arXiv:2302.01573v1 [math.FA] 3 Feb 2023

p-阶微分算子边值问题中的双曲 Zolotarev 函数

M.F. Bessmertnyĭ* V.A. Zolotarev†

摘要。构造了 p 阶导数自伴算子的一组基本解系。该解系类似于经典的正弦和余弦系。研究了这类函数的性质。描述了自伴边界条件的类别。对于三阶导数算子，计算了预解式，并给出了特征函数的标准正交基。

2010年数学学科分类。34L10，33B99

关键词。边值问题，基本解系，自伴性，算子预解式。

1 引言

经典调和傅里叶分析在很大程度上由二阶微分算子的谱理论所形成并发展起来（[1] – [4]）。这两个方向相互促进、彼此丰富，推动了精密数学工具体系的发展。傅里叶分析是这些领域（以及其他领域）中的重要研究工具。对于高阶微分算子，这一方法尚未得到全面发展，仅适用于一些特定情形 [5]。

标准三角函数是最简单的二阶微分算子的特征函数。据我们所知，高阶算子的三角函数和双曲函数类似物此前尚未得到研究。

*乌克兰，Kharkov，邮编61077，Svobody广场4号，V. N. Karazin Kharkov National University物理系。

†乌克兰国家科学院 B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering，地址：乌克兰，Kharkiv，61103，Nauky大道47号；V. N. Karazin Kharkov National University 高等数学与信息学系，地址：乌克兰，Kharkov，邮编61077，Svobody广场4号。

本文针对 p 阶算子提出了一组 p 个线性无关的函数；当 $p=2$ 时，这组函数与正弦和余弦构成的函数组一致。此外，还用这类函数描述了若干类自伴边界条件。对于三阶导数算子，本文计算了预解式，并给出了特征函数的标准正交基。值得注意的是，将这些函数用于 $p=3$，可以求解非局部势 $[6,7]$ 的逆谱问题和逆散射问题。

研究 $p>2$ 阶微分算子的重要性，例如体现在：寻找 Camassa-Holm 和 Degasperis-Procesi 非线性方程（[8]–[12]）的 $L-A$ 对，会引出一个三阶算子 L（三次弦）。

在构造 p-双曲函数（p-三角函数）时，p 次单位根群起着至关重要的作用。该群将复平面划分为 p 个扇形。任何 p-函数在任一扇形内各点的取值，完全由它在其中一个扇形内各点的取值决定。

本文结构安排如下。

在第 1 节中，经典的偶函数（奇函数）概念被推广到 $p>2$ 情形。命题 2.2 证明了将一个复值函数分解为 p 个 k_p-偶分量的唯一性。

p-双曲函数在第 3 节中作为最简单的 p 阶微分方程的基本解系引入。第 4 节给出了 p-双曲函数之间的主要关系，并以 $p=3$ 情形的公式为例。

对于 $p=3$ 的情形，第 5 节（命题 5.1）证明了三双曲函数的零点位于三个扇形各自的角平分线上。

第 6 节给出了非齐次柯西问题的通解。

第 7 节描述了 p 阶微分算子的自伴边界条件类别。请注意，在偶数情形（$p=2k$）下存在分离边界条件，而在奇数情形（$p=2k+1$）下则不存在此类边界条件。

作为 p-函数应用的一个示例，第 8 节利用一个三阶自伴算子的特征向量构造了标准正交基。第 9 节计算了该算子的预解式。

2 p次单位根。 k_p-偶函数

令 $p \in \mathbb{N}$ 且

$$\zeta_0 = 1,\ \zeta_1 = e^{i\frac{2\pi}{p}}, \ldots, \zeta_{p-1} = e^{i\frac{2\pi(p-1)}{p}} \tag{2.1}$$

是所有的 p次单位根。

每个复数 $z \in \mathbb{C}$ 乘以数ζ_m，相当于复平面绕原点旋转角度 $2\pi m/p$。这类旋转构成一个群，记作 G_p。数 (2.1) 在乘法这一群运算下构成一个交换群。我们将此群与群 G_p 等同。

G_p 是一个循环群。群 G_p 的每个元素都是元素 ζ_1的幂。如果数 p 是素数，则群 G_p中任意元素 $\zeta_m \neq \zeta_0 = 1$的幂 ζ_m^k,$k = 0$,$1, \ldots,$ $p-1$构成该群元素的一个排列。

注意， p次单位根满足关系式

$$\zeta_0^n + \zeta_1^n + \cdots + \zeta_{p-1}^n = 0, \quad \text{for every } n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\,(\mathrm{mod}\,p), \tag{2.2}$$

$$\zeta_j \zeta_m = \zeta_{j+m} \quad \text{where} \quad j + m := (j+m)(\mathrm{mod}\,p), \tag{2.3}$$

$$\overline{\zeta}_j = \frac{1}{\zeta_j} = \zeta_{p-j}. \tag{2.4}$$

此外，由 (2.2)、(2.3) 可得

$$\zeta_m^0 + \zeta_m^1 + \zeta_m^2 + \cdots + \zeta_m^{p-1} = \begin{cases} p, & \text{if } m = 0\,(\mathrm{mod}\,p), \\ 0, & \text{if } m \neq 0\,(\mathrm{mod}\,p). \end{cases} \tag{2.5}$$

设 X 是某个集合， Y 是一个线性空间。假设 G 是集合 X 上的变换群，并且

$$g \mapsto T_g, \quad T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2), \quad \text{for any} \quad g_1, g_2 \in G \tag{2.6}$$

是其由线性算子 $T_g\colon Y \to Y$ 给出的表示。

函数 $f: X \to Y$ 称为关于表示 (2.6) 不变，如果

$$T_g^{-1} f(g(x)) = f(x) \quad \text{or} \quad f(g(x)) = T_g f(x) \quad \text{for every} \quad g \in G.$$

例 2.1. 设 $X = Y = \mathbb{R}$，二元群 $G = \{g_1, g_2\} = \{1, -1\}$ 由实轴$\mathbb{R}$ 关于原点的镜面反射生成。群 G 在线性空间 $\mathbb{R}^1$ 中有两个线性表示：

(i) 平凡表示 $g_1 \mapsto 1, g_2 \mapsto 1$，(ii) 恒等表示 $g_1 \mapsto 1$，$g_2 \mapsto -1$。

$\mathbb{R}$ 上的函数若关于表示 (i) 不变，则称为偶函数；若关于表示 (ii) 不变，则称为奇函数。因此，同一个群可以产生多个不变函数的概念。

命题 2.1. 设 $p \in \mathbb{N}$ 和 $\zeta_m = e^{2\pi i m/p}$, $m = 0, 1, \ldots, p-1$ 为p 次单位根。若 $k \in \mathbb{N}$，则映射 $\zeta_m \mapsto T_p^k(\zeta_m)$：$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其中

$$T_p^k(\zeta_m)z = \zeta_m^k z, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.7}$$

是群 G_p 在线性空间 $\mathbb{C}^1$上的一个表示。对于 $k = 0$，表示 (2.7) 是平凡的：$T_p^0(\zeta_m)z \equiv z$。

证明。显然，$T_p^k(\zeta_m\zeta_n) = T_p^k(\zeta_m)T_p^k(\zeta_n)$. □

若集合 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 满足对于每个 $\zeta_m \in G_p$ 及每个 $z \in \Omega$，$z \in \Omega$ 蕴含 $\zeta_m z \in \Omega$，则称其为 G_p-不变集。特别地，复平面 $\mathbb{C}$ 是一个 G_p-不变集。

定义 2.1. 定义在 G_p-不变集 Ω 上的复值函数 $w = f(z)$，若其关于群 G_p 的表示 T_p^k (2.7) 不变，即，

$$f(\zeta_m z) = \zeta_m^k f(z), \quad \text{for} \quad m = 0, 1, \ldots, (p-1). \tag{2.8}$$

注 2.1. 对于 $p = 2$，所引入的 k_p-偶函数概念与标准概念一致（见例 2.1）。

我们需要一个引理。

引理 2.1. 设 $\zeta_m (m = 0, 1, \ldots, p-1)$ 是 p 次单位根，其中 $p \in \mathbb{N}$。则

$$U = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta_1 & \zeta_1^2 & \cdots & \zeta_1^{p-1} \\ 1 & \zeta_2 & \zeta_2^2 & \cdots & \zeta_2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_{p-1} & \zeta_{p-1}^2 & \cdots & \zeta_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

是一个酉矩阵，即 $UU^* = I$。

证明。我们有

$$1+\zeta_j\overline{\zeta}_j+\cdots+\zeta_j^{p-1}\overline{\zeta}_j^{p-1}=p,\quad \text{for}\quad j=0,1,\ldots,p-1,$$

由于 $\overline{\zeta}_j=\zeta_{p-j}$，其中 $p-j:=(p-j)(\mathrm{mod}\,p)$，因此由 (2.3) 和 (2.5) 得到 (2.4)

$$1+\zeta_k\overline{\zeta}_j+\cdots+\zeta_k^{p-1}\overline{\zeta}_j^{p-1}=1+\zeta_k\zeta_{p-j}+\cdots+\zeta_k^{p-1}\zeta_{p-j}^{p-1}=$$
$$1+\zeta_{k+p-j}+\cdots+\zeta_{k+p-j}^{p-1}=0\quad \text{for}\quad k\neq j.$$

这意味着 $UU^*=I$。 □

命题 2.2. 设 $f(z)$ 是定义在 aG_p-不变集 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 上的复值函数。那么 $f(z)$ 可唯一表示为

$$f(z)=f_0(z)+f_1(z)+\cdots+f_{p-1}(z),\tag{2.10}$$

其中

$$f_k(z)=\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{\zeta_m^k}f(\zeta_m z)\tag{2.11}$$

是一个 k_p-偶函数，$k=0,1,\ldots,p-1$。

证明. 我们有

$$f_k(\zeta_j z)=\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{\zeta_m^k}f(\zeta_m\zeta_j z)=\zeta_j^k\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{\zeta_{m+j}^k}f(\zeta_{m+j}z)=\zeta_j^k f_k(z).$$

此外,

$$\sum_{k=0}^{p-1}f_k(z)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{\zeta_m^k}f(\zeta_m z)=\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{\zeta_m^k}\right)f(\zeta_m z).$$

