arXiv:2302.01578v1 [cs.AI] 3 Feb 2023

基于对比学习的整数线性规划大邻域搜索

Taoan Huang [1] Aaron Ferber [1] Yuandong Tian [2] Bistra Dilkina [1] Benoit Steiner [2]

摘要

整数线性规划（ILP）是用于建模和求解大量组合优化问题的强大工具。近期研究表明，作为一种启发式算法，大邻域搜索（LNS）能够比分支定界更快地为整数线性规划找到高质量的解。然而，如何找到合适的启发式方法以最大限度地提升大邻域搜索的性能，仍然是一个悬而未决的问题。本文提出了一种新方法 CL-LNS，在多个整数线性规划基准上实现了最先进的任意时刻性能，其评估指标包括原始间隙、原始积分、存活率和最佳表现率。具体而言，CL-LNS 从计算速度较慢的专家启发式方法中收集正向和负向解样本，并通过对比学习训练出更高效的方法。我们采用图注意力网络和更丰富的特征集，进一步提升其性能。

1. 引言

组合优化问题（COPs）的算法设计是一项重要且具有挑战性的任务。许多现实世界的问题都属于组合优化问题，例如车辆路径规划（Toth &Vigo，2002）、网络设计（Johnsonet al.，1978）、路径规划（Pohl，1970）和机制设计（De Vries& Vohra，2003）问题，其中大多数都是 NP难问题。过去几十年来，由于组合优化问题的重要性，最优算法、近似算法和启发式算法等各类算法得到了广泛研究。这些算法大多由人类通过代价高昂的过程设计而成，通常需要深入理解问题领域及其底层结构，并投入大量时间和精力。

[1] 南加州大学 [2]Meta AI、FAIR。通讯作者：Taoan Huang <taoanhua@usc.edu>。

初步工作。正在由国际机器学习大会（ICML）评审。

近年来，人们对利用机器学习（ML）自动设计组合优化问题的算法越来越感兴趣。许多机器学习方法会在特定的算法框架（如贪心搜索、局部搜索或树搜索）中学习构造或改进解，以解决特定的组合优化问题，例如旅行商问题（TSP）（Xinet al.，2021；Zhenget al.，2021）、车辆路径问题（VRP）（Koolet al.，2018）或独立集问题（Li et al.，2018），而且通常难以直接应用于其他组合优化问题。

相比之下，整数线性规划（ILP）可以灵活地对一大类组合优化问题进行建模并求解，例如最小顶点覆盖、集合覆盖和设施选址问题。整数线性规划可以通过分支定界（BnB）求解（Land 和 Doig，2010），这是一种最优树搜索算法，能够在整数线性规划求解方面达到当前最先进的水平。过去几十年来，分支定界得到了极大的改进，已成为许多流行整数线性规划求解器的核心，例如 SCIP（Bestuzheva 等人，2021）、CPLEX（Cplex，2009）和 Gurobi（GurobiOptimization, LLC，2022）。然而，由于分支定界采用穷举搜索，它难以扩展到大规模实例（Khalil 等人，2016；Gasse 等人，2019）。

另一方面，近期研究表明，对于大型整数线性规划实例，大邻域搜索（LNS）比Song 等人、2020；Wu 等人、2021；Sonnerat 等人、2021；Huang 等人、2022a）更快地找到高质量解。LNS 从一个初始解（即为变量赋予数值的可行方案）开始，然后通过反复选取一部分变量进行重新优化，同时固定其余变量，从而改进当前最优解。选择要重新优化的变量子集，即破坏启发式，是 LNS 的关键组成部分。人工设计的破坏启发式，例如随机启发式（Song 等人、2020；Sonnerat 等人、2021）和局部分支（LB）启发式（Fischetti 和 Lodi、2003），往往要么效率低下（难以快速找到优质子集），要么效果不佳（找到的子集质量较差）。研究者还提出了基于机器学习的破坏启发式，其表现优于人工设计的方法。目前最先进的方法包括 IL-LNS（Sonnerat 等人、2021），它使用模仿学习（IL）来模仿 LB 启发式；以及 RL-LNS（Wu 等人、2021），它采用与 IL-LNS 类似的框架，但通过强化学习（RL）进行训练。

在本文中，我们提出了一种新颖的基于机器学习的整数线性规划大邻域搜索方法，用于

整数线性规划，即 *CL-LNS*，该方法使用对比学习（CL）（Chen 等人，2020；Khosla 等人，2020）来学习高效且有效的破坏启发式算法。与 IL-LNS（Sonnerat 等人，2021）类似，我们学习模仿局部分支（LB）启发式算法。该破坏启发式算法会在当前最优解的汉明球内选择变量的最优子集。LB 需要求解一个与原问题规模相同的额外整数线性规划，因此计算成本很高。我们不仅使用 LB 提供的最优子集作为专家示范（与 IL-LNS 中的做法相同），还利用中间解和扰动。在求解用于 LB 的整数线性规划时，会找到中间解，其中那些在有效性方面接近最优的解将成为正样本。我们还通过随机扰动最优子集来收集负样本。同时利用正样本和负样本，我们没有像 IL-LNS 那样使用分类损失，而是采用对比损失，鼓励模型预测出与正样本相似、但与负样本不同的子集，其中相似度通过点积来衡量（Oord 等人，2018；He 等人，2020）。最后，我们还使用了更丰富的特征集，并采用图注意力网络（GAT）替代 GCN，以进一步提升性能。

通过实证研究，我们表明，在从几分钟到一小时不等的不同运行时间截断下，就原始间隙、原始积分、最佳表现率和存活率等多个指标而言，CL-LNS 的表现优于最先进的机器学习方法和非机器学习方法，展示了 CL-LNS 的有效性和效率。此外，CL-LNS 在规模为训练实例两倍的测试实例上展现出出色的泛化性能。

2. 背景

本节首先定义整数线性规划，然后介绍用于求解整数线性规划的大邻域搜索和局部分支（LB）启发式。

2.1. 整数线性规划

整数线性规划（ILP）定义如下：

$$\min \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \text{ and } \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n, \qquad (1)$$

其中，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}$ 表示待优化的 n 二元变量，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 是目标系数向量，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 指定了 m 线性约束。整数线性规划的解是为变量赋予一组满足约束的值。本文关注上述仅包含二元变量的形式，但我们的方法也可应用于包含连续变量和/或非二元整数变量的混合整数线性规划。

2.2. 用于求解整数线性规划的大邻域搜索

大邻域搜索是一种启发式算法，它从一个初始解出发，然后迭代地破坏并重新优化解的一部分，直至超过运行时间限制或满足某个停止条件。设 $\mathcal{I} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$为输入的整数线性规划，其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 是方程（1）中定义的系数，$\boldsymbol{x}^0$ 为初始解（通常通过短时间运行分支定界得到）。在大邻域搜索的第 $t \geq 0$次迭代中，给定当前最优解 $\boldsymbol{x}^t$（即迄今找到的最佳解），破坏启发式会选取 k^t 变量的一个子集 $\mathcal{X}^t = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k^t}}\}$。重新优化通过求解一个子整数线性规划完成，其中 $\mathcal{X}^t$ 为变量，同时将 $x_j \notin \mathcal{X}^t$ 的值固定为与 $\boldsymbol{x}^t$中相同。子整数线性规划的解成为新的当前最优解$\boldsymbol{x}^{t+1}$，随后大邻域搜索进入第 $t+1$次迭代。与分支定界相比，大邻域搜索在改进目标值方面更为有效，$\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}x$ 尤其是在困难实例上（Song 等人，2020；Sonnerat 等人，2021；Wu 等人，2021）。与其他局部搜索方法相比，大邻域搜索在每一步都会探索较大的邻域，因此更能有效避免陷入局部极小值。

自适应邻域大小 以往工作中常采用自适应方法来设置邻域大小 k^t （Sonnerat 等人，2021；Huang 等人，2022a）。初始邻域大小 k^0 被设为一个常数或变量数的某个比例。本文考虑以下自适应方法（Huang 等人，2022a）：在第 t次迭代中，如果大邻域搜索找到更优解，则令 $k^{t+1} = k^t$，否则令 $k^{t+1} = \min\{\gamma \cdot k^t, \beta \cdot n\}$ 其中 $\gamma > 1$ 为一个常数，并将 k^t 限制为变量数的某个常数比例 $\beta < 1$，以确保子整数线性规划不会过大（从而不会过于难以求解）。自适应地设置k^t 有助于大邻域搜索摆脱局部极小值：当搜索未能改进解时，通过扩大搜索邻域来实现这一点。

