\mathcal{C}')\, d(\mu \otimes \lambda)$$

因此，对于所有 $i = 1, \ldots, m$，都有 $\mathbb{P}(E_i|\mathcal{C}') = \mathbb{P}(A'_i|\mathcal{C}')$。对于 $D \in \mathcal{D}$，我们得到 t

$$(\mu \otimes \lambda)(D' \cap E_i) = \int_{D'} f'_i\, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{D'} \mathbb{P}(A_i|\mathcal{C})'\, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{D'} \mathbb{P}(A'_i|\mathcal{C}')\, d(\mu \otimes \lambda),$$

所以，对于所有 $i = 1, \ldots, m$，都有 $\mathbb{P}(E_i|\mathcal{D}') = \mathbb{P}(E_i|\mathcal{C}')$。因此 $\mathcal{E} \perp\!\!\!\perp_{\mathcal{C}'} \mathcal{D}'$。 □

3. 一些连续模型论

本文采用连续逻辑的框架，讨论概率代数的模型论。连续逻辑的基本思想见 [7, 8]。我们假定读者熟悉这些来源中的内容，并且经常不加具体引用地使用这些内容。

此外，我们还需要一些关于连续逻辑中的度量虚构元素及其在稳定性理论某些主题中的作用的背景知识，尤其是在处理可定义谓词的规范参数和类型的可定义性时。这里我们提供有关这一背景的已出版资料的参考，并对我们所使用的这些主题作一个非常简短的概述。

我们的主要参考文献[7, 8]中对虚拟排序（即解释）作了一些论述。在 [7, 第 11] 节中，只介绍了有限虚构元素；它们是有限个种类的乘积模去一个可定义伪度量所得的商集。

然而，在第 5 节以及本文后续部分中，为了讨论稳定性理论中的某些概念，我们需要更一般的无限虚构元素。它们是可数无限个类型的乘积在某个可定义伪度量下的商集；它们

通过投影映射到其来源类型，与现有结构相连。这类虚元的一个核心例子是相对于定义某个可定义谓词时所用参数序列（可能是无限序列）的典范参数。我们将在 [8, 第 5] 节中详细讨论这些内容。

给定连续理论 T，在 T 中加入所有可能的度量虚拟类型后得到的多类型理论，称为 T 的 meq 扩张，记作 T_{meq}。同样，给定 $\mathcal{M} \models T$，将 $\mathcal{M}$ 扩张为 T_{meq}的模型，记作 $\mathcal{M}^{\mathrm{meq}}$。关于 T^{meq} 的完整构造及其某些性质，可参见 [13, 第 3 节。3], 以及 [5, 第 1] 节。

在第 8 节中，我们还会在连续模型论的背景下使用稳定性理论中的概念和工具。其中许多内容，包括公式的典范参数、类型的可定义性以及平稳类型的典范基，均在 [8, 第 7 节和第 8] 节中论述。除此之外，我们还会使用一些概念，例如类型彼此平行、平稳类型的平行类、莫利序列、正交类型以及非多维理论。尽管连续模型论文献中对这些概念缺乏全面阐述，但参照经典模型论中稳定性理论的主要参考文献中的处理方式，不难对它们进行表述并加以理解，尤其是有 [8] 所提供的工具。这里需要用到的一个此类事实是：平稳类型的典范基包含于该类型某个莫利序列的 meq 可定义闭包中。对于经典离散背景下的这部分内容，我们主要遵循 [11] 中的论述。

4. The model theory of probability spaces

我们在此讨论如下形式的结构

$$\mathcal{M} = (\widehat{\mathcal{B}}, 0, 1, \cdot^c, \cap, \cup, \widehat{\mu}, \widehat{d})$$

其中 $(\mathcal{B}, \widehat{\mu})$ 是概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的概率代数，0 是与 $\emptyset$ 对应的事件，1 是与 X对应的事件；$\cdot^c$ 是补运算，而 $\cap$,$\cup$ 是 $\mathcal{B}$ 上的交运算和并运算；d 是 $\mathcal{B}$ 上的典范度量（定义为 $\widehat{d}$ 对 $a, b \in \mathcal{B}$ 有 $d(a, b) = \widehat{\mu}(a \triangle b)$）。这些谓词，即 $\widehat{\mu}$ 和 d，取值于区间 $[0, 1]$。一元运算 $\cdot^c$ 和一元谓词 $\widehat{\mu}$ 的一致连续模由 $\Delta(\epsilon) = \epsilon$给出；二元运算 $\cap$ 和 $\cup$ 的一致连续模由$\Delta(\epsilon) = \epsilon/2$给出。

在本文余下部分中，我们取 L^{pr} 为上一段所示的连续签名。

注意，每个概率空间的概率代数确实都是一个 L^{pr}-结构。（特别是，这要求它作为度量空间是完备的，这一点我们在第2节中已经指出。）

4.1. 记号。F 对于任意 L^{pr}-预结构 $\mathcal{M}$ 和 $a \in M$，我们将 a^{-1} 记作 a^c，将 a^{+1} 记作 a.

以下 L^{pr}-条件很容易看出在概率空间的每个概率代数中都成立。

(1) 布尔代数公理：布尔代数的每条常见公理都是项之间一个方程的 $\forall$-闭包（见 [17, 第 38] 页），因此可以在连续逻辑中表示为一个条件。例如，公理 $\forall x \forall y (x \cup y = y \cup x)$ 等价于 $\sup_x \sup_y \left(d(x \cup y, y \cup x)\right) = 0$。(2) 测度公理：$\mu(0) = 0$ 且 $\mu(1) = 1 \sup_x \sup_y \left(\mu(x \cap y) \dot{-} \mu(x)\right) = 0 \sup_x \sup_y \left(\mu(x) \dot{-} \mu(x \cup y)\right) = 0 \sup_x \sup_y |(\mu(x) \dot{-} \mu(x \cap y)) - (\mu(x \cup y) \dot{-} \mu(y))| = 0$ 最后三个公理表示，对于所有 x、y，$\mu(x \cup y) + \mu(x \cap y) = \mu(y) + \mu(x)$。(3) d 与 μ 之间的联系：$\sup_x \sup_y |d(x, y) - \mu(x \Delta y)| = 0$ 其中 $x \Delta y$ 表示给出对称差的布尔项：$x \Delta y = (x \cap y^c) \cup (x^c \cap y)$。

我们将上述 L^{pr}-条件的集合记为 Pr。

4.2. 记号。本文余下部分中，我们用记号 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d)$ 表示 Pr 的一般模型。我们注意避免将这一记号与通常表示概率空间的记号 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }(X, \mathcal{B}, \mu)$，以及表示其对应概率代数的 $(\mathcal{B}, \widehat{\mu}, d)$ 混淆。

4.3. 定理。 Pr 的模型 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d)$ 恰好是（抽象的）概率代数。也就是说，$\mathcal{B}$ 是一个 σ-序完备布尔代数，而 μ 是定义在 $\mathcal{B}$ 上的严格正的、σ-可加概率测度；此外，d 在 $\mathcal{B}$ 上由 $d(a, b) := \mu(a \triangle b)$ 定义。

证明。若 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d)$ 确实是陈述中所描述的概率代数，那么显然它满足 Pr 中的所有条件。此外，度量空间 $(\mathcal{B}, d)$ 是完备的，这可由引理 323F] 中的计算得出。

反过来，假设 $\mathcal{M}$ 是 Pr 的一个模型。由公理显然可知，$\mathcal{M}$ 由一个布尔代数 $\mathcal{B}$ 及其上的有限可加概率测度 μ 组成，并且在度量 $d(a, b) = \mu(a \triangle b)$ 下，$\mathcal{B}$ 是一个完备度量空间。此外，μ 关于 d 必须在 $\mathcal{B}$ 上连续；事实上，按照签名 L^{pr} 的规定，μ 关于 d 是 1-Lipschitz 的。

$\mathcal{B}$ 中的任何递增序列相对于 d必然是柯西序列，因此会收敛。这一点以及 μ 的连续性确保 $\mathcal{B}$ 作为布尔代数是 σ-序完备的，并且 μ 在 $\mathcal{B}$上是 σ-可加的。□

由定理 4.3 可知，Pr 的模型（在同构意义下）恰好是概率空间的概率代数。这一点在 [15, 定理 321J]中得到了证明；该结果证明中的一个关键要素是针对 σ-序完备布尔代数的 Loomis-Sikorski 表示定理；参见 [15, 定理 314M]。在定理 4.5 中，我们将运用模型论的工具证明关于 Pr 的模型的这一事实。

4.4. 例。设 $\mathcal{A}$ 是一个布尔代数，μ 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的有限可加概率测度。我们可以用熟悉的方式在 $\mathcal{A}$ 上定义距离 d：令 $d(a,b)$ 等于 $\mu(a \triangle b)$，其中 $\triangle$ 表示 $\mathcal{A}$ 中的对称差。于是 $(\mathcal{A}, \mu, d)$ 是一个L^{pr}-预结构，并满足 Pr 的所有公理。因此，我们可以先将 $(\mathcal{A}, \mu, d)$ 对 μ-测度为 0 的元素所构成的理想取商，再对所得商集作度量完备化（如 [7, 第 329-331] 页中部所述），从而得到 Pr 的一个模型$\widehat{\ }\quad\widehat{\ }(\mathcal{A}, \widehat{\mu}, d)$。

对于熟悉 Abraham Robinson 非标准分析（NSA）的读者，我们说明这一构造与 Loeb 测度构造 [20], 的关系；后者一直是 NSA 应用中最重要的工具之一。进行该构造时，我们从$\mathcal{A}$ 开始，其中 $\mathcal{A}$ 是定义在一个内集 X 的子集所构成的内布尔代数，而 μ 则由定义在 $\mathcal{A}$ 上的内有限可加 ${}^*[0,1]$-值测度 ν 得到：对每个 $a \in \mathcal{A}$，令 $\mu(a)$ 为 $\nu(a)$ 的$\widehat{\ }\quad\widehat{\ }$标准部分。按照上一段所述，以上述方式从 $(\mathcal{A}, \mu, d)$ 构造出 $(\mathcal{A}, \widehat{\mu}, d)$。在这种情形下，由于基本非标准分析框架中的 ω_1-饱和假设，$\mathcal{A}$ 对 μ-零集所成理想取商后得到的商代数，相对于由 d 导出的商度量已经是完备的。此外，饱和假设还意味着，μ 有一个自然且唯一的扩张，使其成为定义在由 $\mathcal{A}$ 生成的 X 子集之 σ-代数上的 σ-可加概率测度。由此得到的$\widehat{\ }\quad\widehat{\ }$概率空间以 $(\mathcal{A}, \widehat{\mu}, d)$ 为其概率代数。有关 Loeb 构造及其基本性质的初步讨论，参见 [19, 第 II.2] 节和 [22,第 2.1] 节。

一族概率空间的概率代数的度量超积，是 Loeb 构造的一个例子。在这种情况下，内测度空间就是该概率空间族的离散超积。

这种方法提供了另一种证明方式：每个 Pr 模型都是某个概率空间的概率代数，下面我们将对此进行说明。

4.5. 定理。设 $\mathcal{M}$ 是一个 L^{pr} 结构。以下条件等价：(1) $\mathcal{M}$ 是 Pr 的模型。(2) $\mathcal{M}$ 同构于某个概率空间的概率代数。

证明。(2) $\Rightarrow$ (1)：参见定理 4.3 证明的第一段。

(1) $\Rightarrow$(2)：设 $\mathcal{M}$是 Pr的一个模型。设 I是 M的所有有限子集组成的集合。对于每个 $\tau \in I$，令 $\mathcal{M}_\tau$为 $\mathcal{M}$的子代数 $\tau^{\#}$，它是有限的。每个 $\mathcal{M}_\tau$ 都是概率

代数，对应一个有限概率空间（X_τ， $\mathcal{A}_\tau$， μ_τ）。这里 X_τ是 $\mathcal{M}_\tau$中的原子集合， $\mathcal{A}_\tau$是 X_τ的所有子集构成的布尔代数，并且对于 X_τ中的每个元素 a， $\mu_\tau(\{a\}) = \mu(a)$。

存在一个超滤子 U，其定义在 I 上，使得对于每个 $a \in M$，集合 $\{\tau \in I \mid a \in \tau\}$ 都是 U 的一个元素。正如前面的例子所讨论的，族 $(\mathcal{M}_\tau \mid \tau \in I)$ 的 U-超积是某个概率空间的概率代数，这是由 Loeb 测度构造得到的。此外， $\mathcal{M}$ 同构于该超积的一个子结构；该嵌入将 $a \in M$ 映射到族 $(a_\tau \mid \tau \in I)$ 的等价类，其中我们按如下方式定义 a_τ： (i) 若 $a \notin \tau^{\#}$，则取 $a_\tau = 0$；(ii) 若 $a \in \tau^{\#}$，则取 a_τ 为 X_τ 的子集，它由 $\mathcal{M}_\tau$ 中所有包含于 a 的原子组成（因此 a 是 $\mathcal{M}$ 中 a_τ 的并）。

因此，我们已将 $\mathcal{M}$ 嵌入某个概率空间的概率代数中。应用引理 2.2 即完成证明。□

本节余下部分旨在讨论概率代数的初等等价，并刻画（公理化） Pr的完全扩张。这需要研究在Pr的模型中，原子集（以及一些相关集合）在连续逻辑下的可定义性。（关于可定义谓词和可定义集的讨论，参见 [7, 第 9] 节。）

本节余下部分中， $\mathcal{M}$ 表示 Pr的一个模型，其底层布尔代数为 $\mathcal{B}$，测度为 μ，度量为 d。我们用 $A_1^{\mathcal{M}}$表示 $\mathcal{B}$ 中所有原子与0组成的集合。注意，对每个 $r > 0$，满足 $\mu(a) \geq r$的 $a \in A_1^{\mathcal{M}}$只有有限多个。因此， $A_1^{\mathcal{M}}$是有限集或可数集；所以 $A_1^{\mathcal{M}}$的并（并集）属于 $\mathcal{B}$，并在 $\mathcal{B}$ 中给出1的一个可测分解，将其分为原子部分和无原子部分，两者之一也可以为0。此外，$A_1^{\mathcal{M}}$是关于度量 d的闭集。

我们考虑 Pr 的签名中的以下公式：

$$\begin{aligned}
\chi(x) &:= \inf_y |\mu(x \cap y) - \mu(x \cap y^c)| \\
\psi(x) &:= \mu(x) \dot{-} \chi(x) \\
\varphi_1(x) &:= \inf_z (d(x, z) \dot{+} \psi(z)) \\
\theta(x) &:= \sup_y \inf_z |\mu(x \cap y \cap z) - \mu(x \cap y \cap z^c)|
\end{aligned}$$

要理解这些公式在 Pr 的模型中的含义，需要以下结果。证明所需的初等论证见 [16, 第 41 节，定理 A]。

4.6. 引理。假设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models Pr$。如果 $b \in \mathcal{B}$ 是无原子的，那么对每个 $\delta > 0$，在 $\mathcal{B}$ 中都存在一个 1 的划分，记作 $u = (u_1, \ldots, u_n)$，使得对所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $\mu(b \cap u_i) \leq \delta$。

证明。假设 $b = 1$in $\mathcal{B}$，证明该结论即可。根据向下 Löwenheim-Skolem 定理， $\mathcal{M}$ 有一个可分初等子结构 $\mathcal{M}'$，它必然也是无原子的，显然只需对 $\mathcal{M}'$证明引理。假设 $\mathcal{M}'$ 基于

代数 $\mathcal{B}'$，它是 $\mathcal{B}$的闭子代数，而 $\mathcal{M}'$ 的谓词是 μ 和 d 在 $\mathcal{B}'$上的限制。由 $\mathcal{M}'$的可分性，我们可以取 $(\mathcal{A}_n \mid n \geq 1)$ 为 $\mathcal{B}'$ 的有限布尔子代数构成的递增族，使得 $\bigcup(\mathcal{A}_n \mid n \geq 1)$ 是 $\mathcal{B}'$ 的稠密子集。对每个$n \geq 1$，令 π_n 为 $\mathcal{A}_n$ 中由 $\mathcal{A}_n$的原子构成的 1 的划分。 [16, 第 41] 节中定理 A 的论证表明，这些划分满足引理的结论。□

4.7. 命题。设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models Pr$和 $b \in \mathcal{B}$。

(a) 若 b 是无原子的，则 $\chi^{\mathcal{M}}(b) = 0$。(b) b 是一个原子或 0，当且仅当 $\chi^{\mathcal{M}}(b) = \mu(b)$。(c) 若 b 不是无原子的，且 a 是包含在 b中的最大测度原子，则 $\chi^{\mathcal{M}}(b) \leq \mu(a)$。(d) $\operatorname{dist}(b, A_1^{\mathcal{M}}) = \varphi_1^{\mathcal{M}}(b)$。(e) b 在 $\mathcal{B}$ 中是无原子的，当且仅当 $\theta^{\mathcal{M}}(b) = 0$。

证明。(a) 固定 $\delta > 0$，并使用引理 4.6 在 $\mathcal{B}$ 中得到一个 1 的划分，记为 $u = (u_1, \ldots, u_n)$，使得对所有 $i = 1, \ldots, n$，均有 $\mu(b \cap u_i) \leq \delta$。对所有 i，令 $a_i = b \cap u_i$，于是 $b = a_1 \cup \cdots \cup a_n$。存在 i，使得 $\mu(a_1 \cup \cdots \cup a_i) \leq \frac{1}{2}\mu(b) \leq \mu(a_1 \cup \cdots \cup a_{i+1})$。于是 $y = a_1 \cup \cdots \cup a_i$证明了 $\chi^{\mathcal{M}}(b) \leq \delta$。

(b) 若 b 是一个原子，而 a 任意，则事件 $b \cap a$、$b \cap a^c$ 中一个等于 b，另一个为 0。在这种情况下，对于所有 a，$|\mu(b \cap a) - \mu(b \cap a^c)| = \mu(b)$，因此确有 $\chi^{\mathcal{M}}(b) = \mu(b)$。

若 b 不是原子，则存在 $a \in \mathcal{B}$ 使得 $\mu(b) > \mu(b \cap a) > 0$ 且 $\mu(b) > \mu(b \cap a^c) > 0$，由此可得 $|\mu(b \cap a) - \mu(b \cap a^c)| < \mu(b)$。

(c) 假设 b 不是无原子的，并令 a_1、a_2、.....为 $\mathcal{B}$中包含于 b的所有互不相同的原子（有限个或可数个）的一个列表，排列次序满足 $\mu(a_1) \geq \mu(a_2) \geq \ldots$。令$u \subseteq b$ 为所有满足 j 为奇数的 a_j 之并，令 $v \subseteq b$ 为所有满足 j 为偶数的 a_j 之并。于是 u、v 互不相交，且 $b \setminus (u \cup v)$ 是无原子的。容易验证，$\chi^{\mathcal{M}}(b) \leq \mu(u) - \mu(v) \leq \mu(a_1)$。

(d) 关键思路如下：如果 b 是无原子的，那么 $\operatorname{dist}(b, A_1^{\mathcal{M}}) = \mu(b)$；如果 b 不是无原子的，并且 a 是包含在 b 中的最大测度原子，那么 $\operatorname{dist}(b, A_1^{\mathcal{M}}) = \mu(b) - \mu(a)$。

因此，由 (a) 和 (c) 可得，对所有 b，$\operatorname{dist}(b, A_1^{\mathcal{M}}) \leq \psi^{\mathcal{M}}(b)$。由 (b) 可知，当 b 是原子时，$\psi^{\mathcal{M}}(b) = 0$，因此 $A_1^{\mathcal{M}}$ 是 $\psi^{\mathcal{M}}$ 的零点集。由此显然可得 $\operatorname{dist}(b, A_1^{\mathcal{M}}) \geq \varphi_1^{\mathcal{M}}(b)$。反过来，对于每个 b，我们有

$$\varphi_1^{\mathcal{M}}(b) \geq \inf_z (d(b, z) \dot{+} \operatorname{dist}(z, A_1^{\mathcal{M}})) \geq \operatorname{dist}(b, A_1^{\mathcal{M}})$$

由此完成证明。

(e) 这由 (a) 和 (b) 得出。注意，$\theta(b) = 0$ 等价于说，对每个 $u \leq b$，$\chi(u) = 0$都成立。□

命题 4.7(d) 表明， $A_1^{\mathcal{M}}$是可定义集，且在 Pr的所有模型 $\mathcal{M}$ 中都一致成立。（参见 [7, 定义 9.16]。）对每个 $n > 1$ 引入以下进一步的集合很有用

$$A_n^{\mathcal{M}} = \{x_1 \cup \cdots \cup x_n \mid x_1, \ldots, x_n \in A_1^{\mathcal{M}}\}.$$

注意， $A_1^{\mathcal{M}} \subseteq A_2^{\mathcal{M}} \subseteq \cdots \subseteq A_n^{\mathcal{M}} \subseteq \ldots$。利用 [7, 定理 9.17] 以及集合 $A_1^{\mathcal{M}}$ 的可定义性，我们可以得出结论：对于所有 $n \geq 1$， $A_n^{\mathcal{M}}$都是 Pr的所有模型 $\mathcal{M}$ 中的可定义集。事实上，正如我们接下来要展示的， $A_n^{\mathcal{M}}$的距离可由 Pr 的签名中的以下公式明确给出（其中我们通过对 n 进行归纳，为 $n > 1$ 定义公式）：

$$\varphi_n(x) = \inf_w(\varphi_{n-1}(x \cap w) \dot{+} \varphi_1(x \cap w^c))$$

4.8. 命题。设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models Pr$ 且 $a \in \mathcal{B}$。那么对每个 $n \geq 1$

$$\operatorname{dist}(a, A_n^{\mathcal{M}}) = \varphi_n^{\mathcal{M}}(a).$$

证明。设 $a \in \mathcal{B}$，并设 $a_1, a_2, \ldots$ 是包含在 a 中的所有互异原子的一个列表，排列方式满足 $\mu(a_1) \geq \mu(a_2) \geq \ldots$；如有必要，对于较大的 k，取 $a_k = 0$ 将其扩展为无限序列。注意，$\operatorname{dist}(a, A_n^{\mathcal{M}}) = d(a, w)$，其中 $w = a_1 \cup \cdots \cup a_n$；对于这个 w，我们有 $\operatorname{dist}(a, w) = \mu(a) - \mu(a_1 \cup \cdots \cup a_n) = \mu(a) - (\mu(a_1) + \cdots + \mu(a_n))$。

为证明引理，我们对 $n \geq 1$进行归纳。 $n = 1$ 情形即为命题 4.7(d)。取 $n > 1$后，只需证明从 $n - 1$ 到 n的归纳步骤。

首先注意，若取 $w = a_1 \cup \cdots \cup a_{n-1}$，则有 $\varphi_{n-1}^{\mathcal{M}}(a \cap w) = 0$（由归纳假设）以及 $\varphi_1^{\mathcal{M}}(a \cap w^c) = \mu(a \cap w^c) - \mu(a_n)$（由命题 4.7(d)）。因此，对于这个$w$，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{n-1}^{\mathcal{M}}(a \cap w) + \varphi_1^{\mathcal{M}}(a \cap w^c) &= \mu(a \cap w^c) - \mu(a_n) \\ &= (\mu(a) - \mu(a_1 \cup \cdots \cup a_{n-1})) - \mu(a_n) \\ &= \mu(a) - (\mu(a_1) + \cdots + \mu(a_{n-1}) + \mu(a_n)) \\ &= \operatorname{dist}(a, A_n^{\mathcal{M}}).\end{aligned}$$

要完成论证，只需证明对于任意其他的 w，我们有

$$\left(\varphi_{n-1}^{\mathcal{M}}(a \cap w) \dot{+} \varphi_1^{\mathcal{M}}(a \cap w^c)\right) \geq \mu(a) - (\mu(a_1) + \cdots + \mu(a_n)).$$

