arXiv:2302.01552v1 [math.OA] 3 Feb 2023

自相似量子群

NATHAN BROWNLOWE 和 DAVID ROBERTSON

Abstract. 我们引入紧量子群自相似性的概念。对于有限集 X，我们引入一个 C^*-代数 $\mathbb{A}_X$，它是无限齐次根树 X^* 的量子自同构群。自相似量子群由此定义为 $\mathbb{A}_X$ 的某些量子子群。我们主要研究的一类例子称为有限约束自相似量子群，并找到了一类可描述为由量子置换群的子群构成的量子 wreath 积的例子。

1. Introduction

自相似群是一类忠实作用于无限齐次有根树 X^* 上的群。具体而言，给定一个自同构 $g \in$Aut(X^*) 和一个顶点 $w \in X^*$，通过将 wX^* 与 $g(w)X^*$ 认同，我们得到一个自同构 $g|_w \in$ Aut(X^*)，它由单位元唯一确定

$$g \cdot (wv) = (g \cdot w)g|_w \cdot v \quad \text{for all } v \in X^*.$$

自同构 $g|_w$ 称为限制，由 g 经 w作用得到，而子群 $G \leq \mathrm{Aut}(X^*)$ 若具有自相似性，则称为自相似群；若它对限制运算封闭，即为自相似群。自相似群是一类重要的群，在几何群论中发挥着重要作用，也是展现有趣现象的群的重要来源。最值得注意的是，格里戈尔丘克群 [5] 是一个自相似群，它是一个无限的有限生成周期群，并提供了第一个具有中间增长的群的例子，也是已知的第一个非初等 amenable 的 amenable 群。

当群自同构群 Aut(X^*) 配备置换拓扑时，闭自相似群是紧致、全不连通群的例子，因此也是原有限群。一个值得关注的特殊类别是有限型自相似群；它们是 X^* 的自同构群的子群，并且在每个顶点的局部邻域内，其作用都像给定有限群的元素。格里戈尔丘克在[6], 中引入了这一概念，并指出格里戈尔丘克群的闭包是一个有限型自相似群。请注意，这些群在[9], 中称为有限约束自相似群，我们将沿用这一术语。

紧量子群理论如今已成为量子群这一更广阔领域中相当重要的一部分，并且处于算子代数的理论框架之内。这一理论始于 Woronowicz 在 [12] 中引入量子 SU(2) 群。随后，Woronowicz 在 [13], 中定义了紧矩阵量子群，并在 [14] 中发展出紧量子群的一般理论。Wang 发现并研究了一类重要的紧矩阵量子群，即他的量子置换

日期：2023年2月6日。Brownlowe 获得了澳大利亚研究理事会项目 DP200100155 的资助，两位作者均获得了悉尼数学研究所的支持。

群 [11]。Wang 的研究受到孔涅斯在其非交换几何计划中提出的一个问题的启发：一个空间的量子自同构群是什么？Wang 在 [11] 中的工作为有限空间给出了答案；具体而言，Wang 正式定义了量子自同构群的概念，并证明他的量子置换群 $A_s(n)$ 是具有 n 个点的空间的量子自同构群。对于三个或更少的点，这个代数是交换的，因此不存在量子置换；但令人惊讶的是，对于四个或更多的点，该代数是非交换且无限维的。

自[11], 以来，后续研究沿着多个方向展开，其中包括 Bichon 在[2]中的成果，他在其中引入了有限图的量子自同构。这些代数是量子置换群的量子子群。Bichon 利用这一构造定义了量子二面体群 D_4。此后，在[1], 中，Banica 和 Bichon 对作用于四个点上的所有紧量子群进行了分类；也就是说，他们分类了 A_s(4)的所有紧量子子群。罗利耶和瓦埃斯最近在[8], 中研究了无限图的量子自同构，福伊特则在 [15]中进行了相关研究。

我们的这项工作源于一个问题：量子群是否存在一种合理的自相似性概念？对于紧量子群，我们对此给出了肯定的回答。我们首先构造齐次有根树 X^*的量子自同构群 $\mathbb{A}_X$，然后确定 $g \in \mathrm{Aut}(X^*)$ $w \in X^*$的限制映射 $g \mapsto g|_w$ 的量子类比。接着，我们将自相似量子群定义为满足以下条件的任意量子子群 A：它是 $\mathbb{A}_X$ 的量子子群，且限制映射可经由商映射 $\mathbb{A}_X \to A$分解。我们用某个同态 $A \otimes C(X) \to C(X) \otimes A$来刻画自相似量子群，该同态可视作量子状态转移函数。我们考察的主要例子类别是有限约束自相似群的量子类比。在关于这些例子的主要定理中，我们描述了一类有限约束自相似群，它们是由量子置换群的量子子群构成的自由圈积。

我们先简要介绍预备知识，汇总紧量子群文献中所需的所有定义。随后在第 3 节中，我们确定一个紧量子群 $\mathbb{A}_X$，并证明它是齐次有根树 X^* 的量子自同构群。C^*-代数 $\mathbb{A}_X$ 是一个非交换的无限维 C^*-代数，其阿贝尔化是树 X^* 的自同构群上的连续函数代数。在第 4 节中，我们引入紧量子群的自相似性概念，并通过态射 $A \otimes C(X) \to C(X) \otimes A$ 来刻画自相似量子群 A，这与经典自相似作用由映射 $G \times X \to X \times G$: $(g, x) \mapsto (g \cdot x, g|_x)$ 所支配这一事实相仿。

在第5 节中，我们定义有限约束自相似量子群，它们是文献[4, 9]中研究的经典有限约束自相似群的量子类比。特别地，我们考虑子代数 $\mathbb{A}_d$，它们是 $\mathbb{A}_X$深度为 $X^{[d]}$ 的有限子树 X^* 的量子自同构群。对于每个 d量子子群 $\mathbb{P}$，$\mathbb{A}_d$我们构造一个量子子群 $A_{\mathbb{P}}$，并证明它是一个自相似量子群。随后，我们以 Bichon 在文献[3] 中的工作为基础，构造紧量子群与量子置换群的量子子群所作的自由圈积（对应于子代数 $\mathbb{A}_1$， $\mathbb{A}_X$并证明，所有 $A_{\mathbb{P}}$ 由量子子群 $\mathbb{P}$ 得到的 $\mathbb{A}_1$ 都典范同构于自由圈积$A_{\mathbb{P}} *_w \mathbb{P}$。

2. Preliminaries

本节汇集紧量子群的一些基础知识。我们从 Woronowicz 对紧量子群[14]的定义开始。

定义 2.1. 紧量子群是一个二元组 (A,Φ)，其中 A 是一个幺元的 C^*-代数，且 $\Phi: A\to A\otimes A$ 是一个幺元的 $*$-同态，使得

(1) $\overline{(\Phi\otimes \mathrm{id})\Phi = (\mathrm{id}\otimes\Phi)\Phi}$

(2) $\overline{(A\otimes 1)\Phi(A)} = A\otimes A = \overline{(1\otimes A)\Phi(A)}.$

我们称 Φ 为 余乘法，而 (1) 称为 余结合性。

注 2.2. [14] 证明了，(A,Φ) 是紧量子群，当且仅当存在一族矩阵 $\{a^\lambda=(a^\lambda_{i,\ j})\in M_{d_\lambda}(A): \lambda\in\Lambda\}$，其中某个指标集为 Λ，使得

(1) $\Phi(a^\lambda_{i,\ j}) = \sum_{k=1}^{d_\lambda} a^\lambda_{i,\ k}\otimes a^\lambda_{k,\ j}$ 对所有 $\lambda\in\Lambda$ 以及 $1\le i,j\le d_\lambda$，(2) a^λ 及其转置 $(a^\lambda)^T$ 都是 $M_{d_\lambda}(A)$ 中的可逆元素，对每个 $\lambda\in\Lambda$ 均成立；(3) 由元素 $\{a^\lambda_{i,j}: 1\le i,j\le d_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 生成的 A 的 $*$- 子代数 $\mathcal{A}$ 在 A 中稠密。

例 2.3. 对我们而言，一个重要的例子是 Wang 在 [11] 中提出的 Wang 量子置换群 $(A_s(n)\ \Phi)$。这里，n 是正整数，而 $A_s(n)$ 是由元素 a_{ij}、$1\le i$、$j\le n$ 生成的通用 C^*-代数，并满足

$$a_{ij}^2 = a_{ij} = a_{ij}^* \text{ for all } 1\le i,j\le n,$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \text{ for all } 1\le i\le n,$$
$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \text{ for all } 1\le j\le n.$$

余乘法 Φ 满足：对所有 $1\le i$、$j\le n$，均有 $\Phi(a_{ij}) = \sum_{k=1}^n a_{ik}\otimes a_{kj}$。

定义 2.4. 若 (A_1,Φ_1) 和 (A_2,Φ_2) 是紧量子群，则从 (A_1,Φ_1) 到 (A_2,Φ_2) 的态射 π 是满足 $(\pi\otimes\pi)\circ\Phi_1 = \Phi_2\circ\pi$ 的 C^*-代数同态 $\pi: A_1\to A_2$。

定义 2.5. 设 (A,Φ) 是紧量子群。Woronowicz 理想是 A 的一个理想 I，满足 $\Phi(I)\subseteq \ker(q\otimes q)$，其中 q 是商映射 $A\to A/I$。那么 $(A/I,\Phi')$ 是紧量子群，其中 $\Phi': A/I\to A/I\otimes A/I$ 满足 $\Phi'\circ q = (q\otimes q)\circ\Phi$，称为 (A,Φ) 的量子子群。

定义 2.6. 紧量子群 (A,Φ) 在幺元 C^*-代数 B 上的一个（左）余作用，是一个幺元的 $*$-同态 $\alpha: B\to A\otimes B$，满足

(1) $\overline{(\mathrm{id}\otimes\alpha)\alpha = (\Phi\otimes\mathrm{id})\alpha}$

(2) $\overline{\alpha(B)(A\otimes 1)} = A\otimes B.$

我们将 (1) 称为余作用恒等式，而 (2) 称为 $Podle\acute{}$s 条件。

3. Quantum automorphisms of a homogeneous rooted tree

本节介绍一个紧量子群 $\mathbb{A}_X$，并证明它是无限齐次根树 X^*的量子自同构群。我们从紧量子群在 X^*上的作用这一概念开始。注意，对于 $n \geq 0$，我们将 X 中长度为 n 的所有字记作X^n，于是树 X^* 可与$\bigcup_{n\geq} X^n$等同，其中 $X^0 = \{\varnothing\}$，而 $\varnothing$ 是该树的根。

定义 3.1. 设 X 是一个有限集，且 (A, Φ) 是一个紧量子群。在齐次有根树 X^* 上，A的作用是一个由左余作用构成的系统

$$\alpha = (\alpha_n : C(X^n) \to A \otimes C(X^n))$$

对于任意 $m < n$，图表

$$\begin{array}{ccc} C(X^m) & \xrightarrow{i_{m,n}} & C(X^n) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_m} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} \\ A \otimes C(X^m) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes i_{m,n}} & A \otimes C(X^n) \end{array}$$

是可交换的，其中 $i_{m,n}$： $C(X^m) \to C(X^n)$ 是满足以下条件的单射同态

$$i_{m,n}(p_w) = \sum_{w' \in X^{n-m}} p_{ww'}.$$

现在我们定义本节关注的主要对象，即 C^*-代数 $\mathbb{A}_X$，随后将在定理 3.4中证明它确实是一个紧量子群。在本项目后期的某个阶段，我们了解到 [8], 及其对局部有限连通图的量子自同构群 QAutΠ 的定义 Π。一个直接的论证表明，$\mathbb{A}_X$ 对于 Π 齐次有根树 Π 而言就是 QAut，不过为了完整起见，我们仍给出定理 3.4 的证明。