2.3. LB 启发式

LB 启发式（Fischetti 和 Lodi，2003）最初被提出作为分支定界中的一种原始启发式，但也适用于通过大邻域搜索求解整数线性规划（Sonnerat 等人，2021；Liu 等人，2022）。给定大邻域搜索在迭代 t 中的当前最优解 $\boldsymbol{x}^t$，LB 旨在找到要破坏的变量子集 $\mathcal{X}^t$，使得由此得到的最优解 $\boldsymbol{x}^{t+1}$ 与 $\boldsymbol{x}^t$ 至多在 k^t 个变量上不同；也就是说，它计算位于以 $\boldsymbol{x}^t$ 为中心、半径为 k^t 的给定汉明球内的最优解 $\boldsymbol{x}^{t+1}$。为找到 $\boldsymbol{x}^{t+1}$，LB 启发式求解 LB 整数线性规划，该问题与输入的整数线性规划完全相同，但多了一个约束，用于限制 $\boldsymbol{x}^t$ 与 $\boldsymbol{x}^{t+1}$ 之间的距离：$\sum_{i\in[n]:x_i^t=0} x_i^{t+1} + \sum_{i\in[n]:x_i^t=1}(1-x_i^{t+1}) \leq k^t$.LB 整数线性规划的规模与输入的整数线性规划相同（即变量数相同，且多一个约束），因此在实践中往往过于缓慢，难以发挥作用。

3. 相关工作

本节总结整数线性规划及其他组合优化问题的大邻域搜索相关工作、通过分支定界和对比学习求解整数线性规划的研究，以及组合优化问题的对比学习研究。我们还在附录中总结了基于大邻域搜索的分支定界原始启发式，以及学习求解其他组合优化问题的相关工作。

3.1. 整数线性规划及其他组合优化问题的大邻域搜索

过去几十年来，人们投入了大量精力改进整数线性规划的分支定界，但对整数线性规划的大邻域搜索尚未进行广泛研究。近期，Song 等人(2020) 发现，即使在大邻域搜索中使用随机破坏启发式，其表现也能优于最先进的分支定界。他们还发现，基于机器学习引导的分解式大邻域搜索可以取得更好的表现；这种方法利用强化学习和模仿学习来学习破坏启发式，通过分类损失将变量集合划分为大小相等的子集。Sonnerat 等人(2021) 通过模仿下界来学习选择变量。RL-LNS（Wu 等人，2021）采用类似的框架，但通过强化学习进行训练，且表现优于 Song 等人(2020)。Wu 等人(2021) 和Sonnerat 等人 (2021) 均使用整数线性规划的二部图表示，学习由图卷积网络表示的破坏启发式。另一类相关工作则侧重于改进下界。Liu 等人(2022) 使用机器学习为下界调整运行时间限制和邻域大小。Huang 等人(2022a) 提出 LB-RELAX，通过求解下界的线性规划松弛来选择变量。

除了整数线性规划外，大邻域搜索也被用于求解许多组合优化问题，例如 VRP（Ropke & Pisinger, 2006; Azi 等人, 2014）、TSP（Smith & Imeson, 2017）、调度（Kovacs 等人, 2012; Zulj 等人, 2018）和路径规划问题（Li 等人, 2022; 2021a）。机器学习方法也被用于改进这些应用中的大邻域搜索（Chen & Tian, 2019; Lu 等人, 2019; Hottung & Tierney, 2020; Li 等人, 2021b; Huang 等人 , 2022b ）。

3.2. 利用分支定界求解整数线性规划

已有多项研究将机器学习用于改进分支定界。大多数工作侧重于学习选择要进行分支的变量（Khalil 等人, 2016; Gasse 等人, 2019; Gupta 等人, 2020; Zarpellon 等人, 2021），或选择要扩展的节点（He 等人, 2014; Labassi 等人, 2022）。还有一些工作研究如何学习安排并运行原始启发式算法（Khalil 等人, 2017; Chmiela 等人, 2021），以及如何选择割平面（Tang 等人, 2020; Paulus 等人, 2022; Huang 等人, 2022c）。

3.3. 组合优化问题的对比学习

尽管视觉表征的对比学习（Hjelm 等人，2019；He 等人，2020；Chen 等人，2020）和图表示的对比学习（You 等人，2020；Tong 等人，2021）已得到广泛研究，但其在 COPs 中的应用尚未得到充分探索。Mulamba 等人（2021）提出了一种用于决策导向学习的对比损失，以利用可从历史数据中学习的不确定输入来求解 COPs，并将非最优解视为负样本。Duan 等人（2022）采用对比预训练，为布尔可满足性问题学习良好的表征。

4. 用于大邻域搜索的对比学习

我们的目标是学习一种策略，即由机器学习模型表示的破坏启发式，在每次大邻域搜索迭代中选择一个变量子集进行破坏并重新优化。具体而言，设$\boldsymbol{s}^t = (\mathcal{I}, \boldsymbol{x}^t)$为大邻域搜索第 t 次迭代中的当前状态，其中$\mathcal{I} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$为整数线性规划，$\boldsymbol{x}^t$ 为当前最优解；该策略预测一个动作 $\boldsymbol{a}^t = (a_1^t, \dots, a_n^t) \in \{0,1\}^n$，即所选变量的二进制表示 $\mathcal{X}^t$，用于指示 x_i 是否被选中（$a_i^t = 1$）或未被选中（$a_i^t = 0$）。我们使用对比学习来学习预测高质量的 $\boldsymbol{a}^t$，使得在求解由 $\boldsymbol{a}^t$（或 $\mathcal{X}^t$）得到的子整数线性规划后，所得当前最优解 $\boldsymbol{x}^{t+1}$ 能够得到尽可能大的改进。接下来，我们将介绍如何为对比学习准备数据、用于训练的策略网络和对比损失，最后介绍如何在 CL-LNS 中使用学习得到的策略。

4.1. 数据收集

沿用 Sonnerat 等人（2021）的先前工作，我们使用 LB 作为专家策略，收集优质示范以学习模仿。具体而言，对于给定状态 $\boldsymbol{s}^t = (\mathcal{I}, \boldsymbol{x}^t)$，我们使用 LB 找到最优动作 $\boldsymbol{a}^t$，该动作在求解子整数线性规划后可使 $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}^{t+1}$ 达到最小值。与先前工作不同，我们使用对比学习，通过对比正负样本（即动作 $\boldsymbol{a}^t$的优劣示例），学习对 $\boldsymbol{a}^t$ 做出有区分性的预测。接下来，我们将介绍如何收集正样本集 $\mathcal{S}_\mathsf{p}^t$ 和负样本集 $\mathcal{S}_\mathsf{n}^t$。

收集正样本 $\mathcal{S}_\mathsf{p}^t$ 在数据收集过程中，给定 $\boldsymbol{s}^t = (\mathcal{I}, \boldsymbol{x}^t)$，我们使用当前最优解 $\boldsymbol{x}^t$ 和邻域大小 k^t 求解 LB 整数线性规划，以寻找最优的 $\boldsymbol{x}^{t+1}$。大邻域搜索使用 $\boldsymbol{x}^{t+1}$ 继续进行第 $t+1$ 次迭代，直到 LB 整数线性规划在运行时间限制内无法找到改进解 $\boldsymbol{x}^{t+1}$。在实验中，使用 SCIP 8.0.1（Bestuzheva 等人，2021）求解 LB 整数线性规划，运行时间限制为一小时，并针对每种实例微调 k^t。每次求解 LB 整数线性规划后，除了记录找到的最佳解，SCIP 还会记录求解过程中找到的所有中间解。我们筛选中间解 $\boldsymbol{x}'$，其目标值的改进幅度至少为最佳改进幅度的 $0 < \alpha_\mathsf{p} \le 1$ 倍（即 $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}(\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}') \ge \alpha_\mathsf{p} \cdot \boldsymbol{c}^\mathsf{T}(\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^{t+1})$），并将其视为

对应动作作为正样本。我们将正样本数量限制为 $|\mathcal{S}_{\mathsf{p}}^t|$ u_{p}。如果可用的正样本超过 u_{p}，我们会记录排名前 u_{p} 的样本，以避免计算对比损失时因样本过多而产生较大的计算开销（见第 4.3 节）。 α_{p}和 u_{p} 分别设为 0。5 和10，用于实验。

收集负样本 $\mathcal{S}_{\mathsf{n}}^t$ 负样本是对比学习的重要组成部分，有助于区分优质和劣质示范。我们收集一组 c_{n}^t负样本 $\mathcal{S}_{\mathsf{n}}^t$，其中 $c_{\mathsf{n}}^t = \kappa|\mathcal{S}_{\mathsf{p}}^t|$ 和 κ 是用于控制正样本与负样本数量比率的超参数。假设 $\mathcal{X}^t$ 是由下界选出的最优变量集。接着，我们扰动 $\mathcal{X}^t$，将 $\mathcal{X}^t$ 中 5% 的变量替换为相同数量的、不属于 $\mathcal{X}^t$的变量，并以均匀随机方式得到 $\hat{\mathcal{X}}^t$。随后，我们求解由 $\hat{\mathcal{X}}^t$ 导出的相应子整数线性规划，得到新的当前最优解 $\hat{\boldsymbol{x}}^{t+1}$。如果 $\hat{\boldsymbol{x}}^{t+1}$ 带来的改进小于最佳改进的 $0 \leq \alpha_{\mathsf{n}} < 1$ 倍（即， $\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{x}^t - \hat{\boldsymbol{x}}^{t+1}) \leq \alpha_{\mathsf{n}} \cdot \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{x}^t - \boldsymbol{x}^{t+1})$），我们就将其对应的动作视为负样本。我们重复此过程 c_{n}^t 次以收集负样本。如果收集到的负样本少于 c_{n}^t个，我们就将扰动比率从 5% 提高到 10%，并生成另外 c_{n}^t 个样本。之后，我们每次将扰动比率提高 5%，直到找到 c_{n}^t 个负样本或扰动比率达到 100%。在实验中，我们设置 $\kappa = 9$ 和 $\alpha_{\mathsf{n}} = 0.05$，每个状态收集负样本所需时间不到 3 分钟。

