arXiv:2302.01521v1 [math.GR] 3 Feb 2023

具有散在单群底的本原几乎单 IBIS 群

梅丽莎·李

Abstract. 置换群 $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ 的不可约基 B 是 Ω 的一个有序子集，其稳定子是平凡的，并且没有基点被其前驱点的稳定子固定。所有不可约基大小都相同的群称为不变大小不可约基（IBIS）群，由 Cameron 和 Fon-Der-Flaass 首次提出。本文通过对底群为散在单群的几乎单群进行分类，为本原 IBIS 群的分类作出贡献。

设 $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ 是一个置换群。G 的基是 Ω 的一个子集 B，其逐点稳定子是平凡的。G 的最小基的基数称为基大小，记作 $b(G)$。自 Sims 于 20世纪70年代提出基的概念以来，基因其在计算群论中的应用而一直备受研究关注。

$B = (b_1, b_2, \ldots, b_t)$ 是 G 的一个有序基，若对于每个满足 $1 \leq i \leq t-1$ 的 i，都存在 G 中的一个元素固定 $b_1, \ldots b_i$，但不固定 b_{i+1}，则称其为不可约基。若 G 的所有不可约基大小相同，则称 G 为不变大小不可约基（IBIS）群。注意，所有这类不可约基的大小都必须等于 G 的基大小。已知的 IBIS 群例子包括自然作用于 n 个点上的 A_n 和 S_n，以及作用于有限维向量空间 V 上的一般线性群 $G = \mathrm{GL}(V)$。对于后者，任意生成集都是 G 的一个基，而一个生成集是不可约基当且仅当它是一个基。

重新排列后的不可约基一般不再是不可约基。事实上，Cameron 和 Fon-Der-Flaass[4], 证明，G 是 IBIS 群，当且仅当其任意一个不可约基的重新排列仍是不可约基，并且 G 的不可约基集合构成某个拟阵的基集合。

Lucchini 等人 [9] 最近在 IBIS 群研究方面取得了重大突破，他们证明本原 IBIS 群只能属于 O'Nan-Scott 类型中的三种，即几乎单型、仿射型或对角型。他们进一步证明，对角型的本原 IBIS 群都属于无限族 $\{\mathrm{PSL}_2(2^f) \times \mathrm{PSL}_2(2^f) \mid f \geq 2\}$，其中每个群的次数为 $|\mathrm{PSL}_2(2^f)| = 2^f(2^{2f}-1)$。Lee 和 Spiga 对具有交错底群 [8] 的本原几乎单群 IBIS 群进行了分类。具体而言，他们证明，除前述 S_n 和 A_n 的自然作用外，还有 14 个例子，且每种情况下，底群 A_n 都有 $n \leq 8$。

在本文中，我们继续对本原几乎单群 IBIS 群进行分类，具体分类对象是那些具有散在底群的群。

定理 1. 具有散在单群底的几乎单本原群 G 是 IBIS 群，当且仅当 $(G, H, b(G))$ 属于以下之一：$(\mathrm{M}_{11}, A_6.2, 4)$、$(\mathrm{M}_{12}, \mathrm{M}_{11}, 5)$、$(\mathrm{M}_{22}, \mathrm{L}_3(4), 5)$、$(\mathrm{M}_{23}, \mathrm{M}_{22}, 6)$ 或 $(\mathrm{M}_{24}, \mathrm{M}_{23}, 7)$。

证明定理 1 所用的方法很大程度上依赖于在 GAP 和 Magma [1, 6] 中进行计算。本文结果的复现代码可在作者的网站 [7] 上获取。

1. 定理 1 的证明

以下两个结果表明，为证明定理 1，我们只需考虑基大小至少为三的群，并给出了需要考察的具体情形列表。

引理 1.1（[9, 引理 2.3]）。不存在具有非阿贝尔底且 $b(G) = 2$ 的 IBIS 群 G。

命题 1.2（[3, 定理 1]）。具有散在单群底且 $b(G) \geq 3$ 的几乎单原始群已为人所知。

Date: 2023年2月6日。

设 G 是一个具有散在单群底的近单群，它在 G 的极大子群 H 的陪集上作本原作用。一般而言，我们认为 IBIS 群并不常见，因此我们用来证明定理 1 的大多数技巧，都是为了证明存在一个大小大于 $b(G)$ 的 G 的不可约基，从而 G 不是 IBIS 群。这可以通过多种方式实现，其中一些方式将在下文介绍。这些技巧的命名将使我们之后的表述更为简洁。