定义 3.2. 设 X 是一个有限集。定义 $\mathbb{A}_X$ 为由元素 $\{a_{u,v} : u, v \in X^n, n \geq 0\}$ 生成的泛 C^* 代数，并满足以下关系：

(1) $a_{\varnothing,\ \varnothing} = 1$，(2) 对任意 $n \geq 0, u, v \in X^n$, $a^*_{u,\ v} = a^2_{u,\ v} = a_{u,\ v}$，(3) 对任意 $n \geq 0, u, v \in X^n$ 和 $x \in X$

$$a_{u,v} = \sum_{y\in X} a_{ux,vy} = \sum_{z\in X} a_{uz,vx}.$$

注记 3.3. (i) 对每个 $d \in \mathbb{N}$，记 $\mathbb{A}_d$ 为由 $\{a_{u,v} : u, v \in X^d\}$生成的 $\mathbb{A}_X$ 的子代数。注意，$\mathbb{A}_1$ 是 $A_s(|X|)$ 中的 Wang 量子置换群，见例 2.3。

(ii) 我们可以如下理解（3）：每个投影 $a_{u,v}$ 都分解为一个由投影组成的 $|X| \times |X|$ 方阵 $\{a_{ux,vy} : x, y \in X\}$，并具有幻方型性质，即每一行和每一列的和都等于 $a_{u,v}$。例如，若 $X = \{0, 1, 2\}$，则有以下结构。

$$a_{u,v} \mapsto \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{u0,v0} & a_{u0,\ v1} & a_{u0,\ v2} \\ \hline a_{u1,v0} & a_{u1,\ v1} & a_{u1,\ v2} \\ \hline a_{u2,v0} & a_{u2,\ v1} & a_{u2,\ v2} \\ \hline \end{array}$$

(iii) 根据定义 3.2，反复应用（3）可知，对所有 $u, u', v, v', w \in X^n, n \in \mathbb{N}$，都有

$$u \neq u', v \neq v' \implies a_{u,w}a_{u',w} = 0 = a_{w,v}a_{w,v'},$$

并且对所有 $u = u_1 \cdots u_n$、$v = v_1 \cdots v_n \in X^n$、$n \in \mathbb{N}$ 以及 x、$y \in X$，都有

$$a_{x,y}a_{u,v} = a_{u,v}a_{x,y} = \begin{cases} a_{u,v} & \text{if } u_1 = x, v_1 = y \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在本文余下部分中，我们将不加说明地自由使用这两个恒等式。

定理 3.4. C^*-代数 $\mathbb{A}_X$ 是一个紧量子群，其余乘法 $\Delta\colon \mathbb{A}_X \to \mathbb{A}_X \otimes \mathbb{A}_X$ 满足

$$\Delta(a_{u,v}) = \sum_{w \in X^n} a_{u,w} \otimes a_{w,v},$$

对所有 u、$v \in X^n$ 和 $n \geq 1$

证明. 要证明 Δ 存在，只需证明这些元素

$$b_{u,v} := \sum_{w \in X^n} a_{u,w} \otimes a_{w,v}$$

对于 u，$v \in X^n$ 和 $n \geq 1$ 满足定义3.2。

首先，$b_{\varnothing,\varnothing} = \Delta(a_{\varnothing,\varnothing}) = a_{\varnothing,\varnothing} \otimes a_{\varnothing,\varnothing} = 1 \otimes 1$。对于（2），我们有

$$b_{u,v}^* = \sum_{w \in X^n} a_{u,w}^* \otimes a_{w,v}^* = \sum_{w \in X^n} a_{u,w} \otimes a_{w,v} = b_{u,v}$$

and

$$\begin{aligned} b_{u,v}^2 &= \left(\sum_{w \in X^n} a_{u,w} \otimes a_{w,v} \right)^2 \\ &= \sum_{w,z \in X^n} a_{u,w}a_{u,z} \otimes a_{w,v}a_{z,v} \\ &= \sum_{w \in X^n} a_{u,w}^2 \otimes a_{w,v}^2 \\ &= \sum_{w \in X^n} a_{u,w} \otimes a_{w,v} \\ &= b_{u,v}. \end{aligned}$$

对于（3），固定 u，$v \in X^n$ 和 $x \in X$。于是

$$\begin{aligned} b_{u,v} &= \sum_{w \in X^n} a_{u,w} \otimes a_{w,v} \\ &= \sum_{w \in X^n} \sum_{z \in X} a_{ux,wz} \otimes a_{w,v} \\ &= \sum_{w \in X^n} \sum_{z \in X} a_{ux,wz} \otimes \sum_{y \in X} a_{wz,vy} \end{aligned}$$

$$= \sum_{y\in X} \sum_{w\in X^{n+1}} a_{ux,w} \otimes a_{w,vy}$$
$$= \sum_{y\in X} b_{ux,vy}.$$

因此，根据 $\mathbb{A}_X$ 的泛性质，存在一个同态 $\Delta\colon \mathbb{A}_X \to \mathbb{A}_X \otimes \mathbb{A}_X$，使得

$$\Delta(a_{u,v}) = \sum_{w\in X^n} a_{u,w} \otimes a_{w,v}.$$

对于余结合性，我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta(a_{u,v}) &= \sum_{w\in X^n} a_{u,w} \otimes \Delta(a_{w,v}) \\ &= \sum_{w\in X^n} a_{u,w} \otimes \left(\sum_{z\in X^n} a_{w,z}\otimes a_{z,v}\right) \\ &= \sum_{z\in X^n} \left(\sum_{w\in X^n} a_{u,w}\otimes a_{w,z}\right)\otimes a_{z,v} \\ &= \sum_{z\in X^n} \Delta(a_{u,z})\otimes a_{z,v} \\ &= (\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta(a_{u,v}).\end{aligned}$$

最后，我们证明矩阵集合

$$\{a_n = (a_{u,v})_{u,v\in X^n} \in M_{X^n}(\mathbb{A}_X) : n \geq 1\}$$

满足定义 2.2中的条件。条件（1）和（3）显然成立。对于（2），我们证明，对于任意 $n \geq 1$，矩阵 a_n 可逆，其逆由 $(a_n)^T$给出。给定$u,\ v \in X^n$ 我们有

$$(a_n(a_n)^T)_{u,v} = \sum_{w\in X^n} a_{u,w}a_{v,w} = \delta_{u,v}\sum_{w\in X^n} a_{u,w} = \delta_{u,v}1_A.$$

同样，我们可以证明 $((a_n)^T a_n)_{u,\ v} = \delta_{u,\ v}1_A$，因此 $(a_n)^T = a_n^{-1}$，如所需。 □

注记 3.5. $\mathbb{A}_X$ 的典范稠密 $*$-子代数是由投影 $\{a_{u,v}\colon u,v\in X^n, n\geq 0\}$ 生成的 $*$-子代数。这是一个 Hopf $*$-代数，其余单位为 $\varepsilon\colon \mathbb{A}_X \to \mathbb{C}$，余逆为 $\kappa\colon \mathbb{A}_X \to \mathbb{A}_X$，满足 $\varepsilon(a_{u,\ v}) = \delta_{u,\ v}$ 以及 $\kappa(a_{u,\ v}) = a_{v,\ u}$，其中 $u,v \in X^n, n\in\mathbb{N}$。

现在我们证明，$(\mathbb{A}_X,\Delta)$ 是该齐次有根树的量子自同构群（依照 [11,定义 2.3] 的意义）。

命题 3.6. 存在一个 $\gamma = (\gamma_n)_{n=1}^\infty$ 在 X^* 上的 $\mathbb{A}_X$ 作用。此外，若 $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^\infty$ 是紧量子群 (A,Φ) 在 X^* 上的作用，则存在一个量子群同态 $\pi\colon \mathbb{A}_X \to A$，使得对于任意 $n\geq 1$，都有 $(\pi\otimes\mathrm{id})\circ\gamma_n = \alpha_n$。

证明。对于任意 $n\geq 1$，这些元素

$$q_w := \sum_{w'\in X^n} a_{w,w'}\otimes p_{w'} \in \mathbb{A}_X \otimes C(X^n)$$

对于每个 $w \in X^n$，它们都是两两正交投影，并满足

$$\sum_{w\in X^n} q_w = \sum_{w,w'\in X^n} a_{w,w'} \otimes p_{w'} = 1 \otimes 1$$

因此，存在一个幺元的 $*$-同态 $\gamma_n : C(X^n) \to \mathbb{A}_X \otimes C(X^n)$，满足$\gamma_n(p_w) = q_w$。我们有

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id})\gamma_n(p_w) &= \sum_{w'\in X^n} \Delta(a_{w,w'}) \otimes p_{w'} \\ &= \sum_{w',z\in X^n} a_{w,z} \otimes a_{z,w'} \otimes p'_w \\ &= \sum_{z\in X^n} a_{w,z} \otimes \alpha_n(p_z) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \gamma_n)\gamma_n(p_w),\end{aligned}$$

因此每个 γ_n 都满足余作用恒等式。

对于固定的 $v \in X^n$，我们有

$$\sum_{u\in X^n} \gamma_n(p_u)(a_{u,v} \otimes 1) = \sum_{u,w\in X^n} a_{u,w}a_{u,v} \otimes p_w = \sum_{u\in X^n} a_{u,v} \otimes p_v = 1 \otimes p_v.$$

乘以任意元素 $a \otimes 1 \in \mathbb{A}_X \otimes 1$，可知 $\gamma_n(C(X^n))(\mathbb{A}_X \otimes 1)$ 包含 $\mathbb{A}_X \otimes C(X^n)$ 中的元素 $a \otimes p_v$，因此满足所需的稠密性。

最后，固定 $m < n$ 和 $w \in X^m$。那么

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes i_{m,n})\gamma_m(p_w) &= \sum_{z\in X^m} a_{w,z} \otimes i_{m,n}(p_z) \\ &= \sum_{z\in X^m} \sum_{z'\in X^{n-m}} a_{w,z} \otimes p_{zz'} \\ &= \sum_{z\in X^m} \sum_{z'\in X^{n-m}} \sum_{w'\in X^{n-m}} a_{ww',zz'} \otimes p_{zz'} \\ &= \sum_{w'\in X^{n-m}} \alpha_n(p_{ww'}) \\ &= \gamma_n(i_{m,n}(p_w)),\end{aligned}$$

因此，$\gamma = (\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ 定义了$(\mathbb{A}_X, \Delta)$在齐次有根树 X^*上的作用。