4.2. 策略网络

遵循此前关于整数线性规划学习的研究（Gasse 等人，2019；Sonnerat 等人，2021；Wu 等人，2021），我们采用整数线性规划的二部图表示来编码状态 $\boldsymbol{s}^t$。二部图由 $n + m$ 个节点组成，分别表示两侧的n 个变量和 m 个约束；如果某变量在某约束中的系数非零，则在该变量与该约束之间连一条边。遵循Sonnerat 等人(2021)，我们采用Gasse 等人(2019提出的特征作为二部图中的节点特征和边特征，并将最近的当前最优解值纳入变量节点特征，形成一个固定大小的窗口；实验中窗口大小设为 3。除了Sonnerat 等人(2021使用的特征外，我们还纳入了Khalil 等人(2016提出的特征，这些特征在分支定界的根节点处计算，以丰富变量节点特征集。

我们学习一个策略 $\pi_{\boldsymbol{\theta}}(\cdot)$，它由图注意力网络（GAT）(Brody 等人, 2022)表示，并由可学习权重 $\boldsymbol{\theta}$ 参数化。该策略以状态 $\boldsymbol{s}^t$ 作为输入，并输出一个分数向量 $\pi_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s}^t) \in [0, 1]^n$，每个变量对应一个分数。为了提升建模能力并操控我们架构所提出的节点交互，我们使用嵌入层将每个节点特征和边特征映射到空间 $\mathbb{R}^d$。令 $\mathbf{v}_j$、$\mathbf{c}_i$、$\mathbf{e}_{i,j} \in \mathbb{R}^d$ 分别表示嵌入层输出的第 i 个变量、第 j 个约束以及连接它们的边的嵌入。由于我们的图是二部图，遵循先前的工作（Gasse 等人, 2019），我们通过 GAT 执行两轮消息传递。第一轮中，每个约束节点 $\mathbf{c}_i$ 使用包含 H 个注意力头的注意力结构关注其邻居 $\mathcal{N}_i$，从而获得更新后的约束嵌入 $\mathbf{c}'_i$ （其计算取决于 $\mathbf{v}_j$、$\mathbf{c}_i$、$\mathbf{e}_{i,j}$）。第二轮中，同样地，每个变量节点关注其邻居，以获得更新后的变量嵌入 $\mathbf{v}'$（其计算取决于 $\mathbf{v}_j$、$\mathbf{c}'_i$、$\mathbf{e}_{i,j}$），并使用另一组注意力权重。两轮消息传递完成后，将变量的最终表征 $\mathbf{v}'$ 输入多层感知机（MLP），为每个变量计算一个标量值，最后应用 Sigmoid 函数，得到介于 0 和 1 之间的分数。网络架构的完整细节见附录。在实验中， d 和 H 分别设为 64 和 8。

4.3. 使用对比损失进行训练

给定一组用于训练的整数线性规划实例，我们遵循专家轨迹来收集训练数据。令 $\mathcal{D} = \{(\boldsymbol{s}, \mathcal{S}_{\mathsf{p}}, \mathcal{S}_{\mathsf{n}})\}$ 表示训练数据中状态及其对应的正样本集合和负样本集合。对比损失是一种函数，当预测动作 $\pi_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s})$ 与正样本 $\mathcal{S}_{\mathsf{p}}$相似、与负样本 $\mathcal{S}_{\mathsf{n}}$不相似时，其值较低。本文采用点积衡量相似度，并使用一种称为 InfoNCE 的监督式对比损失（Oord 等人，2018；He 等人，2020）：

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{(\boldsymbol{s}, \mathcal{S}_{\mathsf{p}}, \mathcal{S}_{\mathsf{n}}) \in \mathcal{D}} \frac{-1}{|\mathcal{S}_{\mathsf{p}}|} \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{S}_{\mathsf{p}}} \log \frac{\exp(\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}} \pi_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s})/\tau)}{\sum_{\boldsymbol{a}' \in \mathcal{S}_{\mathsf{n}} \cup \{\boldsymbol{a}\}} \exp(\boldsymbol{a}'^{\mathsf{T}} \pi_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s})/\tau)}$$

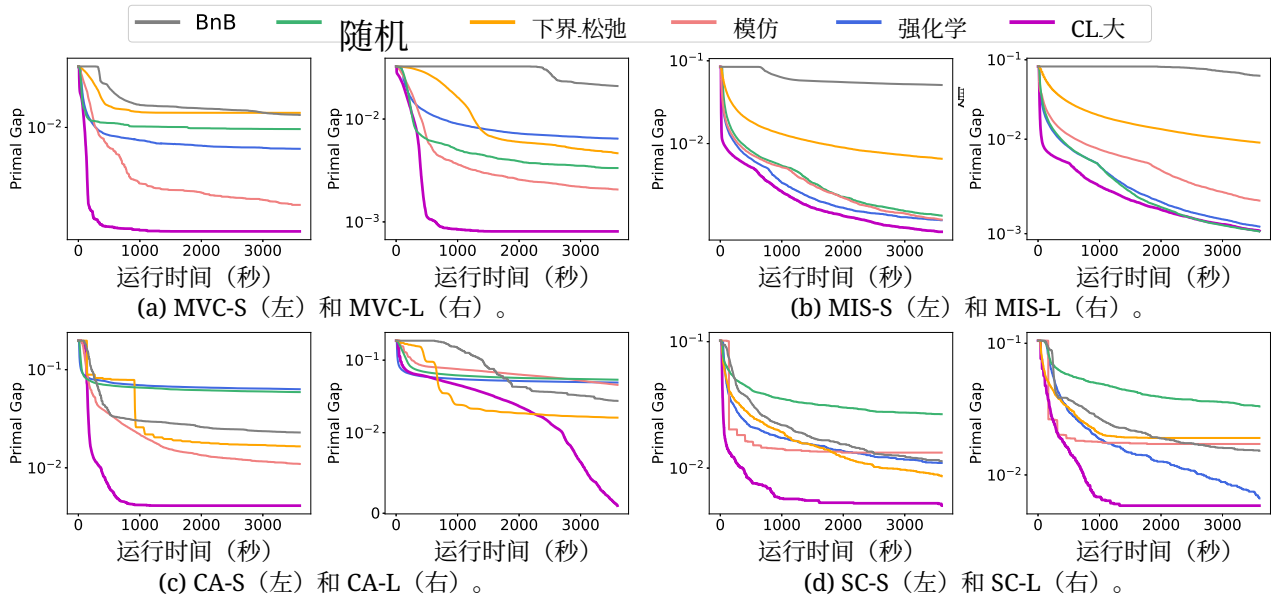
其中 τ 是温度超参数，在实验中设为 0.07（He 等人，2020）。

4.4. 应用学习得到的策略 $\pi_{\boldsymbol{\theta}}$

我们将学习得到的策略 $\pi_{\boldsymbol{\theta}}$ 应用于大邻域搜索。在第 t 次迭代中，令 $(v_1, \cdots, v_n) := \pi_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s}^t)$ 表示策略输出的变量分数。为选择 k^t 个变量，CL-LNS 会贪心地选择分数最高的变量。以往的研究（Sonnerat 等人，2021；Wu 等人，2021）通常使用采样方法来选择变量，但在 CL-LNS 中，这些采样方法的效果在实验中不如我们的贪心方法。然而，当自适应邻域大小k^t 达到其上限 $\beta \cdot n$ 时，由于选择过程是确定性的，CL-LNS 可能会重复相同的预测。发生这种情况时，我们会切换到（Sonnerat 等人，2021）中介绍的采样方法。该采样方法按顺序选择变量：在每一步中，以与 v_i^η 成正比的概率选择一个尚未被选中的变量 x_i，其中 η 是一个温度参数，设定为

表 1. 测试实例的名称及变量和约束的平均数量。

	小规模实例				大规模实例			
Name	MVC-S	MIS-S	CA-S	SC-S	MVC-L	MIS-L	CA-L	SC-L
#变量	1,000	6,000	4,000	4,000	2,000	12,000	8,000	8,000
#约束	65,100	23,977	2,675	5,000	135,100	48,027	5,353	5,000