(T1) 我们将 G 视为作用在 H的陪集上的置换群，并通过随机搜索构造一个大小为 $b(G)$的部分不可约基。(T2) 我们观察到， G 中陪集 Hx 的稳定子为 H^x。因此，我们通过随机搜索找到 H的一组共轭元$\{H^{x_1}, H^{x_2}, \dots H^{x_{b(G)}}\}$；记 $H_i = \cap_{j=1}^{i} H^{x_i}$，则有递降子群链 $G > H_1 > H_2 > \cdots > H_{b(G)} \neq 1$。这意味着$\{Hx_1, Hx_2, \dots Hx_{b(G)}\}$ 是 G的部分不可约基。(T3) 我们选取一个子群 $K < G$，并证明 K 在作用于 H的陪集时，其不可约基的大小大于$b(G)$。

现在我们开始证明定理 1。

1.1. $G_0 \in \{\mathrm{M_{11}}, \mathrm{M_{12}}, \mathrm{M_{22}}, \mathrm{M_{23}}, \mathrm{M_{24}}, \mathrm{J_1}, \mathrm{J_2}, \mathrm{J_3}, \mathrm{HS}, \mathrm{McL}\}$. 在所有这些情形中，我们都能构造 G 作用于 Magma 中 H 的陪集上的置换表示：首先将 G 构造成矩阵群，找出其极大子群，再使用 LMGCosetImage 函数。我们通过应用 (T1) 证明大多数组不是 IBIS。剩余情形是 $(G, H, b(G))$ 等于 ($\mathrm{M_{11}}, A_6.2, 4$)、($\mathrm{M_{12}}, \mathrm{M_{11}}, 5$)、($\mathrm{M_{22}}, \mathrm{L_3}(4), 5$)、($\mathrm{M_{23}}, \mathrm{M_{22}}, 6$) 或 ($\mathrm{M_{24}}, \mathrm{M_{23}}, 7$)；我们通过枚举 $b(G)$-元组上的一组轨道代表元，并证明每个代表元要么是不可约基，要么不是基，来证明这些情形属于 IBIS。

1.2. $G_0 \in \{\mathrm{Co_3}, \mathrm{Co_2}, \mathrm{He}、\mathrm{Suz}、\mathrm{Fi_{22}}, \mathrm{Fi_{23}}, \mathrm{Fi'_{24}}、\mathrm{Ru}、\mathrm{O'N}、\mathrm{Co_1}, \mathrm{HN}\}$。在这里，至少有一个作用于 H 的陪集上的 G 置换表示不容易获得。不过，在大多数情况下，我们能够使用 GAP [2, 6] 的 AtlasRep 软件包中的 AtlasSubgroup 命令构造 H 。然后，我们在每种情况下应用 (T2)，并推得 G 不是 IBIS。

1.3. $G_0 = \mathrm{Ly}$。根据命题 1.2，我们有 $H \in \{G_2(5)\ 3.\mathrm{McL} : 2\}$，其中 $b(G) = 3$ 在每种情况下均成立。

令 $H = G_2(5)$。我们通过考察一个阶为 5 的元素$g_5 \in H$ 的中心化子 $K = C_G(g_5)$，来应用 (T3)。我们发现 H 有两个阶为 5 的元素共轭类；根据中心化子的阶可推得，这两个类都包含在 G 中标记为 5A 的类里。现在， $K = C_G(g_5)$ 是 G [5, p. 174] 中的极大子群；如有必要，将 g_5 替换为其共轭元后，便可在 Online Atlas [13] 中找到 K 的直线程序构造。无妨设 g_5 属于 H 中的 5A 类，因此 $|C_H(g_5)| = 2^3.3.5^6$，并使用 Subgroups 命令在Magma中寻找 $C_H(g_5) < K$ 的候选对象。为了构造长度为 3 的 K 的部分不可约基，我们首先固定平凡陪集 H ，于是现在必须为 $K_2 = C_H(g_5)$ 找到一个大小为 2 的部分不可约基。接着，我们在 K 中随机搜索两个元素 x_1、x_2 ，使其满足以下条件：