现在假设$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ 是紧量子群(A, Φ)在 X^*上的作用。令$b_{\varnothing,\,\varnothing} := 1 \in A$，对于 $n \geq 1$ 和 u，定义$b_{u,\,v} \in A$ 为满足以下条件的唯一元素：

$$\alpha_n(p_u) = \sum_{v\in X^n} b_{u,v} \otimes p_v.$$

α_n 的余作用恒等式表明

$$\Phi(b_{u,v}) = \sum_{w\in X^n} b_{u,w} \otimes b_{w,v} \tag{3.1}$$

对于任意 u、$v \in X^n$。

我们断言，集合 $\{b_{u,v}\colon\ u、\ v\in X^n、\ n\geq 0\}\subseteq A$ 满足定义 3.2。条件 (1) 按定义成立。对于 (2) 和 (3)，我们借助量子置换群 $A_s(|X|^n)$ 关于 $n\geq 1$ 的泛性质。由于对于任意 $n\geq 1$、α_n 都定义了 (A,Φ) 在 $C(X^n)$ 上的余作用，[11, 定理 3.1] 表明，元素 $\{b_{u,v}\colon\ u、\ v\in X^n\}$ 满足 [11, 第 3] 节中的条件 (3.1)–(3.3)。条件 (3.1) 正是 (2)。条件 (3.1) 和 (3.2) 表明，对于任意 $v\in X^n$，我们有

$$\sum_{u\in X^n} b_{u,v}=1_A=\sum_{w\in X^n} b_{v,w}.$$

对于任意 $u\in X^n$ 和 $x\in X$，我们有

$$p_{ux}\leq\sum_{y\in X} p_{uy}=i_{n,n+1}(p_u),$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{v\in X^n}\sum_{y\in X} b_{ux,vy}\otimes p_{vy}&=\alpha_{n+1}(p_{ux})\\&\leq\alpha_{n+1}(i_{n,n+1}(p_u))\\&=(\mathrm{id}_A\otimes i_{n,n+1})\alpha_n(p_u)\\&=\sum_{v\in X^n}\sum_{y\in X} b_{u,v}\otimes p_{vy}.\end{aligned}$$

由此可知，对于任意 x、$y\in X$，$b_{ux,vy}\leq b_{u,v}$。因此，对于任意 u、$v\in X^n$ 和 $x\in X$，我们有

$$b_{u,v}=b_{u,v}\left(\sum_{w\in X^n}\sum_{y\in X} b_{ux,wy}\right)=\sum_{y\in X} b_{ux,vy}.$$

同样，对于任意 $y\in X$，我们有 $b_{u,v}=\sum_{x\in X} b_{ux,vy}$ 且 (3) 成立。

因此，$\mathbb{A}_X$ 的泛性质给出一个同态 $\pi\colon\ \mathbb{A}_X\to A$，满足 $\pi(a_{u,v})=b_{u,v}$。由 (3.1) 可知 $(\pi\otimes\pi)\circ\Delta=\Phi\otimes\pi$，因此 π 是一个紧量子群同态。恒等式 $(\pi\otimes\mathrm{id})\circ\gamma_n=\alpha_n$ 显然成立。□

命题 3.7. 对于 $|X|\geq 2$，C^*-代数 $\mathbb{A}_X$ 是非交换且无限维的。

证明. 不失一般性，假设 $X=\{0,1\}$。令 B 为由两个（不交换的）投影 p 和 q 生成的泛幺元 C^*-代数。由 [7] 可知，$B\cong C^*(\mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_2)$，它是非交换且无限维的。定义矩阵

$$(b_{u,v})_{u,v\in X^2}=\begin{pmatrix} p & 1_B-p & 0 & 0\\ 1_B-p & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & q & 1_B-q\\ 0 & 0 & 1_B-q & q\end{pmatrix}\in M_4(B).$$

定义 $b_{\varnothing,\varnothing}=b_{0,0}=b_{1,1}=1_B$，$b_{0,1}=b_{1,0}=0$，并对 $u,v\in X^2$ 和 $w,w'\in X^*$ 定义 $b_{uw,vw'}:=\delta_{w,w'}b_{u,v}$。那么这些元素满足定义 3.2 中的关系，因此存在一个满同态 $\mathbb{A}_X\to B$。由于 B 是非交换且无限维的，$\mathbb{A}_X$ 也是如此。

□

注3.8。齐次有根树 X^* 的自同构群 Aut(X^*) 在置换拓扑下是紧致、全不连通的豪斯多夫群。单位元的一个邻域基由以下子群族给出

$$\{G_u := \{g \in \mathrm{Aut}(X^*) : g \cdot u = u\} : u \in X^*\},$$

并且由于任意 $u \in X^*$ 的轨道都是有限的，这些开子群均为闭子群，因而是紧的。这些子群的陪集形式为 $G_{u,v} := \{g \in G : g \cdot v = u\}$。于是，$\{G_{u,v} : u, v \in X^*\}$ 是 Aut(X^*) 的拓扑的一组紧开集基。由此可知，示性函数 $f_{u,v} := 1_{G_{u,v}}$ 张成了 C(Aut(X^*)) 的一个稠密子集。容易验证，元素 $f_{u,v}$ 满足定义 3.2 的 (1)–(3)，而 C(Aut(X^*)) 的泛性质由此蕴含它是 $\mathbb{A}_X$ 的阿贝尔化。

4. 自相似性

若 $g \in$ Aut(X^*) 且 $x \in X$，则限制 $g|_x$ 是满足下列条件的 Aut(X^*) 中唯一的元素

$$g \cdot (xw) = (g \cdot x)g|_x \cdot w \quad \text{for all } w \in X^*.$$

若子群 $G \leq$ Aut(X^*) 在取限制时保持封闭，则称其为自相似的。也就是说，只要 $g \in G$ 且 $x \in X$，限制 $g|_x$ 就是 G 的一个元素。赋予从 Aut(X^*) 继承的拓扑后，限制映射 $G \to G$: $g \mapsto g|_x$ 是连续的。若 G 是作用于 X^* 上的任意群，且其作用由自同构给出，则称该作用是自相似的，当且仅当 G 在 Aut(X^*) 中的像是自相似的。

为了对 $\mathbb{A}_X$ 的量子子群建立合理的自相似性概念，我们需要了解限制如何体现在函数代数 C(Aut(X^*)) 中。给定 $x \in X$ 和 $u, v \in X^n$ 我们有

$$\begin{aligned}\{g : g|_x \cdot u = v\} &= \left(\bigcup_{y \in X} \{g : g \cdot x = y\}\right) \cap \{g : g|_x \cdot u = v\} \\ &= \bigcup_{y \in X} (\{g : g \cdot x = y\} \cap \{g : g|_x \cdot u = v\}) \\ &= \bigcup_{y \in X} \{g : g \cdot (xu) = yv\},\end{aligned}$$

因此，相应的示性函数满足

$$1_{\{g : g|_x \cdot u = v\}} = \sum_{y \in X} 1_{\{g : g \cdot (xu) = yv\}}.$$

这个公式引出了以下结果。

命题 4.1. 对每个 $x \in X$，都存在一个同态 $\rho_x : \mathbb{A}_X \to \mathbb{A}_X$，满足

$$\rho_x(a_{u,v}) = \sum_{y \in X} a_{yu,xv}, \tag{4.1}$$

对所有 $u, v \in X^n$。

我们通过考察 $X = \{0, 1, 2\}$并观察限制映射 ρ_1 如何作用于投影 $a_{1,\ 2}$，来说明图 1 中限制映射的公式。

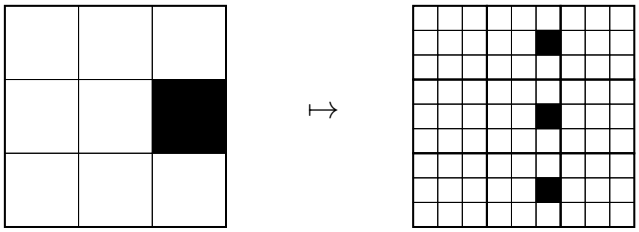


FIGURE 1. $\rho_1\ (a_{1,\ 2}) \ = a_{01,\ 12} + a_{11,\ 12} + a_{21,\ 12}$

命题 *4.1* 的证明。固定 $x \in X$。我们证明这些元素

$$\{b_{u,v} := \rho_x(a_{u,v}) : u, v \in X^n, n \geq 1\}$$

满足定义3.2中的条件。对于（1），有

$$b_{\varnothing,\varnothing} = \rho_x(a_{\varnothing,\varnothing}) = \sum_{y\in X} a_{y,x} = 1.$$

对于（2），有

$$b^*_{u,v} = \left(\sum_{y\in X} a_{yu,xv}\right)^* = \sum_{y\in X} a^*_{yu,xv} = \sum_{y\in X} a_{yu,xv} = b_{u,v}$$

and

$$b^2_{u,v} = \left(\sum_{y\in X} a_{yu,xv}\right)^2 = \sum_{y,z\in X} a_{yu,xv}a_{zu,xv} = \left(\sum_{y\in X} a_{yu,xv}\right) = b_{u,v}.$$

对于（3），固定 $y \in X$。则

$$\sum_{z\in X} b_{uy,vz} = \sum_{z\in X}\sum_{w\in X} a_{wuy,xvz} = \sum_{w\in X} a_{wu,xv} = b_{u,v}.$$

类似的计算表明 $\sum_{z\in X} b_{uz,\ vy} = b_{u,\ v}$。因此存在一个同态 ρ_x，其满足所需的公式。□

注4.2. 我们定义 $\rho_\varnothing$ 为恒等同态 $\mathbb{A}_X \to \mathbb{A}_X$，对于 $w = w_1 \cdots w_n \in X^n$，定义 ρ_w 为复合 $\rho_{w_1} \circ \cdots \circ \rho_{w_n}$。通过常规计算可得，对所有 $u, v \in X^n$，均有

$$\rho_w(a_{u,v}) = \sum_{z\in X^n} a_{zu,wv}.$$

注 4.3. 采用与命题 4.1 证明中类似的论证可知，对于每个 $x \in X$，存在一个同态 $\sigma_x\colon \mathbb{A}_X \to \mathbb{A}_X$ 满足

$$\sigma_x(a_{u,v}) = \sum_{y\in X} a_{xu,yv}$$

对所有 $u, v \in X^n$, $n \in \mathbb{N}$ 均成立。显然，$\sigma_x = \kappa \circ \rho_x \circ \kappa$，其中 κ 为余逆。

现在我们可以陈述本文的主要定义。

定义 4.4。我们称 ρ_w 为 w 的限制。若对于每个 $x \in X$，限制 ρ_x 都可经由商映射 $q\colon\ \mathbb{A}_X \to A$ 分解，则称量子子群 A of $\mathbb{A}_X$ 是自相似的；也就是说，如果存在同态 $\widetilde{\rho_x}\colon\ A \to A$，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_X & \xrightarrow{\rho_x} & \mathbb{A}_X \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ A & \xrightarrow{\widetilde{\rho_x}} & A \end{array}$$

可交换。

为了阐明本节的主要结果，设 G 是一个群。要在 X^* 上构造 G 的自相似作用，只需有一个函数 $f\colon\ G \times X \to X \times G$，使得对所有 $x \in X$，$f(e,x) = (x,e)$，并且下图可交换

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{m_G \times \mathrm{id}_X} & G \times X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G \times f} & & \\ G \times X \times G & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \downarrow{\scriptstyle f \times \mathrm{id}_G} & & \\ X \times G \times G & \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times m_G} & X \times G \end{array}$$

这些数据使我们能够定义 G 在 X^* 上的作用，该作用是自相似的，其中 $g \cdot x$ 和 $g|_x$ 是 X 和 G 中满足 $(g \cdot x, g|_x) := f(g,x)$ 的唯一元素。

我们的下一个结果是上述结果的紧量子群类比。我们将使用多个不同的恒等同态和单位元。为清晰起见，我们采用以下记号约定：对于一个 C^*-代数 A，记其恒等同态为 id_A；对于 $n \geq 1$，记交换 C^*-代数 $C(X^n)$ 上的恒等同态为 id_n。类似地，1_A 表示 A 的单位元 $\mathbf{1}$，而 1_n 分别表示 $C(X)$ 和 $C(X^n)$ 的单位元。