因此，固定 $w \in M$，并令 $a_1^1, a_2^1, \ldots$ 为包含在 $a \cap w$ 中的所有不同原子的一个列表，排列顺序满足 $\mu(a_1^1) \geq \mu(a_2^1) \geq \ldots$，必要时通过取 $a_k^1 = 0$ 将其扩展为无限序列。此外，令 a_1^2 为包含在 $a \cap w^c$ 中的最大原子之一（它可以是 0）。注意， $a_1^2, a_1^1, \ldots, a_{n-1}^1$ 中的非零元素互不相同，且都是原子。根据归纳假设， $\varphi_{n-1}^{\mathcal{M}}(a \cap w) = \mu(a \cap w) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(a_i^1)$，并由命题

命题 4.7(d) $\varphi_1^{\mathcal{M}}(a \cap w^c) = \mu(a \cap w^c) - \mu(a_1^2)$。因此

$$\varphi_{n-1}^{\mathcal{M}}(a \cap w) \dot{+} \varphi_1^{\mathcal{M}}(a \cap w^c) = \big(\mu(a \cap w) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(a_i^1)\big) + \big(\mu(a \cap w^c) - \mu(a_1^2)\big)$$
$$= \mu(a) - \Big(\sum_{i=1}^{n-1} \mu(a_i^1) + \mu(a_1^2)\Big)$$

当 a_2^1、a_1^1、.....、a_{n-1}^1 具有尽可能大的测度时，最后一个表达式取得其可能的最小值；而当序列 $\mu(a_2^1)$ $\mu(a_1^1)$.....、$\mu(a_{n-1}^1)$ 是 $\mu(a_1)$.....、$\mu(a_n)$ 的一个排列时，便会出现这种情况。□

关于随机变量结构中原子的类似处理，参见 [3, 引理 2.16]。

4.9. 注记。设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models Pr$ 和 $a \in \mathcal{B}$。命题 4.7(d) 和 4.8 清楚地表明

$$\mu(a) \geq \varphi_1^{\mathcal{M}}(a) \geq \varphi_2^{\mathcal{M}}(a) \geq \cdots \geq \varphi_n^{\mathcal{M}}(a) \geq \ldots$$

4.10. 记号。设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models Pr$ 和 $a \in \mathcal{B}$；令 a_1、a_2、..... 为包含于 a 中的所有不同原子的一个列表，并排列为使得 $\mu(a_1) \geq \mu(a_2) \geq \ldots$；如有必要，对于较大的 k，取 $a_k = 0$，从而将其扩展为一个无限序列。对于每个 $n \geq 1$，我们将 $\mu(a_n)$ 称为包含于 a 中的一个原子的n^{th} 最大测度，并将此数记为 $at_n^{\mathcal{M}}(a)$。

注意，$(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ 的非零元素互不相同，而测度值 $(\mu(a_n) \mid n \in \mathbb{N})$ 则可能重复。

4.11. 推论。对于每个 $n \geq 1$，谓词 at_n 在 Pr 的所有模型中都是可定义的。事实上，若 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models Pr$ 且 $a \in \mathcal{B}$，则

$$at_1^{\mathcal{M}}(a) = \mu(a) \dot{-} \varphi_1^{\mathcal{M}}(a)$$

并且对于每个 $n > 1$

$$at_n^{\mathcal{M}}(a) = \varphi_{n-1}^{\mathcal{M}}(a) \dot{-} \varphi_n^{\mathcal{M}}(a).$$

证明。这由命题 4.8 立即得出。 □

现在我们考虑通过向签名中添加一元谓词符号 $(P_n \mid n \geq 1)$，并将以下条件作为公理添加，从而得到 Pr 的一个定义扩张

$$\sup_x \big|P_1(x) - (\mu(x) \dot{-} \varphi_1(x))\big| = 0$$

并且对于 $n > 1$

$$\sup_x \big|P_n(x) - (\varphi_{n-1}(x) \dot{-} \varphi_n(x))\big| = 0.$$

Pr的这个扩张记为 Pr^*。注意， Pr的每个模型 $\mathcal{M}$都有唯一的扩张，我们将其记为 $\mathcal{M}^*$；它是 Pr^*的一个模型。这个扩张通过如下方式解释每个 P_n而得到：对于每个 $a \in M$，取 $P_n^{\mathcal{M}^*}(a)$为包含在 a中的原子的最大测度 n^{th}。

4.12. 记号。设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models Pr$。固定 $n \geq 1$，并考虑任意元组 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n = \mathcal{B}^n$。令 $e = (e_1, \ldots, e_{2^n})$为布尔代数 $\mathcal{B}$中由 $a_1, \ldots, a_n$生成的 1 的划分。这里指，e的元素是形如 $a_1^{k_1} \cap \cdots \cap a_n^{k_n}$的所有可能交集，其中每个 k_i都取自 $\{-1, +1\}$；我们按照上标元组 $k_1, \ldots, k_n$的字典序列出这些交集。我们称 e为 $\mathcal{B}$中与 a相关联的 1 的划分。此外，注意，当 $(a_1, \ldots, a_n)$和 $(e_1, \ldots, e_{2^n})$如上所述时，每个 a_i都是 e中坐标 e_j的并，这些坐标对应于满足 $k_i = +1$的交集 $a_1^{k_1} \cap \cdots \cap a_n^{k_n}$。也就是说，$(a_1, \ldots, a_n)$与 $(e_1, \ldots, e_{2^n})$的坐标之间的对应关系，在两个方向上都由只依赖于 n的简单布尔项给出。（特别地，这些元组在 Pr的模型中是统一互相可定义的。）

为简化记号，当 $s = (k_1, \ldots, k_n)$是 $\{-1, +1\}^n$ 的任意元素，且 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$时，我们将 a^s 记作 $a_1^{k_1} \cap \cdots \cap a_n^{k_n}$。同理，当 $s = (k_1, \ldots, k_n)$且 x 表示由变量组成的元组 $(x_1, \ldots, x_n)$时，我们将布尔项 $x_1^{k_1} \cap \cdots \cap x_n^{k_n}$ 记作 x^s。如上所示，恒等式

$$x_i = \bigcup_s (x^s \mid s = (k_1, \ldots, k_n) \text{ and } k_i = +1)$$

在 Pr 的所有模型中均成立。我们经常使用这一记号；在此处也一样，会省略 $x = (x_1, \ldots, x_n)$和 $s = (k_1, \ldots, k_n) \in \{-1, +1\}^n$ 的标准说明。特别地，当 $s \in \{-1, +1\}^n$时，我们将 k_i 视为 s 的函数。在需要时，我们按字典序列出 $\{-1, +1\}^n$ 的元素。

4.13. 注记。为便于后续使用，我们注意到，对于每个 L^{pr}-公式 $\varphi(x)$，都存在一个 L^{pr}-公式 $\psi(y_s \mid s \in \{-1, +1\}^n)$，使得在 Pr 的所有模型中， $\varphi(x)$ 与 $\psi(x^s \mid s \in \{-1, +1\}^n)$ 等价。事实上，只需令 $\psi(y_s \mid s \in \{-1, +1\}^n)$ 为以下替换的结果：在 $\varphi(x)$ 中，对于 $i = 1, \ldots, n$，将变量 x_i 替换为布尔项 $\bigcup(y_s \mid s = (k_1, \ldots, k_n) \in \{-1, +1\}^n \text{ and } k_i = +1)$。

此外，对于每个 L^{pr}-公式 $\varphi(x)$，都存在一个 L^{pr}-公式 $\psi(x)$，使得 $\psi(x)$ 与 $\varphi(x)$ Pr-等价，并且 $\psi(x)$ 中出现的每个原子公式都具有 $\mu(x^s)$ 的形式，其中某个 $s \in \{-1, +1\}^n$。而且，可以选择 $\psi(x)$，使其由这类原子公式通过受限联结词 0、1、$t \mapsto t/2$ 和 $(t, u) \mapsto t \dot{-} u$ 构造而成。

（证明： L^{pr} 中的一般原子公式 $\alpha(x)$ 可取为 $\mu(t(x))$ 这种形式，其中 $t(x)$ 是 x中的布尔项。如果 $\alpha(x) = d(t_1(x)\ t_2(x))$，那么可以将 $\alpha(x)$ 替换为

$\mu(t_1(x) \triangle t_2(x))$。对于每个这样的 $t(x)$，都存在一个子集 $S \subseteq \{-1, +1\}$，使得方程 $t(x) = \cup(x^s \mid s \in S)$ 在 Pr的所有模型中都成立。（如果 S 为空，那么 $t(x) = 0$ 在 $\frown Pr$的所有模型中都成立。）此外，$\mu(t(x)) = \sum(\mu(x^s) \mid s \in S)$ 在 Pr的所有模型中都成立，其中 $\frown$的意思是联结词 $(u_1, \ldots, u_{2^n}) \mapsto \min(\sum(u_s \mid s \in S), 1)$。关于"此外"这一陈述，包括对联结词 $\sum$的处理，参见第 6]章 [7, 。）

前述观察的一个推论是：当 C 是模型$\mathcal{M}$ 的子代数时，对于任意 $a \in M^n$，类型 tp $_{\mathcal{M}}(a/C)$ 由 L^{pr} 上满足以下条件的 $\psi(x)$ 公式的取值 $\psi^{\mathcal{M}}(a)$ 决定：其中所有原子公式都具有 $\mu(x^s \cap c)$ 的形式，且$c \in C$是某个元素。（如上，$x = (x_1, \ldots, x_n)$ 和 $s \in \{-1, +1\}^n$。）

4.14. 定理。理论 Pr^* 具有量词消去。

证明。我们使用 [8, 定理 4.16], ，因此需要证明 Pr^* 具有 [8, 定义 4.15]中给出的来回性质。因此，考虑两个 ω-饱和模型 $\mathcal{M}^*, \mathcal{N}^*$，它们是 Pr^* 的模型；以及元组 $(a_1, \ldots, a_n)$（属于 $\mathcal{M}^*$）和 $(b_1, \ldots, b_n)$（属于 $\mathcal{N}^*$），使得 $(a_1, \ldots, a_n)$ 在 $\mathcal{M}^*$ 中的无量词类型，与 $(b_1, \ldots, b_n)$ 在 $\mathcal{N}^*$中的无量词类型相同。给定任意属于 $\mathcal{M}^*$ 的 u，我们需要在 $\mathcal{N}^*$ 中找到 v，使得 $(a_1, \ldots, a_n, u)$ 和 $(b_1, \ldots, b_n, v)$ 在 Pr^*的语言中具有相同的无量词类型。根据 4.12 中的讨论，只需证明 $(a_1, \ldots, a_n)$ 和 $(b_1, \ldots, b_n)$ 是 1 的分割这一情形即可。

利用引理 4.6 以及 $\mathcal{M}$ 是 ω-饱和的事实，对于每个无原子 $c \in M$ 和 $0 < r < 1$，都存在 $a \leq c$ 属于 M，使得 $\mu(a) = r\mu(c)$，因此 $\mu(c \cap a^c) = (\mu(c) - r)\mu(c)$。事实上，可以令 $x = a$ 满足关于 $\delta > 0$ 的所有条件 $|\mu(x) - r\mu(c)| \leq \delta$；我们刚刚证明，这些条件在 $\mathcal{M}$ 中有限可满足。下一段将用到这一点。

在所假设的情形下，我们知道对于每个 $j = 1$，....., n，都有 $\mu(a_j) = \mu(b_j)$；并且对于所有 $k \geq 1$，也都有 $P_k^{\mathcal{M}^*}(a_j) = P_k^{\mathcal{N}^*}(b_j)$。对于每个 j，令 a_j^0 为 a_j 的原子部分（即 $\mathcal{M}$ 中所有满足 $\leq a_j$ 的原子的并集），因此 $a_j^1 := a_j \cap (a_j^0)^c$ 是 a_j 的无原子部分。类似地，由 b_j 定义 b_j^0、b_j^1。我们的假设推出 $\mu(a_j^0) = \mu(b_j^0)$（事实上，位于 a_j 和 b_j 下方的原子之间存在双射保测对应）。因此也有 $\mu(a_j^1) = \mu(b_j^1)$。

任取 u属于 $\mathcal{M}^*$，并固定 $j = 1, \ldots, n$。定义 $v_j^0 \leq b_j^0$为 b_j 下方与 $a_j \cap u$下方的原子相对应的原子的并集。此外，选择 $v_j^1 \leq b_j^1$ 使得 $\mu(v_j^1) = \mu(a_j \cap u) - \mu(v_j^0)$，并令 $v_j = v_j^0 \cup v_j^1$。我们得到

$$\mu(v_j) = \mu(a_j \cap u), \text{ and}$$
$$P_k^{\mathcal{N}^*}(v_j) = P_k^{\mathcal{M}^*}(a_j \cap u) \text{ for all } k \geq 1.$$

然后令 $v = v_1 \cup \cdots \cup v_n$，并注意到对于所有 j，$v_j = b_j \cap v$。由此可得，$(a_1, \ldots, a_n, u)$ 在 $\mathcal{M}^*$ 中的无量词类型与 $(b_1, \ldots, b_n, v)$ 在 $\mathcal{N}^*$ 中的无量词类型相同，正如所需。□

定理 4.14 a　　这使我们能够刻画（并将其公理化） Pr的完备扩张。

4.15. 定义. 对任意 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models Pr$，令 $\Phi^{\mathcal{M}}$ 表示序列 $(at_n^{\mathcal{M}}(1) \mid n \geq 1)$，该序列按递减顺序列出 $\mathcal{B}$ 中原子的大小（如果 $\mathcal{B}$中只有有限多个原子，则后面补上无限多个 0）。

注意，算子 Φ 的值域由所有满足$1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1$的序列 $(t_n \mid n \geq 1)$ 组成。

4.16. 推论. 对于 Pr的模型 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$，我们有 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$当且仅当 $\Phi^{\mathcal{M}} = \Phi^{\mathcal{N}}$。因此，任何与 Pr 具有相同签名的完备扩张 T，都可以通过向 Pr 添加条件 $\varphi_1(1) = 1 - t_1$ 和 $\varphi_{n-1}(1) \dot{-} \varphi_n(1) = t_n$ (for $n > 1$) 来公理化，其中 $(t_n \mid n \geq 1)$ 是 $\mathcal{M} \models T$的 $\Phi^{\mathcal{M}}$ 的共同值。

证明。设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是 Pr 的模型，且满足 $\Phi^{\mathcal{M}} = \Phi^{\mathcal{N}}$。由算子 Φ 的定义可知，1 在 $\mathcal{M}^*$ 中与在 $\mathcal{N}^*$ 中具有相同的无量词类型。由定理 4.14 可得 $\mathcal{M}^* \equiv \mathcal{N}^*$，由此可推出 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$。反向结论及推论的其余部分可由 Φ 的定义得出。□

4.17. 推论。 Pr 的每个完备化 T（在 L^{pr} 中）都是可分范畴的，并且 T 的唯一可分模型是强 ω-齐次的。

证明。设 T 是 Pr 的一个完备化，并设 $\mathcal{M}$ 是 T 的一个可分模型。引理 4.6 的一个加强版在 [16, 第 41] 节中得到证明，它指出，定理 4.14 的证明中用到的关键性质实际上对所有模型都成立，无须假设它们是 ω-饱和的。也就是说，对于每个无原子 $c \in M$ 和 $0 < r < 1$，都存在 $a \leq c$ 属于 M，使得 $\mu(a) = r\mu(c)$，因而 $\mu(c \cap a^c) = (\mu(c) - r)\mu(c)$。

因此，定理 4.14 的证明不仅表明 Pr^* 具有量词消去，而且进一步表明，对于每个 $\mathcal{M}^* \models Pr^*$ 以及 $\mathcal{M}^*$ 中的每个 $(a_1, \ldots, a_n)$，关于 $\mathcal{M}^*$ 理论的、在 $(a_1, \ldots, a_n)$ 上的每个 1-型都在 $\mathcal{M}^*$ 中实现。换言之， Pr^* 的每个模型都是 ω-饱和的。由定义可直接推出，对于每个结构 $(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_n)$，只要 $\mathcal{M}$ 是 Pr 的模型且 $a_1, \ldots, a_n \in M$，同样的结论也成立。

容易证明，若 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 是同一语言下的 ω-饱和可分度量结构，且 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 初等等价，那么 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 同构。使用通常的归纳式来回论证，可构造一个初等双射f: $S_1 \to S_2$，其中 S_i 是 M_i 的稠密子集，且对 i 的两个取值都成立。随后， f 可延拓为定义在 M_1 上的映射，该映射是从 $\mathcal{M}_1$ 到 $\mathcal{M}_2$ 的同构。将这一构造应用于上文讨论的形式为 $(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_n)$ 的模型，即完成推论的证明。□

4.18. 注记。推论 4.17 得出了以下由 Carath´eodory 提出的著名事实：如果 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ 是无原子、可数生成的测度空间，且 $\mu(X) =$

$\nu(Y) < \infty$，那么 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ 的测度代数同构。证明：不失一般性，我们可以设 $\mu(X) = \nu(Y) = 1$。在这种情况下，这两个概率空间的测度代数是无原子的可分模型。利用定理 4.14，我们可以看出这些概率代数初等等价（因为在无原子概率代数中，解释 P_n 的谓词恒为 0），因此由推论 4.17 可得所需结果。关于分析方面的证明，见 [16, 第 41] 节以及 [23, 定理 4，第 399] 页。

4.19. 推论。设 T 是任意一个扩张 Pr 的完备 L^{pr}-理论，且 $(t_n \mid n \geq 1)$ 是 $\mathcal{M} \models T$ 的 $\Phi^{\mathcal{M}}$ 的共同取值。
(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$，那么 T 有唯一的模型，它由一个原子概率代数构成，该代数有原子 $(a_n \mid n \geq 1$ 和 $t_n > 0)$，且对所有 n，$\mu(a_n) = t_n$。
(2) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < 1$，那么 T 的模型恰好是 (1) 中所述具有原子的概率代数，并带有测度为 $1 - \sum_{n=1}^{\infty} t_n$ 的无原子部分。

证明。这些结论可直接由推论 4.16 和 4.17 得出。 □

4.20. 注记。设 $\mathcal{M}$ 是 Pr 的任意一个模型。由前面的结果可知，$\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(\emptyset)$ 是由 $\mathcal{M}$ 中的原子生成的 σ-子代数。

4.21. 注记。如果 $\mathcal{M} \models Pr$，令 $a_0 \in M$ 为 $\mathcal{M}$ 的原子的并，且令 $a_1 = a_0^c$。此外，对于每个 $i = 0$，令 $\mathcal{A}_i = \{a \in M \mid a \leq a_i\}$，1。因此，$\mathcal{A}_0$ 是 $\mathcal{M}$ 的原子元素集，$\mathcal{A}_1$ 是无原子元素集，而 a_1 是最大无原子元素。1 的划分 $\{a_0, a_1\}$ 很重要，因为它将 M 的每个元素 a 分解为其原子部分 $a \cap a_0$ 和无原子部分 $a \cap a_1$。关于这些元素和集合的可定义性，我们注意到以下事实：

(i) 相对于 Pr 的所有模型 $\mathcal{M}$：$\mathcal{A}_0$ 不是零点集；$\mathcal{A}_1$ 是零点集，但不是可定义集；a_0、a_1 不是可定义元素。
(ii) 固定 Pr 的一个完备扩张 T。相对于 T 的所有模型：a_0、a_1 是可定义元素，而 $\mathcal{A}_0$、$\mathcal{A}_1$ 是可定义集合。

证明。（i）首先，我们证明 $\mathcal{A}_0$ 不是关于 Pr 的零点集。反设如此，那么存在一个关于 Pr 的可定义谓词 $R(x)$，使得对所有 $\mathcal{M} \models Pr$ 和所有 $a \in M$，都有 $R^{\mathcal{M}}(a) = 0$ 当且仅当 a 是 $\mathcal{M}$ 中的原子元素。对每个 $n \geq 1$，令 $\mathcal{M}_n$ 为如下概率空间的概率代数：该概率空间有 n 个点，且每个点的测度为 $1/n$；再令 $\mathcal{M}$ 为关于一个非主超滤子，对 $(\mathcal{M}_n \mid n \geq 1)$ 取的度量超积。那么，1 在每个 $\mathcal{M}_n$ 中都是原子的，而在 $\mathcal{M}$ 中不是原子的；事实上，$\mathcal{M}$ 无原子，因此 0 是其中唯一的原子元素。这意味着 $R^{\mathcal{M}}(1) \neq 0$，而对所有 n，都有 $R^{\mathcal{M}_n}(1) = 0$。这与可定义谓词 R 的超积基本定理矛盾。（参见 [7] 中的定理 5.4 以及第 9 节关于定义扩张的讨论。）

命题 4.7 （e）表明，在 Pr 的所有模型中， $\mathcal{A}_1$ 是公式 $\theta(x)$ 的零点集。

此外， $\mathcal{A}_1$ 不可能在 Pr的所有模型中一致地成为可定义集，因为否则将存在一个在 Pr 上定义的可定义谓词 $R(x)$，使得对所有 $\mathcal{M} \models Pr$ 和所有 $a \in M$

$$R^{\mathcal{M}}(a) = \sup\{\mu(a \cap y) \mid y \in \mathcal{A}_1\}.$$

但这样一来， $R(x)$的零点集将在 Pr的所有模型中都是 $\mathcal{A}_0$ ，而我们刚刚证明这是不可能的。

由于 $a_0^c = a_1$，它们要么都可定义，要么都不可定义。我们处理 a_0。如果a_0 可在 Pr上定义，那么运算 $x \mapsto a_0 \cap x$ 将是可定义的，因此其像（即 $\mathcal{A}_0$）将是一个可定义集，但事实并非如此。

（ii）考虑 Pr 的一个完备扩张 T，并令 $\mathcal{U}$为 T的一个 ω_1-通用域。根据推论 4.19，我们看到 a_0 和 a_1 被 $\mathcal{U}$的每个自同构固定。利用 [7,练习 10.7或定理 9.32] ，可知 a_0 和 a_1 在 T的所有模型中都是一致可定义的。最后，注意对每个 $i = 0$、1，集合 $\mathcal{A}_i$ 是由 $f_i(x) = x \cap a_i$定义的可定义函数 f_i的像。利用 $[7, $定理 9.17$]$,，我们推断 $\mathcal{A}_i$在 T的所有模型中是一致可定义集。□

4.22. 练习。根据注 4.9，对于任意 $\mathcal{M} \models Pr$ 和任意 $a \in M$，我们有 $(\varphi_n^{\mathcal{M}}(a) \mid n \geq 1)$ 是来自 $[0, 1]$, 的递减序列，因此它收敛；其极限必定是从 a 到 $\mathcal{M}$ 的原子元素集合的距离，而该集合就是 $\cup_n A_n^{\mathcal{M}}$ 的闭包。证明：如果我们将注意力限制在理论 T 的某个完备化的模型上，则此收敛是一致的（关于 $\mathcal{M}$ 以及 a 都如此），因此其极限是一个 T-可定义谓词。这给出了注 4.21(ii) 的另一种证明。

5. 随机变量

这里讨论如何将 $[0, 1]$-值随机变量的空间 RV（按几乎处处逐点相等取商），赋予 L_1-距离后表示为理论 Pr 的一个度量虚拟类型。我们着重讨论其中的测度论方面，并省略 meq 构造的许多技术细节；有关详情请参阅相关文章（见第 3 节）。在 CAT 的 [1] 设置中，Ben Yaacov 最初给出了无原子概率代数中随机变量的一种解释，随后又在 Pr 中于 [3] 将其扩展为对 RV 的解释。在 [1] 中，还处理了其他某些类别的随机变量，而这里所采用的方法也可以很容易地扩展到这些类别。

当 $\mathcal{M}$ 是 Pr 的任意模型时，我们用 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 表示一个概率空间，其$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$概率代数 $(\mathcal{B}, \widehat{\mu}, d)$ 与 $\mathcal{M}$ 同构。本节大部分内容中，我们在 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 中运用测度论进行论证。