由（2.4）、（2.5）可得

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{\zeta_m^k}=\sum_{k=0}^{p-1}\overline{\zeta}_m^k=\begin{cases}p, & \text{if } m=0,\\ 0, & \text{if } m\neq 0.\end{cases}$$

因此,

$$\sum_{k=0}^{p-1}f_k(z)=f(z).$$

接下来，证明其唯一性。假设

$$\sum_{k=0}^{p-1} f_k(z) = \sum_{k=0}^{p-1} g_k(z),$$

其中 $f_k(z)$和 $g_k(z)$是 k_p-偶函数。因此，偶函数 $k_p(z) = f_k(z) - g_k(z)$（$h_k(\zeta_j z) = \zeta_j^k h_k(z)$）满足方程组

$$\begin{cases} h_0(z) + h_1(z) + h_2(z) + \cdots + h_{p-1}(z) = 0 \\ h_0(z) + \zeta_1 h_1(z) + \zeta_1^2 h_2(z) + \cdots + \zeta_1^{p-1} h_{p-1}(z) = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ h_0(z) + \zeta_{p-1} h_1(z) + \zeta_{p-1}^2 h_2(z) + \cdots + \zeta_{p-1}^{p-1} h_{p-1}(z) = 0 \end{cases}$$

根据引理 2.1，其系数矩阵非奇异。因此 $h_k(z) \equiv 0, k = 0, 1, \ldots, p-1$。

□

推论 2.1. 设 $p \in \mathbb{N}$。若 k_p-偶函数 $f_k(z)$在零点的某个邻域内解析，则其泰勒级数具有如下形式

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{k+np}. \tag{2.12}$$

证明. 由于分解式（2.10）的唯一性，只需将公式（2.11）应用于函数 $f_k(z)$的泰勒级数。 □

命题 2.3. 设 $f(z)$是可微的 k_p-偶函数。则其导数

$$\frac{df}{dz}(z)$$

是一个（$k-1$）p-偶函数。

证明。已知 $f(z) = (1/\zeta_m^k) f(\zeta_m z)$。那么

$$\frac{df}{dz}(z) = \frac{1}{\zeta_m^k} \frac{df}{dz}(\zeta_m z)\zeta_m = \frac{1}{\zeta_m^{k-1}} \frac{df}{dz}(\zeta_m z).$$

□

3 基本解系

我们关注该微分方程的解

$$\left(\frac{1}{i} D\right)^p y(x) = \lambda^p y(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ D = d/dx,\ \lambda \in \mathbb{C}), \tag{3.1}$$

其中 p 是一个自然数。

命题 3.1. 方程 (3.1) 的任意解均具有以下形式

$$y(x) = s(i\lambda x),$$

其中 $s(z)$ 是该方程的解

$$D^p s(z) = s(z), \quad (z \in \mathbb{C},\ D = d/dz). \tag{3.2}$$

证明。引入新函数 $s(z) = y(x)$，其中 $z = i\lambda x$，我们得到

$$\lambda^p s(z) = \lambda^p y(x) = (-i)^p \frac{d^p}{dx^p} y(x) = (-i)^p \frac{d^p}{dx^p} s(z) = (-i)^p \frac{d^p}{dz^p} s(z) \left(\frac{dz}{dx}\right)^p = (-i)^p i^p \lambda^p \frac{d^p}{dz^p} s(z) = \lambda^p \frac{d^p}{dz^p} s(z).$$

这意味着 (3.2)。显然，(3.2) 蕴含 (3.1)。 □

函数 $s(z) = e^z$ 是对所有 $p \in \mathbb{N}$ 都满足方程 (3.2) 的唯一解（相差一个乘法常数）。对于每个固定的 $p \in \mathbb{N}$，解 $s(z) = e^z$ 称为方程 (3.2) 的主解。

定义 3.1。设 p 为自然数，$\{\zeta_k\}_{k=0}^{p-1}$ 为 p 次单位根。k_p-偶函数分量

$$\boxed{s_k(z) = \frac{1}{p} \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{\zeta_m^k} e^{z\zeta_m}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1} \tag{3.3}$$

函数 e^z 的称为 p-双曲函数。

注 3.1。“p-双曲函数”这一名称源于以下事实：对于 $p = 2$ ($\zeta_0 = 1$, $\zeta_1 = -1$)，我们有

$$s_0(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cosh z, \quad s_1(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sinh z.$$

类比这种情况，我们称

$$c_k(z) = \frac{1}{i^k} s_k(iz), \quad k = 0, 1, \ldots, p-1 \tag{3.4}$$

为 p-三角函数。根据 (3.4)，只需研究 p-双曲函数的性质。

注意，根据命题 2.2，

$$s_0(z) + s_1(z) + \cdots + s_{p-1}(z) = e^z.$$

该恒等式是欧拉公式在情形 $p \neq 2$ 下的推广。

命题 3.2。 p-双曲函数 $s_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$ 是指数型整函数。这些函数
(i) 构成方程 (3.2) 的基本解系；(ii) 满足初始数据

$$D^n s_k(z)|_{z=0} = \begin{cases} 1, & \text{if } n = k, \\ 0, & \text{if } n \neq k, \end{cases} \quad k, n = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{3.5}$$

(iii) 具有导数

$$Ds_0(z) = s_{p-1}(z), \qquad Ds_k(z) = s_{k-1}(z), \quad k = 1, \ldots, p-1, \tag{3.6}$$

(iv) 可由泰勒级数表示

$$s_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{k+pn}}{(k+pn)!}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{3.7}$$

(v) 当 z 为实数时取实值，即

$$\overline{s_k(z)} = s_k(\overline{z}), \quad k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{3.8}$$

(vi)

$$\det W[s_k(z)] = \begin{vmatrix} s_0(z) & s_1(z) & \cdots & s_{p-1}(z) \\ s_0'(z) & s_1'(z) & \cdots & s_{p-1}'(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^{(p-1)}(z) & s_1^{(p-1)}(z) & \cdots & s_{p-1}^{(p-1)}(z) \end{vmatrix} \equiv 1. \tag{3.9}$$

证明。(ii)、(iii) 和 (iv) 可由定义 3.1 和关系式 (2.2)–(2.5) 得出。(v) 可由 (iv) 得出。
(vi)。由 (iii) 可得

$$W[s_k(z)] = \begin{pmatrix} s_0(z) & s_1(z) & \cdots & s_{p-1}(z) \\ s_{p-1}(z) & s_0(z) & \cdots & s_{p-2}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1(z) & s_2(z) & \cdots & s_0(z) \end{pmatrix} = U\Lambda(z)U^*, \tag{3.10}$$

其中，酉矩阵 U 由关系式 (2.9) 定义，且

$$\Lambda(z) = \operatorname{diag}\{e^{z\zeta_0}, e^{z\zeta_1}, \ldots, e^{z\zeta_{p-1}}\}.$$

由于

$$\det \Lambda(z) = e^{z(\zeta_0+\zeta_1+\cdots+\zeta_{p-1})} = e^0 = 1,$$

则 det $W[s_k(z)] \equiv 1$。
(i). 由 (iii) 得到 $D^p s_k(z) = s_k(z), \quad k = 0, 1, \ldots, p-1$, 即 $s_k(z)$ 是方程 (3.2) 的解。(vi) 表明这些函数线性无关。因此, $\{s_k(z)\}_{k=0}^{p-1}$ 是方程 (3.2) 的基本解系。

□

推论 3.1。函数

$$y(z) = y_0 s_0(z) + y_1 s_1(z) + \cdots + y_{p-1} s_{p-1}(z) \tag{3.11}$$

是柯西问题的解

$$\begin{aligned} D^p y(z) &= y(z), \quad (D = d/dz) \\ y(0) = y_0,\ y'(0) &= y_1,\ \ldots\ , y^{(p-1)}(0) = y_{p-1}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

推论 3.2。对于柯西问题 (3.12) 的解 (3.11), 有

$$\det W[y, y', \ldots, y^{(p-1)}] = \begin{vmatrix} y(z) & y'(z) & \cdots & y^{(p-1)}(z) \\ y^{(p-1)}(z) & y(z) & \cdots & y^{(p-2)}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y'(z) & y''(z) & \cdots & y(z) \end{vmatrix} = C,$$

其中常数 C 仅取决于初始数据, 而不取决于 z。

证明。由于 $W[y, y', \ldots, y^{(p-1)}] = Y_p^T \cdot W[s_k(z)],$, 其中

$$Y_p = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{p-1} \\ y_{p-1} & y_0 & \cdots & y_{(p-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_0 \end{pmatrix},$$

且 det $W[s_k(z)] \equiv 1$, 则 det $W(y, y', \ldots, y^{(p-1)}) =$ det Y_p。 □

4 p-双曲函数的基本恒等式

推导 p-双曲函数之间的关系, 基于 p单位根的性质以及以下简单结论。

命题 4.1。设 $\zeta_m (m = 0,1,\dots,p-1)$ 为 p 单位根。映射

$$z \mapsto W_p(z) = \begin{pmatrix} s_0(z) & s_1(z) & \cdots & s_{p-1}(z) \\ s_{p-1}(z) & s_0(z) & \cdots & s_{p-2}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1(z) & s_2(z) & \cdots & s_0(z) \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

是复数加法群在线性空间 $\mathbb{C}^p$ 中的一个表示。此外，根据命题 3.2 (vi)，主恒等式

$$\det W_p(z) \equiv 1 \tag{4.2}$$

成立。

证明。回顾（见 (3.10)），

$$W_p(z) = U\Lambda(z)U^*, \quad \Lambda(z) = \operatorname{diag}\{e^{z\zeta_0}, e^{z\zeta_1}, \dots, e^{z\zeta_{p-1}}\}, \tag{4.3}$$

其中 U 是引理 2.1 中的酉矩阵。由于

$$\Lambda(z_1 + z_2) = \Lambda(z_1) \cdot \Lambda(z_2), \quad \Lambda(0) = I,$$

于是 $W_p(z_1 + z_2) = W_p(z_1) \cdot W_p(z_2), \quad W_p(0) = I$。 □

注 4.1。由于矩阵 $W_p(z_1+z_2)$ 的元素是函数$s_k(z_1 + z_2)$，因此由恒等式 $W_p(z_1 + z_2) = W_p(z_1) \cdot W_p(z_2)$ 可得到自变量之和的函数公式。恒等式$W_p(z)W_p(-z) = I$ 联系了函数在相反的自变量值处的取值。