(1) $x_1 x_2^{-1} \notin H$，使得 Hx_1 和 Hx_2 互不相同。(2) $K_2 > K_2 \cap K_2^{x_1} > 1$，以及 (3) $K_2 \cap K_2^{x_1} > K_2 \cap K_2^{x_1} \cap K_2^{x_2} > 1$ ，使得根据 (T2)， $\{H, Hx_1, Hx_2\}$ 构成 K 的部分不可约基。

以这种方式选择 K、 K_2 ，使我们能够在 K 中而非在 G中验证这些条件，从而大幅减少所需的计算资源。我们通过随机搜索找到合适的 x_1、 x_2 ，因此证明了 G 不是 IBIS。

若改为 $H = 3.\mathrm{McL} : 2$，我们重复相同的过程，转而考虑 H 中 2A 类对合的中心化子。由此可推得 G 不是 IBIS。

1.4. $G = \mathrm{J}_4$。根据命题 1.2，我们只需考虑 G 在其某个极大子群的右陪集上的作用： $H \in \{2^{11}:\mathrm{M}_{24}, 2^{1+12}:3.\mathrm{M}_{22}.2, 2_{10}:\mathrm{L}_5(2)\}$，其中 $b(G) = 3$ 在每种情况下都成立。

假设 $H = 2^{11}:\mathrm{M}_{24}$。现在， H 是 G 在 $\mathbb{F}_2$ [5, p190]上的不可约 112 维表示中某个向量的稳定子。Online Atlas [13]中给出了该表示下 G 和 H 的生成元，以及一个由 H固定的向量 v 。于是， G 对 H 的陪集的作用与 G 对 v^G的作用置换同构。我们考虑 H 的子群 $K \cong \mathrm{M}_{24}$ ，并发现 v 与通过随机搜索在 v^G 中找到的另外两个向量，在 K中的稳定子阶链为$[|M_{24}|, 16, 2]$ 。应用 (T3) 即得结论。

现在假设 $H = 2^{1+12}:3.\mathrm{M}_{22}.2$。我们采用技巧 (T3)，使用一个 5 阶元素$g_5 \in H$ 的中心化子。 G 中只有一个 5 阶元素共轭类，因此有 $|C_G(g_5)| = 2^6.3.5.7$，而 $|C_H(g_5)| = 2^6.3.5$。两个元素 $x_1, x_2 \in C_G(g_5)$ 在且仅在 $x_1x_2^{-1} \in C_H(g_5)$ 时才是 G/H中同一陪集的代表元。我们通过随机搜索找到合适的 x_1, x_2，从而根据 (T2) 可推出 H, Hx_1 和 Hx_2 构成 $C_G(g_5)$的部分不可约基，因此 G 不是 IBIS。

最后，假设 $H = 2^{10}:\mathrm{L}_5(2)$。我们对 H的一个子群$K \cong L_5(2)$应用 (T3)。Online Atlas 中提供了构造此类子群 K 的方法，我们发现 K 固定一个非零向量 $w \in V$。与之前一样，我们考察 G 在 w^G上的作用。通过随机搜索，我们找到h_1、 $h_2 \in G$ ，使得$H = G_w > G_{w,\ w^{h_1}} > G_{w,\ w^{h_1},\ w^{h_2}} > 1$，因此 G 不是 IBIS。

1.5. $G = \mathrm{Th}$。根据引理 1.1 和命题 1.2，如果 G 是 IBIS，那么 $H \in \{{}^3\mathrm{D}_4(2):3, 2_5、\mathrm{L}_5(2)\}$以及 $b(G) = 3$。在每种情况下，Online Atlas 中都提供了关于 G 的标准生成元表示 H 生成元的直线程序。我们以与第 1.3 节相同的方式应用 (T3)。更具体地说，如果 $H = {}^3\mathrm{D}_4(2):3$，那么我们通过考察 H中标记为 2A 的类里的一个对合 g_2 的中心化子来应用 (T3)。如果 $H = 2^5.\mathrm{L}_5(2)$，我们同样考察 H中一个 2A 对合的中心化子。