定理 4.5. 假设 (A,Φ) 是一个紧量子群，并配备了一个幺元的 $*$-同态 $\psi\colon\ C(X) \otimes A \to A \otimes C(X)$，满足

$$(\Phi \otimes \mathrm{id}_1)\psi = (\mathrm{id}_A \otimes \psi)(\psi \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_1 \otimes \Phi) \tag{4.2}$$

and

$$\overline{\psi(C(X) \otimes 1_A)(A \otimes 1)} = A \otimes C(X). \tag{4.3}$$

那么$(A,\ \Phi)$ 作用于齐次有根树 X^*，并且 $\mathbb{A}_X$在同态 $\pi\colon\ \mathbb{A}_X \to A$ 下的像（见命题*3.6*）是一个自相似紧量子群。

证明。我们首先定义 (A,Φ) 在 X^* 上的作用。将 $C(X)$ 与 $C(X) \otimes 1_A \subseteq C(X) \otimes A$ 视为相同，并令 $\alpha_1 := \psi|_{C(X)\otimes 1_A}$。那么 α_1 显然是幺元的，而 α_1 的余作用恒等式和 Podle´ s 条件由 (4.2) 和 (4.3) 推出。现在归纳地定义$\alpha_{n+1} := (\psi \otimes \mathrm{id}_n)(\mathrm{id}_1 \otimes \alpha_n)\colon\ C(X^{n+1}) \to A \otimes C(X^{n+1})$，其中 $n \geq 1$，这里省略了规范同构 $C(X^{n+1}) \cong C(X) \otimes C(X^n)$。同样，只要 α_n 是幺元的，α_{n+1} 就显然是幺元的。若我们假设 α_n 满足余作用恒等式，那么

$$\begin{aligned} (\Phi \otimes \mathrm{id}_{n+1})\alpha_{n+1} &= (\Phi \otimes \mathrm{id}_{n+1})(\psi \otimes \mathrm{id}_n)(\mathrm{id}_1 \otimes \alpha_n) \\ &= (\mathrm{id}_A \otimes \psi \otimes \mathrm{id}_n)(\psi \otimes \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_n)(\mathrm{id}_1 \otimes \Phi \otimes \mathrm{id}_n)(\mathrm{id}_1 \otimes \alpha_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (\mathrm{id}_A \otimes \psi \otimes \mathrm{id}_n)(\psi \otimes \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_n)(\mathrm{id}_1 \otimes \mathrm{id}_A \otimes \alpha_n)(\mathrm{id}_1 \otimes \alpha_n)\\ &= (\mathrm{id}_A \otimes \psi \otimes \mathrm{id}_n)(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_1 \otimes \alpha_n)(\psi \otimes \mathrm{id}_n)(\mathrm{id}_1 \otimes \alpha_n)\\ &= (\mathrm{id}_A \otimes \alpha_{n+1})\alpha_{n+1},\end{aligned}$$

因此 α_{n+1} 也满足余作用恒等式。由于 α_1 是一个余作用，我们看到，对于任意 $n \geq 1$， α_n 都满足余作用恒等式。

为证明每个 α_n 都满足 Podle´s 条件，我们采用归纳法。已知 $n = 1$ 满足该条件。设对于某个 $n \geq 1$，有

$$\overline{\alpha_n(C(X^n))(A \otimes 1_n)} = A \otimes C(X^n).$$

取一个生成元 $a \otimes p_u \otimes p_x \in A \otimes C(X^{n+1})$，其中 $u \in X^n$ 且 $x \in X$。根据归纳假设，我们可以逼近

$$a \otimes p_u \sim \sum_i \alpha_n(f_i)(a_i \otimes 1_n),$$

其中 $f_i \in C(X^n)$ 且 $a_i \in A$。于是

$$a \otimes p_u \otimes p_x \sim \sum_i (\alpha_n(f_i) \otimes 1)(1_A \otimes 1_n \otimes p_x)(a_i \otimes 1_{n+1}). \tag{4.4}$$

根据 α_n 的定义，对于任意 $f \in C(X^n)$，我们有

$$\begin{aligned}\alpha_n(f) \otimes 1 &= ((\psi \otimes \mathrm{id}_{n-1}) \dots (\mathrm{id}_{n-1} \otimes \psi)(f \otimes 1_A)) \otimes 1\\ &= (\psi \otimes \mathrm{id}_n) \dots (\mathrm{id}_{n-1} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}_1)(f \otimes 1_A \otimes 1)\\ &= (\psi \otimes \mathrm{id}_n) \dots (\mathrm{id}_{n-1} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}_1)(\mathrm{id}_n \otimes \psi)(f \otimes 1 \otimes 1_A)\\ &= \alpha_{n+1}(f \otimes 1).\end{aligned}$$

因此，我们可以将（4.4）写成

$$\sum_i \alpha_{n+1}(f_i \otimes 1)(1_A \otimes 1_n \otimes p_x)(a_i \otimes 1_{n+1}).$$

由于 ψ 是幺元的，我们有

$$1_A \otimes 1_n \otimes p_x = (\psi \otimes \mathrm{id}_n)(1 \otimes 1_A \otimes 1_{n-1} \otimes p_x),$$

根据归纳假设，可以将其近似为

$$\begin{aligned}(\psi \otimes \mathrm{id}_n)(1 \otimes 1_A \otimes 1_{n-1} \otimes p_x) &\sim (\psi \otimes \mathrm{id}_n)\left(1 \otimes \sum_j \alpha_n(g_j)(b_j \otimes 1_n)\right)\\ &= (\psi \otimes \mathrm{id}_n)\left(\sum_j (\mathrm{id}_1 \otimes \alpha_n)(1 \otimes g_j)(1 \otimes b_j \otimes 1_n)\right)\\ &= \sum_j \alpha_{n+1}(1 \otimes g_j)(\psi \otimes \mathrm{id}_n)(1 \otimes b_j \otimes 1_n).\end{aligned}$$

最后，应用 Podle´s 条件，我们可以对 α_1 进行近似

$$\psi(1 \otimes b_j) \sim \sum_k \alpha_1(h_k)(c_k \otimes 1) = \sum_k \psi(h_k \otimes 1_A)(c_k \otimes 1),$$

so

$$\begin{aligned}(\psi\otimes \mathrm{id}_n)(1\otimes b_j\otimes 1_n) &\sim \sum_k (\psi(h_k\otimes 1_A)\otimes 1_n)(c_k\otimes 1_{n+1})\\ &= \sum_k \alpha_{n+1}(h_k\otimes 1_n)(c_k\otimes 1_{n+1}).\end{aligned}$$

结合这些近似结果，我们可以写出

$$a\otimes p_u\otimes p_x \sim \sum_{i,j,k} \alpha_{n+1}((f_i\otimes 1)(h_k\otimes g_j))(c_k a_i\otimes 1_{n+1}),$$

其中 $f_i, g_j\in C(X^n)$ $h_k\in C(X)$ 且 $a_i, c_k\in A$。因此， α_{n+1} 满足 Podle´s 条件，从而根据归纳法，α_n 对每个 $n\geq 1$ 都满足 Podle´s 条件。

还需证明 $\alpha_n\circ i_{m,\ n}=(\mathrm{id}_A\otimes i_{m,\ n})\circ\alpha_m$ 对任意 $m<n$均成立。与命题 3.6 的证明一样，对于任意 $n\geq 1$ 和 $u,\ v\in X^n$ 我们将令 $b_{u,\ v}\in A$ 为满足下列条件的唯一元素

$$\alpha_n(p_u)=\sum_{v\in X^n} b_{u,v}\otimes p_v.$$

由同一证明可知，对于任意 $n\geq 1$ 和 $v\in X^n$，我们有

$$\sum_{u\in X^n} b_{u,v}=1_A.$$

若 $m<n$，则对于任意 $u\in X^m$，我们有

$$\begin{aligned}\alpha_n\circ i_{m,n}(p_u) &= (\psi\otimes \mathrm{id}_{n-1})\dots(\mathrm{id}_{m-1}\otimes\psi\otimes \mathrm{id}_{n-m})(\mathrm{id}_m\otimes\alpha_{n-m})(i_{m,n}(p_u))\\ &= \sum_{w\in X^{n-m}} (\psi\otimes \mathrm{id}_{n-1})\dots(\mathrm{id}_{m-1}\otimes\psi\otimes \mathrm{id}_{n-m})(\mathrm{id}_m\otimes\alpha_{n-m})(p_u\otimes p_w)\\ &= \sum_{w,z\in X^{n-m}} (\psi\otimes \mathrm{id}_{n-1})\dots(\mathrm{id}_{m-1}\otimes\psi\otimes \mathrm{id}_{n-m})(p_u\otimes b_{w,z}\otimes p_z)\\ &= \sum_{z\in X^{n-m}} (\psi\otimes \mathrm{id}_{m-1})\dots(\mathrm{id}_{m-1}\otimes\psi)\left(p_u\otimes \sum_{w\in X^{n-m}} b_{w,z}\right)\otimes p_z\\ &= \sum_{z\in X^{n-m}} (\psi\otimes \mathrm{id}_{m-1})\dots(\mathrm{id}_{m-1}\otimes\psi)(p_u\otimes 1_A)\otimes p_z\\ &= \sum_{z\in X^{n-m}} \alpha_m(p_u)\otimes p_z\\ &= \sum_{v\in X^m} b_{u,v}\otimes \sum_{z\in X^{n-m}} p_v\otimes p_z\\ &= \sum_{v\in X^m} b_{u,v}\otimes i_{m,n}(p_v)\\ &= (\mathrm{id}_A\otimes i_{m,n})\circ\alpha_m(p_u).\end{aligned}$$

因此，我们有 $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ 定义了 (A,Φ) 在 X^* 上的作用。

最后，令 $\pi\colon \mathbb{A}_X \to A$ 为命题 3.6中的同态。对于任意 u、$v \in X^n$ 和 $n \geq 1$，有 $\pi(a_{u,v}) = b_{u,v}$。对每个 $x \in X$，定义一个同态 $\tilde{\rho}_x\colon A \to A$，其定义为

$$\psi(1 \otimes a) = \sum_{x \in X} \tilde{\rho}_x(a) \otimes p_x,$$

其中 $a \in A$。对于任意 $u \in X^n$，我们有

$$\alpha_{n+1}(1 \otimes p_u) = \sum_{y \in X} \alpha_{n+1}(p_{yu}) = \sum_{v \in X^n} \sum_{x,y \in X} b_{yu,xv} \otimes p_x \otimes p_v.$$

另一方面，我们知道 $\alpha_{n+1} = (\psi \otimes \mathrm{id}_n)(\mathrm{id}_1 \otimes \alpha_n)$，并且

$$(\psi \otimes \mathrm{id}_n)(\mathrm{id}_1 \otimes \alpha_n)(1 \otimes p_u) = \sum_{v \in X^n} \psi(1 \otimes b_{u,v}) \otimes p_v = \sum_{v \in X^n} \sum_{x \in X} \tilde{\rho}_x(b_{u,v}) \otimes p_x \otimes p_v,$$

通过比较张量因子，我们看到 $\tilde{\rho}_x(b_{u,v}) = \sum_{y \in X} b_{yu,xv}$。因此，该图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_X & \xrightarrow{\rho_x} & \mathbb{A}_X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \pi(\mathbb{A}_X) & \xrightarrow{\tilde{\rho}_x} & \pi(\mathbb{A}_X) \end{array}$$

可交换，因此 $\pi(\mathbb{A}_X) \subseteq A$ 是一个自相似量子群。 □

命题 4.6。以下条件等价

(1) (A, Φ) 是一个量子自相似群，并且 (2) (A, Φ) 是 $(\mathbb{A}_X, \Delta)$ 的量子子群，且存在一个同态 $\psi\colon C(X) \otimes A \to A \otimes C(X)$ 满足定理 4.5的假设。