注 4.2. 由 (4.3) 可得 $\Lambda(z) = U^*W_p(z)U$。比较对角元素，我们得到 p-双曲函数的欧拉恒等式

$$e^{z\zeta_k} = \zeta_0^k s_0(z) + \zeta_1^k s_1(z) + \cdots + \zeta_{p-1}^k s_{p-1}(z), \quad k = 0, 1, \dots, p-1. \tag{4.4}$$

作为本节的总结，我们给出情形 $p = 3$ 对应的公式。我们得到

(i) 主恒等式 ($\det W_3(z) = 1$)

$$s_0(z)^3 + s_1(z)^3 + s_2(z)^3 - 3s_0(z)s_1(z)s_2(z) = 1, \tag{4.5}$$

(ii) 加法公式（$W_3(z + w) = W_3(z) \cdot W_3(w)$）

$$\begin{aligned} s_0(z+w) &= s_0(z)s_0(w) + s_1(z)s_2(w) + s_2(z)s_1(w), \\ s_1(z+w) &= s_0(z)s_1(w) + s_1(z)s_0(w) + s_2(z)s_2(w), \\ s_2(z+w) &= s_0(z)s_2(w) + s_1(z)s_1(w) + s_2(z)s_0(w), \end{aligned} \tag{4.6}$$

(iii) 二倍角

$$\begin{aligned} s_0(2z) &= s_0(z)^2 + 2s_1(z)s_2(z), \\ s_1(2z) &= 2s_0(z)s_1(z) + s_2(z)^2, \\ s_2(2z) &= 2s_0(z)s_2(z) + s_1(z)^2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

(iv) 三倍角

$$\begin{aligned} s_0(3z) &= 1 + 9s_0(z)s_1(z)s_2(z), \\ s_1(3z) &= 3s_0(z)^2 s_1(z) + 3s_0(z)^2 s_2(z) + 3s_1(z)^2 s_2(z), \\ s_2(3z) &= 3s_0(z)s_1(z)^2 + 3s_0(z)s_2(z)^2 + 3s_1(z)s_2(z)^2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

(v) 积化和

$$\begin{aligned} 3s_0(z)s_0(w) &= s_0(z+w) + s_0(z+\zeta_1 w) + s_0(z+\zeta_2 w), \\ 3s_1(z)s_2(w) &= s_0(z+w) + \zeta_1 s_0(z+\zeta_1 w) + \zeta_2 s_0(z+\zeta_2 w), \\ 3s_1(z)s_0(w) &= s_1(z+w) + s_1(z+\zeta_1 w) + s_1(z+\zeta_2 w), \\ 3s_2(z)s_2(w) &= s_1(z+w) + \zeta_1 s_1(z+\zeta_1 w) + \zeta_2 s_1(z+\zeta_2 w), \\ 3s_2(z)s_0(w) &= s_2(z+w) + s_2(z+\zeta_1 w) + s_2(z+\zeta_2 w), \\ 3s_1(z)s_1(w) &= s_2(z+w) + \zeta_2 s_2(z+\zeta_1 w) + \zeta_1 s_1(z+\zeta_2 w). \end{aligned} \tag{4.9}$$

(vi) 正向与反向自变量的联系（$W_3(z)W_3(-z) = I$）

$$\begin{aligned} s_0(z)s_0(-z) + s_1(z)s_2(-z) + s_2(z)s_1(-z) &= 1, \\ s_0(z)s_1(-z) + s_1(z)s_0(-z) + s_2(z)s_2(-z) &= 0, \\ s_0(z)s_2(-z) + s_1(z)s_1(-z) + s_2(z)s_0(-z) &= 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

(vii) 反向自变量

$$\begin{aligned} s_0(-z) &= s_0(z)^2 - s_1(z)s_2(z) \\ s_1(-z) &= s_2(z)^2 - s_0(z)s_1(z) \\ s_2(-z) &= s_1(z)^2 - s_0(z)s_2(z). \end{aligned} \tag{4.11}$$

由此不难得到 p-三角函数 $c_k(z) = s_k(iz)/i^k$ 的公式。

5 当 $p = 3$ 时函数 $s_k(z)$ 的零点

设 ζ_ν, $\nu = 0,1,2$ 为三次单位根。引入记号

$$l_\nu^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t \cdot \zeta_\nu,\ t > 0\}, \quad l_\nu^- = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t \cdot \zeta_\nu,\ t \le 0\}.$$

射线 l_ν^+, $\nu = 0, 1, 2$ 将复平面 $\mathbb{C}$ 分成三个扇形

$$S_\nu = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg\zeta_\nu < \arg z < \arg\zeta_{(\nu+1)\,(\mathrm{mod}\,3)}\}, \quad \nu = 0, 1, 2.$$

射线 l_ν^-是扇形 $S_{(\nu+1)\ (\text{模}\ 3)}$ 的角平分线。

命题 5.1. 三双曲函数 $s_k(z)$ $(k=0,1,2)$ 在集合上不消失

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\nu=0}^{2} l_\nu^-. \tag{5.1}$$

换言之，函数 $s_k(z)$ 的零点只位于各扇形的角平分线上。

我们需要两个引理

引理 5.1. 设 $z = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$ 和 $s_k(z)$, $k = 0$, 1, 2 是 3-双曲函数。函数 $s_k(x+iy)$ 的零点是下列方程组的根

$$\begin{cases} \cosh\frac{y\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right) = -\frac{1}{2}e^{\frac{3x}{2}}\cos\frac{3y}{2} \\ \sinh\frac{y\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{3x}{2}}\sin\frac{3y}{2} \end{cases} \tag{5.2}$$

证明. 我们有

$$\zeta_k = \zeta_1^k = e^{i2\pi k/3} \;\Rightarrow\; \zeta_0 = 1, \quad \zeta_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

于是由 (3.3) 得到

$$\begin{aligned} 3s_k(z) = e^z + \frac{1}{\zeta_1^k}e^{z\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2^k}e^{z\zeta_2} = e^z + \overline{\zeta}_1^k e^{z\zeta_1} + \zeta_1^k e^{z\zeta_2} = \\ e^{-\frac{z}{2}}\left(e^{\frac{3z}{2}} + e^{-i\frac{2\pi k}{3}}e^{i\frac{z\sqrt{3}}{2}} + e^{i\frac{2\pi k}{3}}e^{-i\frac{z\sqrt{3}}{2}}\right) = \\ e^{-\frac{z}{2}}\left(e^{\frac{3z}{2}} + e^{i\left(\frac{z\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right)} + e^{-i\left(\frac{z\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right)}\right) = \\ e^{-\frac{z}{2}}\left(e^{\frac{3z}{2}} + 2\cos\left(\frac{z\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

因此，函数 $s_k(z)$ 的零点是下列方程的根

$$\cos\left(\frac{z\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right) + \frac{1}{2}e^{\frac{3z}{2}} = 0. \tag{5.3}$$

只需应用该恒等式

$$\cos(\alpha + i\beta) = \cosh\beta\cos\alpha - i\sinh\beta\sin\alpha$$

代入等式 (5.3) 的左边，并分离实部和虚部。 □

引理 5.2。对于 $y \geq 0$，不等式

$$\sqrt{3} \cdot \tanh\left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right) \geq \sin\left(\frac{3y}{2}\right) \tag{5.4}$$

成立。只有在 $y = 0$ 时，(5.4) 中的等号才成立。

证明。双曲正切可表示为一个交错级数

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \cdots \quad \text{for} \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

因此,

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \Delta, \quad \text{where} \quad \Delta > 0.$$

由此可得

$$\sqrt{3} \cdot \tanh\left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right) \geq \frac{3y}{2} - \frac{3y^3}{8} \quad \text{for} \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \tag{5.5}$$

同理,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \Delta_1 \quad \text{where} \quad \Delta_1 \geq 0 \quad \text{for} \quad x \geq 0.$$

Then

$$\frac{3y}{2} - \frac{9y^3}{16} + \frac{81y^5}{1280} \geq \sin\left(\frac{3y}{2}\right) \quad \text{for} \quad y \geq 0. \tag{5.6}$$

由 (5.5) 和 (5.6) 可知，当下式成立时，不等式 (5.4) 成立

$$\frac{3y}{2} - \frac{3y^3}{8} > \frac{3y}{2} - \frac{9y^3}{16} + \frac{81y^5}{1280} \tag{5.7}$$

成立。求不等式（5.7）的一个解。我们有

$$y^3(80 - 27y^2) > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < y < y_0 = \frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \approx 1,72 < \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1,81.$$

因此，对于 $0 < y < y_0$，严格不等式（5.4）成立。由于

$$\sqrt{3}\tanh\left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right) \geq \sqrt{3}\tanh\left(\frac{y_0\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\tanh\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right) \approx 1,56 > 1$$

对于 $y \geq y_0$，严格不等式 (5.4) 对所有 $y > 0$ 均成立。 □

命题 5.1 的证明。由于 $s_k(\zeta_\nu z) = \zeta_\nu^k s_k(z)$，只需证明函数 $s_k(z)$ 在某个闭扇形 $\overline{S}_\nu$ （不包括角平分线）内不为零。

若点 $z = x + iy$ 属于 $\overline{S}_1 \setminus l_0^-$，则 $x \le 0$ 和 $y \ne 0$、$y \in \mathbb{R}$。考虑到引理 5.1，我们证明这类点不满足方程组 (5.2)。由方程组的第一个方程可得

$$\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right) = -\frac{e^{3x/2}}{2}\frac{\cos(3y/2)}{\cosh(y\sqrt{3}/2)}.$$

Thus

$$\sin^2\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right) = \frac{4\cosh^2(y\sqrt{3}/2) - e^{3x}\cos^2(3y/2)}{4\cosh^2(y\sqrt{3}/2)}. \tag{5.8}$$