我们用 $RV = RV(\mathcal{B},\mu) := L_1(\mathcal{B},\mu;[0,1])$ 表示所有 $\mathcal{B}$-可测函数$f\colon X \to [0,1]$ 构成的空间。我们在该空间上赋予 L_1 (伪)度量，其中 f 与 g 之间的距离为 $\|f-g\|_1 = \int_X |f-g|\,d\mu$。与此处对概率空间的处理相同，我们考虑这样得到的商度量空间：将两个随机变量在逐点 μ-几乎处处相等时视为相同，并赋予由 $\|f-g\|_1$ 诱导的距离（我们称之为L_1-距离）。

本节的目标是说明，如何将这个商集视为模型 $(\mathcal{B},\widehat{\mu},d)$ 的一个度量虚构$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$种类，该模型属于 Pr。这样做的一个好处是，对于任意 $a\in\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}$ 的任意闭子代数 $\mathcal{A}$，都可以将 $\mathbb{P}(a|\mathcal{A})$ 看作 $(\mathcal{B},\widehat{\mu},d)^{\mathrm{meq}}$ 中的一个虚构$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$。

对于 $n\geq 1$，考虑 $L_1(\mathcal{B},\mu;[0,1])$ 的子集 $RV_n = RV_n(\mathcal{B},\mu)$，其中包含那些可写成 $\sum_{i=1}^n \frac{i}{n}\chi_{E_i}$ 的函数，其中 $E=(E_1,\dots,E_n)$ 是 X 的一个划分，且该划分来自 $\mathcal{B}$。下文将 $\sum_{i=1}^n \frac{i}{n}\chi_{E_i}$ 记作 f_E。在 $RV_n(\mathcal{B},\mu)$ 上，我们采用 L_1-距离。若 $f_E\in RV_m$ 和 $f_F\in RV_n$，则 f_E、f_F 都属于 $L_1(\mathcal{B},\mu;[0,1])$，因此我们可以比较它们、计算它们之间的 L_1-距离等，即使 $m\neq n$。

当然，我们可以将 RV_n 与 $\mathcal{B}$中由 X的划分组成的集合 $E=(E_1,\dots,E_n)$ 等同起来。对于两个这样的划分 E、F，我们将 $\rho_n(E,F)$ 定义为 L_1-距离；

$$\begin{aligned}\rho_n(E,F) := \|f_E - f_F\|_1 &= \Big\|\sum_{i=1}^n \frac{i}{n}\chi_{E_i} - \sum_{i=1}^n \frac{i}{n}\chi_{F_i}\Big\|_1 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i\neq j} |i-j|\mu(E_i\cap F_j).\end{aligned} \tag{A}$$

通过分析 (A) 中的表达式，我们得到（在下面的引理中） $\rho_n(E,F)$ 与 $d_P(E,F)$ 之间的 Lipschitz 等价：$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d(E_i,F_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu(E_i\triangle F_i)$。注意，当 $n=2$时，我们有 $d_P(E,F) = \frac{1}{2}\big(d(E_1,F_1) + d(E_1^c,F_1^c)\big) = d(E_1,F_1)$，因为 $d(E_1^c,F_1^c) = d(E_1,F_1)$；这解释了因子 1 2。此外，$d_P$等价于通常的伪度量 $d(E,F)$：$=\max_i d(E_i,F_i)$，因为

$$\frac{1}{2}d(E,F)\leq d_P(E,F)\leq \frac{n}{2}d(E,F)$$

对所有 $E,F\in RV_n$ 均成立。

5.1. 引理. 对所有 E、$F\in RV_n$，我们有

$$\frac{1}{n}d_P(E,F)\leq \rho_n(E,F) = \|f_E-f_F\|_1 \leq d_P(E,F).$$

证明. 首先注意，对于每个 i，族 $(E_i \cap F_j \mid j \neq i)$ 是 $E_i \setminus F_i$ 的一个划分；交换 E 和 F 后，同样成立。因此

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(F_i \setminus E_i) = \sum_{i \neq j} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \setminus F_i),$$

由此可得

$$\sum_{i \neq j} \mu(E_i \cap F_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \triangle F_i) = d_P(E, F).$$

然后结合 (A)，我们得到所需的不等式

$$\frac{1}{n} \sum_{i \neq j} \mu(E_i \cap F_j) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} |i - j| \mu(E_i \cap F_j) \leq \sum_{i \neq j} \mu(E_i \cap F_j). \qquad \square$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$将 RV_n 在从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{B}$ 的商映射下的像记为 $RV_n = RV_n(\mathcal{B}, \mu)$。若 $\mathcal{M}$ 是模型 $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mu}, \widehat{d})$，我们也将 $\widehat{RV}_n$ 记为 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$，并注意到它满足

$$\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}} = \{(e_1, \ldots, e_n) \in M^n \mid (e_1, \ldots, e_n) \text{ is a partition of 1 in } \mathcal{M}\}.$$

我们在 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 上赋予伪度量 $\widehat{\rho}_n^{\mathcal{M}}$，它由 RV_n 上的 ρ_n 以规范方式导出；也就是说，对于 $e, f \in \widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$，有

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}_n^{\mathcal{M}}(e, f) &= \sum_i \sum_j \left| \frac{i}{n} - \frac{j}{n} \right| \mu(e_i \cap f_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_i \sum_j |i - j| \mu(e_i \cap f_j). \end{aligned} \tag{B}$$

5.2. 引理。设 $\mathcal{M} \models Pr$。则 $\widehat{\rho}_n^{\mathcal{M}}$ 是 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 上的完备度量。此外，$\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 是可定义集，而 $\widehat{\rho}_n^{\mathcal{M}}$ 是 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 上的可定义谓词，并且对 Pr 的所有模型均一致。

证明。显然，$\widehat{\rho}_n^{\mathcal{M}}$是一个伪度量。它是度量这一事实由引理 5.1 以及 $RV_n^{\mathcal{M}}$上 d_P的定义可知，这意味着 $d_P(E, F) = 0$ 当且仅当对于所有$i = 1, \ldots, n$，$\mu(E_i \triangle F_i)$。

要证明 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 是 M^n 的一致可定义子集，只需证明它是定义在某个可定义集上的可定义函数的像。为此，考虑定义在 M^{n-1} 上的函数：$(a_1, \ldots, a_{n-1}) \mapsto (e_1, \ldots, e_n)$，其中 $e_1 = a_1$, $e_j = a_j \cap a_1^c \cap \cdots \cap a_{j-1}^c$ 对于 $2 \leq j \leq n-1$，且 $e_n = a_1^c \cap \cdots \cap a_{n-1}^c$。显然，这是一个可定义函数，因为坐标 e_j 由布尔项给出。注意，当 $i \neq j$ 时，$e_i \cap e_j = 0$。此外，通过对 $j < n$ 作归纳法，我们可以证明 $a_1 \cup \cdots \cup a_j = e_1 \cup \cdots \cup e_j$。因此，$(e_1, \ldots, e_{n-1})$ 是 $a_1 \cup \cdots \cup a_{n-1}$ 的一个划分。由于 $e_n = (a_1 \cup \cdots \cup a_{n-1})^c$，我们有，$(e_1, \ldots, e_n)$ 总是

$\mathcal{M}$ 中 1 的一个划分。要看出此映射满射到 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 上，注意，只要 $(e_1, \ldots, e_n)$ 是 1 的一个划分，那么 $(e_1, \ldots, e_{n-1}) \mapsto (e_1, \ldots, e_n)$

公式（B）表明，$\widehat{\rho}_n^{\mathcal{M}}$是一个可定义谓词，且在 Pr 的所有模型 $\mathcal{M}$ 上一致成立。

尚需证明 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 是完备的。由于 $M = \widehat{\mathcal{B}}$ 关于度量 $d(a,b) := \widehat{\mu}(a \triangle b)$ 是完备的，且 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}} \subseteq (\widehat{\mathcal{B}})^n$ 是闭的，因此我们看到 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 关于度量 $d_P(e,f) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d(e_i, f_i)$ 是完备的。因此，$\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 关于 $\widehat{\rho}_n^{\mathcal{M}}$ 是完备的，因为根据引理 5.1，$\widehat{\rho}_n^{\mathcal{M}}$ 与 d_P 一致等价。□

5.3. 注记。与前述证明中的推理类似，可以证明，对于 $E \in RV_n^{\mathcal{M}}$，映射 $E \mapsto f_E$ 是从 $RV_n^{\mathcal{M}}$ 到 $L_1(\mathcal{B}, \mu; [0,1])$ 的一个等距映射，其值域是所有取值于 $\{1/n, \ldots, n/n\}$ 的随机变量的集合。（这里的等距是指相对于 $\rho_n^{\mathcal{M}}$ 和 L_1-距离而言。）因此，该映射诱导出一个从 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 到这些随机变量的 $=$ 几乎处处等价类集合的等距同构。

固定 $\mathcal{M} \models Pr$，并如上所述，设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为一个概率空间，其概率代数与 $\mathcal{M}$ 同构。我们将 $(\widehat{RV}_{2^n}^{\mathcal{M}} \mid n \geq 1)$ 所构成的空间族的逆极限记为 $\widehat{RV}^{\mathcal{M}}$，该空间族配备了一个适当的映射族 $\widehat{\pi}\colon \widehat{RV}_{2^{n+1}}^{\mathcal{M}} \to \widehat{RV}_{2^n}^{\mathcal{M}}$，现定义如下。对于 $(e_1, \ldots, e_{2^{n+1}}) \in \widehat{RV}_{2^{n+1}}^{\mathcal{M}}$，我们令

$$\widehat{\pi}(e_1, \ldots, e_{2^{n+1}}) := (e_1 \cup e_2, \ldots, e_{2^{n+1}-1} \cup e_{2^{n+1}}).$$

显然，这使得 $\widehat{\pi}\colon \widehat{RV}_{2^{n+1}}^{\mathcal{M}} \to \widehat{RV}_{2^n}^{\mathcal{M}}$ 成为一个可定义映射，并且对 Pr 的所有模型都一致。注意，$\widehat{RV}^{\mathcal{M}}$ 的一个元素由一个序列 $(e(n))_n = (e(n) \mid n \geq 1)$ 给出，其中$e(n) = (e_1(n) \ldots, e_{2^n}(n)) \in \widehat{RV}_{2^n}^{\mathcal{M}}$，并且对所有 $n \geq 1$，$\widehat{\pi}(e(n+1)) = e(n)$。下文中，我们称这样的序列为相容序列。

On $\widehat{RV}^{\mathcal{M}}$ 我们要定义逆极限伪度量，记作 $\widehat{\rho}^{\mathcal{M}}$，如下：

$$\widehat{\rho}^{\mathcal{M}}\big((e(n))_n, (f(n))_n\big) := \lim_n \widehat{\rho}_n(e(n), f(n))$$

对 $\widehat{RV}^{\mathcal{M}}$ 中任意元素 $(e(n))_n$ 和 $(f(n))_n$。定义中 $\widehat{\rho}^{\mathcal{M}}$ 的极限存在这一事实（其收敛速度可以对 $\widehat{RV}^{\mathcal{M}}$ 中的所有序列以及所有 $\mathcal{M} \models Pr$ 一致选取），以及所得商集对应于 $L_1(\mathcal{B}, \mu; [0,1])$ 关于 L_1-距离的商集，这些结论可由下文的引理 5.5 得出。为了证明这类结果，将涉及的对象拉回到概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上会很有帮助，其中 $\mathcal{M}$ 是该空间的概率代数。

我们用 π 表示从 $RV_{2^{n+1}}$ 到 RV_{2^n}的相应映射；即

$$\pi(E_1, \ldots, E_{2^{n+1}}) := (E_1 \cup E_2, \ldots, E_{2^{n+1}-1} \cup E_{2^{n+1}}).$$

通过从 $\mathcal{B}$ 到 $M = \widehat{\mathcal{B}}$的商映射，上文描述的逆极限 $\widehat{RV}^{\mathcal{M}}$ 对应于空间 $(RV_{2^n}(\mathcal{B},\mu) \mid n \geq 1)$ 的逆极限，这些空间配备了各自的 L_1-伪度量以及连接映射 $\pi\colon RV_{2^{n+1}} \to RV_{2^n}$。该逆极限中的一个元素由一个序列 $(E(n) \mid n \geq 1)$ 构成，满足 $E(n) \in RV_{2^n}$ 且 $\pi(E(n+1)) = E(n)$，对所有 $n \geq 1$ 均成立。与上文一样，我们称这样的序列为相容序列。

5.4. 事实。显然，从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{B}$ 的商映射会诱导一个映射，将 X 的可测划分的相容序列（$E(n) \mid n \geq 1$）映到 $\mathcal{M}$中 1 的划分的相容序列（$E(n) \mid n \geq 1$）$\frown$ $\frown$ $\frown$，其中对所有 $n \geq 1$，$E(n) := (E_1(n) \ldots, E_{2^n}(n))$。事实上，这个映射是满射。也就是说，设（$e(n) \mid n \geq 1$）是 $\widehat{RV}^{\mathcal{M}}$中的一个相容序列，且对所有 $n \geq 1$，有$e(n) = (e_1(n) \ldots, e_{2^n}(n))$。通过对 n使用归纳法，很容易证明存在一个相容序列（$E(n) \mid n \geq 1$），使得对所有 n 都有 $E(n) \in RV_{2^n}$，且对所有 $1 \leq j \leq 2^n$ 和 $n \geq 1$都有$\frown e_j(n) = E_j(n)$。

5.5. 引理。(a) 对所有 $m \geq 1$ 和 $E \in RV_{2m}$，我们逐点有 $f_E \leq f_{\pi(E)} \leq f_E + \frac{1}{m}$；因此 $\|f_E - f_{\pi(E)}\|_1 \leq \frac{1}{m}$。(b) 对每个相容序列 $(E(n) \mid n \geq 1)$，若对所有 $n \geq 1$都有 $E(n) \in RV_{2^n}$，则序列 $(f_{E(n)} \mid n \geq 1)$ 逐点单调递减，且对所有 $n \geq 1$都有 $\|f_{E(n+1)} - f_{E(n)}\|_1 \leq 2^{-n}$。因此，$(f_{E(n)} \mid n \geq 1)$ 收敛到其逐点下确界；在 $L_1(\mathcal{B},\mu;[0,1])$ 中，它按 L_1-距离收敛，且其收敛速度可取为对 $RV^{\mathcal{M}}$ 中的所有序列以及所有概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 一致。(c) 对每个 $f \in RV = L_1(\mathcal{B},\mu;[0,1])$，都存在一个相容序列 $(E(n) \mid n \geq 1)$，使得对所有 $n \geq 1$ 都有$E(n) \in RV_{2^n}$，且 $(f_{E(n)} \mid n \geq 1)$ 按 L_1-距离收敛到 f。

证明。(a) 这由定义立即得出。

(b) 根据 $f_{E(n)}$ 的定义，我们有 $0 \leq f_{E(n)}(x) \leq 1$，对所有 $x \in X$ 均成立。此外，(a) 意味着 $\chi_X - f_{E(n)}$ 在 X 上逐点单调递增，并且它在 L_1 中收敛。由于 χ_X 可积，单调收敛定理意味着 $(\chi_X - f_{E(n)} \mid n \geq 1)$ 在 L_1 中收敛到其几乎处处的逐点上确界，因此 $(f_{E(n)} \mid n \geq 1)$ 在 L_1 中收敛到其几乎处处的逐点下确界。收敛速度的一致性由 (a) 中估计的一致性得出。

(c) 对每个 $n \geq 1$，考虑由 I_1 定义的二进区间 I_1，...，$I_{2^n} := [0, 2^{-n}]$；对于 $1 < j \leq 2^n$，由 I_j 定义：$= ((j-1)2^{-n},\ j2^{-n}]$。令 $E(n) \in RV_{2^n}$ 由 $E(n)$：=$(E_1(n)$ ...，$E_{2^n}(n))$ 定义，其中对于 $j = 1$，...，2^n，$E_j(n) := f^{-1}(I_j)$。注意，序列 $(E(n)|n \geq 1)$ 是相容的。令 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ 为由 $\{E_j(n) \mid n \geq 1$ 和 $1 \leq j \leq 2^n\}$ 生成的 σ-子代数；显然，$\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{B}$ 的最小 σ-子代数，使得 f 是 $\mathcal{C}$-可测的。

特别地， $\mathbb{E}(f|\mathcal{C}) = f$。引理 2.7 的证明表明，$(f_{E(n)} \mid n \geq 1)$ 关于 L_1-距离收敛于 f。收敛速度如 (b) 中所示。□

5.6. 推论。逆系统 $(\widehat{RV}^{\mathcal{M}}_{2^n}, \widehat{\rho}^{\mathcal{M}}_{2^n})_{(n\geq 1)}$ 配备映射 $\widehat{\pi}\colon \widehat{RV}^{\mathcal{M}}_{2^{n+1}} \to \widehat{RV}^{\mathcal{M}}_{2^n}$，对于每个模型 $\mathcal{M} = (\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mu}, \widehat{d})$ of Pr，都有一个逆极限伪度量空间 $(\widehat{RV}^{\mathcal{M}}, \widehat{\rho}^{\mathcal{M}})$。其度量商对应于 $L_1(\mathcal{B}, \mu; [0,1])$ 对 L_1- 距离取商。此外，对 Pr 的所有模型 $\mathcal{M}$，此商都是 $\mathcal{M}$ 的一个度量虚拟类型，且这一点一致成立。

证明。前两句由引理 5.5 得出。对于第三句，我们应用 [5,引理 1.5]。□

5.7. 注记。请注意，尽管空间 $\widehat{RV}^{\mathcal{M}}_n$ 是度量空间（如引理 5.2 的证明所示），但逆极限距离 $\widehat{\rho}^{\mathcal{M}}$ 不是度量。也就是说，存在不同的相容序列 $(e(n))_n$、$(f(n))_n$，使得 $\lim_n \widehat{\rho}^{\mathcal{M}}_n(e(n)\ f(n)) = 0$。因此，要得到推论 5.6 中描述的虚拟类型，必须构造度量商。然而，与一般的度量虚类型情形不同，无论考虑 Pr 的哪个模型 $\mathcal{M}$，$(\widehat{RV}^{\mathcal{M}}, \widehat{\rho}^{\mathcal{M}})$ 的度量空间商都是完备的。（一般来说，对于某些模型，需要对这种商取度量完备化。）事实上，根据黎斯–费歇尔定理，无论考虑哪个概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$，$L_1(\mathcal{B}, \mu)$ 对 L_1-距离取商后都是完备的，而 $L_1(\mathcal{B}, \mu; [0,1])$ 在该商中的像是一个范数闭子集。（参见 [23, 定理 6.6，第 124–125] 页。）

接下来，我们讨论刚才描述的度量虚拟类型上的一些可定义运算；它们对应于在 [3] 中被视为基本运算（或被证明为可定义运算）的那些运算，因此表明我们的虚拟类型确实提供了理论 RV 的一个模型。（关于模型 RV 上相应运算的讨论，参见 [3, 引理 2.13] 。）

考虑任意连续函数 $\theta\colon [0,1]^m \to [0,1]$。该函数通过复合在 $L_1(\mathcal{B}, \mu; [0,1])$ 上诱导出一个运算，我们也用 θ 表示它。具体而言，我们定义

$$\theta(f_1, \ldots, f_m)(x) := \theta(f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

对所有 $x \in X$，其中 f_1、.....、$f_m\colon X \to [0,1]$ 均为 $\mathcal{B}$-可测。

我们将在下文证明，θ 从 $\widehat{RV}^m$ 到 $\widehat{RV}$ 诱导出一个可定义运算。这里我们将其定义域限制为 $RV_n(\mathcal{B}, \mu)$。为简化记号，我们考虑 $m = 2$ 的情形。对于 $E, F \in RV_n$，有

$$\theta(f_E, f_F) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \theta(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})\chi_{E_i \cap F_j},$$

这会在所有概率空间上一致地诱导出关于 (E, F) 的事件的可定义函数。

此外，将 θ 限制到空间 $RV_n(\mathcal{B},\mu)$ 上，会收敛到其逆极限上的一个可定义函数。再次只考虑 $m=2$ 的情形，设 $(E(n))_n$ 和 $(F(n))_n$ 是表示逆极限中元素的两个相干族，并设 $f,g\in L_1(\mathcal{B},\mu;[0,1])$ 是它们的极限：$f=\lim_n f_{E(n)}$ 和 $g=\lim_n f_{F(n)}$。那么 $\theta(f_{E(n)},f_{F(n)})$ 会在 L_1-距离下收敛到 $\theta(f,g)$，且收敛速率一致，由 θ 的一致连续模以及 $\lim_n f_{E(n)}$ 和 $\lim_n f_{F(n)}$ 的指数收敛速率决定，具体如引理 5.5(b) 所述。细节留给读者。

一个一般事实是，每个度量结构的自同构 τ 都能唯一扩张为其 meq 扩张的自同构。我们在当前语境下说明这一点：给定 $\mathcal{M}\models Pr$ 如上所述的 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的概率代数，考虑 $\mathcal{M}$ 的一个自同构 τ。由于 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 是 M^{2^n} 的可定义子集，我们看到，τ 通过逐坐标作用自然地诱导出 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 到其自身的一个双射，即 $e=(e_1,\dots,e_{2^n})\mapsto\tau(e)=(\tau(e_1)\dots,\tau(e_{2^n}))$。此外，如果 $(e(n)\mid n\geq 1)$ 是空间 $\widehat{RV}_n^{\mathcal{M}}$ 的逆极限中的一个相容序列，并且收敛于 $\widehat{RV}^{\mathcal{M}}$ 关于 L_1-距离的商集中的元素 $[f]_\mu$，那么 $(\tau(e(n))\mid n\geq 1)$ 也是相容的；$[f]_\mu$ 在 τ 的所需扩张下的像定义为 $(\tau(e(n)))_n$ 的极限的（等价类）。

观察这一扩张过程的另一种方式，涉及如下情形：$a\in\mathcal{B}$ 和 C 是 $\mathcal{B}$ 的一个闭子代数，而 $f\in L_1(\mathcal{B},\mu;[0,1])$ 是一个 C-可测随机变量，表示 $\mathbb{P}(a|C)$。当 τ 是 $\mathcal{M}$ 的一个自同构时，如上所定义的 $\tau(f)$ 表示 $\mathbb{P}(\tau(a)|\tau(C))$；这一点可通过基于本节所述细节的常规论证得出。事实上，当 C 有限时，这一点很容易证明（使用引理 2.5）；一般情形则可通过取极限，沿用引理 2.7 的证明方法得到。

最后，我们使用上面定义的运算 θ，证明每个随机变量 $f\in RV(\mathcal{B},\mu)$ 与 $\mathcal{B}$ 中使 f 可测的最小 σ-子代数之间存在可定义性关系，并将其记作 $\sigma(f)$。注意，$\sigma(f)$ 作为一个 σ-子代数，由形如 $f^{-1}(r,1]$ 且 $r\in[0,1]$ 的可测集生成。这意味着 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{meq}}(\sigma(f))=\mathrm{dcl}^{\mathrm{meq}}(\{f^{-1}(r,1]\mid r\in[0,1]\})$。

5.8. 引理。设 $\mathcal{M}\models Pr$ 是概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的概率代数。对于每个 $f\in RV(\mathcal{B},\mu)$，我们有 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{meq}}(f)=\mathrm{dcl}^{\mathrm{meq}}(\sigma(f))$。