证明。 定理 4.5 断言 (2) $\Longrightarrow$ (1)。要证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)，设 (A, Φ) 是一个量子自相似群。根据定义，存在一个满射量子群态射$q\colon \mathbb{A}_X \to A$。直接验证可知，存在一个同态 $\psi\colon C(X) \otimes A \to A \otimes C(X)$ 满足

$$\psi(p_x \otimes q(a_{u,v})) = \sum_{y \in X} q(a_{xu,yv}) \otimes p_y.$$

给定 $u, v \in X^n$，我们有

$$\begin{aligned} (\Phi \otimes \mathrm{id}_1)\psi(p_x \otimes q(a_{u,v})) &= \sum_{y \in X} \Phi(q(a_{xu,yv})) \otimes p_y \\ &= \sum_{w \in X^n} \sum_{y,z \in X} q(a_{xu,zw}) \otimes q(a_{zw,yv}) \otimes p_y \\ &= (\mathrm{id}_A \otimes \psi)\left(\sum_{w \in X^n} \sum_{z \in X} q(a_{xu,zw}) \otimes p_z \otimes q(a_{w,v}) \right) \\ &= (\mathrm{id}_A \otimes \psi)(\psi \otimes \mathrm{id}_A)\left(\sum_{w \in X^n} p_x \otimes q(a_{u,w}) \otimes q(a_{w,v}) \right) \\ &= (\mathrm{id}_A \otimes \psi)(\psi \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_1 \otimes \Phi)(p_x \otimes q(a_{u,v})), \end{aligned}$$

因此 ψ 满足 (4.2)。对于 (4.3)，注意，对于任意 $q(a) \in A$ 以及 $z \in X$，我们有

$$q(a) \otimes p_z = (1 \otimes p_z)(q(a) \otimes 1)$$

$$= \left(\sum_{x \in X} q(a_{x,z}) \otimes p_z) \right) (q(a) \otimes 1)$$
$$= \left(\sum_{x,w \in X} q(a_{x,w}) \otimes p_w)(q(a_{x,z}) \otimes 1) \right) (q(a) \otimes 1)$$
$$= \sum_{x \in X} \psi(p_x \otimes 1)(q(a_{x,z}a) \otimes 1). \qquad \square$$

例4.7. 若 G是 Aut(X^*) 的一个自相似闭子群，则 $C(G)$ 是一个交换自相似量子群。商映射 $\mathbb{A}_X \to C(Aut(X^*))$ 将生成元 $a_{u,v}$ 映为示性函数 $f_{u,v}$ ，该函数在注3.8中定义。对于函数$f \in C$(Aut(X^*))以及 $x \in X$ ，限制同态 $\tilde{\rho_x}$ 满足 $\tilde{\rho_x}(f)(g) = f(g|_x)$，对任意 $g \in G$均成立。

5. Finitely constrained self-similar quantum groups

5.1. 经典有限约束自相似群。固定 $d \geq 1$，并令 $X^{[d]} = \bigcup_{k \leq d} X^k$ 为 X^* 的深度为 d的有限子树。自同构群 Aut($X^{[d]}$) 是 Aut(X^*) 的一个商，商映射由限制到有限子树给出。我们将此限制映射记作 r_d : Aut(X^*) $\to$ Aut($X^{[d]}$) 。

固定子群 $P \leq$Aut($X^{[d]}$)。定义

$$G_P := \{g \in \mathrm{Aut}(X^*) : r_d(g|_w) \in P \text{ for all } w \in X^*\}.$$

根据限制的性质，若 $g, h \in G_P$，则对任意 $w \in X^*$

$$r_d((gh)|_w) = r_d(g|_{h \cdot w} h|_w) = r_d(g|_{h \cdot w}) r_d(h|_w) \in P.$$

同样， $r_d(g^{-1}|_w) = r_d(g|_{g^{-1} \cdot w})^{-1} \in P$。因此 G_P 是一个自相似群，称为有限约束自相似群。关于这类群的更多详情见 [9]。

5.2. 有限约束自相似量子群。考虑由以下元素生成的子代数$\mathbb{A}_d \subseteq \mathbb{A}_X$： $\{a_{u,v} : |u| = |v| \leq d\}$。由于 Δ： $\mathbb{A}_d \to \mathbb{A}_d \otimes \mathbb{A}_d$，子代数 $\mathbb{A}_d$ 是一个商量子群。 $\mathbb{A}_d$ 的阿贝尔化是代数C，即有限群 Aut($X^{[d]}$) 上的连续函数代数 Aut($X^{[d]}$)。

定义 5.1。设 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{A}_d$的量子子群，其中 $\mathbb{P} = \mathbb{A}_d / I$。将商映射$q_I$： $\mathbb{A}_d \to \mathbb{P}$ 记为；因此 $I = \ker(q_I)$。我们将 J 记为由 $\{\rho_w(I)$: $w \in X^*\}$生成的 $\mathbb{A}_X$的最小闭双边理想，并将 $A_{\mathbb{P}}$记为商 $A_{\mathbb{P}} := \mathbb{A}_X / J$。在下一个结果中，我们证明 $A_{\mathbb{P}}$ 是一个自相似量子群，并称之为有限约束自相似量子群。

命题 5.2。每个 $A_{\mathbb{P}}$ 都是自相似量子群。

为证明命题 5.2，我们需要两个引理。回顾一下，对于 g， $h \in \mathrm{Aut}(X^*)$ $w \in X^*$我们有

$$(gh)|_w = g|_{h \cdot w} h|_w.$$

在第一个引理中，我们建立了余乘法Δ 与 $\mathbb{A}_X$ 之间以及限制映射 ρ_w之间的类似关系。

引理 5.3. 对于任意 $n \geq 1$、$w \in X^n$ 和 $a \in \mathbb{A}_X$，我们有

$$(\Delta \circ \rho_w)(a) = \sum_{y \in X^n} (1 \otimes a_{y,w})(\rho_y \otimes \rho_w)(\Delta(a)).$$

证明。设 $a_{u,v}$ 是 $\mathbb{A}_X$ 的一个生成元，其中 $|u| = |v| = k \geq 0$。于是

$$\begin{aligned}
(\Delta \circ \rho_w)(a_{u,v}) &= \Delta\left(\sum_{\alpha \in X^n} a_{\alpha u, wv}\right) \\
&= \sum_{y \in X^n} \sum_{\beta \in X^k} \sum_{\alpha \in X^n} a_{\alpha u, y\beta} \otimes a_{y\beta, wv} \\
&= \sum_{y \in X^n} \sum_{\beta \in X^k} \rho_y(a_{u,\beta}) \otimes a_{y\beta, wv} \\
&= \sum_{y \in X^n} \sum_{\beta \in X^k} \rho_y(a_{u,\beta}) \otimes a_{y,w}\rho_w(a_{\beta,v}) \\
&= \sum_{y \in X^n} (1 \otimes a_{y,w})(\rho_y \otimes \rho_w)\left(\sum_{\beta \in X^k} a_{u,\beta} \otimes a_{\beta,v}\right) \\
&= \sum_{y \in X^n} (1 \otimes a_{y,w})(\rho_y \otimes \rho_w(\Delta(a_{u,v})).
\end{aligned}$$

要看出该公式可延拓到 $\mathbb{A}_X$，只需证明对于任意 $w \in X^*$，映射

$$a \mapsto \sum_{y \in X^n} (1 \otimes a_{y,w})(\rho_y \otimes \rho_w)(\Delta(a))$$

是线性的且具有乘法性。线性显然成立，而乘法性由 $y \neq z$ 下投影 $1 \otimes a_{y,w}$ 和 $1 \otimes a_{z,w}$ 的正交性得出。□

引理 5.4。考虑商映射 $q_I \colon \mathbb{A}_d \to \mathbb{A}_d/I$ 和 $q_J \colon \mathbb{A}_X \to \mathbb{A}_X/J$。那么对于任意 $n \geq 1$ 和 $y, w \in X^n$

$$\ker(q_I \otimes q_I) \subseteq \ker((q_J \circ \rho_y) \otimes (q_J \circ \rho_w)).$$

证明。根据 J 的定义，对于任意 $w \in X^*$，我们有 $I \subseteq J \circ \rho_w$。因此存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{A}_d & \hookrightarrow & \mathbb{A}_X \\
\downarrow{\scriptstyle q_I} & & \downarrow{\scriptstyle q_J \circ \rho_w} \\
\mathbb{A}_d/I & \xrightarrow{\pi_w} & \mathbb{A}_X/\ker(q_J \circ \rho_w)
\end{array}$$

那么，如果 $c \in \ker(q_I \otimes q_I)$，我们有

$$(q_J \circ \rho_y) \otimes (q_J \circ \rho_w)(c) = (\pi_y \circ q_I) \otimes (\pi_w \circ q_I)(c) = \pi_y \otimes \pi_w) \circ (q_I \otimes q_I)(c) = 0,$$

如所需。□

命题 5.2 的证明。为了证明 $A_{\mathbb{P}}$ 是一个紧量子群，只需证明 J是一个 Woronowicz 理想。换言之，我们需要证明 $\Delta(J) \subset \ker(q_J \otimes q_J)$

其中 $q_J\colon \mathbb{A}_X \to \mathbb{A}_X/J =: A_{\mathbb{P}}$ 是商映射。由于 J 是由$\bigcup_{w\in X^*}\rho_w(I)$生成的理想，只需证明

$$(q_J\otimes q_J)(\Delta\circ\rho_w(i))=0$$

对于任意 $i\in I$ 和 $w\in X^*$。由于 I 是一个 Woronowicz 理想，我们知道 $\Delta(i)\in \ker(q_I\otimes q_I)$。因此，根据引理 5.3 和 5.4 可得

$$\begin{aligned}(q_J\otimes q_J)(\Delta\circ\rho_w(i)) &= (q_J\otimes q_J)\left(\sum_{y\in X^n}(1\otimes a_{y,w})(\rho_y\otimes\rho_w)(\Delta(i))\right)\\ &= \sum_{y\in X^n}(1\otimes q_J(a_{y,w}))(q_J\circ\rho_y\otimes q_J\circ\rho_w)(\Delta(i))\\ &= 0.\end{aligned}$$

最后，$A_{\mathbb{P}}$ 是自相似的，因为根据 J 的定义，对于任意 $w\in X^*$，我们有 $\rho_w(J)\subset J$。□

5.3. 自由圈积。众所周知，对于任意 $d\geq 1$，群 Aut($X^{[d+1]}$) 与绳积 Aut($X^{[d]}$) ≀Sym(X) 同构。由于 Aut(X^*) 是群 Aut($X^{[d]}$) 关于 d 的逆极限，因此可以将其视为无穷次迭代的绳积 $\ldots\wr\mathrm{Sym}(X)\wr\mathrm{Sym}(X)$。由此可得 Aut($X^*$) ≅Aut($X^*$) ≀Sym($X$)。更一般地，文献[4] 证明，若 $P\leq \mathrm{Sym}(X)=\mathrm{Aut}(X^{[1]})$，则有限约束自相似群 G_P是无穷次迭代的绳积 $\ldots\wr P\wr P$。本节将在定理 5.7 中证明这一结果关于有限约束自相似量子群的一个类似结论。