证明 (5.8) 对于 $x \le 0$ 和 $y \ne 0$ 不满足 (5.2) 中的第二个方程。将第二个方程两边平方，得到

$$\sinh^2\frac{y\sqrt{3}}{2}\sin^2\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right) = \frac{1}{4}e^{3x}\sin^2\frac{3y}{2}.$$

将 (5.8) 代入最后一个方程，得到

$$\tanh^2\frac{y\sqrt{3}}{2}\left(4\cosh^2\frac{y\sqrt{3}}{2} - e^{3x}\cos^2\frac{3y}{2}\right) = e^{3x}\sin^2\frac{3y}{2}. \tag{5.9}$$

由引理 5.2 可得严格不等式

$$3\cdot\tanh^2\frac{y\sqrt{3}}{2} > \sin^2\frac{3y}{2} \quad \text{for} \quad y \ne 0.$$

于是由 (5.9) 可得严格不等式（对于 $x \le 0$）

$$\tanh^2\frac{y\sqrt{3}}{2}\left(4\cosh^2\frac{y\sqrt{3}}{2} - e^{3x}\cos^2\frac{3y}{2}\right) \ge$$
$$3\cdot\tanh^2\frac{y\sqrt{3}}{2} > \sin^2\frac{3y}{2} \ge e^{3x}\sin^2\frac{3y}{2}.$$

因此，对于 $z \in \overline{S}_1 \setminus l_0^-$， $s_k(z) \ne 0$。 □

根据命题 5.1， $s_0(z)$ $s_1(z)$ 和 $s_2(z)$ 的零点位于 l_ν^-, $\nu = 0, 1, 2$ 上。由于满足 $s_k(\zeta_m z) = \zeta_m^k s_k(z)$，因此只需找出位于 $l_0^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$ 上的零点。

考虑到 (5.3)，我们得到如下结论。

命题 5.2. 函数 $s_k(x)$的无限零点序列 $x_j^{(k)}(j = 1,2,\ldots)$ 是方程的根

$$\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right) = -\frac{1}{2}e^{\frac{3x}{2}}, \quad k = 0,1,2. \tag{5.10}$$

序列 $x_j^{(2)}$ 与序列 $x_j^{(0)}$ 交错，而序列 $x_j^{(0)}$ 又与序列 $x_j^{(1)}$ 交错。注意， $x_1^{(2)} = x_1^{(1)} = 0$ 和 $x_1^{(0)} < 0$。推论 5.1. 若 $x \to -\infty$，则函数 $s_k(x)$ 的零点渐近地趋于方程的根

$$\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi k}{3}\right) = 0. \tag{5.11}$$

6 非齐次方程的通解

考虑柯西问题

$$\left(\frac{1}{i}D\right)^p y(\lambda,x) = \lambda^p y(\lambda,x) + f(x), \quad x \in (0,l) \tag{6.1}$$

其在零点处的初始数据为

$$y(\lambda,0) = y_0, \quad y'(\lambda,0) = y_1, \quad \ldots \quad , y^{(p-1)}(\lambda,0) = y_{p-1}, \tag{6.2}$$

其中 $f(x)$ 是关于 $x \in \mathbb{R}$、 $y_s \in \mathbb{C}$ $(0 \le s \le p-1)$ 和 $0 < l < \infty$ 的函数。

容易看出，问题 (6.1) 的解 $y_0(\lambda,x)$ 在 $f(x) \equiv 0$ 的条件下具有 (6.2) 如下形式

$$y_0(\lambda,x) = \sum_{k=0}^{p-1} y_k \frac{1}{(i\lambda)^k} s_k(i\lambda x) = \sum_{k=0}^{p-1} C_k e^{i\lambda\zeta_k x} \tag{6.3}$$

对于 $f(x) \neq 0$，我们求得方程 (6.1) 在零初始数据 $y_0 = y_1 = \cdots = y_{p-1} = 0$ 下的解 $y_1(\lambda,x)$。对于常数变易法，我们令

$$y_1(\lambda,x) = \sum_{k=0}^{p-1} C_k(x) e^{i\lambda\zeta_k x}, \tag{6.4}$$

其中 $C_k(x)$是光滑函数。显然，

$$\left(\frac{1}{i}D\right) y_1(\lambda,x) = \lambda \sum_{k=0}^{p-1} C_k(x)\zeta_k e^{i\lambda\zeta_k x},$$

在附加条件下

$$\sum_{k=0}^{p-1} C_k'(x) e^{i\lambda\zeta_k x} \equiv 0. \tag{6.5}$$

经过二阶微分，并满足附加条件

$$\sum_{k=0}^{p-1} C_k'(x) \zeta_k e^{i\lambda\zeta_k x} \equiv 0, \tag{6.6}$$

我们得到

$$\left(\frac{1}{i}D\right)^2 y_1(\lambda, x) = \lambda^2 \sum_{k=0}^{p-1} C_k(x) \zeta_k^2 e^{i\lambda\zeta_k x}.$$

重复这一技巧，在第 p 步我们得到

$$\left(\frac{1}{i}D\right)^p y_1(\lambda, x) = \lambda^p y_1(\lambda, x) + \frac{1}{i}\lambda^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} C_k'(x) \zeta_k^{p-1} e^{i\lambda\zeta_k x}.$$

函数 $y_1(\lambda, x)$ (6.4) 将是方程 (6.1) 的一个解，若$C_k(x)$ 满足附加条件（形式为 (6.5)、(6.6)，在前 $p-1$ 步中接受）以及条件

$$\sum_{k=0}^{p-1} C_k'(x) \zeta_k^{p-1} e^{i\lambda\zeta_k x} = if(x)/\lambda^{p-1}. \tag{6.7}$$

考虑到 (6.5)、(6.6) 和 (6.7)，我们得到关于 $\{C_k'(x)\}_{k=0}^{p-1}$ 的方程组:

$$W(\lambda, x) \begin{pmatrix} C_0'(x) \\ C_1'(x) \\ \vdots \\ C_{p-2}'(x) \\ C_{p-1}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ if(x)/\lambda^{p-1} \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

其中

$$W(\lambda, x) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda\zeta_0 x} & e^{i\lambda\zeta_1 x} & \cdots & e^{i\lambda\zeta_{p-1} x} \\ \zeta_0 e^{i\lambda\zeta_0 x} & \zeta_1 e^{i\lambda\zeta_1 x} & \cdots & \zeta_{p-1} e^{i\lambda\zeta_{p-1} x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_0^{p-1} e^{i\lambda\zeta_0 x} & \zeta_1^{p-1} e^{i\lambda\zeta_1 x} & \cdots & \zeta_{p-1}^{p-1} e^{i\lambda\zeta_{p-1} x} \end{pmatrix}.$$

由于

$$W(\lambda,x)^{-1}=\frac{1}{p}\begin{pmatrix} e^{-i\lambda\zeta_0 x} & e^{-i\lambda\zeta_0 x}/\zeta_0 & \cdots & e^{-i\lambda\zeta_0 x}/\zeta_0^{p-1}\\ e^{-i\lambda\zeta_1 x} & e^{-i\lambda\zeta_1 x}/\zeta_1 & \cdots & e^{-i\lambda\zeta_1 x}/\zeta_1^{p-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ e^{-i\lambda\zeta_{p-1} x} & e^{-i\lambda\zeta_{p-1} x}/\zeta_{p-1} & \cdots & e^{-i\lambda\zeta_{p-1} x}/\zeta_{p-1}^{p-1}\end{pmatrix},$$

then

$$\begin{pmatrix} C_0'(x)\\ C_1'(x)\\ \vdots\\ C_{p-2}'(x)\\ C_{p-1}'(x)\end{pmatrix}=W(\lambda,x)^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\ if(x)/\lambda^{p-1}\end{pmatrix}=i\frac{f(x)}{p\lambda^{p-1}}\begin{pmatrix} e^{-i\lambda\zeta_0 x}/\zeta_0^{p-1}\\ e^{-i\lambda\zeta_1 x}/\zeta_1^{p-1}\\ \vdots\\ e^{-i\lambda\zeta_{p-2} x}/\zeta_{p-2}^{p-1}\\ e^{-i\lambda\zeta_{p-1} x}/\zeta_{p-1}^{p-1}\end{pmatrix}.$$

因此，对于 $k=0,1,\ldots,p-1$，我们有

$$C_k(x)=\frac{i}{\lambda^{p-1}}\int_0^x\frac{e^{-i\lambda\zeta_k t}}{p\zeta_k^{p-1}}f(t)dt+D_k,\quad (D_k=\text{const}).$$

Then

$$y_1(\lambda,x)=\frac{i}{\lambda^{p-1}}\int_0^x\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{\zeta_k^{p-1}}e^{i\lambda\zeta_k(x-t)}f(t)dt+\sum_{k=0}^{p-1}D_k e^{i\lambda\zeta_k x}.$$

由条件 $y_1(\lambda,0)=y_1'(\lambda,0)=\cdots=y_1^{(p-1)}(\lambda,0)=0$，我们得到 $D_k=0$ 对所有 k均成立。由于

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{\zeta_k^{p-1}}e^{i\lambda\zeta_k(x-t)}=s_{p-1}(i\lambda(x-t)),$$

then

$$y_1(\lambda,x)=\frac{i}{\lambda^{p-1}}\int_0^x s_{p-1}(i\lambda(x-t))f(t)dt. \tag{6.9}$$

由此我们得到

引理 6.1。柯西问题 (6.1)、(6.2) 的解是函数

$$y(\lambda,x)=\sum_{k=0}^{p-1}y_k\frac{1}{(i\lambda)^k}s_k(i\lambda x)+\frac{i}{\lambda^{p-1}}\int_0^x s_{p-1}(i\lambda(x-t))f(t)dt. \tag{6.10}$$

7 自伴性

令 M 为从 $L^2(0,l)$ $(0<l<\infty)$ 到 p 次可微函数的集合。对作用于 M 的微分运算 $(-iD)^p$ 使用拉格朗日公式。

$$\int_0^l (-iD)^p y(x)\overline{z(x)}dx = \frac{1}{i^p}[Q_l(y,z)-Q_0(y,z)]+ \int_0^l y(x)\overline{(-iD)^p z(x)}dx, \quad (y,z\in M), \quad (7.1)$$