1.6. $G = \mathrm{M}$。根据命题 1.2，接下来只需检验 G 在 $H = 2.\mathrm{B}$ 的陪集上的作用，其中 $b(G) = 3$。首先固定单位陪集，其稳定子为 H。若 G 是 IBIS，则 H 在 G/H 上的每个不可约基大小都为 2。设 g_{17} 是一个 17 阶元素。我们考察 $K = C_H(g_{17})$，以便使用 (T3)。我们可以在 GAP 中构造 $C = |C_G(g_{17})|$ ，将其作为其极大上超群 $(L_3(2) \times S_4(2):2).2 < G$ 的子群，构造所依据的是 Online Atlas [5, p.234]。从 H [5, p.210–219] 的特征标表可知 $|K| = 136$。现在， C 的 136 阶子群只有一个共轭类，因此不失一般性，我们可以固定其中一个，并令其为 K。现在， C 可被 3 和 7 整除，而 $|K|$ 不可被 3 和 7 整除，因此取 $g_3, g_7 \in C_G(g_{17})$ 分别为 3 阶和 7 阶元素。显然，$H \neq Hg_3, Hg_7$，我们还必须验证 $g_3g_7^{-1} \notin H$。我们注意到， $k \in K$ 固定 Hg_3 当且仅当 $k^{g_3} \in H$。由于 $k^{g_3} \in C$，必有 $k^{g_3} \in H \cap C = K$，对 Hg_7 也可作类似论证。因此，我们在 GAP 中直接检查构造的 C 和 K ，确认存在 g_3, g_7 ，使得：(1) $g_3g_7^{-1} \notin H$ ，从而 Hg_3, Hg_7 互不相同；(2) $K_1 = K^{g_3} \cap K < K$ ；(3) $1 < K^{g_7} \cap K_1 < K_1$。综上可知， K 在 G/H上有一个大小为 2 的部分不可约基，因此 H也如此。因此， G 不是 IBIS。

1.7. $G = \mathrm{B}$. 根据命题 1.2，我们需要考虑

$$H \in \{2.^2.E_6(2).2, 2^{1+22}.\mathrm{Co}_2, \mathrm{Fi}_{23}, 2^{9+16}.\mathrm{PS}\mathrm{p}_8(2), \mathrm{Th}, (2^2 \times \mathrm{F}_4(2)):2, 2^{2+10+20}.(\mathrm{M}_{22}:2 \times \mathrm{S}_3)\}$$

G 在 H 的陪集上的作用在所有情形下的基大小均为 3，唯一例外是 $H = 2.^2.E_6(2).2$，此时 $b(G) = 4$。

首先考虑 $H = 2.^2.E_6(2).2$。我们可以将 H 构造为共轭类$2A$ 中元素 t_0 的中心化子，该共轭类属于 G。 H 在 2A 对合 $t \in B$ 上的轨道长度见 [5, 第 216] 页，我们在表 1 中重列如下。

设 t_i 为表 1 中标记为 i 的轨道的轨道代表元。我们断言， $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ 构成 G 的部分不可约基，这意味着 G 不是 IBIS。根据定义，显然 $G_{t_0} = H$ ，且$|G_{t_0,\ t_1}| = |C_H(t_1)| = 2^{38}.3^6.5.7.11$，由表 1 可知。适当选取 t_2 和 t_3 后，我们发现$|G_{t_0,\ t_1,\ t_2}|$ 的西罗 2-子群阶为 2^{26}, ，而$|G_{t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3}|$ 的西罗 2-子群阶为 2^{18}。因此，这些群彼此不同且非平凡，故断言得证。

i	t_0t_i的类	$\lvert C_H(t_i)\rvert$
0	1A	$2^{38}.3^9.5^2.7^2.11.13.17.19$
1	2B	$2^{38}.3^6.5.7.11$
2	2C	$2^{26}.3^6.5^2.7^2.13.17$
3	3A	$2^{18}.3^9.5^2.7.11.13$
4	4B	$2^{30}.3^6.5.7$