在 [3], Bichon 构造了一个紧量子群与量子置换群 $\mathbb{A}_s(n)$ 的自由绳积。Bichon 还在 [3] 的注 2.4 中指出，这一构造对于由 $\mathbb{A}_s(n)$ 的量子子群所作的自由绳积也有自然的类似形式。在本节中，我们将这一概念正式扩展到由 $\mathbb{A}_s(n)$ 的任意量子子群所作的自由绳积，并证明由 $A_s(n)$ 的量子子群 $\mathbb{P}$ 诱导的有限约束自相似量子群 $A_{\mathbb{P}}$ 是一个由 $\mathbb{P}$ 作出的自由绳积。我们先回顾 [3]中的自由绳积定义；注意，我们使用记号 $\mathbb{A}_1$，而非 $A_s(|X|)$。

定义 5.5. 设 X 是一个至少含有两个元素的集合。设 (A,Φ) 是一个紧量子群，且 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{A}_1$的一个量子子群。对于每个 $x\in X$，我们用 ν_x 表示 A 在自由积 C^*-代数 $(*_{x\in X}A)*\mathbb{P}$中的嵌入。A 与 $\mathbb{P}$ 的自由绳积是 $(*_{x\in X}A)*\mathbb{P}$ 对由下列元素生成的双边理想取商所得的结果

$$\nu_x(a)q_I(a_{x,y})-q_I(a_{x,y})\nu_x(a),\ x,y\in X, a\in A.$$

由此得到的 C^*-代数记为 $A*_{X,\ w}\mathbb{P}$，商映射记为 q_w。若已知 X，通常只写作 $A*_w\mathbb{P}$。

定理 5.6。设 $(A,\ \Phi)$ 是一个紧量子群，且 $\mathbb{P}$ 是$\mathbb{A}_1$的量子子群。根据定义 5.5，自由圈积 $A*_w\mathbb{P}$ 是一个具有余乘法 Φ_w 并满足

$$\Phi_w(q_w(q_I(a_{x,y})))=\sum_{z\in X}q_w(q_I(a_{x,z}))\otimes q_w(q_I(a_{z,y})) \tag{5.1}$$

$$\Phi_w(q_w(\nu_x(a)))=\sum_{z\in X}(q_w\otimes q_w)\big((\nu_x\otimes\nu_z)(\Phi(a))(q_I(a_{x,z})\otimes 1)\big), \tag{5.2}$$

对每个 x、$y \in X$ 和 $a \in A$。

证明。由于 I 是 Woronowicz 理想，我们有 $\Delta|_I \subseteq \ker(q_I \otimes q_I)$，因此映射 $(q_I \otimes q_I) \circ \Delta_{\mathbb{A}_1}$ 可下降为一个映射

$$\phi\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} \subseteq ((*_{x\in X} A) * \mathbb{P})^{\otimes 2}.$$

于是 $(q_w \otimes q_w) \circ \phi\colon \mathbb{P} \to (A *_w \mathbb{P})^{\otimes 2}$ 满足

$$(q_w \otimes q_w) \circ \phi(q_I(a_{x,y})) = \sum_{z\in X} q_w(q_I(a_{x,z})) \otimes q_w(q_I(a_{z,y})) \quad \text{for all } x, y \in X.$$

对于每个 $x \in X$，考虑连续线性映射 $\phi_x\colon A \to (A *_w \mathbb{P})^{\otimes 2}$，其定义为

$$\phi_x(a) = (q_w \otimes q_w)\left(\sum_{z\in X} (\nu_x \otimes \nu_z)(\Phi(a))(q_I(a_{x,z}) \otimes 1)\right).$$

我们断言 ϕ_x 是一个同态。为此，设 $\{a^\lambda = (a^\lambda_{i,\,j}) \in M_{d_\lambda}(A)\colon \lambda \in \Lambda\}$是一个由矩阵组成的族，满足定义 2.2 中的 (1)–(3)，并令 $\mathcal{A}$ 为由元素 $a^\lambda_{i,\,j}$ 张成的 $*$ 子代数。令 a, $b \in \mathcal{A}$，并使用 Sweedler 记号将$\Phi(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ 和 $\Phi(b) = b_{(1)} \otimes b_{(2)}$写作。我们有

$$\phi_x(a)\phi_x(b) = \sum_{z,z'\in X} q_w\left(\nu_x(a_{(1)})q_I(a_{x,z})\nu_x(b_{(1)})q_I(a_{x,z'})\right) \otimes q_w(\nu_z(a_{(2)})\nu_{z'}(b_{(2)})),$$

然后，由于

$$\begin{aligned} q_w\left(\nu_x(a_{(1)})q_I(a_{x,z})\nu_x(b_{(1)})q_I(a_{x,z'})\right) &= q_w\left(\nu_x(a_{(1)}b_{(1)})q_I(a_{x,z}a_{x,z'})\right) \\ &= \delta_{z,z'} q_w\left(\nu_x(a_{(1)}b_{(1)})q_I(a_{x,z})\right), \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} \phi_x(a)\phi_x(b) &= \sum_{z\in X} q_w\left(\nu_x(a_{(1)}b_{(1)})q_I(a_{x,z})\right) \otimes q_w(\nu_z(a_{(2)})\nu_z(b_{(2)})) \\ &= (q_w \otimes q_w)\left(\sum_{z\in X} (\nu_x \otimes \nu_z)(a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)})(q_I(a_{x,z}) \otimes 1)\right) \\ &= (q_w \otimes q_w)\left(\sum_{z\in X} (\nu_x \otimes \nu_z)(\Phi(ab))(q_I(a_{x,z}) \otimes 1)\right) \\ &= \phi_x(ab). \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{A}$ 在 A中稠密，因此可知 ϕ_x 是 A上的同态。

$\widetilde{\ }$（$*_{x\in X} A$）的泛性质 $* \mathbb{P}$现在给出了一个同态 $\Phi\colon (*_{x\in X} A) * \mathbb{P} \to (A *_w \mathbb{P})^{\otimes 2}$，满足

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}(q_I(a_{x,y})) &= \sum_{z\in X} q_w(q_I(a_{x,z})) \otimes q_w(q_{\mathbb{P}}(a_{z,y})), \\ \widetilde{\Phi}(\nu_x(a)) &= \sum_{z\in X} (q_w \otimes q_w)\big((\nu_x \otimes \nu_z)(\Phi(a))(q_I(a_{x,z}) \otimes 1)\big). \end{aligned}$$

对于每个 $a \in \mathcal{A}, x, y \in X$，我们有

$$\widetilde{\Phi}(\nu_x(a)q_I(a_{x,y})) = \sum_{z,z'\in X} q_w\left(\nu_x(a_{(1)})q_I(a_{x,z})q_I(a_{x,z'})\right) \otimes q_w(\nu_z(a_{(2)})q_I(a_{z',y}))$$

$$= \sum_{z,z'\in X} q_w\left(q_I(a_{x,z})\nu_x(a_{(1)})q_I(a_{x,z'})\right)\otimes q_w(q_I(a_{z',y})\nu_z(a_{(2)}))$$
$$= \widetilde{\Phi}(q_I(a_{x,y})\nu_x(a)).$$

$\sim$ $\sim$ $\sim$由此可得，对于每个 $a\in A, x, y\in X$， $\Phi(\nu_x(a)q_I(a_{x,y})) = \Phi(q_I(a_{x,y})\nu_x(a))$，因此 Φ下降到所需的 Φ_w： $A *_w \mathbb{P}\to (A *_w \mathbb{P})^{\otimes 2}$。

我们现在断言，$(\mathrm{id}\otimes\Phi_w)\circ\Phi_w = (\Phi_w\otimes \mathrm{id})\circ\Phi_w$。由于 $\mathcal{A}$ 在 A中稠密，要证明 $(\mathrm{id}\otimes\Phi_w)\circ\Phi_w$ 和 $(\Phi_w\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_w$ 在每个 $q_w(\nu_x(A))$ 上一致，只需证明

$$(\mathrm{id}\otimes\Phi_w)\circ\Phi_w(q_w(\nu_x(a^\lambda_{i,j}))) = (\Phi_w\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_w(q_w(\nu_x(a^\lambda_{i,j}))), \text{ for all } \lambda\in\Lambda, 1\le i,j\le d_\lambda.$$

利用（5.1）和（5.2进行常规计算可知，该等式两边均等于

$$\sum_{z,z'\in X}\sum_{1\le k,l\le d_\lambda} q_w^{\otimes 3}\big(\nu_x(a^\lambda_{i,k})q_I(a_{x,z})\otimes\nu_z(a^\lambda_{k,l})q_I(a_{z,z'})\otimes\nu_{z'}(a^\lambda_{l,j})\big),$$

因此二者相等。所以，对于每个 $x\in X$，有 $(\mathrm{id}\otimes\Phi_w)\circ\Phi_w(q_q(\nu_x(A))) = (\Phi_w\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_w(q_q(\nu_x(A)))$。直接计算可知，将 $(\mathrm{id}\otimes\Phi_w)\circ\Phi_w$ 和 $(\Phi_w\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_w$ 分别代入 $q_I(a_{x,\ y})$ 得到

$$\sum_{z,z'\in X} q_w^{\otimes 3}\left(q_I^{\otimes 3}\left(a_{x,z}\otimes a_{z,z'}\otimes a_{z',y}\right)\right).$$

因此我们有 $(\mathrm{id}\otimes\Phi_w)\circ\Phi_w = (\Phi_w\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_w$。

现在定义矩阵 a^X by $a^X_{x,y} := q_w(q_I(a_{x,y}))$，其中 $x,y\in X$；并且对于每个 $\lambda\in\Lambda$,$1\le i,j\le d_\lambda$, $x,y\in X$，元素

$$a^{(\lambda,X)}_{(i,x),(j,y)} := q_w(\nu_x(a^\lambda_{i,j})q_I(a_{x,y}))\in A *_w \mathbb{P},$$

定义矩阵 $a^{(\lambda,X)} = (a^{(\lambda,X)}{}_{(i,x),(j,y)})$. 为完成证明，我们必须证明这些矩阵满足定义 2.2。

我们有

$$\Phi_w(a^{(\lambda,X)}_{(i,x),(j,y)}) = \Big(\sum_{z\in X}(q_w\otimes q_w)\big((\nu_x\otimes\nu_z)(\Phi(a^\lambda_{i,j}))(q_I(a_{x,z})\otimes 1)\big)\Big)(q_w\circ q_I)^{\otimes 2}(\Delta(a_{x,y})).$$

我们知道矩阵 a^X 满足 (1)。对于每个 $z\in X$，我们有

$$\begin{aligned}
&(q_w\otimes q_w)\big((\nu_x\otimes\nu_z)(\Phi(a^\lambda_{i,j}))(q_I(a_{x,z})\otimes 1)\big)(q_w\circ q_I)^{\otimes 2}(\Delta(a_{x,y}))\\
&\quad= (q_w\otimes q_w)\Big((\nu_x\otimes\nu_z)\Big(\sum_{1\le k\le d_\lambda} a^\lambda_{i,k}\otimes a^\lambda_{k,j}\Big)(q_I(a_{x,z})\otimes 1)\Big)(q_w\circ q_I)^{\otimes 2}(\Delta(a_{x,y}))\\
&\quad= \sum_{1\le k\le d_\lambda}\big(q_w(\nu_x(a^\lambda_{i,k}))\otimes q_w(\nu_z(a^\lambda_{k,j}))\big)(q_w(q_I(a_{x,z}))\otimes 1)(q_w\circ q_I)^{\otimes 2}(\Delta(a_{x,y}))\\
&\quad= \sum_{1\le k\le d_\lambda}\big(q_w(\nu_x(a^\lambda_{i,k}))\otimes q_w(\nu_z(a^\lambda_{k,j}))\big)\sum_{z'\in X} q_w(q_I(a_{x,z}a_{x,z'}))\otimes q_w(q_I(a_{z',y}))\\
&\quad= \sum_{1\le k\le d_\lambda}\big(q_w(\nu_x(a^\lambda_{i,k}))\otimes q_w(\nu_z(a^\lambda_{k,j}))\big)(q_w(q_I(a_{x,z}))\otimes q_w(q_I(a_{z,y})))\\
&\quad= \sum_{1\le k\le d_\lambda} q_w(\nu_x(a^\lambda_{i,k})q_I(a_{x,z}))\otimes q_w(\nu_z(a^\lambda_{k,j})q_I(a_{z,y})).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\Phi_w(a^{(\lambda,X)}_{(i,x),(j,y)}) &= \sum_{z\in X}\sum_{1\le k\le d_\lambda} q_w(\nu_x(a^\lambda_{i,k})q_I(a_{x,z}))\otimes q_w(\nu_z(a^\lambda_{k,j})q_I(a_{z,y}))\\ &= \sum_{z\in X}\sum_{1\le k\le d_\lambda} a^{(\lambda,X)}_{(i,x),(k,z)}\otimes a^{(\lambda,X)}_{(k,z),(j,y)},\end{aligned}$$