证明。首先注意到，5.5(c) 的证明表明 $f\in\mathrm{dcl}^{\mathrm{meq}}(\sigma(f))$。

因此，只需证明对每个 $r\in[0,1]$，$f^{-1}(r,1]\in\mathrm{dcl}^{\mathrm{meq}}(f)$。对于 $r=1$，这是显然的。固定 $0\leq r<1$，并对每个 $n\geq\frac{1}{1-r}$，令 $\theta_n\colon[0,1]\to[0,1]$ 为如下定义的连续函数：当 $0\leq t\leq r$ 时，$\theta_n(t)=0$；当 $r<t<r+\frac{1}{n}$ 时，$\theta_n(t)=n(t-r)$；对于 $r+\frac{1}{n}\leq t\leq 1$，$\theta_n(t)=1$。对每个 $t\in[0,1]$，序列 $(\theta_n(t))_n$ 在 n 中单调递增，其上确界是取值为 0（当 $t\leq r$）和 1（当 $t>r$）的函数。因此，

序列 $(\theta_n(f))_n$ 在 L_1 中收敛于 $f^{-1}(r,1]$ 的示性函数，这表明 $f^{-1}(r,1] \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{meq}}(f)$，正如所求。□

6. Atomless probability spaces

根据命题 4.7(e)，模型 Pr 是无原子的这一事实可用条件 $\theta(1) = 0$ 表示，而该条件在 Pr 中等价于条件

$$\sup_x \inf_y |\mu(x \cap y) - \mu(x \cap y^c)| = 0. \tag{A}$$

我们用 APA 表示公理集合 Pr 与 (A) 的并集。

6.1. 推论。设 $\mathcal{M}$ 是一个 L^{pr}-结构。那么， $\mathcal{M}$ 是 APA 的模型，当且仅当 $\mathcal{M}$ 同构于某个无原子概率空间的概率代数。

证明。由上述讨论立即可得。 □

本节的主要目的是对 APA进行基本的模型论分析。许多结果对应于 Ben Yaacov 在紧抽象理论的框架下证明的关于无原子概率代数的结论 [1]。我们将这些结果引入连续一阶逻辑的框架，并用测度论和分析中熟悉的语言给出证明。

就 4.15 中引入的不变量而言，模型 $\mathcal{M}$ 是 Pr 的模型，当且仅当 $\Phi^{\mathcal{M}}$ 由每一项都等于 0 的常值序列组成。因此，利用第 4 节中的结果，我们得到 APA的以下基本性质:

6.2. 推论。理论 APA 具有量词消去性质，是可分范畴的，且是完备的； APA 的唯一可分模型是强 ω-齐次的。此外，APA 是 Pr的模型伴侣。

证明。令 APA^* 表示所有结构 $\mathcal{M}^*$组成的理论，其中 $\mathcal{M}$ 是 APA 的模型（即，$\mathcal{M}$ 是 Pr的无原子模型）。由定理 4.14 可知， APA^* 具有量词消去性质。然而，在 APA^*的模型中，所有额外谓词 P_n 的取值都为 0，因此可以从任意公式中消去。也就是说，每个公式在 APA^* 中都等价于语言 Pr中的一个无量词公式。因此， APA 具有量词消去性质。由推论 4.17 可得 APA 的可分范畴性以及其可分模型的强 ω-齐次性。 APA 的完备性既可由可分范畴性推出，也可由量词消去性质推出（因为 APA 的每个模型都包含平凡概率代数 $\{0,1\}$ 作为子结构）。

由于 APA 具有量词消去，因此它是模型完备的；此外，它还是Pr的扩张。因此，要证明 APA 是 Pr 的模型伴侣，只需证明

Pr 的每个模型都有一个扩张，该扩张是 APA的模型。设 $\mathcal{M} \models Pr$ 是概率空间（X，$\mathcal{B}$，μ）的测度代数，并设（Y，$\mathcal{C}$，ν）是任意一个无原子概率空间。那么，乘积测度空间（$X \times Y$，$\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$，$\mu \otimes \nu$）是无原子的，并且可通过将 $B \in \mathcal{B}$ 映射到 $B \times Y \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$的嵌入，视为（$X$，$\mathcal{B}$，$\mu$）的扩张。因此，（$X \times Y$，$\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$，$\mu \otimes \nu$）的概率代数是 APA 的一个模型，且 $\mathcal{M}$ 可以嵌入其中。□

6.3. 注记。设 $\mathcal{M}$ 是 APA 的唯一可分模型，并设 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ $b = (b_1, \ldots, b_n) \in M^n$。由推论 6.2 可知，如果 $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$，那么存在 $\mathcal{M}$ 的一个自同构σ，使得对于所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $\sigma(a_i) = b_i$。然而，这一结果并未提供关于 σ 在 $\mathcal{M}$ 其余部分上的行为的任何信息。在 [9] 中，我们证明了关于 $\mathcal{M}$ 的更强形式的齐次性。为了陈述这一结果，我们需要在 M^n 上引入另一个自然的度量，其定义为

$$d_P(a, b) := \frac{1}{2} \sum_s d(a^s, b^s).$$

（概率空间中定义在 1 的可测划分上的这种距离版本曾在第 5 节中使用。参见引理 5.1。它还将在下面的推论 6.13 中出现。这里我们使用了记号 4.12 中引入的记号，用于与元组 a 和 b 相关联的 1 的划分，而 s 遍历 $\{-1, +1\}^n$。注意，当 $a, b \in M$ 是单个元素时，$d_P(a, b) = d(a, b)$，因为 $\mu(a^c \triangle b^c) = \mu(a \triangle b)$；这就是 d_P 的定义中出现 $\frac{1}{2}$ 因子的原因。此外，当 a 和 b 是 1 的划分时，$d_P(a, b)$ 与引理 5.1 之前给出的 $d_P(a, b)$ 的定义一致，因为除非 s 恰好包含 $+1$ 的一次出现，否则 a^s, b^s 都将为 0；进一步地，如果 $+1$ 的唯一出现位于位置 i，那么 $a^s = a_i$ 和 $b^s = b_i$。

来自 [9] 的齐次性结果如下：

引理（ [9]中的（5.6））。设 a、$b \in M^n$ 是满足 $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$ 的元组。那么存在 $\mathcal{M}$ 的一个自同构 σ，使得对所有 i，$\sigma(a_i) = b_i$；并且对于每个有限元组 $c \in M^k$，有

$$d_P(ac, b\sigma(c)) = d_P(a, b).$$

特别地，对于每个 $c \in M$，我们有 $d(\sigma(c)\ c) \leq d_P(a, b)$。

以下引理以紧抽象理论的框架出现在 [1, 第2节。1], 为了使本文更加自足，也因为我们的设定有所不同，并为了阐明可由分析中的哪些初等工具推导出这些事实，我们给出完备的证明。

6.4. 引理。设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models APA$。设 $C \subseteq M = \mathcal{B}$和 $a, b \in M^n$。回忆一下，$\langle C \rangle$是由 C生成的 $\mathcal{B}$ 的 σ-子代数。以下条件等价：

(1) $\mathrm{tp}(a/C) = \mathrm{tp}(b/C)$; (2) 对所有 $s = (k_1, \ldots, k_n) \in \{-1, +1\}^n$ 以及所有 $c \in \langle C\rangle$, $\mu(a^s \cap c) = \mu(b^s \cap c)$; (3) 对所有 $s = (k_1, \ldots, k_n) \in \{-1, +1\}^n$, $\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle) = \mathbb{P}(b^s|\langle C\rangle)$。

证明。（1） $\Leftrightarrow$ （2）：首先考虑 $C = \emptyset$ 的情形。只需证明从右到左的方向。根据 APA 的量词消去（推论 6.2），证明 $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{tp}(b_1, \ldots, b_n)$ 等价于证明：对于每个布尔项$t(x_1, \ldots, x_n)$, $\mu(t(a_1, \ldots, a_n)) = \mu(t(b_1, \ldots, b_n))$ 都成立。根据 4.12 中的讨论，只要对所有 $s \in\{-1, +1\}$, $\mu(a^s) = \mu(b^s)$，上述结论就成立。

现在考虑任意的 C。根据定理 2.3 之前的讨论，我们看到 $C \subseteq \langle C\rangle \subseteq \mathrm{dcl}(C)$，因此，$\langle C\rangle$ 上的每个类型都由其在 C 上的类型限制所确定。由于 $\langle C\rangle$ 对布尔组合封闭，（1）和（2）的等价性可由本证明的第一部分立即得出。

(2) $\Leftrightarrow$ (3)：根据推论 6.1，存在一个无原子概率空间 $(X, \mathcal{A}, \nu)$，其概率代数为 $(\mathcal{B}, \mu, d)$。利用引理 2.2，存在一个 σ-子代数 $\mathcal{D}$，它是 $\mathcal{A}$ 的子代数，且满足 $\widehat{\ } \quad \widehat{\ }\mathcal{D} = \langle C\rangle$。根据 2.4，对于任意 $a \in \mathcal{B} = \mathcal{A}$，我们有 $\mathbb{P}(a|\langle C\rangle) = \mathbb{P}(a|\mathcal{D})$。也就是说，(3) 等价于将 $\langle C\rangle$ 替换为 $\mathcal{D}$ 后得到的 (3) 版本。

(2) 与这个新版本的 (3) 等价，这由定理 2.3 得出；具体而言，这是因为对于任意 $a = [A]_\mu \in \mathcal{A}$，函数 $\mathbb{P}(a|\mathcal{D})$ 都是 $\mathcal{D}$-可测的，并且在几乎处处相等的意义下由 $\int_E \chi_A \, d\mu = \mu(A \cap E)$ 的取值确定，其中 E 遍历 $\mathcal{D}$。□

6.5. 注记. 当 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $b = (b_1, \ldots, b_n)$ 是 $\mathcal{M}$ 中 1 的划分时，前述结果的形式尤其简单。例如，条件 (2) 可化简为：对于所有 $i = 1, \ldots, n$ 以及所有 $c \in \langle C\rangle$, $\mu(a_i \cap c) = \mu(b_i \cap c)$。这尤其意味着，当 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ 是 1 的划分时，a 在 C 上的 n-类型由 1-型 $\mathrm{tp}(a_i/C)$（$i = 1, \ldots, n$）决定。

引理 6.4 刻画了类型的相等性。接下来，我们将完成对类型空间 $S_n(C)$ 的描述。首先需要给出一个定义：

6.6. 定义. 设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models APA$ 和 $C \subseteq M = \mathcal{B}$。$\langle C\rangle$ 上的加性泛函是一个有限可加函数 λ: $\langle C\rangle \to [0, 1]$。

6.7. 注。设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models APA$。设 $C \subseteq M = \mathcal{B}$和 $a \in M^n$。在 6.4(2) 中，由 $c \mapsto \mu(a^s \cap c)$ 定义的每个函数 λ^s: $\langle C\rangle \to [0, 1]$，都是 $\langle C\rangle$ 上的加性泛函，且满足 $\lambda^s(1) = \mu(a^s)$。此外，对于每个 $c \in \langle C\rangle$，都有 $\sum\{\lambda^s(c) \mid s \in \{-1, +1\}^n\} = \mu(c)$，因为 $(a^s \cap c \mid s \in \{-1, +1\}^n)$ 是 c 的一个划分。下一个结果表明，任何这样的加性泛函族都来自 $S_n(\langle C\rangle)$ 中的一个类型。

6.8. 引理。设 $\mathcal{M}=(\mathcal{B},\mu,d)\models APA$ 且 $C\subseteq M=\mathcal{B}$。假设 $\mathcal{M}$ 是 κ-饱和的，其中 $\kappa>\mathrm{card}(\langle C\rangle)$。设 $(\lambda^s\mid s\in\{-1,+1\}^n)$ 是 $\langle C\rangle$ 上的一个加性泛函族，满足对所有 $c\in\langle C\rangle$，$\sum\{\lambda^s(c)\mid s\in\{-1,+1\}^n\}=\mu(c)$。则存在 $a=(a_1,\dots,a_n)\in M^n$，使得对于每个 $s\in\{-1,+1\}^n$ 和 $c\in\langle C\rangle$，都有 $\mu(a^s\cap c)=\lambda^s(c)$。此外，$\mathrm{tp}(a/C)$ 由这些条件确定。

证明。设 $x=(x_1,\dots,x_n)$ 是一组互不相同的变量组成的元组，并令 $\Sigma(x)$ 为所有形如 $|\mu(x^s\cap c)-\lambda^s(c)|=0$ 的条件所构成的集合，其中 c 遍历 $\langle C\rangle$，s 遍历 $\{-1,+1\}^n$。我们必须证明 Σ 在 $\mathcal{M}$ 中可满足；由饱和性，只需证明 $\Sigma(x)$ 有限可满足。于是，取 F 为 $\langle C\rangle$ 的任意有限子集，并令 $f_1,\dots,f_k$ 为 $F^{\#}$ 的原子。对于每个 $i=1,\dots,n$，取 $(a_{i,s}\mid s\in\{-1,+1\}^n)$ 为 $\mathcal{B}$ 中 f_i 的一个划分，使得对所有 s，$\mu(a_{i,s})=\lambda^s(f_i)$。这是可行的，因为 $\mu(f_i)=\sum\{\lambda^s(f_i)\mid s\in\{-1,+1\}^n\}$。注意，族 $(a_{i,s})$ 是 $\mathcal{B}$ 中 1 的划分。最后，对每个 i，取集合 $a_i=\cup\{a_{i,s}\mid s_i=+1\}$，并令集合 $a=(a_1,\dots,a_n)$。简单计算可得，对所有 i,s，都有 $a^s\cap f_i=a_{i,s}$，因此 $\mu(a^s\cap f_i)=\lambda^s(f_i)$。由可加性可知，对每个 $f\in F$，都有 $\mu(a^s\cap f)=\lambda^s(f)$。这表明 $\Sigma(x)$ 在 $\mathcal{M}$ 中有限可满足；结合引理 6.4 所给出的唯一性，即得证明。□

6.9. 注记。对于 C 上的 1-型，前面的引理有一种特别简单的形式。具体而言，假设 λ 是定义在 $\langle C\rangle$ 上的加性泛函，并且对所有 $c\in\langle C\rangle$ 都满足 $\lambda(c)\le\mu(c)$。在 $\langle C\rangle$ 上定义 λ'，使得 $\lambda'(c)=\mu(c)-\lambda(c)$。那么 λ' 也是定义在 $\langle C\rangle$ 上的加性泛函，并且 λ、λ' 这一对满足引理 6.8 中的假设。因此，λ 确定了一个 1-型 $p_\lambda\in S_1(C)$，而 $S_1(C)$ 中的每个元素都可以用这种方式描述。具体来说，当且仅当对所有 $c\in\langle C\rangle$ 都有 $\mu(a\cap c)=\lambda(c)$ 时，a 实现 p_λ（因为这蕴含 $\mu(a^c\cap c)=\lambda'(c)$）。在考察 1 的划分的 n-型时，这一观察尤其有用，详见注 6.5。我们还会在第 7 节（引理 7.16）讨论马哈拉姆引理的模型论内涵时，使用对 1-型的这种描述。

另一种等价的表述方式，是用 $\langle C\rangle$-可测、取值于 $[0,1]$ 的函数（即随机变量）来描述关于 C 的 1-型，这对应于引理 6.4 中的条款 (3)。具体而言，设 f 是任意一个 $\langle C\rangle$-可测、取值于 $[0,1]$ 的函数。对于 $\mathcal{M}\models APA$ 和 $C\subseteq M$，条件 $\mathbb{P}(a|\langle C\rangle)=f$ 在 $a\in M$ 上是关于 C 的类型可定义的；事实上，它恰好确定了 $\mathrm{tp}(a/C)$。为此，考虑对 $c\in\langle C\rangle$ 定义的 λ_f：$\lambda_f(c):=\int_c f\,d\mu$。那么，$\lambda_f$ 是 $\langle C\rangle$ 上的一个加性泛函，满足对所有 $c\in\langle C\rangle$ 都有 $\lambda(c)\le\mu(c)$。因此，如上一段所述，λ_f 恰好确定了 $S_1(C)$ 中的一个 1-型。此外，对所有 $c\in\langle C\rangle$ 都有 $\mu(a\cap c)=\lambda_f(c)$，这一条件等价于 $\mathbb{P}(a|\langle C\rangle)=f$。

6.10. 引理。设 $\mathcal{M}=(\mathcal{B},\mu,d)\models APA$ 且 $C\subseteq M$。则 $\mathrm{dcl}(C)=\mathrm{acl}(C)=\langle C\rangle$。

证明。回顾一下，$\langle C\rangle$ 是由 C生成的 $\mathcal{B}$ 的 σ-子代数。正如前一个证明开头所指出的，$C \subseteq \langle C\rangle \subseteq \mathrm{dcl}(C)$。因此，要完成证明，只需证明 $\mathrm{acl}(C) \subseteq \langle C\rangle$。

现在令 $a \in M \setminus \langle C\rangle$。要证明 $a \notin \mathrm{acl}(C)$，根据 [7, 练习 10.8]，只需证明存在某个 $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$，使得 $\mathrm{tp}(a/C)$ 在 $\mathcal{N}$ 中有一个不属于 $\mathcal{M}$ 的实现。令 $\mathcal{M}$ 为概率空间 $(X, \mathcal{A}, \nu)$ 的概率代数。考虑勒贝格测度下的标准概率空间 $([0,1], \mathcal{L}, m)$，并构造乘积空间 $(X\times[0,1], \mathcal{A}\otimes\mathcal{L}, \nu\otimes m)$；令 $\mathcal{N}$ 为该乘积空间的概率代数。存在一个典范嵌入J: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{L}$，定义为 $J(A) = A\times[0,1]$，其中 $A \in \mathcal{A}$；该映射导出一个将 $\mathcal{M}$ 嵌入 $\mathcal{N}$ 的嵌入 $\frown\!\!\!\!\sim J$。由于 APA 具有量词消去性质，J是一个初等嵌入。$\widehat{\ }$与前一个证明一样，存在 $\mathcal{A}$ 的一个 σ-子代数 $\mathcal{D}$，使得 $\mathcal{D} = \langle C\rangle$。由于 $\mathbb{P}(a|\mathcal{D})$ 是$\mathcal{D}$-可测的，集合 $A' = \{(x,s) \in X\times[0,1] \mid s \le \mathbb{P}(a|\mathcal{D})(x)\}$ 是 $\mathcal{D}\otimes\mathcal{L}$-可测的。我们$\widehat{\ \ \ }$令 $a' = [A']_{\nu\otimes m} \in \mathcal{D}\otimes\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}\otimes\mathcal{L} = N$。证明只需说明 a' 不属于 $\mathcal{M}$ 在 J 下的像$\widehat{\ }$，且 a' 是 $\mathrm{tp}(a/C)$ 在 $\mathcal{N}$ 中的一个实现。

对于这些陈述中的第一个，我们注意到 $0 < \mathbb{P}(a|\mathcal{D}) < 1$ 在一个正测度集合上成立。否则，$\mathbb{P}(a|\mathcal{D}) = \chi_B$ 对某个 $B \in \mathcal{D}$成立；这将推出 $a = [B]_\nu \in \langle C\rangle$，从而与我们的假设矛盾。由此可知，$A'$ 不能写成 $A\times[0,1]$ 的形式，其中$\frown\!\!\!\!\sim A \in \mathcal{A}$，因此 a' 不在 $\mathcal{M}$ 在 J下的像中。

$\widehat{\ \ \ }$ $\widehat{\ }$最后，令 $\mathcal{D}' = \{B\times[0,1] \mid B \in \mathcal{D}\} = J(\mathcal{D})$，于是 $\mathcal{D}'$是一个 σ-代数，且 $\mathcal{D}' = J(\langle C\rangle) = \frown\!\!\!\!\sim\langle J(C)\rangle$。Fubini 定理表明，$\mathbb{P}(a'|\mathcal{D}') = \mathbb{P}(J(a)|\mathcal{D}')$，由引理 6.4$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$可推出 $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(a'/J(C)) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a/C)$。（这里我们当然是指，$J(C)$中的参数通过双射 J与 C 中的参数相对应。）□

在本节余下部分的若干结果中，方便起见，我们将在一个针对 APA 的 κ-通用域中进行讨论，其中 κ 是不可数的。在本节余下部分，我们将这样的 APA 模型记作 $\mathcal{U}$。回想一下，若子集 C 属于 U，且 $\mathrm{card}(C) < \kappa$，则称其为小。在这种情况下，$S_n(C)$ 中的每个类型都在 $\mathcal{U}$ 中实现。此外，$\mathcal{U}$ 是强 κ-齐次的；也就是说，U 的小子集之间的每个初等映射都可以延拓为 $\mathcal{U}$ 的一个自同构。（在应用中，可能需要更改 $\mathcal{U}$ 和 κ 的大小，以确保特定的参数集是小的。）

回顾一下，d 上的度量会在每个类型空间上诱导出一个度量（见 [7,第 8]节），如下所示：当 $C \subseteq U$ 是小的，且 p、q 是 C上的 n-类型时，p与 q 之间的距离定义为

$$d(p,q) = \inf\{\max_{1\le i\le n} d(a_i,b_i) : (a_1,\dots,a_n) \models p, (b_1,\dots,b_n) \models q\}.$$

下一个结果给出了无原子概率代数中 1 的分割的类型所对应的诱导度量的显式公式。（当参数集 C 为空时，该公式作为（6.2）出现在 [25, 引理 6.3]的证明中。）

6.11. 定理。设 $C \subseteq U$ 是小的，并且 $a = (a_1, \dots, a_n)$ 和 $b = (b_1, \dots, b_n)$ 是 $\mathcal{U}$ 中 1 的划分。那么

$$d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C)) = \max_{1 \le i \le n} \|\mathbb{P}(a_i|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b_i|\langle C\rangle)\|_1$$

其中 $\| \ \|_1$ 是 L_1 范数。

此外，存在 $b' = (b'_1, \dots, b'_n)$，它是 U 中 1 的一个划分，使得 $\mathrm{tp}(b'/C) = \mathrm{tp}(b/C)$，并且对所有 $i = 1, \dots, n$

$$d(a_i, b'_i) = \|\mathbb{P}(a_i|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b_i|\langle C\rangle)\|_1.$$

证明。将 C 替换为 $C^{\#}$（它仍然是小的）后，我们可以在整个证明中假设 C 是 $\mathcal{U}$ 的一个布尔子代数。由于 $C \subseteq C^{\#} \subseteq$ 定义闭包(C)，这不会改变所考虑的类型，也不会改变它们之间的距离。此外，显然 $\langle C^{\#}\rangle = \langle C\rangle$，因此这一变换也不会改变待证等式的右侧。

我们首先注意到

$$\|\mathbb{P}(u|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(v|\langle C\rangle)\|_1 \le \mu(u \triangle v)$$

对任意的 u、$v \in U$。事实上，条件期望的线性性给出

$$\|\mathbb{P}(u|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(v|\langle C\rangle)\|_1 = \|\mathbb{P}(u \setminus v|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(v \setminus u|\langle C\rangle)\|_1 \le \mu(u \triangle v)$$

其中最后一步使用了 L_1-范数的三角不等式，以及对任意 $w \in U$，都有 $\|\mathbb{P}(w|C)\|_1 = \mu(w)$ 这一事实。根据引理 6.4，$\|\mathbb{P}(u|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(v|\langle C\rangle)\|_1$ 仅依赖于 $\mathrm{tp}(u/C)$ 和 $\mathrm{tp}(v/C)$。固定 $i \in \{1, \dots, n\}$，并令 u、v 分别遍历 $\mathrm{tp}(a_i/C)$、$\mathrm{tp}(b_i/C)$ 的实现，再取下确界，我们得到

$$\|\mathbb{P}(a_i|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b_i|\langle C\rangle)\|_1 \le d(\mathrm{tp}(a_i/C), \mathrm{tp}(b_i/C)).$$

对 i 取最大值，得到

$$\max_{1 \le i \le n} \|\mathbb{P}(a_i|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b_i|\langle C\rangle)\|_1 \le d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C)).$$

因此，剩下要证明的是

$$d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C)) \le \max_{1 \le i \le n} \|\mathbb{P}(a_i|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b_i|\langle C\rangle)\|_1,$$