(a) MVC-S（左）和 MVC-L（右）。 (b) MIS-S（左）和 MIS-L（右）。

(c) CA-S（左）和 CA-L（右）。 (d) SC-S（左）和 SC-L（右）。

图1. 原始间隙（越低越好）随运行时间的变化情况，取 100 个测试实例的平均值。对于机器学习方法，策略仅在小型训练实例上训练，但在小型和大型测试实例上进行测试。

在实验中设为 0.5。

5. 实证评估

本节将介绍我们的评估设置，然后呈现结果。论文发表后，我们将公开代码。

5.1. 设置

实例生成我们在四种现有研究中广泛使用的 NP难问题基准上进行评估（Wu 等人，2021；Song 等人，2020；Scavuzzo 等人，2022），这些基准包含两个图优化问题，即最小顶点覆盖（MVC）和最大独立集（MIS）问题，以及两个非图优化问题，即组合拍卖（CA）和集合覆盖（SC）问题。我们首先为每个问题生成一个包含 100 个小规模实例的测试集，分别为 MVC-S、MIS-S、CA-S 和 SC-S。MVC-S 实例按照 Barabási–Albert 随机图模型生成（Albert& Barab´asi，2002），包含 1,000 个节点，平均度为 70，遵循（Song 等人，2020）。MIS-S 实例按照 Erdős–Rényi 随机图模型生成（Erdos 等人，1960），包含 6,000 个节点，平均度为 5，遵循（Song 等人，2020）。CA-S 实例通过设置 2,000 个物品和 4,000 个出价，并依据 Leyton-Brown 等人（2000）中的任意关系生成。SC-S 实例按照 Wu 等人（2021）生成，包含 4,000 个变量和 5,000 个约束。随后，我们通过将变量数加倍，为每个问题生成另一个包含 100 个大规模实例的测试集，分别为 MVC-L、MIS-L、CA-L 和 SC-L。对于每个测试集，表 1 展示了变量数和约束数的平均值。实例生成的更多详情见附录。

为进行数据收集和训练，我们为每个问题生成了另一组包含 1,024 个小规模实例的数据。我们将这些实例划分为训练集和验证集，分别包含 896 个和 128 个实例。

基线方法我们将 CL-LNS 与五种基线方法进行比较：(1) 分支定界：使用当前最先进的开源整数线性规划求解器 SCIP（v8.0.1），并微调其激进模式，使其专注于提升目标值；(2) 随机：通过均匀抽样 k^t 变量且不放回，选择邻域的大邻域搜索；(3) LB-RELAX（Huang 等人，2022a）：使用 LB-RELAX 启发式算法选择邻域的大邻域搜索；(4) I L-LNS（Sonnerat 等人，2021）；(5) RL-LNS（Wu 等人，2021）。我们在附录中还与另外两种基线方法进行了比较。对于每种机器学习方法，我们都针对每个问题单独训练一个模型，使用小型训练集

，并在小型和大型测试集上进行测试。由于作者没有完全公开代码，我们实现了 IL-LNS，并针对每个问题微调其超参数。IL-LNS 使用与 CL-LNS 相同的训练数据集，但只使用正样本。对于 RL-LNS，我们使用作者提供的代码和超参数，并用五个随机种子训练模型，再从验证集中选取性能最佳的模型。我们不与Song 等人 (2020)提出的方法进行比较，因为它在多个问题上的表现不如 RL-LNS（Wu 等人，2021）。

指标 我们使用以下指标评估所有方法：(1) 原始界是整数线性规划的目标值；(2) 原始间隙（Berthold, 2006）是原始界 v 与预先计算的已知最优目标值 v^* 之间的归一化差值，定义为：如果 v 存在，则为 $\frac{|v-v^*|}{\max(v,v^*,\epsilon)}$，否则为 $v \cdot v^* \geq 0$；如果不存在，则为 1。我们使用$\epsilon = 10^{-8}$ 以避免除以零；(3) 在时间 q 处的原始积分（ Achterberg 等人，2012 ）是原始间隙随运行时间变化的函数在$[0, q]$ 上的积分。它反映了解的质量以及找到解的速度；(4) 达到特定原始间隙阈值的存活率，是原始间隙低于该阈值的实例所占比例（Sonnerat 等人，2021）；(5) 一种方法的最佳表现比率，是在给定运行时间截断下，相较于所有方法，该方法取得最佳原始间隙（包括并列）的实例所占比例。由于分支定界和大邻域搜索都是随时算法，我们将这些指标表示为运行时间或大邻域搜索中的迭代次数（如适用）的函数，以展示其随时表现。

超参数我们在配备 32 GB 内存的 2.5GHz Intel Xeon Platinum 8259CL CPU 上进行实验。训练在配备 40 GB 内存的 NVIDIA A100 GPU 上完成。除非另有说明，所有实验均使用下文所述的超参数。我们使用 SCIP (v8.0.1) (Bestuzheva 等人, 2021) 求解每次大邻域搜索迭代中的子整数线性规划。运行大邻域搜索时，我们先运行 SCIP 10 秒以找到一个初始解。我们将求解每个实例的时间限制设为 60 分钟，并将每次大邻域搜索迭代中求解子整数线性规划的时间限制设为 2 分钟。除分支定界和 RL-LNS 外，所有方法在大邻域搜索中都需要指定邻域大小 k^t （k^t 在 RL-LNS 中的定义取决于策略的使用方式）。对于 LB-RELAX、IL-LNS 和 CL-LNS，初始邻域大小 k^0 分别设为 100、3000、1000和 150，分别对应 MVC、MIS、组合拍卖和集合覆盖；但k^0 设为 150 ，用于 IL-LNS 的集合覆盖；对于随机方法，其分别设为 200、3000、1500 和 200，分别对应 MVC、MIS、组合拍卖和集合覆盖。除分支定界和 RL-LNS 外，所有方法均采用自适应邻域大小，其中 $\gamma = 1.02$ 和 $\beta = 0.5$。对于 IL-LNS，应用其学习到的策略时，我们在 MVC 和组合拍卖实例上使用采样方法，在集合覆盖和 MIS 实例上使用贪心方法。对于 CL-LNS，所有实例均使用贪心方法。关于超参数调优的更多细节见附录。

对于数据收集，我们分别为 MVC、MIS、组合拍卖和集合覆盖使用不同的邻域大小$k^0 = 50$：500、200 和 50 。我们在第 5.2 节对此进行了说明。我们设置 $\gamma = 1$，并使用 LB 运行大邻域搜索，直到找不到新的当前最优解。每次迭代中求解 LB 的运行时间限制设为 1 小时。训练时，我们使用Adam优化器（Kingma和Ba，2015），学习率为 10^{-3}。批量大小设为 32，训练 30 个训练轮次（通常不到 20 个训练轮次、24 小时便可收敛）。

5.2. 结果

图1 展示了原始间隙随运行时间变化的情况。表2 分别列出了小规模和大规模实例在 60 分钟运行时间截断时的平均原始间隙和原始积分（附录中提供了运行时间截断为 15、30 和 45分钟时的结果）。值得注意的是，尽管使用了他们的代码，并以五个随机种子重复训练，我们仍未能复现 Wu 等人Wu 等人（2021）报告的 RL-LNS 在 CA-S 和 CA-L 上的结果。在所有问题上，CL-LNS 的任意时刻性能均显著优于所有基线方法，实现了最低的平均原始间隙和原始积分。此外，它在训练期间未见过的大规模实例上也展现出很强的泛化性能。图2 展示了达到 1.00%原始间隙阈值的存活率

表2. 原始间隙（PG）（百分比）以及运行时间截断为 60 分钟时的原始积分（PI），均为 100 个测试实例的平均值及其标准差。“↓”表示数值越低越好。对于机器学习方法，策略仅使用小规模训练实例进行训练，但在小规模和大规模测试实例上均进行测试。