TABLE 1. B的对合上的 H 轨道长度

现在设 $H = 2^{1+22}.\mathrm{Co}_2$。与上一个情形类似， H 可以构造为 B 中 2B 类对合 t_0 的中心化子，因此我们可以转而考虑 G 在其 2B 类上的作用。M¨uller [10, 表 1] 计算了 H 在 2B 类对合上的轨道长度。最小的非平凡轨道长度为 93150，因此，该轨道中元素 t_1 在 H 中的稳定子 K 的大小大于 H 在 G 中的陪集数。因此，不可能构造一个以 $\{t_0, t_1\}$ 开头、大小为 3 的不可约基，故 G 不是 IBIS。

现在令 $H =\mathrm{Fi}_{23}$。M¨uller 等人计算了 H在 H 的陪集上的轨道，见 [11, 表 2]。 H 的 Sylow 7-子群阶为 7，非平凡轨道 2 和 3 中元素的稳定子 $K_2 \cong O_8^+(3) : 2_2$ 及 $K_3 \cong \mathrm{PSp}_8(2)$的阶也都是 7（分别见 [11, 表 2] ）。因此，选取这些轨道的适当代表元 Hx_2、 Hx_3，可得到一个大小为 3 的无冗余部分基 $\{H, Hx_2, Hx_3\}$，且它被一个 7 阶元素稳定。由于稳定子非平凡， G 不是 IBIS。

接下来假设 $H = 2^{2+10+20}(M_{22} : 2 \times S_3)$。Neunh¨offer 等人 [12,在表 1]中计算了H作用于 H的陪集上的 B-子轨道的一个子集。虽然现有信息只有轨道长度以及 H 中相应稳定子的阶，但这足以证明 G 不是 IBIS。在 H中，阶为 5 的元素只有一个共轭类；而 H 作用于陪集上时，有两个不同的轨道，其稳定子阶分别为 240 和 120。因此，适当选取这些轨道的代表元，就能构造出一个大小为 3、由 G 中一个阶为 5 的元素稳定的部分不可约基。因此， G 不是 IBIS。

对于其余的极大子群 $H_4 = 2^{9+16}.\mathrm{PSp}_8(2)$、 $H_5 = \mathrm{Th}$ 和 $H_6 = (2^2 \times F_4(2)) : 2$，我们采用不同的方法。在下面的构造中，我们用 H 指代群 H_4、 H_5 或 H_6中的任意一个。设 $g_6 \in H$ 的阶为 6，且设 $g_2 = g_6^3$。我们将构造不同的陪集 Hx和 Hy，使得 Hx 被 g_2 和 g_6固定，而 Hy 被 g_2固定，但不被 g_6 固定。这将表明，$\{H, Hx, Hy\}$ 在 H上的陪集作用中构成 G的部分不可约基，因此 G不是 IBIS。

现在，当且仅当 $g^{x^{-1}} = xgx^{-1} \in H$ 时， g 固定 Hx， Hy 也同理。因此，只需找出 x 和 y，使得 $g_6^{x^{-1}}$、 $g_2^{x^{-1}}$、 $g_2^{y^{-1}} \in H$，而 $g_6^{y^{-1}} \notin H$。注意，令 x、 $y \in HC_G(g_2)$，可以稍微简化这个问题。接下来必须验证 $g_6^{x^{-1}} \in H$ $g_6^{y^{-1}} \notin H$，并且 x、 y、 $xy^{-1} \notin H$，以确保 H、 Hx 和 Hy 互不相同。由于 $HC_G(g_6) \subseteq HC_G(g_2)$，找到满足 $g_6^{x^{-1}} \in H$ 的 $x \in C_G(g_2)$ 的概率正比于

$$\frac{|C_G(g_6)|}{|C_G(g_2)|} = \frac{|C_G(g_6)||C_H(g_2)|}{|C_G(g_2)||C_H(g_6)|}.$$