已知 a、$b \in U^n$ 是 1 的分割。我们将在证明的其余部分完成这一点。

我们先在 $C = \emptyset$ 时证明这个不等式，并注意到在这种情况下，最后一个不等式右侧等于 $\max_{1 \le i \le n} |\mu(a_i) - \mu(b_i)|$。

设 $I = \{i \mid \mu(a_i) \geq \mu(b_i)\}$，且 $J = \{i \mid \mu(a_i) < \mu(b_i)\}$。注意 $I \neq \emptyset$；此外，我们可以假设 $J \neq \emptyset$，否则 $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$，因此要证明的不等式显然成立。由于 $\mathcal{U}$ 无原子，我们可以在 U 中选取 $b'_i \leq a_i$，使得对每个 $i \in I$，都有 $\mu(b'_i) = \mu(b_i)$。对于每个这样的 i，令 $u_i = a_i \setminus b'_i$，并设 $u = \cup\{u_i \mid i \in I\}$。注意 $\mu(u) = \sum\{\mu(a_i) - \mu(b_i) \mid i \in I\}$。因为 $(a_1, \ldots, a_n)$ 和 $(b_1, \ldots, b_n)$ 是 $\mathcal{U}$ 中 1 的划分，所以 $\mu(u) = \sum\{\mu(b_j) - \mu(a_j) \mid j \in J\}$。因此，我们可以将 u 划分为 $\{u_j \mid j \in J\} \subseteq U$，使得对所有 $j \in J$，都有 $\mu(u_j) = \mu(b_j) - \mu(a_j)$。最后，对于 $j \in J$，令 $b'_j = a_j \cup u_j$，并注意到 $(b'_1, \ldots, b'_n)$ 是 $\mathcal{U}$ 中满足对所有 $j \in J$ 都有 $\mu(b'_j) = \mu(b_j)$ 的 1 的可测划分；换言之，$(b'_1, \ldots, b'_n)$ 与 $(b_1, \ldots, b_n)$ 实现相同的类型。此外，对于所有 $j \in J$，我们有

$$\mu(a_j \triangle b'_j) = \mu(u_j) = |\mu(a_j) - \mu(b'_j)| = |\mu(a_j) - \mu(b_j)|$$

这就证明了所需的不等式。

现在假设 C 是 $\mathcal{U}$ 的一个有限布尔子代数，并设 C 的原子为 $c_1, \ldots, c_p$。对于每个 $i \leq n$ 和 $j \leq p$，令 $a_{ij} = a_i \cap c_j$ 和 $b_{ij} = b_i \cap c_j$。我们在每个 c_j 内按照上一段中的论证进行推导。这得到 b'_{ij}，其中 $i \leq n, j \leq p$ 满足以下性质：(a) 对所有 i, j，$\mu(b'_{ij}) = \mu(b_{ij})$；(b) 对每个 $j \leq p$，元组 $(b'_{1j}, \ldots, b'_{nj})$ 是 c_j 的一个划分；以及 (c) 对所有 i, j，$\mu(a_{ij} \triangle b'_{ij}) = |\mu(a_{ij}) - \mu(b_{ij})|$。对于每个 $i \leq n$，令 $b'_i = \cup_{j \leq m} b'_{ij}$。于是 $\mathrm{tp}(b'_1, \ldots, b'_n/C) = \mathrm{tp}(b_1, \ldots, b_n/C)$，并且

$$\mu(a_i \triangle b'_i) = \sum_{j \leq m} |\mu(a_{ij}) - \mu(b_{ij})| = \sum_{j \leq m} |\mu(a_i \cap c_j) - \mu(b_i \cap c_j)| = \|\mathbb{P}(a_i|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b_i|\langle C\rangle)\|_1.$$

最后，考虑一般的代数 C。对每个 $k \geq 1$，将引理 2.7 应用于 C and $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$，得到一个有限子代数 $C_k \subseteq C$，使得对于所有包含 C_k 的闭子代数 $D \subseteq C$，我们都有 $\|\mathbb{P}(u|C) - \mathbb{P}(u|D)\|_1 \leq 1/k$，其中对所有满足 $1 \leq i \leq n$ 的 $u = a_i$ 和 $u = b_i$ 均成立。我们可以假设对所有 $k \geq 1$，都有 $C_k \subseteq C_{k+1}$。

此外，我们可以利用类型空间的性质扩充每个 C_k，以确保对于 $k \geq 1$，还满足

$$|d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C)) - d(\mathrm{tp}(a/C_k), \mathrm{tp}(b/C_k))| \leq 1/k.$$

事实上，注，如果 $E \subseteq D \subseteq C$，那么 $d(\mathrm{tp}(a/E), \mathrm{tp}(b/E)) \leq d(\mathrm{tp}(a/D), \mathrm{tp}(b/D)) \leq d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C))$。此外，当 D 遍历 C 的有限子集时，$d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C))$ 是 $d(\mathrm{tp}(a/D), \mathrm{tp}(b/D))$ 的上确界。（否则，将存在 $r < d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C))$，使得对于所有有限 $D \subseteq C$，$d(\mathrm{tp}(a/D), \mathrm{tp}(b/D)) \leq r$。因此，以下条件集合将在 $\mathcal{U}$ 中有限可满足：

$$\Sigma := \{\varphi(x) = 0 \mid \varphi(x) \in \mathrm{tp}(a/C)\} \cup \{\psi(y) = 0 \mid \psi(x) \in \mathrm{tp}(b/C)\} \cup \{\max_i d(x_i, y_i) \leq r\}.$$

由于 C 是一个小集合，我们可以选择实现 Σ 于 $\mathcal{U}$ 中的 $x = a'$ 和 $y = b'$。但这样一来，我们将有 $\mathrm{tp}(a'/C) = \mathrm{tp}(a/C)$、$\mathrm{tp}(b'/C) = \mathrm{tp}(b/C)$，以及 $d(a', b') \leq r < d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C))$，这是不可能的。）

将这两个论证结合起来，我们得到一个递增的有限子代数族 $(C_k \mid k \geq 1)$，它们是 C 的子代数，使得对所有 $k \geq 1$

$$\|\mathbb{P}(u|C) - \mathbb{P}(u|C_k)\|_1 \leq 1/k$$

对所有 $u = a_i$ 和 $u = b_i$，其中 $1 \leq i \leq n$，并且

$$|d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C)) - d(\mathrm{tp}(a/C_k), \mathrm{tp}(b/C_k))| \leq 1/k.$$

根据前面关于有限代数上的 n-类型的证明，对所有 $k \geq 1$，我们有

$$d(\mathrm{tp}(a/C_k), \mathrm{tp}(b/C_k) = \max_{1 \leq i \leq n} \|\mathbb{P}(a_i|\langle C_k\rangle) - \mathbb{P}(b_i|\langle C_k\rangle)\|_1.$$

令 $k \to \infty$ 取极限，得到

$$d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C)) = \max_{1 \leq i \leq n} \|\mathbb{P}(a_i|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b_i|\langle C\rangle)\|_1,$$

证明至此完成。 □

6.12. 推论。设 $C \subseteq U$ 是小的，且 a、b 是 U 的元素。则

$$d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C)) = \|\mathbb{P}(a|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b|\langle C\rangle)\|_1.$$

证明。将前面的引理应用于 (a, a^c) 和 (b, b^c)，并利用以下事实：若将 a、b 替换为 a^c、b^c □，待证等式两边的值都不变

度量的定义。注 6.3 中给出的 U^n 上的度量 d_P 的定义表明，对于 a、$b \in U^n$

$$d_P(a, b) := \frac{1}{2} \sum_s d(a^s, b^s),$$

其中 s 遍历 $\{-1, +1\}$。按照既定模式，我们可以在 $S_n(C)$ 上定义 d_P，如下：

$$d_P(p, q) := \inf\{d_P(a, b) \mid a \models p \text{ and } b \models q\}.$$

由定理 6.11 可立即得到

6.13. 推论。设 $C \subseteq U$ 是小的，并且 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $b = (b_1, \ldots, b_n)$ 属于 U^n。那么

$$d_P(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(b/C)) = \frac{1}{2} \inf\{\sum_s \|\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b^s|\langle C\rangle)\|_1 \mid a \models p \text{ and } b \models q\}.$$

其中 $\|\cdot\|_1$ 是 L_1-范数。

证明。这由定理 6.11 中的“此外”陈述得出。 □

超越 1 的分割的类型之后，我们现在讨论 APA 的完整类型空间 $S_n(C)$ 上的诱导度量。对于 $r \geq 1$，令 $S_r^*(C)$ 表示 APA 的 r-类型空间，这些类型由 κ-通用域 $\mathcal{U}$for APA 中的 1 的划分 $(a_1, \ldots, a_r)$ 实现，其中 C 是 U 的一个小子集。定理 6.11 给出了 $S_r^*(C)$ 上诱导度量的显式公式。由于 $S_r^*(C)$ 是完整的 r-类型空间 $S_r(C)$ 的一个真子集且在度量下闭，这并不能立即刻画 $S_r(C)$ 上的度量。然而，只要以恰当的方式考察APA 的类型，并取 $r = 2^n$，我们就能利用这个引理，将 $S_n(C)$ 上的诱导度量刻画到度量等价的程度，这对大多数用途来说已经足够。

为此，考虑类型上的映射 $\Pi_n : \ S_n(C) \to S_{2^n}^*(C)$，该映射由以下方式诱导：将任意 n-元组（$a_1, \ldots, a_n$）的类型映射到其对应分割（$a^s \mid s \in \{-1, +1\}$）的类型（如 4.12 中所述）。由于 APA 允许量词消去， Π_n 是从 $S_n(C)$ 到 $S_{2^n}^*(C)$ 的双射。注记 4.13 中的讨论表明，对于（逻辑）拓扑， Π_n 还是一个同胚。在下文中，只要不会引起混淆，我们通常会省略下标 n。

6.14. 引理。设 $C \subseteq U$ 为小的，并设 $p, q \in S_n(C)$。则

$$\left(2^{-n+1}\right) \cdot d_n(p, q) \leq d_{2^n}(\Pi_n(p), \Pi_n(q)) \leq n \cdot d_n(p, q)$$

其中， d_n、 d_{2^n} 表示类型空间 $S_n(C)$ $S_{2^n}(C)$ 上的诱导度量（通常简称为 d，但此处添加下标，以指明该度量所定义的类型空间）。

证明。根据 4.12 中给出的 n-元组 $(a_1, \ldots, a_n)$ 与划分 $(a^s \mid s \in \{-1, +1\})$ 之间的双射描述，经过简单计算即可得出结论。□

因此， Π_n 是一个双 Lipschitz 同胚，它将 $S_n(C)$ 映到 $S_{2^n}^*(C)$，且相对于这两个诱导度量而言如此。由于定理 6.11 给出了 $S_{2^n}^*(C)$ 上诱导度量的显式公式，这使我们得以深入了解整个 $S_n(C)$ 上的诱导度量拓扑。

请注意，这一观察强化了引理 6.4。

接下来我们证明理论 APA 是稳定的；事实上，我们只需计算类型，并证明 APA 是 ω-稳定的：

6.15. 命题（命题 4.4, [1]）。理论 APA 是 ω-稳定的。

证明。我们可以令 $\mathcal{U}$ 为无原子概率空间 $(X, \mathcal{A}, \nu)$ 的概率代数。设 $C \subseteq U$ 可数。对于每个 $a \in C$，选取一个满足 $a = [A_a]_\nu$ 的集合 $A_a \in \mathcal{A}$，并令 $\mathcal{C}$ 为由 $\{A_a \mid a \in C\}$ 生成的 $\mathcal{A}$ 的布尔子代数。于是 $\mathcal{C}$ 可数，且 $\widehat{\mathcal{C}} = C^{\#}$。

令 $\mathcal{S}(C)$ 为系数取自 $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ 的 $\mathcal{C}$-可测简单函数集合，并令

$$\mathcal{F}=\{\mathrm{tp}(a/C)\mid \mathbb{P}(a|\mathcal{C})\in\mathcal{S}(C)\}.$$

那么， $\mathcal{F}$ 是一个可数的类型集。根据引理 2.7 和 6.12， $\mathcal{F}$ 是 C 上 1-型空间中的度量稠密子集。□

7. Maharam's theorem

Maharam 定理是概率代数的一个结构定理。它指出，一个 Pr 的模型 $\mathcal{M}=(\mathcal{B},\mu,d)$ 在同构意义下由以下信息确定：第 4 节中给出的关于 $\mathcal{B}$ 的原子部分的信息 $\Phi^{\mathcal{M}}$，以及一个可数集 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$（其中包含无限基数）和一个函数 $\Psi\colon \mathcal{K}^{\mathcal{M}}\to(0,1]$，其总和等于 $\mathcal{B}$ 的无原子部分的 μ-测度。注意，在 $\mathcal{B}$ 中，1 是原子的，当且仅当 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}=\emptyset$。一般来说，我们知道， $\mathcal{B}$ 的原子部分在同构意义下由 $\Phi^{\mathcal{M}}$ 确定，而其无原子部分的测度也已确定。（见推论 4.19。）因此，我们可以将注意力集中在 $\mathcal{M}$ 的无原子部分上。若其非零，则可以通过重新缩放测度和度量，将其视为 APA 的一个模型。也就是说，为了证明 Maharam 定理，我们可以专注于 APA 的模型。

本节将全面讨论 APA 的模型的 Maharam 定理，以阐明其证明与模型论思想产生共鸣的方式。

7.1. 定义。设 $\mathcal{M}=(\mathcal{B},\mu,d)\models APA$ 且 $0\neq b\in\mathcal{B}$。定义 $\mathcal{B}\restriction b$ 为 $\mathcal{B}$ 中所有 $a\leq b$ 所构成的理想。

7.2. 注。由于我们在前述定义中要求 $b\neq 0$，因此可将 $\mathcal{B}\restriction b$ 视为一个布尔代数； $\cap$ 和 $\cup$ 的解释以及 0 的解释均继承自 $\mathcal{B}$，而 1 被解释为 b，补运算则取为 $a\mapsto a^c\cap b$。注意，按照对 $\mathcal{B}\restriction b$ 结构的这一理解，映射 $a\mapsto a\cap b$ 是从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{B}\restriction b$ 上的布尔态射。我们赋予 $\mathcal{B}\restriction b$ 从 $\mathcal{M}$ 限制到 $\mathcal{B}\restriction b$ 而得到的测度和距离；为方便起见，仍分别将这些限制记为 μ 和 d。

显然，$(\mathcal{B}\restriction b,\mu,d)$ 是一个测度代数；如果对 μ 和 d 进行适当的缩放（即乘以 $1/\mu(b)$），它就成为 APA 的一个模型。下文中我们将系统地采用这一观点。

7.3. 记号。除非另有说明，本节余下部分中，我们都将 $\mathcal{M}=(\mathcal{B},\mu,d)$ 视为 APA 的一个模型。提到 $\mathcal{B}$ 的子集的密度时，我们指的是度量稠密度。

Maharam 定理相关论证中的一个关键量是 $\mathcal{B}\restriction b$ 的密度；为简洁起见，我们也称之为 b 的密度。当 b 是无原子的，这个密度是一个无限基数。

7.4. 定义。对于 $b \in \mathcal{B}$，我们称 $\mathcal{B}\restriction b$ 是齐次的（或者称 b 是齐次的），如果 $b \neq 0$ 和 $\mathcal{B}\restriction a$ 对每个 $0 \neq a \leq b$ 都具有与 $\mathcal{B}\restriction b$ 相同的密度。

现在我们可以为模型 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d)$（属于 APA）定义 Maharam 不变量 $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}}, \Psi^{\mathcal{M}})$。

7.5. 定义。令 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 为满足以下条件的所有无限基数 κ 的集合：存在 $b \in \mathcal{B}$，使得 b 是齐次的，且 $\mathcal{B}\restriction b$ 的密度为 κ。对于每个 $\kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$，定义

$$\Psi^{\mathcal{M}}(\kappa) := \sup\{\mu(b) \mid b \text{ is homogeneous and the density of } \mathcal{B}\restriction b = \kappa\}.$$

如果 b 是齐次的，且 $\mu(b) = \Psi^{\mathcal{M}}(\kappa)$，其中 $\mathcal{B}\restriction b$ 的密度为 $\kappa =$，则称 $b \in \mathcal{B}$ 为极大齐性。如果 1 在 $\mathcal{B}$ 中是齐次的，则称 $\mathcal{B}$ 为齐次的。

如果存在一个由 $\mathcal{B}$ 的极大齐性元素组成的两两不交族 $(b_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}})$，使得 b_κ 对每个 $\kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 的密度均为 κ，且 $\sum\{\mu(b_\kappa) \mid \kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}\}$ 存在并等于 1，则称 $\mathcal{M}$ 实现了其 Maharam 不变量。

下面我们将证明，每个 $\mathcal{M}$ APA 模型都实现其 Maharam 不变量。特别地，这意味着 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 非空且可数。

7.6. 注。如果 $\mathcal{M} \models APA$ 实现其 Maharam 不变量，那么 $\mathcal{M}$ 的密度等于 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 的上确界（在基数中取）。

7.7. 例。 显然，唯一可分模型 $\mathcal{M}$ 是密度为 $\aleph_0$的齐次模型。

设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是任意可数生成的无原子概率空间，且设 κ 为任意不可数基数。令 $\mathcal{A}$ 为乘积空间 X^κ的概率代数，其中乘积概率测度由将 μ 作为每个因子的测度得到。则 $\mathcal{A}$ 是齐次的，且密度为 κ。

证明。设 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{B}$的可数稠密子集。对每个 $\alpha < \kappa$，令 π_α 为从 X^κ 到 X的坐标投影。X^κ 的乘积可测子集的 σ-代数由形如 $\pi_\alpha^{-1}(Q)$ 的集合生成，其中 $\alpha < \kappa$ 且 $Q \in \mathcal{S}$。因此，$\mathcal{A}$ 的密度至多为κ。此外，如果 $Q \in \mathcal{B}$ 具有 $\mu(Q) = r \in (0, 1)$，且 α、β不同，那么 $d(\pi_\alpha^{-1}(Q)\pi_\beta^{-1}(Q)) = 2r(1-r) > 0$，所以 $\mathcal{A}$ 的密度至少为 κ。

若 V 是 X^κ 的任意乘积可测子集，则 V 只依赖于可数多个序数 $\alpha < \kappa$，其含义是：存在这样一个可数序数集 S，使得对于任意 u、v，若 $\kappa \to X$，且对所有 $\alpha \in S$，$u \in V$ 和 $u(\alpha) = v(\alpha)$，则 $v \in V$ 也成立。当 V、S 满足此条件时，我们称 V 只依赖于 S 中的坐标。（注：只依赖于可数多个 $\alpha < \kappa$ 的乘积可测 $V \subseteq X^\kappa$ 的集合构成一个 σ 代数，并且包含所有形如 $\pi_\alpha^{-1}(Q)$ 的集合，其中 $\alpha < \kappa$ 且 $Q \in \mathcal{S}$。）

对第一段论证稍作变通即可得出：将 $\mathcal{A}$ 限制在由任意乘积可测集 V 所确定的事件上，其密度也等于 κ。（只需考虑 $\kappa \setminus S$ 中的坐标，其中 S 是可数的，且 V 只依赖于 S 中的坐标。）因此， $\mathcal{A}$ 是密度为 κ 的齐次空间。□

7.8. 注记。现在已经很清楚，对于每个非空的可数无限基数集合 $\mathcal{K}$ 以及每个函数 Ψ: $\mathcal{K} \to (0,1]$ 其和等于 1，我们都可以构造一个无原子概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$，使其概率代数 $\mathcal{M}$ 实现其 Maharam 不变量，并且满足 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}} = \mathcal{K}$ 和 $\Psi^{\mathcal{M}} = \Psi$。对于每个 $\kappa \in \mathcal{K}$，令 $(X_\kappa, \mathcal{B}_\kappa, \mu_\kappa)$ 为一个概率空间，其概率代数具有密度 κ的齐次性；取集合 X_κ 为两两不交。对于每个 $\kappa \in \mathcal{K}$，令 μ'_κ 为 $\Psi(\kappa)\mu_\kappa$。然后令 X 为 $(X_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K})$ 的并集，并令 $\mathcal{B}$ 为由 $\cup\{\mathcal{B}_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K}\}$生成的 σ-代数，其中元素为 X 的子集。注意，每个 $Q \in \mathcal{B}$都等于 $\cup\{Q \cap X_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K}\}$，并设 $\mu(Q) := \sum\{\mu'_\kappa(Q \cap X_\kappa) \mid \kappa \in \mathcal{K}\}$。于是显然，$(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个无原子概率空间，并且其概率代数 $\mathcal{M}$ 满足 $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}}, \Psi^{\mathcal{M}}) = (\mathcal{K}, \mathcal{M})$。

接下来陈述一个给出齐次元素性质的引理。

7.9. 引理。设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models APA$。

(a) 若 b_1, b_2 是 $\mathcal{B}$ 的齐次元素，且 b_1, b_2 的密度不同，则 $b_1 \cap b_2 = 0$。(b) 若对于 $n \geq 1$， b_n 是 $\mathcal{B}$ 的齐次元素，并且对所有 n， b_n 的密度均为 κ，则 $b = \cup\{b_n \mid n \geq 1\}$ 也是 $\mathcal{B}$ 中的齐次元素，且 b 的密度为 κ。(c) 若存在一个密度为 κ 的齐次元素 $b \in \mathcal{B}$，则存在一个极大齐性元素 b'，使得 b' 的密度也为 κ。(d) 若 b' 是密度为 κ 的极大齐性元素，则每个密度为 κ 的齐次元素 b 都满足 $b \leq b'$。

证明。留作读者练习。 □

7.10. 命题。每个模型 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d)$ 都实现其 Maharam 不变量系统 APA。

证明。我们用字母指代引理 7.9 中的各项。令 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 按定义 7.5 中的方式定义。注意，$\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 非空，因为取 $0 \neq b \in \mathcal{B}$ 使得 b 具有尽可能小的密度，这意味着 $\mathcal{B} \restriction b$ 是齐次的。对于每个 $\kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$，令 b_κ 为 $\mathcal{B}$ 中密度为 κ的一个极大齐性元素；根据 (c)，这样的元素存在。由 (a)，元素 $(b_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}})$ 在 $\mathcal{B}$ 中两两不交；由 (d)，对每个 κ，有 $\mu(b_\kappa) = \Psi^{\mathcal{M}}(\kappa)$。注意，这意味着 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 是可数的。

剩下要证明 $\sum\{\mu(b_\kappa) \mid \kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}\} = 1$。若不然，令 b 为 $\mathcal{B}$ 中 $\cup\{b_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}\}$的补集，于是 $b > 0$。令 b' 为 $\mathcal{B} \restriction b$ 中密度尽可能小的非零元素，因此 $\mathcal{B} \restriction b'$ 是齐次的。若 κ 是 b' 的密度，则根据定义有 $\kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$，并且有 $b' \cap b_\kappa = 0$。这与 b_κ的极大性矛盾。□

7.11. 注。还需证明，模型 $\mathcal{M}$ of APA 由其 Maharam 不变量决定，直至同构。显然，只需证明这样一个特殊情形：若 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是齐性模型且具有相同的密度，则 $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$。事实上，若 $\mathcal{M}$ 是 APA 的任意模型，且族 $(b_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}})$ 能证明 $\mathcal{M}$ 实现了其 Maharam 不变量（如命题 7.10 的证明所示），那么每个 $\mathcal{B} \restriction b_\kappa$（作为测度代数）的同构类型都由 κ 和 $\mu(b_\kappa) = \Psi^{\mathcal{M}}(\kappa)$ 决定。由这些数据很容易重建 $\mathcal{M}$的同构类型，因为 $\mathcal{K}$ 是可数的，元素 $(b_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}})$ 两两不交，且 $\sum\{\mu(b_\kappa) \mid \kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}\} = 1$。