因此（1 ）对所有矩阵 $a^{(\lambda,X)}$ 均成立。为证明 $a^{(\lambda,X)}$ 可逆，我们定义 $b^{(\lambda,X)}$ b y

$$b^{(\lambda,X)}_{(i,x),(j,y)} := q_w(q_I(a_{y,x})\nu_y((a^\lambda)^{-1}_{i,j})).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}(a^{(\lambda,X)}b^{(\lambda,X)})_{(i,x),(j,y)} &= \sum_{z\in X}\sum_{1\le k\le d_\lambda} a^{(\lambda,X)}_{(i,x),(k,z)}b^{(\lambda,X)}_{(k,z),(j,y)}\\ &= q_w\Big(\sum_{z\in X}\sum_{1\le k\le d_\lambda}\nu_x(a^\lambda_{i,k})q_I(a_{x,z})q_I(a_{y,z})\nu_y((a^\lambda)^{-1}_{k,j})\Big)\\ &= \delta_{x,y}q_w\Big(\sum_{1\le k\le d_\lambda}\nu_x(a^\lambda_{i,k})\Big(\sum_{z\in X}q_I(a_{x,z})\Big)\nu_x((a^\lambda)^{-1}_{k,j})\Big)\\ &= \delta_{x,y}q_w\Big(\nu_x\Big(\sum_{1\le k\le d_\lambda}a^\lambda_{i,k}(a^\lambda)^{-1}_{k,j}\Big)\Big)\\ &= \delta_{x,y}q_w(\nu_x((a^\lambda(a^\lambda)^{-1})_{i,j}))\\ &= \delta_{x,y}\delta_{i,j}1.\end{aligned}$$

类似的计算表明 $(b^{(\lambda,X)}a^{(\lambda,X)})_{(i,x),\ (j,y)} = \delta_{x,\ y}\delta_{i,\ j}1$，因此 $a^{(\lambda,X)}$ 可逆。类似的计算还表明， $c^{(\lambda,X)}$ 的元素为

$$c^{(\lambda,X)}_{(i,x),(j,y)} := q_w(q_I(a_{x,y})\nu_x(((a^\lambda)^T)^{-1}_{i,j}))$$

是 $(a^{(\lambda,X)})^T$ 的逆。

我们还有

$$(a^X(a^X)^T)_{x,y} = \sum_{z\in X}a^X_{x,z}a^X_{y,z} = q_w\left(q_I\left(\sum_{z\in X}a_{x,z}a_{y,z}\right)\right) = \delta_{x,y}1.$$

同样，$(a^X)^Ta^X$是单位元。因此， a^X和$(a^X)^T$互为逆元，且（2）成立。

现在我们断言，矩阵 $\{a^{(\lambda,X)}:\ \lambda\in\Lambda\}\cup\{a^X\}$ 的各个条目张成$A *_{X,\ w}\mathbb{P}$的一个稠密子集。对于每个 x、 $y\in X$，显然 $q_w(q_I(a_{x,\ y}))$属于此张成空间，因为它们是 a^X的条目。对于每个 $x\in X$、$\lambda\in\Lambda$ 以及 $1\le i$、 $j\le d_\lambda$，我们有

$$\sum_{y\in X}a^{(\lambda,X)}_{(i,x),(j,y)} = q_w\left(\nu_x(a^\lambda_{i,j})q_I\left(\sum_{y\in X}a_{x,y}\right)\right) = q_w(\nu_x(a^\lambda_{i,j})),$$

因此，每个 $q_w(\nu_x(a^\lambda_{i,\ j}))$都属于这些条目的张成空间。断言得证，因此（3）成立。□

定理 5.7. 设 $A_\mathbb{P}$ 是符合定义 5.1意义下的有限约束自相似量子群。存在一个含幺量子群同构 π: $A_\mathbb{P}\to A_\mathbb{P}*_w\mathbb{P}$ 满足

$$\pi(q_J(a_{xu,yv})) = q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big) \tag{5.3}$$

对所有 $x,y\in X$, $u,v\in X^m$, $m\geq 0$ 均成立。

证明。我们定义 $b_{\varnothing,\ \varnothing}$ 为 $A_{\mathbb{P}}*_w\mathbb{P}$的单位元，并且对每个 $x,y\in X$, $u,v\in X^m, m\geq 0$,

$$b_{xu,yv}:=q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big).$$

我们断言，这给出了一个满足定义 3.2中 (1)–(3) 的投影族。根据定义，条件 (1) 成立。我们有

$$\begin{aligned}b^*_{xu,yv}&=q_w\big(\nu_x(q_J(a^*_{u,v}))q_I(a^*_{x,y})\big)\\&=q_w\big(\nu_x(q_J(a_{u,v}))q_I(a_{x,y})\big)\\&=q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big)\\&=b_{xu,yv}\end{aligned}$$

and

$$b^2_{xu,yv}=q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big)=q_w\big(q_I(a^2_{x,y})\nu_x(q_J(a^2_{u,v}))\big)=b_{xu,yv}.$$

So (2) holds. For each $w\in X$ we have

$$\begin{aligned}\sum_{z\in X}b_{xuw,yvz}&=\sum_{z\in X}q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{uw,vz}))\big)\\&=q_w\Big(q_I(a_{x,y})\nu_x\Big(q_J\Big(\sum_{z\in X}a_{uw,vz}\Big)\Big)\Big)\\&=q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big)\\&=b_{xu,yv},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{z\in X}b_{xuz,yvw}&=\sum_{z\in X}q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{uz,vw}))\big)\\&=q_w\Big(q_I(a_{x,y})\nu_x\Big(q_J\Big(\sum_{z\in X}a_{uz,vw}\Big)\Big)\Big)\\&=q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big)\\&=b_{xu,yv},\end{aligned}$$

因此 (3) 成立。这就证明了该断言，因而 $\mathbb{A}_X$ 的泛性质现在给出一个同态 $\widetilde{\pi}\colon\ \mathbb{A}_X\to A_{\mathbb{P}}*_w\mathbb{P}$，满足

$$\widetilde{\pi}(a_{xu,yv})=q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big),$$

对所有 $x,y\in X$, $u,v\in X^m$, $m\geq 0$均成立。

我们现在断言 J 包含于 $\ker\widetilde{\pi}$。为此，固定 $w\in X^n$，其中 $w=w_1w'$ 对于$w_1\in X, w'\in X^{n-1}$。我们首先证明如下断言：对每个 $x_k:=a_{u_1,\ v_1}\cdots a_{u_k,\ v_k}$，其中$k\geq 1$，且每一对 $u_i,v_i\in X^{m_i}$ 对应某个 $m_i\geq 0$，都有

$$\widetilde{\pi}(\rho_w(x_k))=\sum_{y\in X}q_w\big(q_I(a_{y,w_1})\nu_y(q_J(\rho_{w'}(x_k)))\big).\tag{5.4}$$

令 $k=1$。则

$$\widetilde{\pi}(\rho_w(a_{u_1,v_1}))=\sum_{y\in X}\sum_{\alpha\in X^{n-1}}\widetilde{\pi}(a_{y\alpha u_1,wv_1})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{y\in X}\sum_{\alpha\in X^{n-1}} q_w\big(q_I(a_{y,w_1})\nu_y(q_J(a_{\alpha u_1,w'v_1}))\big)\\
&= \sum_{y\in X} q_w\Big(q_I(a_{y,w_1})v_y\Big(q_J\Big(\sum_{\alpha\in X^{n-1}} a_{\alpha u_1,w'v_1}\Big)\Big)\Big)\\
&= \sum_{y\in X} q_w\big(q_I(a_{y,w_1})\nu_y(q_J(\rho_{w'}(a_{u_1,v_1})))\big),
\end{aligned}
$$

因此，（5.4）对 $k=1$ 成立。现在假设对 x_k 成立，并证明对 x_{k+1} 也成立。注意，对于 y, $y'\in X$，我们有 $q_I(a_{y,w_1})q_I(a_{y',w_1}) = \delta_{y,y'}q_I(a_{y,w_1})$，因此

$$
\begin{aligned}
&q_w\big(q_I(a_{y,w_1})\nu_y(q_J(\rho_{w'}(x_k)))q_I(a_{y',w_1})\nu_{y'}(q_J(\rho_{w'}(a_{u_{k+1},v_{k+1}})))\big)\\
&\qquad= q_w\big(\nu_y(q_J(\rho_{w'}(x_k)))q_I(a_{y,w_1})q_I(a_{y',w_1})\nu_{y'}(q_J(\rho_{w'}(a_{u_{k+1},v_{k+1}})))\big)\\
&\qquad= \delta_{y,y'}q_w\big(\nu_y(q_J(\rho_{w'}(x_k)))q_I(a_{y,w_1})\nu_y(q_J(\rho_{w'}(a_{u_{k+1},v_{k+1}})))\big)\\
&\qquad= \delta_{y,y'}q_w\big(q_I(a_{y',w_1})\nu_y(q_J(\rho_{w'}(x_k)))\nu_y(q_J(\rho_{w'}(a_{u_{k+1},v_{k+1}})))\big)\\
&\qquad= \delta_{y,y'}q_w\big(q_I(a_{y',w_1})\nu_y(q_J(\rho_{w'}(x_k a_{u_{k+1},v_{k+1}})))\big).
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\widetilde{\pi}(\rho_w(x_{k+1})) = \widetilde{\pi}(\rho_w(x_k))\widetilde{\pi}(\rho_w(a_{u_{k+1},v_{k+1}})) = \sum_{y\in X} q_w\big(q_I(a_{y',w_1})\nu_y(q_J(\rho_{w'}(x_k a_{u_{k+1},v_{k+1}})))\big),
$$

并且可得（5.4）对所有 k成立。由于形如x_k 的乘积的线性组合构成 $\mathbb{A}_X$的稠密子代数，因此可得

$$
\widetilde{\pi}(\rho_w(a)) = \sum_{y\in X} q_w\big(q_I(a_{y,w_1})\nu_y(q_J(\rho_{w'}(a)))\big)
$$

对所有 $a\in\mathbb{A}_X$。现在，若 $a\in I$，则 $\rho_{w'}(a)\in J = \ker q_J$，因此上述等式表明 $\widetilde{\pi}(\rho_w(a)) = 0$。于是，对所有 $w\in X^n$ 和 $a\in I$，$\rho_w(a)\in\ker\widetilde{\pi}$，从而$J\subseteq\ker\widetilde{\pi}$。这意味着 $\widetilde{\pi}$可下降为一个同态 $\pi\colon A_{\mathbb{P}}\to A_{\mathbb{P}}*_w\mathbb{P}$，满足

$$
\pi(q_J(a_{xu,yv})) = q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big)
$$