其中

$$Q_x(y,z) = y^{(p-1)}(x)\overline{z(x)} - y^{(p-2)}(x)\overline{z(x)}' + \cdots + (-1)^{p-1}y(x)\overline{z(x)}^{(p-1)}, \quad (7.2)$$

这里 $Q_l(y,z)=Q_x(y,z)|_{x=l}$, $Q_0(y,z)=Q_x(y,z)|_{x=0}$。

双线性形式 (7.2) 的矩阵 J_p 的大小为 $p\times p$

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{p-2} & \cdots & 0 & 0 \\ (-1)^{p-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

并满足条件

$$J_p^* = (-1)^{p-1}J_p, \quad J_p^2 = I \ (p=2k+1), \quad J_p^2 = -I \ (p=2k). \quad (7.4)$$

情形 $p=2k$。由于 $(iJ_p)^* = iJ_p$ 且 $(iJ_p)^2 = I$，矩阵 iJ_p 的特征值为 ± 1。因此，J_p 的特征值为 $\pm i$。

标准正交特征向量

$$\begin{aligned} e_1^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(1,0,\ldots,0,0,0,\ldots,0,i) \\ e_2^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(0,1,\ldots,0,0,0,\ldots,-i,0) \\ &\cdots \\ e_k^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(0,0,\ldots,1,(-1)^{k-1}i,\ldots,0,0) \end{aligned} \quad (7.5)$$

构成算子 $J_p = J_{2k}$ 对应于特征值 $\lambda = +i$、$J_{2k}e_s^+ = ie_s^+$ $(1\le s\le k)$ 的特征子空间 $E_+^{(k)}$ （维数为 $E_+^{(k)} = k$）。

同样，标准正交特征向量

$$\begin{array}{c} e_1^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(-1,0,\ldots,0,0,\ldots,0,i) \\ e_2^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(0,-1,\ldots,0,0,\ldots,-i,0) \\ \cdots \\ e_k^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(0,0,\ldots,-1,(-1)^{k-1}i,\ldots,0,0) \end{array} \tag{7.6}$$

对应于特征值$\lambda = -i$的特征子空间 $E_-^{(k)}$ （维数为 $E_-^{(k)} = k$）。

因此，

$$E^p = E_+^p \oplus E_-^p. \tag{7.7}$$

任意向量 $h \in E^p$ 都有唯一的分解

$$h = h_+ + h_-, \quad h_\pm = P_\pm h, \tag{7.8}$$

其中 $P_\pm$ 是 $E_\pm$上的正交投影算子。因此，

$$P_+ h = \sum_{s=1}^{k} h_s^+ e_s^+, \quad P_- h = \sum_{s=1}^{k} h_s^- e_s^-,$$

其中 $e_s^\pm$是向量（7.5）、（7.6），并且

$$h_s^\pm = \langle h, e_s^\pm \rangle = \frac{\pm h_s + (-1)^{p-s} i h_{p-s+1}}{\sqrt{2}}, \quad l = \mathrm{col}\,(h_1,\ldots,h_p). \tag{7.9}$$

由（7.8）可知，二次型（7.8）具有如下形式

$$\langle J_p h, h\rangle = i\{\langle h_+, h_+\rangle - \langle h_-, h_-\rangle\}. \tag{7.10}$$

等式（7.10）使我们能够区分两类边界条件，它们可确保算子 $(-iD)^p$ 对偶函数$p = 2k$具有自伴性。

第一类边界条件由使二次型 $\langle J_p h, h\rangle$ 为零的那些 h 确定。令

$$h_V = h_+ + V h_+, \quad (h_- = V h_+), \tag{7.11}$$

其中 $V\colon E_+ \to E_-$ 是任意酉算子。由 (7.10) 得到 $\langle J_p h_V, h_V\rangle = 0$。算子 V 具有形式 $V = V_+^* V_0 V_-$，其中$V_\pm$： $E_\pm^{(k)} \to E^{(k)}$ 是将 $\{e_s^\pm\}_{s=1}^k$ 变换为空间 $E^{(k)}$ （$\dim E^{(k)} = k$）的标准基 $\{e_s\}_{s=1}^k$ 的酉映射，而 V_0 是 $E^{(k)}$中的酉算子。由于 $h_- = V h_+$，由 (7.9) 可得

$$\widetilde{h}_1 + i J_k \widehat{h}_1 = V_0(-\widetilde{h}_1 + i J_k \widehat{h}_1), \tag{7.12}$$

其中 J_k 是 $p=k$ 的 (7.3)，而 $\widetilde{h}_1, \widehat{h}_1 \in E^{(k)}$ 是向量

$$\widetilde{h}_1 = \operatorname{col}(h_1, \dots, h_k),\ \widehat{h}_1 = \operatorname{col}(h_{k+1}, \dots, h_{2k}),\ (h = \widetilde{h}_1 \oplus \widehat{h}_1). \quad (7.13)$$

将 (7.12) 改写为

$$i(I - V_0)J_k\widehat{h}_1 = -(I + V_0)\widetilde{h}_1,$$

or

$$J_k\widehat{h}_1 = B_0\widetilde{h}_1, \quad (7.14)$$

其中

$$B_0 = i(I - V_0)^{-1}(I + V_0) \quad (7.15)$$

由于 $V_0V_0^* = I$，因此 $B_0^* = B_0$。

引入以下记号

$$\begin{array}{l} Y(x) = \operatorname{col}(y(x), \dots, y^{(k-1)}(x), y^{(k)}(x) \dots, y^{(p-1)}(x)), \\ Y_0(x) = \operatorname{col}(y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \in E^{(k)}, \\ Y_1(x) = \operatorname{col}(y^{(k)}(x), y^{(k+1)}(x), \dots, y^{(p-1)}(x)) \in E^{(k)}, \\ Y(x) = Y_0(x) \oplus Y_1(x) \in E^{(2k)}. \end{array} \quad (7.16)$$

命题 7.1. 设 $p = 2k$, $Y_0(x)$、$Y_1(x)$ 和 J_k 由关系式 (7.16) 和 (7.3) 确定。若 B_0, B_l 是任意的自伴 $k \times k$-矩阵，则在由满足下列边界条件的 $L^2(0, l)$ 中的函数构成的集合上，$0 < l < \infty$

$$J_kY_1(0) = B_0Y_0(0), \quad J_kY_1(l) = B_lY_0(l), \quad (7.17)$$

算子 $(-iD)^p$ 是自伴的。

边界条件 (7.17) 指的是分离边界条件。

第二类自伴边界条件的构造如下。拉格朗日公式 (7.11) 中的非积分项具有如下形式

$$\begin{array}{l} Q_l(y, z) - Q_0(y, z) = \langle J_pY(l), Z(l)\rangle - \langle J_pY(0), Z(0)\rangle = \\ \langle Y_+(l), Z_+(l)\rangle - \langle Y_-(l), Z_-(l)\rangle - \langle Y_+(0), Z_+(0)\rangle + \langle Y_-(0), Z_-(0)\rangle. \end{array}$$

当.....时，此表达式为零

$$\begin{array}{ll} (1) & \langle Y_+(l), Z_+(l)\rangle = \langle Y_+(0), Z_+(0)\rangle, \\ (2) & \langle Y_-(l), Z_-(l)\rangle = \langle Y_-(0), Z_-(0)\rangle. \end{array} \quad (7.18)$$

当.....时，等式 (7.18) 成立

$$\begin{aligned} Y_+(l) &= VY_+(0) \quad (Z_+(l) = VZ_+(0)), \\ Y_-(l) &= \widetilde{V}Y_-(0) \quad (Z_-(l) = \widetilde{V}Z_-(0)), \end{aligned}$$

其中 V和 V是酉算子。利用 (7.12) 和 (7.9)，我们将这些等式改写为如下形式:

$$\begin{aligned} Y_0(l) + iJ_kY_1(j) &= V(Y_0(0) + iJ_kY_1(0)), \\ -Y_0(l) + iJ_kY_1(j) &= \widetilde{V}(-Y_0(0) + iJ_kY_1(0)). \end{aligned}$$

命题 7.2. 设 $p = 2k$, $Y_0(x)$、 $Y_1(x)$ 和 J_k 由关系 (7.16) 和 (7.3) 确定。若 V, V 是$E^{(k)}$中的任意酉算子，则在来自 $L^2(0, l)$ 的函数集合上，满足边界条件 $0 < l < \infty$

$$\begin{aligned} 2Y_0(l) &= (V + \widetilde{V})Y_0(0) + i(V - \widetilde{V})J_kY_1(0), \\ 2iJ_kY_1(l) &= (V - \widetilde{V})Y_0(0) + i(V + \widetilde{V})J_kY_1(0), \end{aligned} \tag{7.19}$$

算子 $(-iD)^p$ 是自伴的。

注 7.1. 若 $V = V$，则等式 (7.19) 可写成如下形式:

$$Y_0(l) = VY_0(0), \quad J_kY_1(l) = VJ_kY_1(0), \tag{7.20}$$

而若 $V = -V$，则

$$Y_0(l) = iVJ_kY_1(0), \quad J_kY_1(l) = -iVY_0(0). \tag{7.21}$$

边界条件 (7.19)（以及 (7.20) 和 (7.21)）属于所谓的非分离自伴边界条件。

情形 $p = 2k + 1$。由 (7.3) 可知， $J_p^* = J_p$和 $J_p^2 = I$。因此， J_p 的特征值等于 ± 1。正交归一特征向量

$$\begin{aligned} \widetilde{e_1}^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(1, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \\ \widetilde{e_2}^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(0, 1, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, -1, 0) \\ &\cdots \\ \widetilde{e_k}^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(0, 0, \ldots, 1, 0, (-1)^{k-1}, \ldots, 0, 0) \end{aligned} \tag{7.22}$$

构成算子 $J_p = J_{2k+1}$对应于特征值 $\lambda = +1$的特征子空间 $\widetilde{E}_+^{(k)}$（维数 $\widetilde{E}_+^{(k)} = k$）， $J_{2k+1}\widetilde{e_s}^+ = 1 \cdot \widetilde{e_s}^+$ （$1 \le s \le k$）。同样，标准正交特征向量

$$\begin{aligned} \widetilde{e_1}^- &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(-1, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \\ \widetilde{e_2}^- &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(0, -1, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, -1, 0) \\ &\cdots \\ \widetilde{e_k}^- &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(0, 0, \ldots, -1, 0, (-1)^{k-1}, \ldots, 0, 0) \end{aligned} \tag{7.23}$$