类似的讨论也适用于 Pr 的任意模型 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d)$。在这种情况下，$\mathcal{B}$ 所需的分解由 $\mathcal{B}$ 中的元素族 $(b_i \mid i \in I)$ 和满足以下条件的基数族 $(\kappa_i \mid i \in I)$ 组成：(i) 元素 b_i 两两不交且非零；(ii) $\sum\{\mu(b_i) \mid i \in I\} = 1$；(iii) 若 κ_i 有限，则它等于 1，且 b_i 是 $\mathcal{B}$ 中的一个原子；(iv) 若 κ_i 无限，则 b_i 是 $\mathcal{B}$ 的无原子部分中密度为 κ_i 的一个极大齐性分量；(v) 若 κ_i、κ_j 无限且满足 $i \neq j$，则它们不相同。正如我们现在将要说明的，确定 $\mathcal{M}$ 至同构所需的额外信息是实数族 $(\mu(b_i) \mid i \in I)$；这些实数都来自 $(0, 1]$，且其和为 1。

剩下需要证明的是，每个 APA 的齐次模型都由其密度决定，且在同构意义下唯一。正是在这个证明中，模型论思想开始发挥作用，下面我们将对此作出解释。事实上，APA 的齐性模型与饱和模型相同（也就是说，这些模型的密度为 κ，并且是 κ-饱和的，其中 κ 满足某个条件）。要精确说明这种联系，需要引入以下概念。

7.12. 定义. 设 $(\mathcal{B}, \mu, d)$ 是一个概率代数，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个 σ-子代数。若非零元素 $b \in \mathcal{B}$ 满足：对于 $\mathcal{B}$ 中的所有 $b' \leq b$，都存在 $a \in \mathcal{A}$ 使得 $b' = a \cap b$，则称 $b \in \mathcal{B}$ 是相对于 $\mathcal{A}$ 的原子。若没有非零元素 $b \in \mathcal{B}$ 是相对于 $\mathcal{A}$ 的原子，则称 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{A}$ 上无原子。

7.13. 注记。考虑定义 7.12 中的情形，并设 b 是 $\mathcal{B}$ 的一个非零元素。那么，b 是相对于 $\mathcal{A}$ 的原子，当且仅当对于每个 $b' \leq b \in \mathcal{B}$，$\mathbb{P}(b' \mid \mathcal{A})$ 都等于 $\mathbb{P}(b \mid \mathcal{A})$ 的一个限制。这里，我们将每个 $\mathbb{P}(\cdot \mid \mathcal{A})$ 视为 μ-几乎处处等价类，其中的函数是 $\mathcal{A}$-可测且取值于 $[0, 1]$；“限制”指乘以某个 $\mathcal{A}$-可测集的示性函数。（见记号 2.4。）

注：如果 $\mathcal{B}$ 是一个概率代数且 $0 \neq b \in \mathcal{B}$，那么 b 是 $\mathcal{B}$ 中的原子，当且仅当 b 是相对于平凡子代数 $\{0,1\}$ 的原子。

7.14. 引理. 假设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d)$ 是 APA 的一个齐次模型，且其密度为 κ，而 $\mathcal{N} = (\mathcal{A}, \mu, d)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个子结构，密度为 $< \kappa$。那么 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{A}$ 上无原子。

证明. 对每个非零的 $b \in \mathcal{B}$，$\mathcal{B} \restriction b$ 的密度为 κ，而 $\{a \cap b \mid a \in \mathcal{A}\}$ 的密度至多为 $\mathcal{A}$ 的密度。□

7.15. 引理. 假设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d)$ 是 APA 的一个模型，且 $\mathcal{N} = (\mathcal{A}, \mu, d)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个子结构。若 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{A}$ 上无原子，则对每个有限集 $F \subseteq \mathcal{B}$，$\mathcal{B}$ 在 $\langle \mathcal{A} \cup F \rangle$ 上无原子。

证明. 运用归纳法，只需考虑情形 $F = \{b\}$。我们证明逆否命题。假设 $\mathcal{B}$ 中有一个非零的 b'，它相对于 $\langle \mathcal{A} \cup \{b\} \rangle$ 是一个原子。我们证明 $b' \cap b$ 相对于 $\mathcal{A}$ 要么为 0，要么是一个原子；$b' \cap b^c$ 也同样如此。由于 $b' \neq 0$，它们中至少有一个必定相对于 $\mathcal{A}$ 是一个原子。

考虑 $b'' \leq b' \cap b$（$b' \cap b^c$ 的情形类似）。注意 $b'' \leq b$，因此 $b'' \cap b^c = 0$。由于 b' 是相对于 $\langle \mathcal{A} \cup \{b\} \rangle$ 的一个原子，存在 $x \in \langle \mathcal{A} \cup \{b\} \rangle$ 使得 $b'' = x \cap b'$。存在 a_1、$a_2 \in \mathcal{A}$ 使得 $x = (a_1 \cap b) \cup (a_2 \cap b^c)$，因此

$$b'' = x \cap b' = (a_1 \cap b \cap b') \cup (a_2 \cap b^c \cap b') = a_1 \cap (b' \cap b).$$

最后一个等式是因为 b'' 和 $a_2 \cap b^c \cap b'$ 不相交，所以 $a_2 \cap b^c \cap b' = 0$。由此可知，$b' \cap b$ 要么是 0，要么是相对于 $\mathcal{A}$ 的一个原子。□

7.16. 引理（马哈拉姆引理）。设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d)$ 是 APA 的一个模型，且 $\mathcal{N} = (\mathcal{A}, \mu, d)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个子结构。若 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{A}$ 上无原子，则 $\mathcal{M}$ 实现了 $\mathcal{A}$ 上的每个 n-类型。

证明。利用引理 7.15，以及该引理允许我们“逐坐标”实现 $\mathcal{A}$ 上的 n-类型，只需证明 1-型的情形。注释 6.9 表明，证明 $\mathcal{M}$ 实现了 $\mathcal{A}$ 上的每个 1-型，等价于证明以下命题：

设 $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ 是 $\mathcal{A}$ 上的一个加性泛函，且对每个 $a \in \mathcal{A}$，都有 $\lambda(a) \leq \mu(a)$。那么，存在 $b \in \mathcal{B}$，使得对每个 $a \in \mathcal{A}$，都有 $\lambda(a) = \mu(a \cap b)$。

Fremlin 关于测度代数的章节 [14] 中，将这一完全相同的命题作为引理 3.2 给出了证明；在他关于测度论的多卷著作第 3 [15] 卷中，也将其作为引理 331B 给出了证明。□

7.17. 推论。APA 的每个齐性模型都由其密度唯一确定，精确到同构。

证明。假设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d) \models APA$ 的密度为 κ，且是齐性的。由于 $\mathcal{B}$ 是齐性的，对于每个满足 $\text{card}(C) < \kappa$ 的 $C \subseteq \mathcal{B}$，它在 $\langle C \rangle$ 上都是无原子的。根据引理 7.16，$\mathcal{M}$ 对于每个这样的 C，都实现了 C 上的每个 n-类型。也就是说，$\mathcal{M}$ 是 APA 的一个 κ-饱和模型，且其密度为 κ。运用模型论中的标准来回论证，任意两个这样的模型都同构。□

最后，我们介绍马哈拉诺夫定理，它刻画了所有概率代数在同构意义下的结构。

7.18. 定理. 每个 $\mathcal{M}$ 的 Pr 都由其原子部分的不变量 $\Phi^{\mathcal{M}}$ 以及其无原子部分的 Maharam 不变量 $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}}, \Psi^{\mathcal{M}})$ 在同构意义下确定。

证明. 一般概率代数的 Maharam 不变量定义见本节第一段；$\Phi^{\mathcal{M}}$ 的定义见第 4 节。定理的证明已在上文给出，其中关键结果是推论 7.17，它处理了 $\mathcal{M}$ 的无原子部分的极大齐性分量。注 7.11 指出，$\mathcal{M}$ 的结构由这些不变量对其各分量的描述所决定。□

请注意，对于每个无限基数 κ，我们将密度特征为 κ 的 APA 的 κ-饱和模型识别为密度为 κ 的马哈拉诺夫齐次模型。关于 APA 的 κ-饱和模型和 κ-齐性模型的更多信息，见 [26]。

下面这个关于“在……之上无原子”性质的刻画常常很有用：

7.19. 命题. 设 $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mu, d)$ 是 APA 的一个模型，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个 σ-子代数。以下条件等价。

(a) $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{A}$ 之上无原子。(b) 对于一个无限的正整数集 n，在 $\mathcal{B}$ 中存在一个 1 的划分，记作 $u = (u_1, \ldots, u_n)$，使得对于所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $i = 1, \ldots, n$，$\mu(a \cap u_i) = \frac{1}{n}\mu(a)$。（换言之，每个 u_i 都满足 $u_i \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}$，且测度为 $\frac{1}{n}$。）(c) 存在一个无原子的 σ-子代数 $\mathcal{C}$，它是 $\mathcal{B}$ 的子代数，并且 $\mathcal{A} \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}$。

证明. (a) $\Rightarrow$ (c)：我们归纳地构造 $\mathcal{B}$ 的有限子代数序列 $\{\mathcal{C}_n\}_{n \geq 1}$，使得对所有 $n \geq 2$，都有 $\mathcal{C}_n \perp\!\!\!\perp (\mathcal{A} \cup (\bigcup_{i<n} \mathcal{C}_i))$；并且 $\mathcal{C}_n$ 由一个 1 的划分生成，记作 $(u_1, \ldots, u_n)$，使得对于所有 $i = 1, \ldots, n$，$\mu(u_i) = \frac{1}{n}$。取 $\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}$。假设我们已经构造了 $\{\mathcal{C}_i\}_{i<n}$。由引理 7.15，代数 $\mathcal{B}$ 在 $(\mathcal{A} \cup (\bigcup_{i<n} \mathcal{C}_i))^{\#}$ 之上无原子。由引理 7.16 可知 $\mathcal{C}_n$ 的存在，因为我们可以用 $(\mathcal{A} \cup (\bigcup_{i<n} \mathcal{C}_i))^{\#}$ 上的公式描述 $(u_1, \ldots, u_n)$ 的性质。现在令 $\mathcal{C}$ 为由 $\bigcup_{i \geq 1} \mathcal{C}_i$ 生成的 σ-代数。

(c) $\Rightarrow$ (b)：这是显然的，因为对于任意 n，在 $\mathcal{C}$ 中都存在一个 1 的划分，例如 $(u_1, \ldots, u_n)$，使得 $\mu(u_i) = \frac{1}{n}$ 对所有 i 都成立，而 $u_i \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}$ 对所有 i 自动成立。

(b) $\Rightarrow$ (a)：令 $0 \neq b \in \mathcal{B}$。令 $(u_1, \ldots, u_n)$ 为 $\mathcal{B}$ 中如 (b) 所述的 1 的划分，使得 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}\mu(b)$。注意到

$$\mathbb{P}(u_i \cap b \mid \mathcal{A}) \leq \mathbb{P}(u_i|\mathcal{A}) \leq \tfrac{1}{n} \leq \tfrac{1}{2}\mu(b).$$

因此，对于某个 i，我们有在一个具有正 μ-测度的集合上

$$0 < \mathbb{P}(u_i \cap b \mid \mathcal{A}) < \mathbb{P}(b \mid \mathcal{A}),$$

这意味着 $u_i \cap b$ 不是形如 $a \cap b$ 且满足 $a \in \mathcal{A}$ 的形式。因此，相对于 $\mathcal{A}$，b 不是一个原子。（参见注 7.13。）□

8. Stability of APA

本节继续研究理论 APA，重点关注稳定性理论性质。在本节中，我们始终在 APA 的一个 κ-通用域中工作，该域记为 $\mathcal{U}$，其底集为 U。如果 U 的基数为 $< \kappa$，则称其为小集。除非另有说明，我们始终将参数集取为 U 的小子集。我们会根据需要调整 κ，使 APA 的具体模型成为 $\mathcal{U}$ 的子结构。

本节使用了关于稳定性、分叉、类型的定义以及典范基的背景知识，这些内容可在 [6] 和 [8] 中找到。

由于 APA 稳定，根据命题 6.15，我们得到模型论独立性关系，记为 $C \mathop{\downarrow}_E D$，其定义如下，适用于小集合 C、D、$E \subseteq U$：

$C \mathop{\downarrow}_E D$ 当且仅当，对于来自 $\langle C \rangle$的所有有限元组 a，tp(a/DE) 不在 E 上分叉。

我们的下一个结果是，模型论独立性与概率独立性完全相同，由此我们还得到了 APA中非分叉的一个定量判据。CAT 情形中的相应结果已在 [1, 定理 2.10]中证明。我们的证明采用相同的总体思路，具体细节基于条件期望和 $\perp\!\!\!\perp$的性质，这些性质已在第 2 节中讨论。

论证遵循一个熟悉的模式：证明在 APA 的模型中，关系 $\mathop{\perp\!\!\!\perp}$满足不变性、对称性、有限特征、传递性、扩张和局部特征，并且元组在任意集合上的类型都是平稳的。由此可得，APA是稳定的，并且 $\mathop{\downarrow}$ 与 $\mathop{\perp\!\!\!\perp}$相同（见 [7, 定理 14.14]）。整个证明过程中，我们使用了引理 2.9 中的结果。

8.1. 定理。设 C、D、$E \subseteq U$ 都是小的。那么

$$C \mathop{\downarrow}_E D \text{ if and only if } C \mathop{\perp\!\!\!\perp}_E D.$$

因此，对于每个 $c = (c_1, \ldots, c_n) \in U^n$，tp$(c/DE)$ 不在 E 上分叉，当且仅当

$$\mathbb{P}(c^s|\langle DE\rangle) = \mathbb{P}(c^s|\langle E\rangle)$$

对于所有 $s=(k_1,\ldots,k_m)\in\{-1,+1\}^n$。

证明。设 a 是来自 U 的一个有限元组，且 A、C、D、E 是 U 的小子集。我们证明不变性、对称性、有限特征、传递性、扩张和局部特征这些条件，并证明任意集合上的元组类型都是平稳的。（在验证每个条件时，我们会阐明其含义。）

不变性、对称性和有限特征：由定义 2.8 可知，关系 $C \perp\!\!\!\perp_E D$ 在 $\mathcal{U}$ 的自同构下保持不变，且等价于 $D \perp\!\!\!\perp_E C$，这是显而易见的。有限特征要求：对来自 C 的每个有限元组 c，$C \perp\!\!\!\perp_E D$ 成立当且仅当 $c \perp\!\!\!\perp_E D$ 成立。这可由定义以及条件期望算子的互不相交可加性（分别关于 $\langle D\rangle$ 和 $\langle DE\rangle$）推出。事实上，如果 c_1、……、c_k 是 $c^{\#}$ 中的原子，那么 $c \perp\!\!\!\perp_E D$ 当且仅当对每个 $j=1$、……、k，都有 $c_j \perp\!\!\!\perp_E D$。

传递性：该条件表示，$a \perp\!\!\!\perp_E CDE$ 当且仅当 $a \perp\!\!\!\perp_{CE} CDE$ 且 $a \perp\!\!\!\perp_E CE$。根据引理 2.9((i) $\Leftrightarrow$(ii))，此陈述等价于陈述：$\mathbb{P}(a|\langle CDE\rangle) = \mathbb{P}(a|\langle E\rangle)$ 当且仅当 $\mathbb{P}(a|\langle CDE\rangle) = \mathbb{P}(a|\langle CE\rangle)$ 且 $\mathbb{P}(a|\langle CE\rangle) = \mathbb{P}(a|\langle E\rangle)$，而这由事实 2.6 可知成立。对遍历 $A^{\#}$ 的 a 应用这一点，即可利用有限特征证明 $A \perp\!\!\!\perp_E CD$ 的传递性。

扩张：我们需要证明，对于 U 的任意小子集 A、C、D，存在一个 A 的副本 E，使得 $E \perp\!\!\!\perp_C D$，且该副本覆盖 C。所谓“副本”，是指存在一个从 A 到 E 的双射 f，使得对于每个 $a\in A^n$、每个 L^{pr}-公式 $\varphi(x;y)$ 以及来自 C 的每个有限元组 c，$\mathcal{U}$ 中 $\varphi(f(a);c)$ 与 $\varphi(a;c)$ 的取值相等。（简言之：$\mathrm{tp}(A/C) = \mathrm{tp}(E/C)$，其中 f 给出了 A 和 E 的枚举之间的对应关系。换言之，f 是一个从 A 到 E、覆盖 C 的初等映射。）因此，E 是 A 的一个覆盖 C 的副本这一陈述，可表示为一族条件：这些条件涉及 $\mathrm{card}(A)$ 个变量，并以来自 C 的参数为参数。条件 $E \perp\!\!\!\perp_C D$ 也一样，只是参数来自 $C\cup D$。（也就是说，对于每个 $a=(a_1,\ldots,a_m)\in A^m$ 及其对应的 $e=(f(a_1)\ldots,f(a_m))$，对于每个 $u=(u_1,\ldots,u_n)\in D$，以及每个 $s\in\{-1,+1\}^m$ 和 $t\in\{-1,+1\}^n$，我们要求 $\mathbb{P}(e^s\cap u^t|\langle C\rangle) = \mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle)\cdot\mathbb{P}(u^t|\langle C\rangle)$。根据注释 6.9 的第二段，由于 $\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle)\cdot\mathbb{P}(u^t|\langle C\rangle)$ 是 $\langle C\rangle$-可测的，这是一个关于 CD 的类型可定义条件。注意，取 $u^t=1$ 时，这个独立性条件已蕴含 $\mathbb{P}(e^s|\langle C\rangle)=\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle)$；根据引理 6.4，这等价于 $\mathrm{tp}(e/C)=\mathrm{tp}(a/C)$。）

由于 $\mathcal{U}$ 是 κ-饱和的，且上面讨论的条件涉及 $<\kappa$ 个公式，因此只需证明这组条件在 $\mathcal{U}$ 中有限可满足。特别地，我们可以假设 A 是有限的。

论证的其余部分基于引理 2.13。设 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 是一个概率空间$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，其概率代数 $(\mathcal{B},\widehat{\mu},d)$ 是 $\mathcal{U}$的一个包含ACD的小初等子结构。引理 2.13 给出了一个概率空间 $(X',\mathcal{B}',\mu)$ 以及一个映射 $B\mapsto B'$，它是

$\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{B}'$的保测布尔嵌入。证明引理 2.13 时所用的构造保证了 $(X', \mathcal{B}', \mu')$ 的概率代数是小的。利用$\mathcal{U}$ 是 κ-饱和且强 κ-齐次这一事实，以及 APA 具有 QE这一事实，我们可以将 $(\widehat{\mathcal{B}'}, \widehat{\mu'}, \widehat{d'})$ 实现为 $\mathcal{U}$的一个子结构，并确保由此诱导的嵌入 $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mu}, \widehat{d})$ 到 $(\mathcal{B}', \mu', d')$ 是一个包含。因此，我们在 $\mathcal{B}'$ 中得到一个 C上的 A的副本 E，使得$E \perp\!\!\!\perp_C D$，如所求。

局部特征：我们需要证明存在一个可数集 $C' \subseteq C$，使得 $a \perp\!\!\!\perp_{C'} C$。设 C' 是任意一个可数集，满足 $\mathbb{P}(a|\langle C\rangle)$ 是 $\langle C'\rangle$-可测的。那么 $\mathbb{P}(a|\langle C'\rangle) = \mathbb{P}(a|\langle C\rangle)$，由此可根据引理 2.9((i) $\Leftrightarrow$ (iii)) 得出 $a \perp\!\!\!\perp_{C'} C$。

类型的平稳性：我们需要证明，若 $a \perp\!\!\!\perp_E D$，则 $\mathrm{tp}(a/DE)$ 由 $\mathrm{tp}(a/E)$ 唯一确定。因此，假设 a、$b \in U^n$ 满足 $a \perp\!\!\!\perp_E D$、$b \perp\!\!\!\perp_E D$，且 $\mathrm{tp}(a/E) = \mathrm{tp}(b/E)$。于是，对每个 $s \in \{-1, +1\}^n$，根据定义 2.8，我们有 $a^s \perp\!\!\!\perp_E D$ 和 $b^s \perp\!\!\!\perp_E D$；根据引理 6.4，有 $\mathrm{tp}(a^s/E) = \mathrm{tp}(b^s/E)$。由此可知，对所有 s，

$$\begin{aligned} d(\mathrm{tp}(a^s/DE), \mathrm{tp}(b^s/DE)) &= \|\mathbb{P}(a^s|\langle DE\rangle) - \mathbb{P}(b^s|\langle DE\rangle)\|_1 \\ &= \|\mathbb{P}(a^s|\langle E\rangle) - \mathbb{P}(b^s|\langle E\rangle)\|_1 = d(\mathrm{tp}(a^s/E), \mathrm{tp}(b^s/E)) = 0 \end{aligned}$$

根据推论 6.12 和引理 2.9。因而，由引理 6.4，$\mathrm{tp}(a/DE) = \mathrm{tp}(b/DE)$。 □

8.2. 注记。由于 APA 是 ω-稳定的（见命题 6.15），根据 [7, 注记 14.8]，可知 APA 也是超稳定的。事实上，APA 具有一种性质，在连续逻辑的框架下，这种性质类似于经典意义上具有有限 SU-秩的超稳定性。为此，取 $\epsilon > 0$ 和小集 $D \subseteq C \subseteq U$。如果 $\mathrm{tp}(a/C)$ 在 D 上 ϵ-分叉，则称之为$d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(a'/C)) \geq \epsilon$，其中 $\mathrm{tp}(a'/C)$ 是 $\mathrm{tp}(a/D)$ 的（唯一）非分叉扩张。令 $SU_\epsilon(\mathrm{tp}(a/D))$ 表示关于这种 ϵ-分叉关系的 $\mathrm{tp}(a/D)$ 的基础秩。那么，对于任意 $\epsilon > 0$、$a \in U$ 和小集 $D \subseteq U$，利用事实 2.6 以及定理 6.11 和 8.1，可以证明 $SU_\epsilon(\mathrm{tp}(a/D))$ 至多为 $(1/\epsilon)^2$。

下一个结果表明，APA 具有内建的典范基。在深入细节之前，我们先说明典范基与条件概率之间联系的一些直观理解。考虑这样的情形：x 是单个变量，并且 $p(x) = \mathrm{tp}(a/C)$，其中 C 是 $\mathcal{U}$的一个小闭子代数。令$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为 p 中的一个莫利序列，并将$(\chi_{a_i})_i$ 视为 $L^2(U, \mu)$中的元素。令 H为对应于$L^2(C, \mu)$的希尔伯特子空间，即 $L^2(U, \mu)$中 C-可测元素的集合；令 P_H为从 $L^2(U, \mu)$到 $L^2(C, \mu)$的正交投影算子。那么，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们可以写成 $\chi_{a_i} = P_H(\chi_{a_i}) + v_i$，其中 $\{v_i\}_i$两两正交，且具有相同的范数。于是，平均序列 $\left(\sum_{i=1}^n {}^{P_H(a_i)}{}_n {}^{+v_i}\right)_n$在 $L^2(U, \mu)$中收敛于$P_H(a_i) = \mathbb{P}(a|C)$，因此 $\mathbb{P}(a|C) \in \mathrm{dcl}(\{a_i\}_i)$。利用

p的任意一个平行于某类型的莫利序列，也可以进行类似的计算，因此 $\mathbb{P}(a|C)$属于 p 的平行类的可定义闭包，从而 $\mathbb{P}(a|C) \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{meq}}(Cb(p))$。

另一方面，我们希望知道 $\mathbb{P}(a|C)$ 在 p 的类型可定义性层面提供了哪些信息。根据引理 6.4，要理解 $Cb(p)$，只需找出公式 $\psi_1(x,y) = \mu(x \cap y)$ 和 $\psi_2(x,y) = \mu(x^c \cap y) = \mu(y) \dot{-} \mu(x \cap y)$ 的p-定义。注意，对任意 $c \in C$，我们都有

$$\psi_1^p(x,c) = \mu(a \cap c) = \int_c \mathbb{P}(a|C)\, d\mu \text{ and}$$

$$\psi_2^p(x,c) = \mu(c) - \int_c \mathbb{P}(a|C)\, d\mu.$$

因此，从 $\mathbb{P}(a|C)$ 我们可以恢复公式 $\psi_1(x,y)$ 和 $\psi_2(x,y)$ 的 p-定义，从而恢复 $Cb(p)$。