对所有 $x,y\in X$, $u,v\in X^m$, $m\geq 0$。

现在我们证明 π 是一个同构，方法是求出其逆映射。对于每个 $x\in X$，考虑同态 $q_J\circ\sigma_x\colon \mathbb{A}_X\to A_{\mathbb{P}}$，其中 σ_x是备注 4.3中的同态。由于 $\sigma_x = \kappa\circ\rho_x\circ\kappa$，并且根据[10, 备注 2.10] 可知 $\kappa(J)\subseteq J$，因此可得 $q_J\circ\sigma_x$ 可下降为一个同态 $\phi_x\colon A_{\mathbb{P}}\to A_{\mathbb{P}}$，满足

$$
\phi_x(q_J(a_{u,v})) = q_J(\sigma_x(a_{u,v})) = \sum_{y\in X} q_J(a_{xu,yv}),
$$

对所有 u、$v\in X^m$、$m\geq 0$。

每个 ϕ_x，以及从 $\mathbb{P}$ 到 $A_{\mathbb{P}}$ 的映射 $q_I(a)\mapsto q_J(a)$，现在使我们能够应用自由积 $(*_{x\in X}A_{\mathbb{P}})*\mathbb{P}$ 的泛性质，从而得到一个同态 $\phi\colon (*_{x\in X}A_{\mathbb{P}})*\mathbb{P}\to\widetilde{A_{\mathbb{P}}}$，满足对于每个 $x\in X$，都有 $\phi\circ\nu_x = \phi_x$，并且对于所有 $a\in\mathbb{A}_1\subseteq\mathbb{A}_X$，都有 $\phi(q_I(a)) = q_J(a)$。我们断言，

$$
\widetilde{\phi}\big(\nu_x(q_J(a_{u,v}))q_I(a_{x,y}) - q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big) = 0,
$$

对每个 $x\in X$, $u,v\in X^m$, $m\in\mathbb{N}$。我们有

$$
\widetilde{\phi}\big(\nu_x(q_J(a_{u,v}))q_I(a_{x,y}) - q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi_x(q_J(a_{u,v}))q_J(a_{x,y}) - q_G(a_{x,y})\phi_x(q_J(a_{u,v})) \\
&= \sum_{y\in X} q_J(a_{xu,yv})q_J(a_{x,y}) - \sum_{y'\in X} q_J(a_{x,y})q_J(a_{xu,y'v}) \\
&= q_J(a_{xu,yv}) - q_J(a_{xu,yv}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

~由此可知， ϕ 下降为一个同态 ϕ: $A_{\mathbb{P}} *_w \mathbb{P} \to A_{\mathbb{P}}$ ，满足

$$\phi(q_w(\nu_x(q_J(a_{u,v})))) = q_J(\sigma_x(a_{u,v})) = \sum_{y\in X} q_J(a_{xu,yv})$$

对所有 $x \in X$、 u、 $v \in X^m$、 $m \geq 0$，以及

$$\phi(q_w(q_I(a_{x,y}))) = q_J(a_{x,y})$$

对所有 x、 $y \in X$。

我们断言， π和 ϕ互为逆元。对于 x、 $y \in X$、 u、 $v \in X^m$、 $m \geq 0$，有

$$\phi(\pi(q_J(a_{xu,yv}))) = \phi\big(q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big)\big) = q_J(a_{x,y})\sum_{y\in X} q_J(a_{xu,yv}) = q_J(a_{xu,yv}),$$

由此可知， $\phi\circ\pi$是 $A_{\mathbb{P}}$上的单位元。对于 $x \in X$、 u、 $v \in X^m$、 $m \geq 0$，有

$$
\begin{aligned}
\pi(\phi(q_w(\nu_x(q_J(a_{u,v}))))) &= \pi\Big(\sum_{y\in X} q_J(a_{xu,yv})\Big) \\
&= \sum_{y\in X} q_w\big(q_I(a_{x,y})\nu_x(q_J(a_{u,v}))\big) \\
&= q_w\Big(q_I\Big(\sum_{y\in X} a_{x,y}\Big)\nu_x(q_J(a_{u,v}))\Big) \\
&= q_w(\nu_x(q_J(a_{u,v}))),
\end{aligned}
$$

并且对于所有 x、 $w \in X$ ，有

$$\pi(\phi(q_w(q_I(a_{x,y})))) = \pi(q_J(a_{x,y})) = q_w(q_I(a_{x,y})).$$

因此， $\pi\circ\phi$ 是 $A_{\mathbb{P}} *_w \mathbb{P}$上的单位元，所以 π 是一个同构。

现在我们需要证明 π 是紧量子群的同态，这意味着 $\Delta_w\circ\pi = (\pi\otimes\pi)\circ\Delta_J$，其中 Δ_J是 $A_{\mathbb{P}}$上的余乘法。对于 $x, y \in X$,$u, v \in X^m$, $m \geq 0$，我们有

$$
\begin{aligned}
&(\pi\otimes\pi)\circ\Delta_J(q_J(a_{xu,yv})) \\
&\quad= \sum_{\alpha^{m+1}} \pi(q_J(a_{xu,\alpha}))\otimes\pi(q_J(a_{\alpha,yv})) \\
&\quad= \sum_{z\in X}\sum_{\beta\in X^m} \pi(q_J(a_{xu,z\beta}))\otimes\pi(q_J(a_{z\beta,yv})) \\
&\quad= \sum_{z\in X}\sum_{\beta\in X^m} q_w\big(q_I(a_{x,z})\nu_x(q_J(a_{u,\beta}))\big)\otimes q_w\big(q_I(a_{z,y})\nu_x(q_J(a_{\beta,v}))\big).
\end{aligned}
$$

我们有

$$\Delta_w\circ\pi(q_J(a_{xu,yv})) = \Delta_w(q_w(q_I(a_{x,y})))\Delta_w(q_w(\nu_x(q_J(a_{u,v})))),$$

其中

$$\Delta_w(q_w(q_I(a_{x,y}))) = \sum_{z\in X} q_w(q_I(a_{x,z})) \otimes q_w(q_{\mathbb{P}}(a_{z,y})), \tag{5.5}$$

and

$$\begin{aligned}\Delta_w(q_w(\nu_x(q_J(a_{u,v})))) &= \sum_{z'\in X} (q_w\otimes q_w)\big((\nu_x\otimes\nu_{z'})(\Delta_J(q_J(a_{u,v})))(q_I(a_{x,z'})\otimes 1)\big)\\ &= \sum_{z'\in X}\sum_{\beta\in X^m} q_w\big(\nu_x(q_J(a_{u,\beta}))q_I(a_{x,z'})\big)\otimes q_w\big(\nu_{z'}(q_J(a_{\beta,v}))\big). \end{aligned}\tag{5.6}$$

表达式 (5.5) 与 (5.6) 的乘积中的一个典型项为

$$\begin{aligned} &q_w\big(q_I(a_{x,z})\nu_x(q_J(a_{u,\beta}))q_I(a_{x,z'})\big)\otimes q_w\big(q_{\mathbb{P}}(a_{z,y})\nu_{z'}(q_J(a_{\beta,v}))\big)\\ &\quad= q_w\big(\nu_x(q_J(a_{u,\beta}))q_I(a_{x,z})q_I(a_{x,z'})\big)\otimes q_w\big(q_{\mathbb{P}}(a_{z,y})\nu_{z'}(q_J(a_{\beta,v}))\big)\\ &\quad= \delta_{z,z'}q_w\big(\nu_x(q_J(a_{u,\beta}))q_I(a_{x,z})\big)\otimes q_w\big(q_{\mathbb{P}}(a_{z,y})\nu_z(q_J(a_{\beta,v}))\big)\\ &\quad= \delta_{z,z'}q_w\big(q_I(a_{x,z})\nu_x(q_J(a_{u,\beta}))\big)\otimes q_w\big(q_{\mathbb{P}}(a_{z,y})\nu_z(q_J(a_{\beta,v}))\big). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta_w\circ\pi(q_J(a_{xu,yv})) &= \sum_{z\in X} q_w(q_I(a_{x,z}))\otimes q_w(q_{\mathbb{P}}(a_{z,y}))\\ &= \sum_{z\in X}\sum_{\beta\in X^m} q_w\big(q_I(a_{x,z})\nu_x(q_J(a_{u,\beta}))\big)\otimes q_w\big(q_I(a_{z,y})\nu_x(q_J(a_{\beta,v}))\big)\\ &= (\pi\otimes\pi)\circ\Delta_J(q_J(a_{xu,yv})),\end{aligned}$$

由此可得 $\Delta_w\circ\pi = (\pi\otimes\pi)\circ\Delta_J$。 □

例 5.8。 定理 5.7 的一个直接推论是 $A_{\mathbb{P}}$ 在 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{A}_1$的一个非交换量子子群时，是非交换的。此类例子可见于 Banica 和 Bichon 的 [1, 定理 1。1], 其中他们对 $\mathbb{P}$ 的所有量子子群进行了分类 $\mathbb{A}_1$ 当 $|X| = 4$；相应的量子群列表 $A_{\mathbb{P}}$ 为我们提供了一系列值得进一步研究的潜在有趣的自相似量子群。

References

[1] T. Banica，J. Bichon，作用于 4 个点上的量子群，《J. reine angew. Math.》626（2009），75–114。[2] J. Bichon，有限图的量子自同构群，《Proc. Amer. Math. Soc.》131（2003），665–673。[3] J. Bichon，量子置换群的自由圈积，《Algebr. Represent. Theory》7（2004），343–362。[4] I. Bondarenko，I. Samilovych，关于有限型自相似群的有限生成性，《Internat. J. Algebra Comput.》23（2013），69–79。[5] R.I. 格里戈尔丘克，关于周期群的 Burnside 问题，《Func. Anal. Appl.》14（1980），41–43。[6] R.I. 格里戈尔丘克，围绕一个群的已解决与未解决问题，载于《无限群：几何、组合与动力学方面》，第 248 卷，L. Bartholdi、T. Ceccherini-Silberstein、T. Smirnova-Nagnibeda 和 A. Zuk 编，数学进展丛书（Birkh¨auser Boston，2005），117–218。[7] I. Raeburn，A. M. Sinclair，由两个投影生成的 C^*-代数，《Math. Scand.》65（1989），278–290。[8] L. Rollier，S. 瓦埃斯，连通局部有限图的量子自同构群与离散群的量子化，arXiv:2209.03770。[9] Z. ˇSuni´c，树自同构群的模式闭包，《Bull. Math. Sci.》1（2011），115–127。[10] S. Wang，紧量子群的自由积，《Communications in Mathematical Physics》167（1995），671–692。

[11] S. Wang，有限空间的量子对称群，《Communications in Mathematical Physics》**195** （1998） 195–211。[12] S.L. Woronowicz，扭曲的SU(2) 群。一个非交换微分演算的例子，《京都大学数理解析研究所刊物》**23** （1987），117–181。[13] S.L. Woronowicz，紧矩阵伪群，《Comm. Math. Phys.》**111** （1987），613–665。[14]S.L. Woronowicz，紧量子群，Sym´etries quantiques（莱乌什，1995），North-Holland，阿姆斯特丹（1998）845–884。[15] C. Voigt，无限量子置换，arXiv:2208.01310。

.

Nathan Brownlowe, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, NSW2006, Australia.电子邮箱：nathan.brownlowe@sydney.edu.au

David Robertson, School of Science and Technology, University of New England, NSW 2351, Australia.电子邮箱：david.robertson@une.edu.au