构成算子 $J_p = J_{2k+1}$对应于特征值 $\lambda = -1$ 的特征子空间 $\widetilde{E}_-^{(k)}$ （维数 $\widetilde{E}_-^{(k)} = k$）， $J_{2k+1}\widetilde{e}_s^- = -1 \cdot \widetilde{e}_s^-$ （$1 \le s \le k$）。此外，算子 J_{2k+1} 有一个特征向量

$$\widetilde{e}_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{col}\,(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0) \tag{7.24}$$

以及 $J_p\widetilde{e}_{k+1} = (-1)^k\widetilde{e}_{k+1}$。

空间 $E^{(p)} = E^{(2k+1)}$ 是三个正交子空间的和

$$E^{(p)} = \widetilde{E}_+^{(k)} \oplus \widetilde{E}_-^{(k)} \oplus \{\mu\widetilde{e}_{k+1}\}.$$

因此，任意向量 $h \in E^{(p)}$ 都有唯一的分解

$$h = h_+ + h_- + \widetilde{h} \quad (h_\pm = P_\pm h,\ \widetilde{h} \in \{\mu\widetilde{e}_{k+1}\}), \tag{7.25}$$

~其中 $P_\pm$ 是到子空间 $E_\pm$ 上的正交投影算子，以及

$$h_\pm = \sum_{s=1}^{k} \widetilde{h}_s^{\,\pm}\widetilde{e}_s^{\pm}, \quad \widetilde{h} = \mu\widetilde{e}_{k+1}, \tag{7.26}$$

其中

$$\widetilde{h}_s^{\,\pm} = \frac{\pm h_s + (-1)^{p-s}h_{p-s+1}}{\sqrt{2}} \quad (1 \le s \le k). \tag{7.27}$$

考虑到 (7.25)，我们得到

$$\langle J_p h, h\rangle = \langle\widetilde{h}_+, \widetilde{h}_+\rangle - \langle\widetilde{h}_-, \widetilde{h}_-\rangle + (-1)^k|h_{k+1}|^2. \tag{7.28}$$

与 (7.16) 类似，我们引入以下记号

$$\begin{aligned} Y(x) &= \mathrm{col}\,(y(x), \dots, y^{(k-1)}(x), y^{(k)}(x), y^{(k+1)}(x), \dots, y^{(p-1)}(x)),\\ Y_0(x) &= \mathrm{col}\,(y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \in E^{(k)},\\ Y_1(x) &= \mathrm{col}\,(y^{(k+1)}(x), y^{(k+2)}(x), \dots, y^{(p-1)}(x)) \in E^{(k)}, \end{aligned} \tag{7.29}$$

命题 7.3. 设 $p = 2k + 1$、 $Y_0(x)$、 $Y_1(x)$ 和 J_k 由关系式 (7.29) 和 (7.3) 确定。若 $\theta \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 和 B_0、B_l 是任意的自伴 $k \times k$-矩阵，则在满足边界条件的函数集合 $L^2(0, l)$、 $0 < l < \infty$ 上

$$y^{(k)}(l) = \theta y^{(k)}(0), \quad J_k Y_1(0) = iB_0Y_0(0), \quad J_k Y_1(l) = iB_1Y_0(l), \tag{7.30}$$

算子 $(-iD)^p$ 是自伴的。

证明。由 (7.28) 可得

$$Q_l(y,z) - Q_0(y,z) = \langle J_p Y(l), Z(l)\rangle - \langle J_p Y(0), Z(0)\rangle = \\ \langle Y_+(l), Z_+(l)\rangle - \langle Y_-(l), Z_-(l)\rangle + (-1)^k y^{(k)}(l) z^{(k)}(l) - \\ \langle Y_+(0), Z_+(0)\rangle - \langle Y_-(0), Z_-(0)\rangle + (-1)^k y^{(k)}(0) z^{(k)}(0). \quad (7.31)$$

当以下条件成立时，该表达式为零

$$\langle Y_+(l), Z_+(l)\rangle = \langle Y_-(l), Z_-(l)\rangle, \quad y^{(k)}(l) = \theta y^{(k)}(0), \quad (\theta \in \mathbb{T})$$

和 $\langle Y_+(0)\ Z_+(0)\rangle = \langle Y_-(0)\ Z_-(0)\rangle$。

例如，对第一个关系进行变换。我们有

$$\langle h_+, h_+\rangle - \langle h_-, h_-\rangle = 0. \quad (7.32)$$

显然，对于具有以下形式的向量，这个关系成立

$$h = h_+ + V h_+, \quad (7.33)$$

其中 $V\colon \widetilde{E}_+^{(k)} \to \widetilde{E}_-^{(k)}$ 是任意酉算子。等式$h_- = V h_+$ 表示（见 (7.12)）

$$\widetilde{h}_1 + J_k \widehat{h}_1 = V_0(-\widetilde{h}_1 + J_k \widehat{h}_1),$$

其中 J_k 具有形式 (7.3)，且

$$\widetilde{h}_1 = \operatorname{col}(h_1, \dots, h_k), \quad \widehat{h}_1 = \operatorname{col}(h_{k+2}, \dots, h_{2k+1}).$$

这意味着

$$(I - V_0) J_k \widehat{h}_1 = -(I + V_0)\widetilde{h}_1$$

or

$$J_k \widehat{h}_1 = i B_0 \widetilde{h}_1,$$

其中 $B_0 = i(I - V_0)^{-1}(I + V_0)$ 是一个自伴算子。 □

关系式 (7.30) 与 $p = 2k+1$ 的分离边界条件类似。

如果在等式 (7.31) 中令

$$\langle Y_+(l), Z_+(l)\rangle = \langle Y_+(0), Z_+(0)\rangle, \quad y^{(k)}(l) = \theta y^{(k)}(0), \quad (\theta \in \mathbb{T})$$

且 $\langle Y_-(l)\ Z_-(l)\rangle = \langle Y_-(0)\ Z_-(0)\rangle$，则 $Q_l(y,z) - Q_0(y,z) = 0$。接下来，类似于命题 7.2，我们得到以下结论。

命题 7.4. 设 $p = 2k+1$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ 和 J_k 由关系式 (7.29) 和 (7.3) 确定。如果 V 和 V 是 $E^{(k)}$中的任意酉算子，那么在满足边界条件的、来自 $L^2(0,l)$ 的函数集合 $0 < l < \infty$ 上

$$\begin{aligned} y^{(k)}(l) &= \theta y^{(k)}(0) \quad (\theta \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}), \\ 2Y_0(l) &= (V + \widetilde{V})Y_0(0) + (V - \widetilde{V})J_k Y_1(0), \\ 2J_k Y_1(l) &= (V - \widetilde{V})Y_0(0) + (V + \widetilde{V})J_k Y_1(0), \end{aligned} \tag{7.34}$$

算子 $(-iD)^p$ 是自伴的。

~注 7.2. 若 $V = V$，则条件 (7.34) 可写为

$$Y_0(l) = VY_0(0), \quad J_k Y_1(l) = VJ_k Y_1(0), \quad y^{(k)}(l) = \theta y^{(k)}(0) \ (\theta \in \mathbb{T}).$$

~对于 $V = -V$，我们得到

$$Y_0(l) = VJ_k Y_1(0), \quad J_k Y_1(l) = -VY_0(0), \quad y^{(k)}(l) = \theta y^{(k)}(0) \ (\theta \in \mathbb{T}).$$

8 正交归一基

设 $W_2^3(0,l)$ 是由三次可微函数 $y(x)$ 构成的线性流形，这些函数来自 $L^2(0,l)$ $(0 < l < \infty)$，并满足边界条件

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \theta y'(l), \quad y(l) = 0, \quad (\theta \in \mathbb{T}). \tag{8.1}$$

根据命题 7.3, $L_\theta = (-iD)^3$ 在 $W_2^3(0,l)$ 上是一个自伴算子。

求算子 L_θ 的特征函数。满足方程

$$L_\theta y(\lambda, x) = \lambda^3 y(\lambda, x) \tag{8.2}$$

且满足第一个边界条件 (8.1) ($y(0) = 0$) 的解具有如下形式

$$y(\lambda, x) = a_1 \frac{s_1(i\lambda x)}{i\lambda} + a_2 \frac{s_2(i\lambda x)}{(i\lambda)^2}. \tag{8.3}$$

由于

$$y'(\lambda, x) = a_1 s_0(i\lambda x) + a_2 \frac{s_1(i\lambda x)}{i\lambda},$$

由边界条件 $y'(0) = \theta y'(l)$ 可知

$$a_1 = a_1 \theta s_0(i\lambda l) + a_2 \theta \frac{s_1(i\lambda l)}{i\lambda}. \tag{8.4}$$

注 8.1. 注意，$\lambda = 0$ 不是 L_θ 关于 $\theta \neq -1$的特征值。事实上，若 $\lambda = 0$, 则由 (8.2) 可得 $y(0, x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2$。由于$y(0) = 0$，因此 $y_0 = 0$。考虑 $y(l) = 0$，得到 $l(y_1 + y_1 l) = 0$。因此，$y(0, x) = y_2(x^2 - xl)$。由于 $y'(0) = \theta y'(l)$，因此 $-y_2 l = \theta y_2 l$。由此可得 $\theta = -1$。若 $\theta = -1$, 则 $y(\lambda, x) = C(x^2 - xl)$ $(C \neq 0)$ 是算子 L_{-1}的特征函数，对应于特征值 $\lambda = 0$。

今后，我们假设 $\theta \neq -1$。

由 (8.4) 可得

$$a_1 = a_2 \frac{\theta s_1(i\lambda l)}{i\lambda(1 - \theta s_0(i\lambda l))}.$$

因此，由 (8.3) 可得

$$y(\lambda, x) = \frac{a_2 \left[\theta s_1(i\lambda x) s_1(i\lambda l) + s_2(i\lambda x)(1 - \theta s_0(i\lambda l))\right]}{(i\lambda)^2(1 - \theta s_0(i\lambda l))} \tag{8.5}$$