	PG（%）↓	PI ↓	PG（%）↓	PI ↓
	MVC-S		MIS-S	
BnB	1.32±0.43	66.1±13.1	5.10±0.69	222.8±25.9
随机	0.96±1.26	38.0±44.8	0.24±0.14	22.1±5.0
LB-RELAX	1.38±1.51	57.0±51.2	0.65±0.20	46.9±6.5
IL-LNS	0.29±0.23	19.2±10.2	0.22±0.17	19.4±5.8
RL-LNS	0.61±0.34	29.6±11.5	0.22±0.14	17.2±5.2
CL-LNS	**0.17±0.09**	**8.7±6.7**	**0.15±0.15**	**12.8±5.4**
	CA-S		SC-S	
BnB	2.28±0.59	137.4±25.9	1.13±0.95	86.7±37.9
随机	5.90±1.02	235.6±34.9	2.67±1.29	124.3±45.4
LB-RELAX	1.65±0.57	140.5±18.3	0.86±0.83	63.2±31.6
IL-LNS	1.09±0.51	90.0±20.8	1.33±0.97	63.2±34.3
RL-LNS	6.32±1.03	249.2±35.9	1.10±0.77	77.8±28.9
CL-LNS	**0.65±0.32**	**50.7±22.7**	**0.50±0.58**	**26.2±12.8**
	MVC-L		MIS-L	
BnB	2.41±0.40	130.2±11.1	6.29±1.62	285.1±18.2
随机	0.38±0.24	22.7±8.0	**0.11±0.08**	19.0±3.1
LB-RELAX	0.46±0.23	48.4±7.5	0.91±0.16	68.6±5.5
IL-LNS	0.27±0.23	21.2±8.1	0.29±0.15	27.1±5.5
RL-LNS	0.59±0.30	37.3±9.6	0.14±0.12	18.9±4.1
CL-LNS	**0.05±0.04**	**9.1±3.4**	0.12±0.11	**12.9±4.4**
	CA-L		SC-L	
BnB	2.74±1.87	320.9±83.1	1.54±1.33	115.0±42.5
随机	5.37±0.75	229.2±24.4	3.31±1.79	166.4±61.3
LB-RELAX	1.61±1.50	153.0±50.3	1.91±1.42	88.3±48.9
IL-LNS	4.56±0.98	254.2±33.4	1.72±1.19	79.1±42.4
RL-LNS	4.91±0.81	197.0±28.5	0.66±0.72	116.2±27.1
CL-LNS	**0.09±0.10**	**116.1±18.0**	**0.58±0.45**	**39.2±23.2**

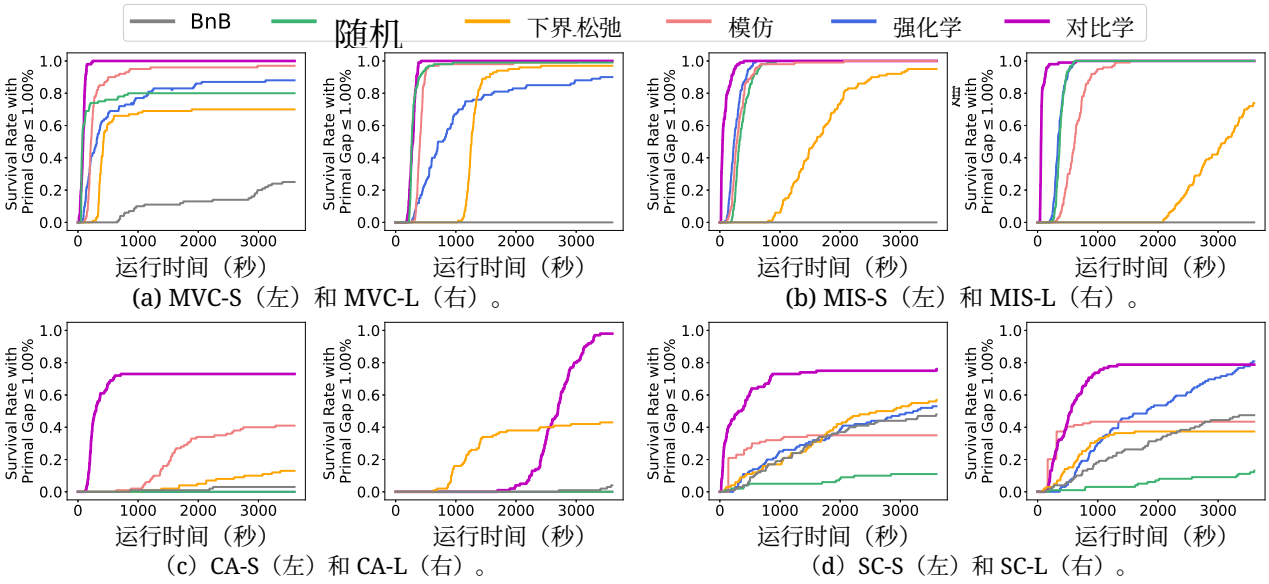


图2.在100个测试实例上，达到原始间隙阈值1.00%所需运行时间对应的存活率（越高越好）。对于机器学习方法，策略仅在小型训练实例上训练，但在小型和大型测试实例上均进行测试。

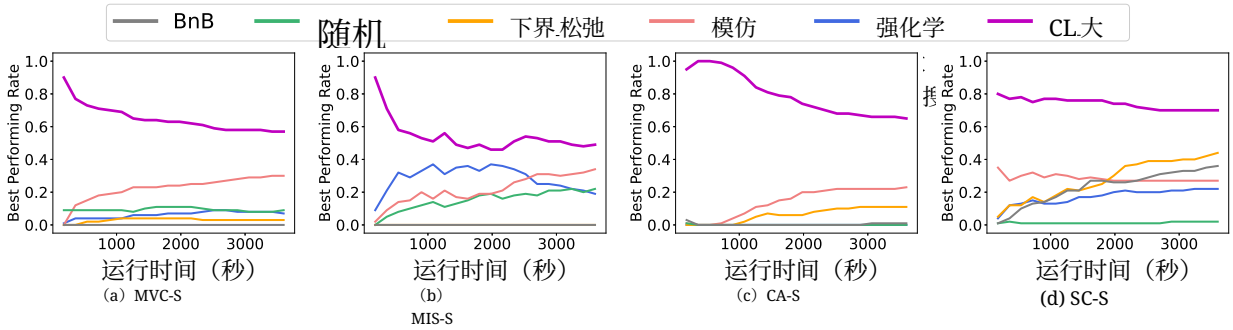
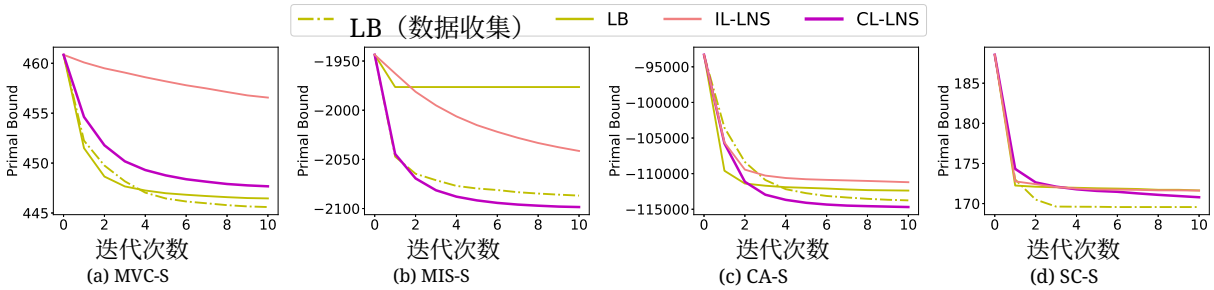


图 3. 在 100 个小规模实例上，最佳表现率（越高越好）随运行时间的变化情况（大规模实例的结果见附录）。给定运行时间下，最佳表现率之和可能大于 1，因为平局会被重复计数。

。在所有实例上，CL-LNS 在 60 分钟运行时间截断时均取得最高存活率；但在 SC-L 上，其最终存活率略低于 RL-LNS，不过它达到该存活率所需的运行时间短得多。在 MVC-L、MIS-S 和 MIS-L 实例上，若干基线方法取得了与 CL-LNS 相同的存活率，但 CL-LNS 始终以最短运行时间达到这些存活率。图3 展示了小规模测试实例上的最佳表现率，CL-LNS 在 50% 至 100% 的实例上始终表现最佳。附录中还展示了与另外两种基线方法以及另一项性能指标进行比较的出色结果。

与 LB（专家）的比较 IL-LNS 和 CL-LNS 都学会了模仿 LB。在小规模测试实例上，我们使用两种不同的邻域大小运行 LB：一种是在数据收集过程中经过微调的，另一种与 CL-LNS 相同；运行 10 次迭代，并比较其每次迭代的 IL-LNS 和 CL-LNS 的性能。这使我们能够独立于速度，比较学习到的策略与专家的质量。LB 每次迭代的时间限制设为 1 小时。图4 展示了原始界随迭代次数的变化。图中的表格总结了邻域大小和每次迭代的平均运行时间。对于 LB，结果表明，邻域大小会影响整体性能。直观而言，在 LB 中使用较大的邻域大小，可以让大邻域搜索探索更大的邻域，从而找到更好的当前最优解。然而在实践中，随着邻域大小增加，LB 寻找优质当前最优解的效率会降低，有时甚至不如使用较小的邻域大小（即数据收集所用的邻域大小）。数据收集所用的邻域大小会在验证集上进行微调，以便在收敛时获得最佳原始界，从而使机器学习模型在训练期间能够观