（我们的方法利用了这样一个事实：对于 APA，我们已经证明，所有小的代数闭集上的类型都是平稳的；事实上，利用定理 8.1 和引理 6.4，可以推出所有集合上的类型都是平稳的。）

8.3. 定理（命题 4.5, [1]）。设 $C \subseteq U$ 为小的，且 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U^n$。此外，设 D 是 $\mathcal{U}$ 的最小 σ-子代数，使得对于所有 $s = (k_1, \ldots, k_n) \in \{-1, +1\}^n$，$\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle)$ 都是 D-可测的，因此 $D \subseteq \langle C\rangle$。那么 D 是 $\mathrm{tp}(a/C)$ 的一个典范基。

证明。关于此处用到的一些背景知识，尤其是我们对 σ-子代数 $D \subseteq \langle C\rangle$ of $\mathcal{U}$ 上 $\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle)$ 的 D-可测性所作的确切定义，请参见记号 2.4。

设 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U^n$，且 $p = \mathrm{tp}(a/C)$，并设 τ 是 $\mathcal{U}$ 的任意一个自同构。我们必须证明，$\tau(p) := \mathrm{tp}(\tau(a)/\tau(C))$ 与 p 平行（即它们有一个共同的非分叉扩张），当且仅当 τ 逐点固定 D。

首先假设 $\tau(p)$ 与 p 平行。因此，存在一个在 $\langle C \cup \tau(C)\rangle$ 上的类型 q，使得 q 扩张 p 和 $\tau(p)$，并且 q 不在 $\langle C\rangle$ 上分叉，而 q 不在 $\langle \tau(C)\rangle = \tau(\langle C\rangle)$ 上分叉。令 $b = (b_1, \ldots, b_n) \models q$。

由引理 6.4 和定理 8.1，以及 q 的上述性质，我们有 ve

$$\mathbb{P}(\tau(a^s)|\tau(\langle C\rangle)) = \mathbb{P}(b^s|\tau(\langle C\rangle)) = \mathbb{P}(b^s|\langle C \cup \tau(C)\rangle) = \mathbb{P}(b^s|\langle C\rangle) = \mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle)$$

对所有 $s \in \{-1, +1\}^n$ 均成立。如引理 5.8 之前所述，$\tau(\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle)) = \mathbb{P}(\tau(a^s)|\tau(\langle C\rangle))$，因此根据前面的计算，$\tau(\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle)) = \mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle)$。因此，对每个 $s \in \{-1, +1\}^n$，将引理 5.8 应用于 $\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle)$ 的代表元，我们得到：对每个 $u \in D$，$\tau(u) = u$，这正是所需证明的结论。

反过来，假设 τ 逐点固定 D。我们知道对所有$s \in \{-1, +1\}^n$，$\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle) = \mathbb{P}(a^s|D)$，因此由定理 8.1可得 $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_D C$。由 $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ 的不变性，我们还有

$\tau(a) \downarrow_D \tau(C)$。利用 $\downarrow$ 的扩张性质，我们得到 $p', q' \in S_n(C \cup \tau(C))$，使得 p' 是 $p = \mathrm{tp}(a/C)$ 的一个非分叉扩张，而 q' 是 $\tau(p) = \mathrm{tp}(\tau(a)/\tau(C))$ 的一个非分叉扩张。由 $\downarrow$ 的传递性可知，p' 和 q' 都在 D 上非分叉，因此由 $\downarrow$ 的平稳性以及事实 $\mathrm{tp}(\tau(a)/D) = \mathrm{tp}(a/D)$，我们得出 $p' = q'$。由此可知，p和 $\tau(p)$ 是平行的。□

在 [1], 中，关于典范基的观点与我们在此采用的观点相同。[1] 中命题 4.5 的证明表明，如果 E 是一个闭代数 $\subseteq U$，类型在其上不分叉，且它在满足此性质的集合中是极小的，那么 E 就与 D重合。关于典范基的另一种处理方法见 [2], ，Ben Yaacov 在其中指出，处理这些对象的更好方式是引入一个种类，用于表示与相应概率空间相关联的 $[0,1]$值随机变量。事实证明，可以用一致的方式将 $\mathrm{tp}(a/C)$ 的典范基与 $\mathbb{P}(a|\mathcal{C})$（一个 $[0,1]$值随机变量）对应起来，从而构造一致典范基（见 [2, 定义 1.1 和推论 2.3]）；这一过程需要 APA 的虚元（见 [2, 推论 2.5]）。

类型在本原种类中具有典范基这一事实，为我们提供了关于 APA 的虚元消去的一些信息。具体而言，APA 对度量虚元具有弱消去性质，这意味着对于虚种类中的每个元素 a，都存在本原种类的一个子集 A，使得 $\mathrm{acl}^{\mathrm{meq}}(a) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{meq}}(A)$。（参见 [4, 定义 1.5]。）

8.4。推论。理论 APA 对度量虚元具有弱消去性质 $s.$

证明。这由 APA 稳定且在本原种类中具有典范基这一事实（定理 8.3），以及 [4, 事实 1.6] 得出。□

现在我们转向另一种与典范基相关的性质，即强有限基（SFB）。令 $C \subseteq U$ 为一个小集，$a = (a_1, \ldots, a_n) \in U^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$，且 $p(x) = \mathrm{tp}(a/C)$。类型 $p(x)$ 是平稳的。对于一个 L^{pr}-公式 $\varphi(x; y)$，其中 $y = (y_1, \ldots, y_k)$，令 $d_x^p\varphi(y)$ 为 $p(x)$ 的一个 φ-定义；该定义存在，因为 APA 稳定。其主要性质是，对于每个 $c \in C^k$，公式 $\varphi(x; c)$ 的 $p(x)$-值等于 $\mathcal{U}^{\mathrm{meq}}$ 中 $d_x^p\varphi(c)$ 的值。$p(x)$ 的 φ-定义可由任意一个与 $p(x)$ 在 C 上平行的类型中的莫利序列 $(a^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 构造，方法是将其定义为 $\varphi(x; c)$ 沿该莫利序列的平均值：

$$d_x^p\varphi(c) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^k \varphi(a^i; c)}{k}$$

这个定义仅取决于 p 的平行类，而不取决于所考虑的具体莫利序列。因此，$d_x^p\varphi(y)$ 是一个 $(L^{pr})^{\mathrm{meq}}$-公式，其中出现了一个来自 $\mathrm{dcl}^{\mathrm{meq}}(C)$ 的参数。

现在考虑 p、$q \in S_n(C)$，它们分别具有 φ-定义 $d_x^p\varphi(y)$、$d_x^q\varphi(y)$。衡量 p、q 之间差异大小的另一种方法是考虑以下伪度量：

$$d_\varphi(p,q) := \sup_{c\in C^k} |d_x^p\varphi(c) - d_x^q\varphi(c)|$$

当 $\varphi(x;y)$ 遍历变量 $(x;y)$ 中所有的 L^{pr}-公式时，其中 x 固定，而 $y=(y_1,\dots,y_k)$ 是任意有限个参数变量组成的序列。这些伪度量在 $S_n(C)$ 上定义了一种一致结构，我们记为 $\mathcal{V}_{Cb}$。$\mathcal{V}_{Cb}$ 在 $S_n(C)$ 上诱导的拓扑记为 τ_{Cb}。[1]

有了刚才描述的拓扑，我们在 $S_n(C)$ 上有三种自然拓扑，分别是逻辑拓扑 $\tau_{\mathcal{L}}$、度量拓扑 τ_d，以及现在的典范基拓扑 τ_{Cb}。

8.5. 注记。评估 $d_\varphi(p,q)$ 的一种更直观的方法，是直接使用 p-定义和 q-定义所表达的内容。设 $a \models p$ 和 $b \models q$，则

$$d_\varphi(p,q) := \sup_{c\in C^k} |\varphi^{\mathcal{U}}(a;c) - \varphi^{\mathcal{U}}(b;c)|.$$

在 APA 的情形下，由于关于集合 C 的类型是平稳的，我们有 $\tau_d \subseteq \tau_{Cb} \subseteq \tau_{\mathcal{L}}$（见 [6, 引理 1.5]）。当 C 为有限集时，为 C 中的元素添加名称会保持关于 APA 的 $\aleph_0$-范畴性，因此三种拓扑相同。另一方面，当我们取足够大的参数集时，例如若 $\langle C\rangle$ 无原子，因而是 APA 的一个模型的论域，则 $\tau_d \subsetneq \tau_{\mathcal{L}}$（根据连续 Ryll-Nardzewski 定理）。自然会想进一步了解拓扑 τ_{Cb} 一般而言与另外两种拓扑的关系。

8.6. 定义（[6]）。稳定理论 T 是强有限基（SFB）的，当且仅当对每个 $\mathcal{M} \models T$ 和每个 n，拓扑 τ_d 与 τ_{Cb} 在 $S_n(M)$ 上一致。

关于 SFB 性质的应用可见于 [6]；该文将这一概念作为强版本的 1-基概念的连续类比引入。

在那篇论文中，利用优美对理论证明了 APA 具有 SFB。下面我们使用定理 6.11 和引理 6.14 给出一个直接证明。

8.7. 定义。设 $C \subseteq U$ 是一个小子代数。设 $n \geq 1$ 和 $x=(x_1,\dots,x_n)$ 是一个由互不相同的变量组成的元组，而 y 是一个未出现在 x 中的变量。设 $\varphi_s(x;y) := \mu(x^s \cap y)$ 对每个 $s \in \{-1,1\}^n$ 都成立。于是，我们在 $S_n(C)$ 上定义 d_{Cb} 为 $d_{Cb}(p,q) := \max_s d_{\varphi_s}(p,q)$。

显然，d_{Cb} 是一个伪度量；下文的命题 8.9 表明，$d_{Cb}(p,q) = 0$ 蕴含$d(p,q) = 0$，因此 d_{Cb} 实际上是一个度量。

[1]之所以要包含这些细节，是为了证明我们的拓扑 τ_{Cb} 与 [6]中引入的拓扑相同。关于 d_φ 的一个更初等的公式，见下文注释 8.5。

8.8. 引理。设 $C \subseteq U$ 是一个小子代数。那么 $\mathcal{V}_{Cb}$ 包含由 d_{Cb} 诱导的一致结构，且包含于由 d诱导的一致结构。

证明。由于 $\{\varphi_s\}_{s\in\{-1,+1\}^n}$ 是 L^{pr}-公式，集合 $\{(p,q) \in S_n(C)^2 \mid d_{Cb}(p,q) \leq \epsilon\}$ 对每个 $\epsilon > 0$都属于 $\mathcal{V}_{Cb}$。

另一方面，任何带有来自 C的参数的 L^{pr}-公式 $\varphi(x; y_1, \ldots, y_k)$，关于 d都是一致连续的（参见 [7, 定理 3.5]）。因此，所有公式 $\varphi(x; c_1, \ldots, c_k)$ 关于 d具有相同的一致连续模。由 [7, 命题 2.8]可知， d_φ 关于 d一致连续，且具有相同的模。□

8.9. 命题。理论 APA 是 SFB；也就是说，拓扑 τ_{Cb} 和 τ_d 在任意参数集 C 上都重合。事实上，度量 d_{Cb} 和 d 都在 $S_n(C)$上诱导出一致结构$\mathcal{V}_{Cb}$。

证明。设 $C \subseteq U$ 是小的。结合引理 8.8，只需证明 d 关于 d_{Cb} 在 $S_n(C)$ 上一致连续。固定 p、$q \in S_n(C)$，并令 a、$b \in U^n$ 满足 $a \models p$ 和 $b \models q$。

回顾定理 6.11 和引理 6.14，可知

$$\left(2^{-n+1}\right) \cdot d(p,q) \leq d(\Pi_n(p), \Pi_n(q)) = \max_s \|\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b^s|\langle C\rangle)\|_1.$$

固定 $s \in \{-1,+1\}^n$ 和 $\epsilon \in (0,1]$。令 k 满足 $k-1 \leq 1/\epsilon < k$，于是 $1/k < \epsilon$ 和 $k \leq \frac{1}{\epsilon} + 1$。

令 u_1，…，u_k 为 $\langle C\rangle$ 中的一个 1 的划分，该划分由对 a^s 和 k 应用引理 2.7 得到。这保证了对于任意包含 $\{u_1, \ldots, u_k\}$ 的 $\langle C\rangle$ 的闭子代数 E，都有$\|\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(a^s|E)\|_1 \leq 1/k$。

类似地，令 $v_1, \ldots, v_k$ 为 $\langle C\rangle$ 中 1 的划分，使得对于任何包含 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 的$\langle C\rangle$ 的闭子代数 E，我们都有 $\|\mathbb{P}(b^s|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b^s|E)\|_1 \leq 1/k$。

那么， $E := \{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k\}^\#$ 是 $\langle C\rangle$ 的有限子代数，至多有 k^2 个原子（即所有交集 $u_i \cap v_j$），并且满足 $\|\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(a^s|E)\|_1 \leq 1/k$ 和$\|\mathbb{P}(b^s|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(a^s|E)\|_1 \leq 1/k$。设 E 的原子为 $e_1, \ldots, e_N$，因此 $N \leq k^2$。

利用 $\|\cdot\|_1$ 的三角不等式，我们得到

$$\|\mathbb{P}(a^s|\langle C\rangle) - \mathbb{P}(b^s|\langle C\rangle)\|_1 \leq \|\mathbb{P}(a^s|E) - \mathbb{P}(b^s|E)\|_1 + 2\epsilon.$$

以下估计完成了证明：

$$\|\mathbb{P}(a^s|E) - \mathbb{P}(b^s|E)\|_1 = \big\| \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu(a^s \cap e_j)}{\mu(e_j)} \chi_{e_j} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu(b^s \cap e_j)}{\mu(e_j)} \chi_{e_j} \big\|_1$$

$$\stackrel{\star}{=} \sum_{j=1}^{N} \| \frac{\mu(a^s \cap e_j) - \mu(b^s \cap e_j)}{\mu(e_j)} \chi_{e_j} \|_1 = \sum_{j=1}^{N} |\mu(a^s \cap e_j) - \mu(b^s \cap e_j)|$$

$$= N \cdot d_{\varphi_s}(p,q) \leq (\tfrac{1}{\epsilon} + 1)^2 \cdot d_{\varphi_s}(p,q).$$

（等式（$\star$）成立，因为不同的 χ_{e_j} 具有不相交的支撑。）因此

$$(2^{-n+1}) \cdot d(p,q) \leq (\frac{1}{\epsilon} + 1)^2 \cdot d_{Cb}(p,q) + 2\epsilon,$$

因此，$d_{Cb}(p,q) < \epsilon^3$ 蕴含 $d(p,q) < (2^{n+2}) \cdot \epsilon$，这表明 d 相对于 d_{Cb}是一致连续的。

结合引理 8.8，这一论证完成了如下证明：d 和 d_{Cb} 在 $S_n(C)$ 上诱导相同的一致结构（即 $\mathcal{V}_{Cb}$）。由此可知，拓扑 τ_{Cb} 和τ_d 在任意参数集 C 上都一致。□

在本节余下部分，我们将把经典一阶理论模型的 Shelah 分类纲领与一些内容联系起来，并对如何将该纲领的某些方面推广到连续模型论提出一些推测性的建议。

Shelah 在 [24] 中描述了人们对于结构定理与非结构定理的期望：前者使人能够、后者则阻碍人们对完备理论 T的模型进行完全分类。这一区分是用如下不变量来表述的：这些不变量在同构意义下确定 T 的模型。最先出现的、复杂度最低层级的不变量（按深度排序，而深度一般可以是任意序数）定义如下。（当我们给一个模型 $\mathcal{M}$赋予一个不变量时，它应当只依赖于 $\mathcal{M}$的同构类型。） T 的模型的深度 0 不变量，是对每个 M 赋予一个基数 $\leq \lambda = \text{card}(M)$。 T 的模型的深度 1 不变量，是对每个 $\mathcal{M}$ 赋予一个基数集 $\mathcal{K}$ $\text{card}(M)$，以及一个由 $\leq 2^{\aleph_0}$ 个从集合 $\mathcal{K}$ 到基数集 $\leq \lambda$的函数组成的族 $\leq \lambda =$ 。（通常，对于某个无限 κ，我们忽略基数为 $< \kappa$的模型。）例如，如果 T 是不可数范畴的且其语言是可数的，那么 T 的模型具有深度 0 的不变量，即给不可数模型 $\mathcal{M}$ 赋予 $\text{card}(M)$。Shelah 的论题是：当且仅当存在一个序数 α 以及深度为 α 的不变量（或不变量集），它们在同构意义下确定 T 的每个模型时， T 才具有结构理论。

关于 APA 模型的 Maharam 不变量可以纳入这一框架，只是其中有一点变化；鉴于背景已经从经典模型论转变为其

连续对应物，也就不足为奇了。具体而言，来自区间 $[0,1]$ 的不变量也发挥了作用。考虑密度为 λ的 $\mathcal{M} \models APA$。不变量 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 是满足 $\sup \mathcal{K}^{\mathcal{M}} = \lambda$的非空可数基数集；附加不变量 $\Phi^{\mathcal{M}}$ 是从 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 到 $(0,1]$ 的函数，满足 $\sum\{\Phi(\kappa) \mid \kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}\} = 1$。这让人联想到 Shelah 的深度 1 不变量，而函数 $\Phi^{\mathcal{M}}$ 则是一个额外特征。

回顾，对于每个 $\mathcal{M}$ APA 模型，都存在一个族 $(b_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}})$，它以如下意义见证不变量 $(\mathcal{K}^{\mathcal{M}}, \Phi^{\mathcal{M}})$：每个 b_κ 都是密度为 κ 的极大齐性模型，并且对于每个 κ，$\mu(b_\kappa) = \Phi^{\mathcal{M}}(\kappa)$。（这意味着元素 b_κ 两两不交，且它们的并为 1。）（见第 7 节。）

请注意，与 Shelah 的框架完全相同，Maharam 不变量可用于计算 $I(\lambda, APA)$；这里将其定义为密度特征为 λ 的 APA 模型（按同构计）的数量。我们知道 $I(\aleph_0, APA) = 1$。若 $1 \leq n < \omega$ 且我们考虑密度为 $\aleph_n$ 的模型，则 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 有 2^n 种选择（它必须包含 $\aleph_n$），并且对于 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ 的每种选择，$\Phi^{\mathcal{M}}$ 有 $2^{\aleph_0}$ 种选择；但 $\mathcal{K}_{\mathcal{M}} = \{\aleph_n\}$ 的情形除外，此时需要满足 $\Phi(\aleph_n) = 1$。（后一种选择是密度为 $\aleph_n$ 的唯一齐性模型的不变量。）因此 $I(\aleph_n, APA) = 2^{\aleph_0}$。对于一个序数 $\gamma \geq \omega$，类似的计算表明 $I(\aleph_\gamma, APA) = (\mathrm{card}(\gamma))^{\aleph_0}$。

这一类比似乎表明，APA 很可能可以纳入某种 Shelah 式分类框架，用于研究具有可数语言的 ω-稳定连续理论。为了开始探索这种可能性，我们将单维和非多维等概念的可能定义引入连续逻辑，并探讨它们在 APA中适用的程度。这些定义大多直接取自 [11] 所述的经典一阶离散情形。

8.10. 记号。设 T 是一个稳定理论，$\mathcal{V} \models T$ 是一个 κ-通用域。设$B \subseteq A \subset V$是小的，且 $p \in S_n(B)$。当 p 平稳时，我们用 $p\restriction A$ 表示 $S_n(A)$中 p的唯一非分叉扩张。

8.11. 定义。设 T 是一个稳定理论，$\mathcal{V} \models T$ 是一个 κ-通用域。设$A \subset V$是小的，且 $p, q \in S(A) := \bigcup_n S_n(A)$。若对于所有 $b \models p$ 和所有 $c \models q$，都有$b \perp_A c$，则称 p, q几乎正交，并记作 $p \perp^a q$。给定平稳类型$p \in S(B)$ $q \in S(C)$，其中 $B, C \subseteq V$是小的，若对所有满足 $B \cup C \subseteq A \subseteq V$的小集合 A，都有$(p\restriction A) \perp^a (q\restriction A)$，则称 p和 q正交，并记作$p \perp q$。

如果对于小参数集 $\subseteq V$ 上的非代数平稳类型 p、q，$p \not\perp q$，则称理论 T 是单维的。

Whe永远不是一个平稳类型，我们记作 $p \perp \emptyset$，如果对于所有 $q \in S$，$p \perp q$（$\mathrm{acl}^{\mathrm{meq}}(\emptyset)$）.