第三个边界条件 $y(l) = 0$ 具有如下形式

$$\frac{\theta s_1(i\lambda l)^2 + s_2(i\lambda l)(1 - \theta s_0(i\lambda l))}{1 - \theta s_0(i\lambda l)} = 0 \tag{8.6}$$

引理 8.1. 若 $1 - \theta s_0(i\lambda l) = 0$ $(|\theta| = 1)$，则不满足边界条件 (8.6)。

证明. 若 (8.6) 对 $s_0(i\lambda l) = \overline{\theta}$ 成立，则 $s_1(i\lambda l) = 0$。由主恒等式 (4.5) 可得

$$\overline{\theta}^3 + s_2(i\lambda l)^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_2(i\lambda l) = (1 - \overline{\theta}^3)^{1/3}.$$

根据欧拉公式 (4.4)，我们得到

$$e^{i\lambda l} = \overline{\theta} + (1 - \overline{\theta}^3)^{1/3}.$$

由于 $e^{i\lambda l} e^{-i\lambda l} = 1$，因此

$$\frac{\theta}{(1 - \theta^3)^{1/3}} + \frac{\overline{\theta}}{(1 - \overline{\theta}^3)^{1/3}} = -1.$$

因此，存在 $b \in \mathbb{R}$ 使得

$$\frac{\theta}{(1 - \theta^3)^{1/3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{b}{2}. \tag{8.7}$$

证明对于 $|\theta| = 1$，(8.7) 不可能成立。引入记号

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{-1+3b^2}{8} + i\frac{3b-b^3}{8} = z = x + iy,$$

由 (8.7) 可得

$$\theta^3 = z(1-\theta^3) \quad \Rightarrow \quad \theta^{-3} = \left(1 + \frac{x}{x^2+y^2}\right) - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

条件 $|\theta^{-3}| = 1$ 仅当 $x = -\frac{1}{2}$ 时成立。因此，对于 b，我们得到方程

$$\frac{-1+3b^2}{8} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + 1 = 0,$$

该方程没有实数解。矛盾。 □

我们称函数

$$\Delta_\theta(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\left[\theta s_1(i\lambda l)^2 + s_2(i\lambda l)(1 - \theta s_0(i\lambda l))\right] \tag{8.8}$$

为算子 L_θ 的特征函数。

注 8.2. 对于函数 $y(\lambda, x)$ (8.3)，由第二和第三个边界条件 (8.1) 可得方程组

$$\begin{cases} a_1(1 - \theta s_0(i\lambda l)) - a_2\theta s_1(i\lambda l)/i\lambda = 0 \\ a_1 s_1(i\lambda l)/i\lambda + a_2 s_2(i\lambda l)/(i\lambda)^2 = 0 \end{cases} \tag{8.9}$$

对于 a_1 和 a_2。该系统存在非平凡解等价于其行列式为零，即特征函数（8.8）。

考虑到（4.11），我们将特征函数改写为

$$\Delta_\theta(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\left[s_2(i\lambda l) + \theta s_2(-i\lambda l)\right]. \tag{8.10}$$

引理 8.2. 特征函数 (8.10) 是一个满足下列条件的指数型整函数

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \overline{\Delta_\theta(\lambda)} = \Delta_{\overline{\theta}}(-\overline{\lambda}) = \overline{\theta}\Delta_\theta(\overline{\lambda}), \\ \text{(ii)} & \Delta_\theta(-\lambda) = \theta\Delta_{\overline{\theta}}(\lambda), \\ \text{(iii)} & \Delta_\theta(\lambda\zeta_j) = \Delta_\theta(\lambda), \qquad j = 0, 1, 2. \end{array} \tag{8.11}$$

若 $\theta \neq -1$，则函数 $\Delta_\theta(i\lambda l)$ 的零点均为单零点，且形式为

$$\mathcal{Z}_0 = \{\ \zeta_1^s \lambda_n(\varphi), \quad -\zeta_1^s \lambda_n(-\varphi), \quad s = 0,1,2, \ \ n \in \mathbb{N}\}, \tag{8.12}$$

其中 $\varphi = \arg\theta$ ($|\varphi| < \pi$)、 $\{\lambda_n(\varphi)\}_0^\infty$($\{-\lambda_n(-\varphi)\}_0^\infty$) 是 $\Delta_\theta(\lambda)$ 的正（负）零点，按升序（降序）编号。

零点 $\lambda_n(\varphi)$ 和 $-\lambda_n(-\varphi)$ 属于区间

$$\left(\frac{\pi}{2}(2n-1) - \varphi, \frac{\pi}{2}(2n+1) - \varphi\right), \left(-\frac{\pi}{2}(2n+1) + \varphi, -\frac{\pi}{2}(2n-1) + \varphi\right).$$

存在以下渐近式，

$$\begin{aligned} \lambda_n(\varphi) &= \frac{2\pi n}{l} - \varphi - \frac{\pi}{3l} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty) \\ -\lambda_n(-\varphi) &= -\frac{2\pi n}{l} + \varphi + \frac{\pi}{3l} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty). \end{aligned} \tag{8.13}$$

证明。恒等式 (8.11) 可由定义 3.1、命题 3.2 (v) 得出。

利用泰勒级数 (3.8)，容易证明

$$\Delta_\theta(\lambda)|_{\lambda=0} = -l^2(1+\theta)/2 \neq 0 \quad \text{for} \quad \theta \neq -1.$$

首先，找出位于直线 $l_k = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x\zeta_k, \ x \in \mathbb{R}\}$,$k = 0$,1,2 上的零点。稍后我们将证明不存在其他零点。

由 (8.11) (ii)、(iii) 可知，只需找出函数 $\Delta_\theta(\lambda)$ 在 $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ 上的零点 $\lambda_n(\varphi)$。

利用 $\theta = e^{i\varphi}$，我们将特征函数表示为

$$\Delta_\theta(\lambda) = \frac{2e^{i\varphi/2}}{3\lambda^2} \sum_{k=0}^{2} \zeta_k \cos\left(\lambda\zeta_k l - \frac{\varphi}{2}\right).$$

由于 $\theta \neq -1$，方程 $\Delta_\theta(\lambda) = 0$等价于方程

$$\sum_{k=0}^{2} \zeta_k \cos\left(\lambda\zeta_k l - \frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

由此可得

$$\cos\left(\lambda l - \frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\lambda l + \varphi}{2}\right) \cosh\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\lambda l + \varphi}{2}\right) \sinh\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2} = 0,$$

or

$$\cos\left(\frac{\lambda l+\varphi}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)-\cosh\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$\sin\left(\frac{\lambda l+\varphi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)+\sqrt{3}\sinh\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}\right). \quad (8.14)$$

注意，如果 $\varphi\in(0,\pi)$，那么

$$\Phi(x):=\sin(x-\varphi)+\sqrt{3}\sinh x\sqrt{3}>0 \quad \text{for} \quad x>0.$$

若 $\varphi\in(-\pi,0)$，则 $\Phi(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有一个简单零点 x_0。此时，对于 $x\in(0,x_0)$，$\Phi(x)<0$；对于 $x\in(x_0,\infty)$，$\Phi(x)>0$。

设 x_0 是 $\Phi(x)$ 的零点（$\varphi\in(-\pi,0)$）。则 (8.14) 推出 $\cos(x_0+\varphi/2)=0$。因此，$\lambda_0(\varphi)=(\pi-\varphi)/2$ 是特征函数 $\Delta_\theta(\lambda)$ 的零点。当 $\lambda>\lambda_0(\varphi)$ 时，不等式 $\sin\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)+\sqrt{3}\sinh\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}>0$ 成立，而 (8.14) 等价于方程

$$\tan\left(\frac{\lambda l+\varphi}{2}\right)=f(\lambda,\varphi), \quad (8.15)$$

其中

$$f(\lambda,\varphi)=\frac{\cos\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)-\cosh\left(\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)+\sqrt{3}\sinh\left(\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}\right)} \quad (\lambda>\lambda_0(\varphi)). \quad (8.16)$$

该函数关于 λ 的导数为

$$f'(\lambda,\varphi)=l\frac{1-\cos\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)\cosh\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)\sinh\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}}{\left(\sin\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)+\sqrt{3}\sinh\left(\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2}$$

由于不等式

$$\cos\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)<\cosh\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)<\sinh\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}$$

对 $\lambda>\lambda_0(\varphi)$ 成立，因而

$$f'(\lambda,\varphi)<l\frac{1-\cos^2\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)-\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)}{\left(\sin\left(\frac{\lambda l}{2}-\varphi\right)+\sqrt{3}\sinh\left(\frac{\lambda l\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2}<0.$$

因此， $f(\lambda,\varphi)$ 在半轴（$\lambda_0(\varphi)\ \infty$）上单调递减，并且当 $\lambda\to\infty$ 时， $f(\lambda,\varphi)\to-\frac{1}{\sqrt{3}}$。于是，对于每个区间上的 $\lambda>\lambda_0(\varphi)$，方程 (8.15)

$$\Big(\frac{\pi}{l}(2n-1)-\varphi,\ \frac{\pi}{l}(2n+1)-\varphi\Big)\quad(n\in\mathbb{N})$$

有一个单根

$$\lambda_n(\varphi)=\frac{2\pi n}{l}-\varphi-\varepsilon_n\quad\Big(0<\varepsilon_n<\frac{\pi}{l}\Big).$$

渐近式 (8.13) 可由 (8.15) 及关系式推出

$$f(\lambda,\varphi)\to-\frac{1}{\sqrt{3}}\quad(\lambda\to\infty).$$

最后，注意到 $\Delta_\theta(\lambda)$ 在直线 $l_s=\{z\in\mathbb{C}\mid z=x\zeta_1^s,x\in\mathbb{R}\}(s=0,1,2)$ 之外没有零点。事实上，若 $w\notin\bigcup l_s$ 为零，则方程 (8.9) 有一个非零解。于是存在一个特征值为复数 $w^3\notin\mathbb{R}$ 的特征函数，这是不可能的，因为算子L_θ 是自伴的。 □