	MVC-S		MIS-S		CA-S		SC-S	
	邻域大小	运行时间	邻域大小	运行时间	邻域大小	运行时间	邻域大小	运行时间
LB	100	3600±0	3,000	3600±0	1,000	3600±0	100	3600±0
LB（数据收集）	50	3600±0	500	3600±0	200	3600±0	50	3600±0
IL-LNS	100	2.1±0.1	3,000	1.3±0.2	1,000	20.8±13.1	150	120.9±1.3
CL-LNS	100	2.2±0.1	3,000	1.3±0.1	1,000	25.1±15.3	100	50.1±10.4

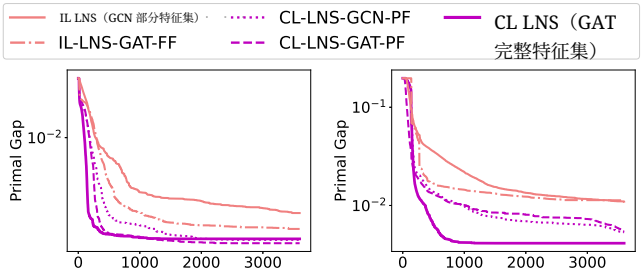


(a) MVC-S (b) MIS-S (c) CA-S (d) SC-S

图4. 原始界（越低越好）随迭代次数的变化，在100个小型测试实例上取平均值。LB 和 LB（数据收集）是采用 LB 的大邻域搜索，其邻域大小分别针对 CL-LNS 和数据收集进行了微调。表中列出了各方法的邻域大小（NH size）以及每次迭代的平均运行时间（秒，含标准差）。

察到能在训练中尽可能获得优质原始界的示范。然而，在测试时使用机器学习模型，我们有动机采用更大的邻域大小并对其进行微调，因为此时不再受 LB 瓶颈的限制。因此，我们分别在验证集上对 IL-LNS 和 CL-LNS 的邻域大小进行微调。CL-LNS 的单次迭代性能很强，且始终优于 IL-LNS。经过微调邻域大小后，CL-LNS 在 MIS-S 和 CA-S 上甚至优于其学习对象（用于数据收集的 LB）。

消融研究我们评估对比学习和两项改进对 CL-LNS 性能的贡献。与 IL-LNS 相比，CL-LNS 使用了 (1) 来自Khalil 等人 (2016) 的附加特征，以及 (2) 用 GAT 替代 GCN。我们将 CL-LNS 使用的完整特征集称为“FF”，将 IL-LNS 使用的部分特征集称为“PF”。除了 IL-LNS 和 CL-LNS 外，我们还在 MVC-S 和 CA-S 上评估了使用 FF 和 GAT 的 IL-LNS（记为 IL-LNS-GAT-FF）、使用 GCN 和 PF 的 CL-LNS（记为 CL-LNS-GCN-PF），以及使用 GAT 和 PF 的 CL-LNS（记为 CL-LNS-GAT-PF）的性能。图5 展示了原始间隙随运行时间的变化。表3 列出了运行时间截断为 60 分钟时的原始间隙和原始积分。结果表明，采用两项改进的模仿学习方法 IL-LNS-GAT-FF，表现仍不如未采用任何改进的 CL-LNS-GCN-PF。就原始间隙而言，CL-LNS-GCN-PF 和 CL-LNS-GAT-PF 表现相近，但 CL-LNS-GAT-PF 的原始积分更优，说明以 GAT 替代 GCN 有益。在 MVC-S 上，CL-LNS 的三个变体具有相近的平均原始间隙；在 CA-S 上，CL-LNS 的平均原始间隙优于另外两个变体。不过，加入这两项改进有助于改善原始积分，使 CL-LNS 在 MVC-S 和 CA-S 上总体表现最佳。



(a) MVC-S (b) CA-S

图5.消融研究：原始间隙（越低越好）随时间的变化，在100个小型测试实例上取平均。

表3.消融研究：在100个小型测试实例上取平均的60 分钟运行时间截断下的原始间隙（PG）（百分比）和原始积分（PI），以及它们的标准差。“↓”表示越低越好。

	PG（%）↓	PI ↓	PG（%）↓	PI ↓
	MVC-S		CA-S	
IL-LNS(-GCN-PF)	0.29±0.23	19.2±10.2	1.09±0.51	90.0±20.8
IL-LNS-GAT-FF	0.24±0.17	15.3±7.3	1.13±0.63	78.9±22.7
CL-LNS-GCN-PF	0.17±0.10	11.4±8,8	0.75±0.40	57.9±21.2
CL-LNS-GAT-PF	**0.16±0.09**	10.1±0.6	0.76±0.39	53.8±22.1
CL-LNS(-GAT-FF)	0.17±0.09	**8.7±6.7**	**0.65±0.32**	**50.7±22.7**

6. 结论

我们提出了 CL-LNS，它使用对比损失来学习适用于整数线性规划的大邻域搜索中高效且有效的破坏启发式算法。我们介绍了一种专门设计的全新数据收集流程，用于

CL-LNS，并使用具有更丰富特征集的图注意力网络进一步提升其性能。实证结果表明，在四个整数线性规划基准上，就原始间隙、原始积分、最佳表现率和存活率而言，CL-LNS 显著优于最先进的方法。CL-LNS 在分布外实例上也展现出良好的泛化性能。未来的工作可以探索学习能够跨问题领域泛化的策略。CL-LNS 不保证解的最优性，因此，将其整合到分支定界中也值得在未来研究；此外，针对分支定界已开发出许多其他学习技术。我们的方法与组合搜索中识别子结构的诸多问题密切相关，也可能对这类问题有所帮助，例如，识别整数线性规划中的后门变量（Ferber 等人，2022），以及为其他组合优化问题的大邻域搜索选择邻域。

参考文献

Achterberg, T., Berthold, T., 和 Hendel, G. 舍入与传播启发式：混合整数规划。载于《运筹学研究论文集 2011》，第 71–76 页。施普林格，2012。

Albert, R. 和 Barab´asi, A.-L. 复杂网络的统计力学。《现代物理评论》，74(1)：47，2002。

Amizadeh, S., Matusevych, S., 和 Weimer, M. 学习求解电路可满足性问题：一种无监督可微方法。载于《国际学习表征会议》，2018。

Azi, N., Gendreau, M., 和 Potvin, J.-Y. 针对多条路线车辆路径问题的自适应大邻域搜索。《计算机与运筹学》，41：167–173，2014。

Berthold, T. 混合整数规划的原始启发式。博士论文，柏林祖泽研究所（ZIB），2006。

Berthold, T. RENS。《数学规划计算》，6(1):33–54, 2014。

Bestuzheva, K., Besanc¸on, M., Chen, W.-K., Chmiela, A., Donkiewicz, T., van Doornmalen, J., Eifler, L., Gaul, O., Gamrath, G., Gleixner, A., Gottwald, L., Graczyk, C., Halbig, K., Hoen, A., Hojny, C., van der Hulst, R., Koch, T., L¨ubbecke, M., Maher, S.J.,Matter, F., M¨uhmer, E., M¨uller, B., Pfetsch, M.E.,Rehfeldt, D., Schlein, S., Schl¨osser, F., Serrano, F., Shinano, Y., Sofranac, B., Turner, M., Vigerske, S., Wegscheider, F., Wellner, P., Weninger,D., and Witzig, J. SCIP 优化套件 8.0。技术报告，Optimization Online，2021 年 12 月。网址 http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2021/12/8728.html。

Brody, S., Alon, U., and Yahav, E. 图注意力网络的注意力程度如何？国际会议上关于学习表征，2022。

Chen, T., Kornblith, S., Norouzi, M., and Hinton, G. 一种用于视觉表征对比学习的简单框架。载于国际机器学习会议，第 1597–1607 页。PMLR，2020。

Chen, X. and Tian, Y. 学习执行组合优化的局部重写。神经信息处理系统进展，32，2019。

Chmiela, A., Khalil, E., Gleixner, A., Lodi, A., 和 Pokutta, S. 学习在分支定界中调度启发式算法。神经信息处理系统进展，34: 24235–24246，2021。

Cplex, I. I. V12. 1：Cplex 用户手册。国际商业机器公司，46(53):157，2009。

Danna, E., Rothberg, E., 和 Pape, C. L. 探索松弛诱导的邻域以改进混合整数规划解。《数学规划》，102(1):71–90, 2005。

De Vries, S. 和 Vohra, R. V. 组合拍卖：综述。《INFORMS计算杂志》，15(3):284–309，2003。

Duan, H., Vaezipoor, P., Paulus, M. B., Ruan, Y., 和 Mad- dison, C. 谨慎增强：用于组合问题的对比学习。载于《国际机器学习会议》，第 5627–5642 页。PMLR，2022。

Erdos, P., R´enyi, A., 等。关于随机图的演化。匈牙利科学院数学研究所出版物，5(1):17–60，1960。

Ferber, A., Song, J., Dilkina, B., 和 Yue, Y. 学习混合整数规划的伪后门。载于《约束规划、人工智能与运筹学集成国际会议》，第 91–102 页。施普林格，2022。