对于超稳定的 T，如果每个非代数的平稳类型 p 都满足 $p \not\perp \emptyset$，我们就称 T 有界或非多维。

现在我们回到 APA。对于定义在 $\emptyset$ 上的类型，情况非常简单：

8.12. 命题。如果 $p \in S_m(\emptyset)$ 和 $q \in S_n(\emptyset)$ 是非代数的，那么 p 和 q 并非几乎正交。

证明。只需考虑 1 的划分的类型，因为任意 n-元组都与其对应的 1 的划分互相可定义。

考虑两个 1 的划分，记作 $a = (a_1, \ldots, a_m)$ 和 $b = (b_1, \ldots, b_n)$，它们属于 $\mathcal{U}$；并假设类型 $\mathrm{tp}(a)$、$\mathrm{tp}(b)$ 均非代数（此处指至少有一个 a_i 和至少有一个 b_j 不同于 0 和 1）。

令 $\mathcal{M}$ 为标准勒贝格空间 $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$ 的概率代数，其中可以实现 $\emptyset$上的所有n-类型。在 $\mathcal{M}$ 中用一列两两不交的区间 $(I_1, \ldots, I_m)$ 实现 $\mathrm{tp}(a)$，其中每个区间的形式为 $[r, s)$，其中 $r < s$ 属于 $[0,1]$，且对于每个 $k = 1, \ldots, m-1$，$\sup I_k = \min I_{k+1}$。于是区间 I_i 的并集为 $[0,1)$。令 $(J_1, \ldots, J_n)$ 为一列类似的区间，用以实现 $\mathrm{tp}(b)$。

选取最小的 i, j，使得 $0 < \mu(a_i) < 1$ 且 $0 < \mu(b_j) < 1$。根据 i, j 的选取，我们有 $I_i = [0, \mu(a_i))$ 和 $J_j = [0, \mu(b_j))$。

于是 $\mu(I_i \cap J_j) = \min(\mu(a_i)\ \mu(b_j)) > \mu(a_i)\mu(b_j) = \mu(I_i)\mu(J_j)$。因此，我们得到类型 $\mathrm{tp}(a)$、$\mathrm{tp}(b)$ 的非独立实现。这表明，在 $\emptyset$ 上的任意一对非代数类型都不是几乎正交的。□

一旦允许使用参数，元素便可能支撑在互不相交的集合上，从而获得更多自由：

8.13. 命题。对于任意 $e \in U$ 且满足 $e \notin \{0,1\}$ 的情形，都存在正交的非代数 $p, q \in S_1(\{e\})$。

证明。设 $e \in U$ 具有 $0 < \mu(e) < 1$，并令 $E = \{0, 1, e, e^c\}$。设 $a, b \in U$ 满足 $a \leq e$, $\mu(a) = \mu(e)/2$, $b \leq e^c$，且 $\mu(b) = \mu(e^c)/2$。考虑 $\mathrm{tp}(a/E)$ 和 $\mathrm{tp}(b/E)$ 的 $p =$ 与 $q =$。

断言 1. $p \perp^a q$。

我们在与标准勒贝格空间$([0,1], \mathcal{B}, d)$相关联的测度代数$(\mathcal{B}, \mu, d)$中工作。该空间是 $\aleph_0$-饱和的，并且可以假设$(\mathcal{B}, \mu, d)$是 $\mathcal{U}$的一个初等子结构。设 $r = \mu(e)$。由于元素的类型由其测度决定，我们取 e 为 $[0, r$（的等价类），并取 e^c 为 $[r, 1]$（的等价类）。设$a \leq e$ 具有 $\mu(a) = r/2$，则 $a \models p$；类似地，设 $b \leq e^c$ 具有 $\mu(b) = (1-r)/2$，则 $b \models q$。

注意，$\mathbb{P}(a|E) = \frac{1}{2}\chi_e$ 且 $\mathbb{P}(a^c|E) = \frac{1}{2}\chi_e + \chi_{e^c}$。由于 $b \leq e^c$，我们有 $b \cap a = \emptyset$, $b^c \cap a = e \cap a$ 以及 $\mathbb{P}(a|(Eb)^{\#}) = \frac{1}{2}\chi_{e^c}$。类似地，$\mathbb{P}(a^c|(Eb)^{\#}) = \frac{1}{2}\chi_e + \chi_{e^c}$。根据定理 8.1，我们有$a \downarrow_E b$，因此断言 1 得证。

断言 2. $p \perp q$。

现在设有一个小闭子代数 $F \subseteq U$，满足 $E \subseteq F$。选取 $a_F, b_F \in U$，使得 $a_F \models p\restriction F$, $b_F \models q\restriction F$；那么如前所述，$a_F \leq e$，并由定理 8.1 得到 $\mathbb{P}(a_F|F) = \frac{1}{2}\chi_e$,$\mathbb{P}(a_F^c|F) = \frac{1}{2}\chi_e + \chi_{e^c}$。同理，$b_F \leq e^c$，从而得到 $\mathbb{P}(a_F|(Fb_F)^\#) = \frac{1}{2}\chi_e = \mathbb{P}(a_F|F)$,$\mathbb{P}(a_F^c|(Fb_F)^\#) = \frac{1}{2}\chi_e + \chi_{e^c} = \mathbb{P}(a_F^c|F)$。利用定理 8.1，我们得出 $a_F \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_F b_F$，证毕。□

由前面的命题可得：

8.14. 推论. 理论 APA 不是单维的。

Maharam 定理（7.18）给出了一个可数基数集 $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$，有助于在同构意义下分类给定的 APA 模型。在经典一阶语境中，存在两个或更多不同的分类基数与正交类型的存在有关。在接下来的例子中，我们将在连续模型论的语境下说明这一现象，对于 APA。

8.15. 例. 设 $(\mathcal{B}, \mu, d) \models APA$，并假设 $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ 是密度不同的齐次元素。令 C 为由 $\{b_1, b_2\}$ 生成的代数。设 $a_1, a_2 \in \mathcal{B}$ 满足 $0 < a_i < b_i$，其中 $i = 1$，2。那么 $\mathrm{tp}(a_1/C) \perp \mathrm{tp}(a_2/C)$。

更一般地，假设 $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ 是互不相交的元素，且 C 是包含这些元素的代数。还假设给定了 $a_1, a_2 \in \mathcal{B}$，它们在 C 上是非代数的，且 $a_i < b_i$ 对于 $i = 1, 2$ 成立。那么 $\mathrm{tp}(a_1/C) \perp \mathrm{tp}(a_2/C)$。

证明。我们先看第一个陈述。由于 b_1, b_2 是密度不同的齐次元素，因此有 $b_1 \cap b_2 = \emptyset$，从而 $C = \{0, 1, b_1, b_2, (b_1 \cup b_2)^c\}$。我们先证明 $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C a_2$。

我们看到 $\mathbb{P}(a_1|C) = \mu(a_1)\,\mu(b_1)\,\chi_{b_1}$，且 $\mathbb{P}(a_1^c|C) = \mu(b_1) - \mu(a_1)\,\mu(b_1)\,\chi_{b_1} + \chi_{b_1^c}$。另一方面，我们有 $a_2 \leq b_2$，且 b_2 与 b_1 不相交，因此 $\mathbb{P}(a_1|(Ca_2)^\#) = \mu(a_1)\,\mu(b_1)\,\chi_{b_1} = \mathbb{P}(a_1|Ca_2)$，并且 $\mathbb{P}(a_1^c|(Cb_2)^\#) = \mu(b_1) - \mu(a_1)\,\mu(b_1)\,\chi_{b_1} + \chi_{b_1^c} = \mathbb{P}(a_1^c|C)$。因此我们有 $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C a_2$。

断言。$\mathrm{tp}(a_1/C) \perp \mathrm{tp}(a_2/C)$。

设 $F \subseteq U$ 是一个包含 $C \subseteq F$ 的小闭子代数，并令 $p\restriction F$ 和 $q\restriction F$ 分别是 $p = \mathrm{tp}(a_1/C)$ 和 $q = \mathrm{tp}(a_2/C)$ 到 F 的非分叉扩张。取 a_{1F}、$a_{2F} \in U$，使得 $a_{1F} \models p\restriction F$、$a_{2F} \models q\restriction F$。由定理 8.1，我们有 $\mathbb{P}(a_{1F}|F) = \mu(a_1)\,\mu(b_1)\,\chi_{b_1}$，且 $\mathbb{P}(a_{1F}^c|C) = \mu(b_1) - \mu(a_1)\,\mu(b_1)\,\chi_{b_1} + \chi_{b_1^c}$。由于 $a_{2F} \leq b_2$、b_1 和 b_2 两两不相交，我们得到 $\mathbb{P}(a_{1F}|(Fa_{2F})^\#) = \mu(a_1)\,\mu(b_1)\,\chi_{b_1} = \mathbb{P}(a_{1F}|F)$，以及 $\mathbb{P}(a_{1F}^c|(Fa_{2F})^\#) = \mu(b_1) - \mu(a_1)\,\mu(b_1)\,\chi_{b_1} + \chi_{b_1^c} = \mathbb{P}(a_{1F}^c|F)$。

利用定理 8.1，我们得出 $a_{1F} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_F a_{2F}$，这正是所需的结论。

更一般的陈述有类似的证明，细节留给读者。 □

我们需要下面这个简单的结果。

8.16. 观察。设 $0 < \delta < \frac{1}{2}$，且 $\delta \leq r \leq 1 - \delta$。则 $\min\{\frac{1}{2}, r\} - \frac{1}{2}r \geq \frac{\delta}{2}$。

证明。首先假设 $\min\{\frac{1}{2}, r\} = \frac{1}{2}$。那么 $\min\{\frac{1}{2}, r\} - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}(1-r) \geq \frac{\delta}{2}$。另一方面，若 $\min\{\frac{1}{2}, r\} = r$，则 $\min\{\frac{1}{2}, r\} - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r \geq \frac{\delta}{2}$。□

8.17. 命题。理论 APA 是非多维的。

证明。设 $a \in U$ 满足 $\mu(a) = 1/2$，且 $q = \mathrm{tp}(a/\emptyset)$。我们将证明，任意集合上的任何非代数类型都与 q非正交。设 $D \subset U$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个小闭子代数，并设$b = (b_1, \ldots, b_k)$是一个 1 的划分，使得 $p = \mathrm{tp}(b/D)$不是代数的。不失一般性，我们可以假设 $b_1 \notin D$，并且可以用 $p_1 = \mathrm{tp}(b_1/D)$代替 p来进行讨论。下面将证明 $p_1 \not\perp^a q \restriction D$。

由于 $b_1 \notin D$，存在一个正测度的 $u \in D$ 以及 $\delta > 0$，使得

$$(*) \qquad \delta \leq \mathbb{P}(b_1|D)(x) \leq 1 - \delta \text{ for } \mu\text{-almost every } x \in u.$$

我们可以假设 $\mathcal{U}$ 是与概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 相关联的概率代数。令 $([0,1], \mathcal{C}, \lambda)$ 为标准无原子勒贝格空间，并在空间 $(X \times [0,1], \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu \otimes \lambda)$ 的概率代数中进行讨论，将每个 $v \in D$ 与 $v' = v \times [0,1]$ 等同，这与引理 2.13 的证明中所做的一样。

令 $b_1' = \{(x,y) \in X \times [0,1] : 0 \leq y \leq \mathbb{P}(b_1|D)(x)\}$。与引理 2.13 的证明中一样，我们有 $b_1' \models p_1$。再令 $a' = X \times [0, 1/2] = \{(x,y) \in X \times [0,1] : 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$，这是 $q \restriction D$ 的一个实现，因为它的测度为 $1/2$，且与 U 的所有元素独立。

我们将使用定理 8.1 和定义 2.8 来证明 $b_1' \not\perp_D a'$。

注意，$\mathbb{P}(b_1'|D)\mathbb{P}(a'|D) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(b_1'|D)$。另一方面，

$$b_1' \cap a' = \{(x,y) \in X \times [0,1] : 0 \leq y \leq \min(\mathbb{P}(b_1|D)(x), \frac{1}{2})\}.$$

对于几乎所有的 $x \in u$，我们得到

$$\mathbb{P}(b_1' \cap a'|D)(x) - \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(b_1'|D)(x) \geq \delta/2$$

使用 (*) 和观察 8.16。

由于 u具有正测度，我们得到

$$\int \left|\mathbb{P}(b_1' \cap a'|D) - \mathbb{P}(a'|D)\mathbb{P}(b_1'|D)\right| d(\mu \otimes \lambda) \geq \mu(u)\delta/2 > 0$$

因此 $b_1' \not\perp_D a'$，如所期望的。 □

9. Ranks obtained from entropy

本节将讨论熵的定义和主要性质，沿用 [27,第 4] 章和 [10, 第 4], 章的思路，阐明熵与 APA模型论方面的联系。事实 9.4 和推论 9.5 的结果表明，熵提供了一种与模型论分叉密切相关的秩。

设（$X, \mathcal{B}, \mu$）是一个无原子概率空间。

9.1. 定义。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的有限子代数，其原子为 $\{A_1, \ldots, A_k\}$。设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个 σ-子代数。那么，给定 $\mathcal{C}$ 时 $\mathcal{A}$ 的熵为

$$H(\mathcal{A}/\mathcal{C}) = -\int \sum_{1\le i\le k} \mathbb{P}(A_i|\mathcal{C}) \ln(\mathbb{P}(A_i|\mathcal{C}))d\mu$$

我们用 $H(\mathcal{A})$ 表示 $H(\mathcal{A}/\{\emptyset, X\})$。如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 是 σ-代数，则用 $\mathcal{A}\vee\mathcal{C}$ 表示由 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 生成的 σ-代数。

9.2. 定义的。定义域为 $[a,b]$ 的连续实值函数 F 是凸的，当且 f

$$F(tx_1 + (1-t)x_2) \le tF(x_1) + (1-t)F(x_2)$$

对于 $[a,b]$ 中任意选取的 x_1、x_2 以及任意 $t\in[0,1]$，均成立。

注意，若 $F\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 连续且在 (a,b) 上二次可微，并且对所有 $x\in(a,b)$，$F''(x)>0$，则 F 是凸函数。

9.3. 事实（[10] 命题 4.4）。设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个 σ-子代数。设 $F\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 是一个连续凸函数，其中 $0\le a\le b<\infty$。那么

$$F(\mathbb{E}_{\mathcal{E}}(f)) \le \mathbb{E}_{\mathcal{E}}(F(f))$$

对每个满足 $f(X)\subseteq[a,b]$ 的 $f\in L_1(X,\mathcal{B},\mu)$，

9.4. 事实。设 $\mathcal{A},\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{B}$ 的有限子代数，且 $\mathcal{D},\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{B}$ 的 σ-子代数，并且满足$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}$。设 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的原子。那么：

(1) $H(\mathcal{A}\vee\mathcal{C}/\mathcal{E}) = H(\mathcal{A}/\mathcal{E}) + H(\mathcal{C}/\mathcal{A}\vee\mathcal{E})$。(2) $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C} \implies H(\mathcal{A}/\mathcal{E}) \le H(\mathcal{C}/\mathcal{E})$。(3) $H(\mathcal{A}/\mathcal{E}) \ge H(\mathcal{A}/\mathcal{D})$。(4) 若 τ 是 $(\mathcal{B},\mu.d)$ 的一个自同构，则 $H(\tau(\mathcal{A})/\tau(\mathcal{E})) = H(\mathcal{A}/\mathcal{E})$。(5) $H(\mathcal{A}/\mathcal{E}) - H(\mathcal{A}/\mathcal{D}) \ge \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\|\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_j})\|_2^2 - \|\mathbb{E}_{\mathcal{E}}(\chi_{a_j})\|_2^2\right) \ge 0$。此外，$H(\mathcal{A}/\mathcal{E}) = H(\mathcal{A}/\mathcal{D})$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{E}$ 上独立。

证明。前四个性质已在 [27, 第 4 节3] 中证明。注意，(5) 蕴含 (3)，而 (4) 根据定义显然成立。在整个论证中，令 a 为 U 的任意元素；我们将对遍历原子集合 $\{a_1,\ldots,a_n\}$ 的 a 应用这些结果。

事实 2.6 表明

$$\|\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_a)\|_2^2 - \|\mathbb{E}_{\mathcal{E}}(\chi_a)\|_2^2 = \|\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_a) - \mathbb{E}_{\mathcal{E}}(\chi_a)\|_2^2 \ge 0. \tag{A}$$

将此应用于 $a\in\{a_1,\ldots,a_n\}$，即可证明 (5) 中的第二个不等式。

接下来我们证明式（5）中的第一个不等式。

考虑限制在 $[0,1]$ 上的 $F(x) = 2x\ln(x) - x^2$。我们有 $F''(x) = 2/x - 2 > 0$，对于 $x \in (0,1)$。对这个 F 和 $f = \mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_a)$ 应用事实 9.3，得到

$$2\mathbb{E}_{\mathcal{E}}(\chi_a)\ln(\mathbb{E}_{\mathcal{E}}(\chi_a)) - \mathbb{E}_{\mathcal{E}}(\chi_a)^2 \leq 2\mathbb{E}_{\mathcal{E}}\big(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_a)\ln(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_a))\big) - \mathbb{E}_{\mathcal{E}}(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_a)^2).$$

对前述不等式中的各项进行积分并移项可得

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned}&\Big(-\int \mathbb{P}(a|\mathcal{E})\ln(\mathbb{P}(a|\mathcal{E}))d\mu\Big) - \Big(-\int \mathbb{P}(a|\mathcal{D})\ln(\mathbb{P}(a|\mathcal{D}))d\mu\Big)\\ &\qquad\geq \frac{1}{2}\big(\|\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_a)\|_2^2 - \|\mathbb{E}_{\mathcal{E}}(\chi_a)\|_2^2\big).\end{aligned}$$

对 $a \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ 求和不等式 (B) 中的各项，得到 (5) 中的第一个不等式。

最后，我们证明“此外”这一陈述。根据定理 8.1，我们知道 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{E}$ 上与 $\mathcal{D}$ 独立，当且仅当对所有 $j = 1\ldots、n$，有 $\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_j}) = \mathbb{E}_{\mathcal{E}}(\chi_{a_j})$；根据熵的定义，后者蕴含 $H(\mathcal{A}/\mathcal{E}) = H(\mathcal{A}/\mathcal{D})$。另一方面，由 (5) 中的不等式，我们看到 $H(\mathcal{A}/\mathcal{E}) = H(\mathcal{A}/\mathcal{D})$ 蕴含 $\|\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_j})\|_2^2 = \|\mathbb{E}_{\mathcal{E}}\chi_{a_j}\|_2^2$ 对所有 $j = 1、\ldots\ldots、n$ 成立；再根据将陈述 (A) 应用于 $a = a_1、\ldots\ldots、a_n$，这进一步蕴含对所有 $j = 1\ldots、n$ 有 $\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_j}) = \mathbb{E}_{\mathcal{E}}(\chi_{a_j})$。□

事实 9.4(5)揭示了分叉与熵变之间的联系。它还有一个定量方面，我们在此记录下来。回忆一下，对于来自 $\mathcal{B}$ 和 $D \subseteq C \subseteq \mathcal{B}$ 的 $a = (a_1, \ldots, a_n)$，我们称 $\mathrm{tp}(a/C)$ 在 D 上 ϵ-分叉，如果 $d(\mathrm{tp}(a/C), \mathrm{tp}(a/D)\restriction C) > \epsilon$，其中 $\mathrm{tp}(a/D)\restriction C$ 是 $\mathrm{tp}(a/D)$ 到 C 的唯一非分叉扩张。（见注 8.2。）

9.5. 推论。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的有限子代数，且 $\mathcal{E}$、$\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{B}$ 的 σ-子代数，并满足 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$。设 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 是对应于 $\mathcal{A}$ 中原子的事件，D 是与 $\mathcal{D}$ 相关联的事件集合，而 E 是与 $\mathcal{E}$ 相关联的事件集合。如果 $\mathrm{tp}((a_1, \ldots, a_n)/D)$ 在 E 上 ϵ-分叉，那么 $H(\mathcal{A}/\mathcal{E}) > H(\mathcal{A}/\mathcal{D}) + \epsilon^2/2$。

证明。假设 $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n/D)$ ϵ-在 E 上分叉。那么由定理 6.11 和 8.1，对于某些 $j = 1, \ldots, n$，我们有 $\|\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(a_j) - \mathbb{E}_{\mathcal{E}}(a_j)\|_1 > \epsilon$。由事实 2.6 可知，这意味着 $\|\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(a_j) - \mathbb{E}_{\mathcal{E}}(a_j)\|_2 > \epsilon$，因而 $\|\mathbb{E}_{\mathcal{D}}(a_j) - \mathbb{E}_{\mathcal{E}}(a_j)\|_2^2 > \epsilon^2$。再由事实 9.4(5) 中的不等式，得到 $H(\mathcal{A}/\mathcal{E}) > H(\mathcal{A}/\mathcal{D}) + \epsilon^2/2$。□

10. Some problems

在最后这一节中，我们简要指出几个看起来很有趣、值得研究的问题。

（P1）为 APA 的 $S_n(C)$ 中的类型之间的诱导距离给出一个显式公式。

$$d(p,q) = \inf\{\max_{1\leq i\leq n} d(a_i, b_i) : (a_1, \ldots, a_n) \models p, (b_1, \ldots, b_n) \models q\}.$$

(P2) 对 APA 的虚拟排序进行全面分析。

(P3) 完善模型论背景，以便将 Shelah 针对超稳定理论的分类理论推广到连续模型论。（第 8 节末尾讨论了将此推广应用于 APA 的一些初步步骤。）尤其要研究连续情形下诸如 DOP（维数序性质）和 $OTOP$（省略类型序性质）等性质的适当版本，并证明一个二分定理：按照 [24, 定理 2.3] 的思路，将 $I(\lambda, T)$ 的小上界与 T 超稳定且既不具有 DOP 也不具有 $OTOP$ 联系起来。

此外，对于连续理论，也可以证明不可数范畴性等价于同时满足 ω-稳定和单维，正如经典一阶理论中那样。

（P4）考虑自由群 F_k 在 APA 的唯一可分模型 $\mathcal{M}$ 上的两个存在闭作用，其中 $2 \leq k \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$。它们是否近似同构?

在作者与 Ibarluc´ıa 合著的论文 [9] 中， $\mathcal{M}$ 的自同构族所构成的存在闭作用类得到了公理化，并给出了这类作用的一些具体例子：它们近似同构，但并不同构。当 $k = 1$ 时，答案已知为肯定。（见 [7, 注记 18.9]）。

References

[1] Ita¨ı Ben Yaacov，《薛定谔的猫》，《以色列数学杂志》第153卷，2006年，157–191页。[2] ———, 关于 L_p 格及其他度量结构中的一致典范基，《逻辑与分析杂志》第4卷，2012年，第12篇，30页。[3] ———, 关于随机变量理论，《以色列数学杂志》第194卷，2013年，957–1012页。[4] ———, 关于一个无法在完备度量空间上传递作用的Roelcke预紧波兰群，《以色列数学杂志》第224卷，2018年，105–132页。[5] ———, 星型种类、Lelek扇及连续逻辑中非$\aleph_0$范畴理论的重构，即将发表于《模型论》，23页，arxiv:2203.02184v3。[6] Ita¨ı Ben Yaacov、ALEXANDER BERENSTEIN和C. WARD HENSON，几乎不可区分序列与规范基的收敛，《符号逻辑杂志》第79卷，2014年，460–484页。[7] Ita¨ı Ben Yaacov、ALEXANDER BERENSTEIN、C. WARD HENSON和Alexander Usvyatsov，度量结构的模型论，载于《模型论及其在代数与分析中的应用》第二卷，Z. Chatzidakis、D. Macpherson、A. Pillay和A. Wilkie编，伦敦数学学会讲义系列第350号，剑桥大学出版社，2008年，315–427页。[8] Ita¨ı Ben Yaacov和Alexander Usvyatsov，连续一阶逻辑与局部稳定性，《美国数学学会汇刊》第362卷，2010年，5213–5259页。[9]ALEXANDER BERENSTEIN、C. WARD HENSON和Tom´as Ibarluc´ıa，自由群的存在闭测度保持作用，已投稿，arXiv:2203.10178。[10] James R. Brown，《遍历理论与拓扑动力系统》，学术出版社，纽约，1976年。[11] Steven Buechler，《基本稳定性理论》，施普林格出版社，柏林、海德堡，1996年。[12] Gerald B. Folland，《实分析》，约翰·威立父子出版公司，1984年。

[13] Ilijas Farah、Bradd Hart、Martino Lupini、Leonel Robert、Aaron Tikuisis、Alessandro Vignati和Wilhelm Winter，《C*代数的模型论》，美国数学学会回忆录第1324号（2021年）。[14] D. H. Fremlin，测度代数，载于《布尔代数手册》第3卷，North-Holland，1989年，877–980页。[15] ———，《测度代数》，《测度论》第3卷，Torres Fremlin，2003–04年；信息参见 http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/mt.htm。[16] Paul A. Halmos，《测度论》，Van Nostrand，1950年。[17] Wilfrid Hodges，《模型论》，剑桥大学出版社，1993年。[18] Olav Kallenberg，《现代概率论基础》第3版，施普林格出版社（2021年）。[19] Tom Lindstrøm，非标准分析导论，载于《非标准分析及其应用》，Nigel Cutland编，伦敦数学学会学生教材第10号，剑桥大学出版社，1988年，1–105页。[20] Peter A. Loeb，从非标准测度空间到标准测度空间的转换及其在概率论中的应用，《美国数学学会汇刊》第211卷，1975年，113–122页。[21] Dorothy Maharam，关于齐次测度代数，《美国国家科学院院刊》第108卷，1942年，108–111页。[22] David Ross，Loeb测度与概率，载于《非标准分析：理论与实践》（L. O. Arkeryd、C. W. Henson和N. J. Cutland编），北约高级研究院系列C辑第493卷，Kluwer Academic Publishers，1997年，91–120页。[23] H. L. Royden，《实分析》第3版，Prentice Hall，1988年。[24] Saharon Shelah，具有结构定理的一阶结构的分类，《美国数学学会汇刊》第12卷，1985年，227–232页[25] Paul Shields，《伯努利移位理论》，芝加哥数学讲座，芝加哥大学出版社，1973年。[26] Shichang Song，概率论中的饱和结构，《韩国数学会杂志》第53卷，2016年，315–329页。[27] Peter Walters，《遍历理论导论》，施普林格出版社，1982年。

Alexander Berenstein; Universidad de los Andes,Cra 1 N° 18A-12, Edificio H, Bogotá, ColombiaURL: http://www.matematicas.uniandes.edu.co/~aberenst

C. Ward Henson; University of Illinois, Urbana-Champaign;Urbana, Illinois 61801, USAURL: https://faculty.math.illinois.edu/~henson