算子 L_θ 的特征函数具有如下形式

$$u(\mu_n,x)=\frac{\theta s_1(i\mu_n x)s_1(i\mu_n l)+s_2(i\mu_n x)(1-\theta s_0(i\mu_n l))}{a_n(\mu_n)},\qquad(8.17)$$

其中 $\mu_n\in\mathcal{Z}_0$ （见 (8.12)），而数 $a_n(\mu_n)$由归一化条件 $\|u(\mu_n,x)\|_{L^2(0,l)}=1$ 确定。

推论 8.1. 在算子 L_θ 的定义域 $D\subset L^2(0,l)$ 上，函数 (8.17) 构成一个标准正交基。

注 8.3. 边界条件

$$y(0)=ih_0y''(0),\ y'(0)=\theta y'(l),\ y(l)=ih_ly''(l),\ (h_j\in\mathbb{R},\theta\in\mathbb{T})\quad(8.18)$$

对于算子 $(-iD)^3$ ，也可生成一个自伴算子 $L_{\theta,\ h_0,\ h_l}$。其特征函数也构成算子 $L_{\theta,\ h_0,\ h_l}$相应定义域上的标准正交基。

9 算子预解式

计算预解式 $R_{L_\theta}(\lambda^3)=(L_\theta-\lambda^3I)^{-1}$。

设 $y = R_{L_\theta}(\lambda^3)f$，即 $L_\theta y = \lambda^3 y + f$。根据引理 6.1，$y(\lambda, x)$ 的形式为

$$y(\lambda,x) = y_1\frac{s_1(i\lambda x)}{i\lambda} + y_2\frac{s_2(i\lambda x)}{(i\lambda)^2} + i\int_0^x \frac{s_2(i\lambda(x-t))}{\lambda^2} f(t)dt \qquad (9.1)$$

并满足边界条件 $y(\lambda,0) = 0$。由于

$$y'_x(\lambda,x) = y_1 s_0(i\lambda x) + y_2\frac{s_1(i\lambda x)}{i\lambda} - \int_0^x \frac{s_1(i\lambda(x-t))}{\lambda} f(t)dt,$$

那么由边界条件 $y'(0) = \theta y'(l)$，$y(l) = 0$，可得方程组

$$\begin{cases} y_1(\theta s_0(i\lambda l) - 1) + y_2\theta\frac{s_1(i\lambda l)}{i\lambda} = \theta\int_0^l \frac{s_1(i\lambda(l-t))}{\lambda} f(t)dt \\ y_1\frac{s_1(i\lambda l)}{i\lambda} + y_2\frac{s_2(i\lambda l)}{(i\lambda)^2} = -i\int_0^l \frac{s_2(i\lambda(l-t))}{\lambda^2} f(t)dt. \end{cases}$$

该方程组的行列式与特征函数$\Delta_\theta(\lambda)$一致（见 8.8）。于是

$$y_1 = \frac{\theta}{\lambda^3\Delta_\theta(\lambda)}\int_0^l \left[s_2(i\lambda(l-t))s_1(i\lambda l) - s_1(i\lambda(l-t))s_2(i\lambda l)\right] f(t)dt,$$

$$y_2 = \frac{i}{\lambda^2\Delta_\theta(\lambda)}\int_0^l \left[s_2(i\lambda(l-t))(1-\theta s_0(i\lambda l)) + \theta s_1(i\lambda(l-t))s_1(i\lambda l)\right] f(t)dt.$$

于是 (9.1) 变为

$$\begin{aligned} y(\lambda,x) = {} & \frac{i}{\lambda^4\Delta_\theta(\lambda)}\times \\ & \Big\{\theta s_1(i\lambda x)\int_0^l \left[s_1(i\lambda(l-t))s_2(i\lambda l) - s_2(i\lambda(l-t))s_1(i\lambda l)\right] f(t)dt - \\ & s_2(i\lambda l)\int_0^l \left[s_2(i\lambda(l-t))(1-\theta s_0(i\lambda l)) + \theta s_1(i\lambda(l-t))s_1(i\lambda l)\right] f(t)dt + \\ & \int_0^x s_2(i\lambda(x-t))\left[s_2(i\lambda l) + \theta s_2(-i\lambda l)\right] f(t)dt\Big\}. \end{aligned} \qquad (9.2)$$

为简化此表达式，我们需要用到以下引理

引理 9.1. 设 $s_k(z)$（$k = 0, 1, 2$）为三双曲函数。则

$$\begin{aligned} &s_1(x)s_1(l-t)s_2(l) - s_1(x)s_2(l-t)s_1(l) + \\ &\qquad s_2(x)s_2(l-t)s_0(l) - s_2(x)s_1(l-t)s_1(l) = \\ &\qquad\qquad s_2(-t)s_2(x-l) - s_2(x-t)s_2(-l) \end{aligned} \tag{9.3}$$

对于任意 x、l、$t \in \mathbb{C}$。

证明。利用 (4.6)，我们变换 (9.3) 的左侧：

$$\begin{aligned} A = {} & s_1(x)s_2(l)\left[s_0(l)s_1(-t) + \underline{s_1(l)s_0(-t)} + s_2(l)s_2(-t)\right] - \\ & s_1(x)s_1(l)\left[\underline{s_0(l)s_2(-t)} + s_1(l)s_1(-t) + s_2(l)s_0(-t)\right] + \\ & s_2(x)s_0(l)\left[s_0(l)s_2(-t) + \underline{\underline{s_1(l)s_1(-t)}} + s_2(l)s_0(-t)\right] - \\ & s_2(x)s_1(l)\left[\underline{\underline{s_0(l)s_1(-t)}} + s_1(l)s_0(-t) + s_2(l)s_2(-t)\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & s_2(-t)\left[s_1(x)\left(s_2(l)^2 - s_0(l)s_1(l)\right) + s_2(x)\left(s_0(l)^2 - s_1(l)s_2(l)\right)\right] + \\ & s_1(-t)s_1(x))\left(s_0(l)s_2(l) - s_1(l)^2\right) + s_0(-t)s_2(x))\left(s_0(l)s_2(l) - s_1(l)^2\right). \end{aligned}$$

利用 (4.11)，我们得到

$$\begin{aligned} A = {} & s_2(-t)\left[s_1(x)s_1(-l) + s_2(x)s_0(-l)\right] - \\ & s_1(-t)s_1(x)s_2(-l) - s_0(-t)s_2(x)s_2(-l) = \\ & s_2(-t)\left[s_1(x)s_1(-l) + s_2(x)s_0(-l)\right] - \\ & s_2(-l)\left[s_1(-t)s_1(x) + s_0(-t)s_2(x)\right]. \end{aligned}$$

再次应用 (4.6)，得到

$$A = s_2(-t)s_2(x-l) - s_2(x-t)s_2(-l).$$

□

将恒等式 (9.3) 应用于 (9.2) 中的被积函数，我们得到

$$\begin{aligned} & y(\lambda, x) = \\ & \frac{i}{\lambda^4 \Delta_\theta(\lambda)} \left\{ \int_0^l \left[\theta s_2(i\lambda(x-l))s_2(-i\lambda t) - \theta s_2(i\lambda(x-t))s_2(-i\lambda l) - \right.\right. \\ & \qquad s_2(i\lambda x)s_2(i\lambda(l-t))\left] f(t)dt + \right. \\ & \left.\left. \int_0^x s_2(i\lambda(x-t))[s_2(i\lambda l) + \theta s_2(-i\lambda l)]f(t)dt \right\}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

定理 9.1。算子 L_θ 的预解式具有如下形式

$$\left(R_{L_\theta}(\lambda^3)f\right)(x) = \frac{i}{\lambda^4\Delta_\theta(\lambda)}\times$$
$$\left\{\int_0^x s_2(i\lambda(x-t))s_2(i\lambda l)f(t)dt - \theta\int_x^l s_2(i\lambda(x-t))s_2(-i\lambda l)f(t)dt+\right.$$
$$\left.\int_0^l \left[\theta s_2(i\lambda(x-l))s_2(-i\lambda t) - s_2(i\lambda x)s_2(i\lambda(l-t))\right]f(t)dt\right\}, \quad (9.5)$$

其中 $\Delta_\theta(\lambda)$ 由关系式 (8.10) 确定。

公式 (9.5) 可将投影到 L_θ 的特征子空间上的谱投影表示为预解式在特征函数 $\Delta_\theta(\lambda)$ 的零点处的留数。

参考文献

[1] V. P. Havin, 《交换调和分析的方法与结构》//《交换调和分析》—1, Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 第15卷, VINITI, 莫斯科, 1987年, 6–33。[2] E. C. Titchmarsh, 《与二阶微分方程相关的特征函数展开》//牛津大学出版社, 伦敦, 1962年。[3] B. M. Levitan、I. S. Sargsyan, 《谱理论导论》//美国数学会, 数学译丛专著, 第39卷, 罗得岛州普罗维登斯, 1975年。（俄文版: Nauka, 莫斯科, 1970年）。[4] E. C. Titchmarsh, 《傅里叶积分理论导论》//牛津大学出版社, 1948年。[5] M. A. Naimark, 《线性微分算子》//Nauka, 莫斯科, 1969年。[6] V. A. Zolotarev, 《具有非局部势的三阶微分算子的逆谱问题》//微分方程杂志, 303, （2021年）, 456–481。[7] V.A. Zolotarev, 《具有非局部势的三阶算子的逆散射问题》//arXiv:2201.10784v1 [math CA] 262022年1月, 1–42。

[8] J. Kohlenberg、H. Lundmark、J. Szmigielsku, 《离散三次弦的逆谱问题》//《逆问题》, 23（2007年）99–121。[9] A. Degasperis、D. D. Holm、A. N. W. Hone, 《一个新的具有峰子解的可积方程》//《理论与数学物理》, 133:2（2002年）1463–1474。[10] H. Lundmark、J. Szmigielsku, 《Degasperis–Procesi 方程的多峰子解》//《逆问题》, 19（2003年）1241–1245。[11] A. Constantin、R. I. Ivanov、J. Lenells, 《Degasperis–Procesi 方程的逆散射变换》//《非线性》, 23（2010年）2559–2575。[12] A. Constantin、R. I. Ivanov, 《Degasperis–Procesi 方程的着装方法》//《应用数学研究》, 138（2017年）205–226。