Fischetti, M. 和 Lodi, A. 局部分支。《数学规划》，98(1):23–47，2003。

Gasse, M., Ch´etelat, D., Ferroni, N., Charlin, L., and Lodi, A. 使用图卷积神经网络进行精确组合优化。《神经信息处理系统进展》，32，2019。

Ghosh, S. Dins，一种混合整数规划改进启发式算法。见《国际整数规划与组合优化会议论文集》，第 310–323 页。施普林格，2007。

Gupta, P., Gasse, M., Khalil, E., Mudigonda,P., Lodi, A., 和 Bengio, Y. 用于学习分支的混合模型。神经信息处理系统进展，33：18087–18097，2020。

Gurobi Optimization, LLC. Gurobi 优化器参考手册，2022。网址 https://www.gurobi.com。

He, H.、Daume III, H. 和 Eisner, J. M. 学习如何在分支定界算法中进行搜索。《神经信息处理系统进展》，27，2014。

He, K.、Fan, H.、Wu, Y.、Xie, S. 和 Girshick, R. 用于无监督视觉表征学习的动量对比学习。载于《IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集》，第 9729–9738 页，2020。

Hendel, G. 用于混合整数规划的自适应大邻域搜索。《数学规划计算》，14(2)：185–221，2022。

Hjelm, R. D., Fedorov, A., Lavoie-Marchildon, S., Grewal, K., Bachman, P., Trischler, A. 和 Bengio, Y. 通过互信息估计与最大化学习深度表征。国际学习表征会议，2019。Hottung, A. 和 Tierney, K. 面向容量车辆路径问题的神经大邻域搜索。载于 ECAI 2020，第 443–450 页。IOS Press，2020。Huang, T., Ferber, A., Tian, Y., Dilkina, B. 和 Steiner, B. 面向整数线性规划的局部分支松弛启发式。arXiv 预印本 arXiv:2212.08183，2022a。Huang, T., Li, J., Koenig, S. 和 Dilkina, B. 通过机器学习引导的大邻域搜索实现任意时刻多智能体寻路。载于 AAAI 人工智能会议论文集（AAAI），第 9368–9376 页，2022b。Huang, Z., Wang, K., Liu, F., Zhen, H.-L., Zhang, W., Yuan, M., Hao, J., Yu, Y. 和 Wang, J. 学习为高效混合整数规划选择割平面。《模式识别》，123:108353，2022c。Johnson, D. S., Lenstra, J. K. 和 Kan, A. R. 网络设计问题的复杂性。《Networks》，8(4):279–285，1978。Khalil, E., Le Bodic, P., Song, L., Nemhauser, G. 和 Dilkina, B. 在混合整数规划中学习分支。载于 AAAI 人工智能会议论文集，第 30 卷，2016。Khalil, E., Dai, H., Zhang, Y., Dilkina, B. 和 Song, L. 在图上学习组合优化算法。《神经信息处理系统进展》，30，2017。Khosla, P., Teterwak, P., Wang, C., Sarna, A., Tian, Y., Isola, P., Maschinot, A., Liu, C. 和 Krishnan, D. 监督式对比学习。《神经信息处理系统进展》，33:18661–18673，2020。

Kingma, D. P. 和 Ba, J. Adam：一种随机优化方法。2015。Kool, W., Van Hoof, H. 和 Welling, M. 注意力机制，学会解决路径规划问题！arXiv 预印本 arXiv:1803.08475，2018。Kovacs, A. A., Parragh, S. N., Doerner, K. F. 和 Hartl, R. F. 面向服务技师路径规划与调度问题的自适应大邻域搜索。《调度学报》，15(5):579–600，2012。

Labassi, A. G.、Ch´etelat, D. 和 Lodi, A. 利用图神经网络学习在分支定界中比较节点。《神经信息处理系统进展》，2022。

Land, A. H. 和 Doig, A. G. 一种求解离散规划问题的自动方法。载于《整数规划五十年：1958—2008》，第 105–132 页。施普林格，2010。

Leyton-Brown, K., Pearson, M., 和 Shoham, Y. 面向组合拍卖算法的通用测试套件。载于《第 2 届 ACM 电子商务会议论文集》，第 66–76 页，2000 年。Li, J., Chen, Z., Harabor, D., Stuckey, P. J., 和 Koenig, S. 通过大邻域搜索实现任意时刻多智能体路径查找。载于《国际人工智能联合会议（IJCAI）论文集》，第 4127–4135 页，2021a。Li, J., Chen, Z., Harabor, D., Stuckey, P. J., 和 Koenig, S. MAPF-LNS2：通过大邻域搜索快速修复多智能体路径查找。载于《AAAI人工智能会议（AAAI）论文集》，第 10256–10265 页，2022 年。Li, S., Yan, Z., 和 Wu, C. 学习如何委派大规模车辆路径规划任务。《神经信息处理系统进展》，34：26198–26211，2021b。Li, Z., Chen, Q., 和 Koltun, V. 利用图卷积网络和引导式树搜索进行组合优化。《神经信息处理系统进展》，31，2018。Liu, D., Fischetti, M., 和 Lodi, A. 学习在局部分支中进行搜索。载于《AAAI人工智能会议论文集》，第 36 卷，第 3796–3803 页，2022 年。

Lu, H., Zhang, X., and Yang, S. 一种用于求解车辆路径问题的基于学习的迭代方法。载于《国际学习表征会议》，2019。

Maher, S. J., Fischer, T., Gally, T., Gamrath, G., Gleixner, A., Gottwald, R. L., Hendel, G., Koch, T., L¨ubbecke, M., Miltenberger, M., 等。《SCIP 优化套件 4.0》。2017。Mulamba, M., Mandi, J., Diligenti, M., Lombardi, M., Lopez, V. B., and Guns, T. 用于预测与优化的对比损失与解缓存。载于第 30 届国际人工智能联合会议，第 2833 页。国际人工智能联合会议，2021。Oord, A. v. d., Li, Y., and Vinyals, O. 基于对比预测编码的表征学习。arXiv 预印本 arXiv:1807.03748，2018。Paulus, M. B., Zarpellon, G., Krause, A., Charlin, L., and Maddison, C. 通过前瞻学习切平面：基于模仿学习的切平面选择。载于《国际机器学习会议》，第 17584–17600 页。PMLR，2022。Pohl, I. 将启发式搜索视为图中的路径搜索。《人工智能》，1(3-4):193–204，1970。Ropke, S. and Pisinger, D. 一种用于带时间窗的取送货问题的自适应大邻域搜索启发式算法。《运输科学》，40(4):455–472，2006。Rothberg, E. 一种用于改进混合整数规划解的进化算法。《INFORMS 计算期刊》，19(4):534–541，2007。Scavuzzo, L., Chen, F. Y., Ch´etelat, D., Gasse, M., Lodi, A., Yorke-Smith, N., and Aardal, K. 使用树形马尔可夫决策过程进行学习分支。arXiv 预印本 arXiv:2205.11107，2022。Selsam, D., Lamm, M., B¨unz, B., Liang, P., de Moura, L., and Dill, D. L. 从单比特监督中学习 SAT 求解器。arXiv 预印本 arXiv:1802.03685，2018。Smith, S. L. and Imeson, F. GLNS：一种用于广义旅行商问题的有效大邻域搜索启发式算法。《计算机与运筹学》，87:1–19，2017。Song, J., Yue, Y., Dilkina, B., 等。一种用于求解整数线性规划的通用大邻域搜索框架。《神经信息处理系统进展》，33:20012–20023，2020。Sonnerat, N., Wang, P., Ktena, I., Bartunov, S., and Nair, V. 用于混合整数规划的大邻域搜索算法学习。arXiv 预印本 arXiv:2107.10201，2021。Tang, Y., Agrawal, S., 和 Faenza, Y. 整数规划的强化学习：学习如何切割。载于国际机器学习会议论文集，第 9367–9376 页。PMLR，2020。Tong, Z., Liang, Y., Ding, H., Dai, Y., Li, X., 和 Wang, C. 有向图对比学习。《神经信息处理系统进展》，34：19580–19593，2021。Toth, P. 和 Vigo, D.《车辆路径问题》。SIAM，2002。Wu, Y., Song, W., Cao, Z., 和 Zhang, J. 学习整数规划的大邻域搜索策略。《神经信息处理系统进展》，34：30075–30087，2021。Xin, L., Song, W., Cao, Z., 和 Zhang, J. Neurolkh：结合深度学习模型与 Lin-Kernighan-Helsgaun 启发式算法求解旅行商问题。《神经信息处理系统进展》，34：7472–7483，2021。You, Y., Chen, T., Sui, Y., Chen, T., Wang, Z., 和 Shen, Y. 通过数据增强进行图对比学习。《神经信息处理系统进展》，33：5812–5823，2020。Zarpellon, G., Jo, J., Lodi, A., 和 Bengio, Y. 参数化分支定界搜索树以学习分支策略。载于 AAAI 人工智能会议论文集，第 35 卷，第 3931–3939 页，2021。Zheng, J., He, K., Zhou, J., Jin, Y., 和 Li, C.-M. 将强化学习与 Lin-Kernighan-Helsgaun 算法相结合以求解旅行商问题。载于 AAAI 人工智能会议论文集，第 35 卷，第 12445–12452 页，2021。ˇZulj, I., Kramer, S., 和 Schneider, M. 一种结合自适应大邻域搜索与禁忌搜索的混合方法，用于订单批处理问题。《欧洲运筹学研究杂志》，264(2)：653–664，2018。