我们在选择 g_6 的共轭类时，尝试使这个量最大；利用 GAP 中的特征标表库（包括其中给出的共轭类标记），我们分别从 H_4、 H_5 和 H_6 中的共轭类 $6C$、 $6B$ 和 $6Q$ 选取 g_6。

现在我们转向对 MAGMA 的计算搜索。用于复现我们所述过程的相关代码可在作者的网站上获取。我们能够将 G 构造为定义在 $\mathbb{F}_2$ 上的 4370 维表示中的矩阵群，并利用标准生成元上的直线程序构造每个极大子群 H；这些程序可在 [13] 中找到。我们观察到，每个极大子群在底层向量空间 V 上的作用都是可约的，因此计算每个极大子群所保持的子模。在每种情况下，我们都能找到一个相对较小的子模，使得 H 在其上的作用是忠实的。我们投影到这个子模上，从而能够找到共轭

类。利用 LMGClasses 函数求得 H 的共轭类后，我们找到一个合适的元素 g_6，再求出它在 H 的 4370 维表示中的原像，并定义 $g_2 = g_6^3$。我们使用 CentraliserOfInvolution 函数计算 $C_G(g_2)$，并通过随机选取搜索满足上述条件的 x 和 y。由于判定 G 中的随机元素是否属于 H 耗时过长，我们改为等价地检查该元素是否保持由 H 固定的子模。在每种情况下，我们都能找到合适的 x 和 y，因此推断 G 在其对 H_4、H_5 和 H_6 的陪集作用中不是 IBIS。

定理 1 的证明至此完成。

Acknowledgements

作者谨此感谢 Eamonn O'Brien 提供有益的讨论，并协助完成证明巨婴怪兽群所需的大量计算。作者还感谢澳大利亚研究理事会探索早期职业研究人员奖（项目编号 DE230100579）的支持。

References

[1] W. Bosma、J. Cannon 和 C. Playoust。《Magma 代数系统：I. 用户语言》。 *J. Symbolic Comput.*，24 3 4 235 265，1997 1993（-）：–。计算代数与数论（伦敦，）。[2] T. Breuer、J. N. Bray、S. Nickerson、R. A. Parker 和 R. A. Wilson。 *AtlasRep — A GAP 4 Package (Version 2.1.0)*。[3] T. C. Burness、E. A. O'Brien 和 R. A. Wilson。散在单群的基大小。 *Israel J. Math.*，177 333，2010 307：–。[4] P. J. Cameron 和 D. G. Fon-Der-Flaass。置换群与拟阵的基。*European Journal of Combinatorics* 16 6 537 544, 1995 ，

（）：–。[5] J. H. Conway、R. T. Curtis、S. P. Norton、R. A. Parker 和 R. A. Wilson。 *Atlas of finite groups*。牛津大学出版社，Eynsham，1985。[6] GAP 团队。 *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.9.3*，2018。[7] M. Lee。《具有散在单群底的本原几乎单 IBIS 群》的代码补充材料。https://melissamaths.wordpress.com/ibis_sporadic/。[8] M. Lee 和 P. Spiga。具有交错底群的有限本原 IBIS 群的分类，2022。arXiv:2206.01456。[9] A. Lucchini、M. Morigi 和 M. Moscatiello。本原置换 IBIS 群。 *J. Combin. Theory Ser. A*，184 105516，2021：。[10] J. M

¨ 2 *LMS J. Comput. Math.* 11 15 27, 2008

uller。散在单群巨婴怪兽群在其共轭类 B 上的作用。，：–。[11] J. M¨uller、M. Neunh¨offer 和 R. A. Wilson。大轨道的枚举及其应用： B 作用于 Fi_{23}的陪集。 *J. Algebra*，314(1):75–96，2007。[12] M. Neunh¨offer、F. Noeske、E. A. O'Brien 和 R. A. Wilson。轨道不变量及其在巨婴怪兽群中的应用。 *J. Algebra*，341:297–305，2011。[13] R. A. Wilson 等。《有限群表示 ATLAS》——第 3 版。http://atlas.math.rwth-aachen.de/ Atlas/v3/。

School of Mathematics, Monash University, Clayton 3800, Australia*Email address*: melissa.lee@monash.edu