附录

A. 其他相关工作

A.1. 分支定界中的基于大邻域搜索的原始启发式

基于大邻域搜索的原始启发式是分支定界中的一类原始启发式，过去几十年来已得到广泛研究。尽管目标同为改进原始界，分支定界中的基于大邻域搜索的原始启发式与用于整数线性规划的大邻域搜索之间仍有以下主要区别：（1）基于大邻域搜索的原始启发式会在搜索过程中，定期于不同的搜索树节点执行，且其执行计划本身是动态的，因为与分支定界中的其他原始启发式相比，这类方法的运行成本通常更高；（2）基于大邻域搜索的原始启发式中的破坏启发式通常会利用分支定界特有的信息（例如某个搜索树节点上的对偶界和线性规划松弛），因此在我们的设定下无法直接应用于整数线性规划的大邻域搜索。

接下来，我们简要总结基于大邻域搜索的原始启发式中的破坏启发式：

- 交叉启发式（Rothberg，2007）：它会破坏一组已选定的已知解（通常为两个）中取值不同的变量。变异启发式（Rothberg，2007）会破坏一个随机变量子集。
- 松弛诱导邻域搜索（RINS）（Danna 等人，2005）：它会破坏搜索树节点处线性规划松弛解与当前最优解中取值不一致的变量。
- 松弛强制邻域搜索（RENS）（Berthold，2014）：它将邻域限制为当前搜索树节点处线性规划松弛解的可行舍入解。
- 局部分支（LB）（Fischetti 和 Lodi，2003）：它将邻域限制在当前最优解周围的一个球形区域内。
- 距离诱导邻域搜索（DINS）（Ghosh，2007）：它取交叉、局部分支和松弛诱导邻域搜索启发式算法各自邻域的交集。
- 图诱导邻域搜索（GINS）（Maher 等人，2017）：它会破坏整数线性规划二部图表示中某个变量的广度优先搜索邻域。

最近，有人提出了一种自适应大邻域搜索原始启发式（Hendel，2022），它旨在结合这些启发式算法的优势，本质上是通过求解一个多臂老虎机问题来选择应用哪种启发式算法。

A.2. 学习求解其他组合优化问题

机器学习已被用于求解多种组合优化问题，包括旅行商问题（Xin 等人，2021；Zheng 等人，2021）、车辆路径规划（Kool 等人，2018）、布尔可满足性（Selsam 等人，2018；Amizadeh 等人，2018）以及一般图优化问题（Khalil 等人，2017；Li 等人，2018）。

B. 网络架构

我们详细介绍第 4.2 节所述的图注意力网络架构。策略以状态 $\boldsymbol{s}^t$ 为输入，并输出一个分数向量 $\pi_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s}^t) \in [0,1]^n$，每个变量对应一个分数。我们使用每层包含 64 个隐藏单元的两层多层感知机，并采用 ReLU 作为激活函数，将每个节点特征和边特征映射到 $\mathbb{R}^d$ 其中 $d = 64$。

令 $\mathbf{v}_j$、$\mathbf{c}_i$、$\mathbf{e}_{i,\,j} \in \mathbb{R}^d$ 分别表示嵌入层输出的第 i 个变量、第 j 个约束以及连接二者的边的嵌入。我们通过图注意力网络执行两轮消息传递。在第一轮中，每个约束节点 $\mathbf{c}_i$使用具有 $H = 8$ 个注意力头的注意力结构关注其邻居 $\mathcal{N}_i$：

$$\mathbf{c}_i' = \frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\left(\alpha_{ii,1}^{(h)}\boldsymbol{\theta}_{c,1}^{(h)}\mathbf{c}_i + \sum_{j\in\mathcal{N}_i}\alpha_{ij,1}^{(h)}\boldsymbol{\theta}_{v,1}^{(h)}\mathbf{v}_j\right)$$

其中 $\boldsymbol{\theta}_{c}^{(h)}{}_{,1} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 和 $\boldsymbol{\theta}_{v}^{(h)}{}_{,1} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 为可学习权重。更新后的约束嵌入$\mathbf{c}_i'$ 使用注意力权重在 H个注意力头之间进行平均（Brody 等人，2022）

$$\alpha_{ij,1}^{(h)} = \frac{\exp(\boldsymbol{w}_1^{\mathsf{T}}\rho([\boldsymbol{\theta}_{c,1}^{(h)}\mathbf{c}_i, \boldsymbol{\theta}_{v,1}^{(h)}\mathbf{v}_j, \boldsymbol{\theta}_{e,1}^{(h)}\mathbf{e}_{i,j}]))}{\sum_{k\in\mathcal{N}_i}\exp(\boldsymbol{w}_1^{\mathsf{T}}\rho([\boldsymbol{\theta}_{c,1}^{(h)}\mathbf{c}_i, \boldsymbol{\theta}_{v,1}^{(h)}\mathbf{v}_k, \boldsymbol{\theta}_{e,1}^{(h)}\mathbf{e}_{i,k}]))}$$

其中，注意力系数 $\boldsymbol{w}_1 \in \mathbb{R}^{3d}$ 和 $\boldsymbol{\theta}_{e}^{(h)}{}_{,1} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 均为可学习权重，而 $\rho(\cdot)$表示负斜率为 0.2 的 LeakyReLU 激活函数。在第二轮中，同样地，每个变量节点都会关注其邻居，以获得更新后的变量节点嵌入

$$\mathbf{v}_j' = \frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\left(\alpha_{jj,2}^{(h)}\boldsymbol{\theta}_{c,2}^{(h)}\mathbf{c}_i' + \sum_{j\in\mathcal{N}_i}\alpha_{ji,2}^{(h)}\boldsymbol{\theta}_{v,2}^{(h)}\mathbf{v}_j\right)$$

使用注意力权重

$$\alpha_{ji,2}^{(h)} = \frac{\exp(\boldsymbol{w}_2^{\mathsf{T}}\rho([\boldsymbol{\theta}_{c,2}^{(h)}\mathbf{c}_i', \boldsymbol{\theta}_{v,2}^{(h)}\mathbf{v}_j, \boldsymbol{\theta}_{e,2}^{(h)}\mathbf{e}_{i,j}]))}{\sum_{k\in\mathcal{N}_j}\exp(\boldsymbol{w}_2^{\mathsf{T}}\rho([\boldsymbol{\theta}_{c,2}^{(h)}\mathbf{c}_i', \boldsymbol{\theta}_{v,2}^{(h)}\mathbf{v}_j, \boldsymbol{\theta}_{e,2}^{(h)}\mathbf{e}_{i,k}]))}$$

其中， $\boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{R}^{3d}$和 $\boldsymbol{\theta}_{c}^{(h)}{}_{,2}$，$\boldsymbol{\theta}_{v}^{(h)}{}_{,2}$，$\boldsymbol{\theta}_{e}^{(h)}{}_{,2} \in \mathbb{R}^{d\times d}$为可学习权重。经过两轮消息传递后，变量 v′ 的最终表征会输入一个每层含 64 个隐藏单元的两层多层感知机（MLP），为每个变量生成一个标量值。最后，我们应用 Sigmoid 函数得到一个介于 0 和 1 之间的分数。

C. 实例生成的更多细节

我们给出了最小顶点覆盖（MVC）、最大独立集（MIS）、集合覆盖（SC）和组合拍卖（CA）问题的整数线性规划表述。

C.1. MVC

在 MVC 实例中，给定一个无向图 $G = (V, E)$。目标是选出最小的节点子集，使图中的每条边至少有一个端点被选中:

$$\begin{aligned}&\min \textstyle\sum_{v\in V} x_v\\ \text{s.t.}\quad &x_u + x_v \geq 1,\ \forall (u,v)\in E,\\ &x_v \in \{0,1\},\ \forall v \in V.\end{aligned}$$

C.2. MIS

在 MIS 实例中，给定一个无向图 $G = (V, E)$。目标是选出最大的节点子集，使该子集中任意两个节点都不通过 G 中的一条边相连:

$$\begin{aligned}&\min -\textstyle\sum_{v\in V} x_v\\ \text{s.t.}\quad &x_u + x_v \leq 1,\ \forall (u,v)\in E,\\ &x_v \in \{0,1\},\ \forall v \in V.\end{aligned}$$

C.3. 集合覆盖

在一个 SC 实例中，给定 m 个元素以及 S 个集合组成的集合族，这些集合的并集包含所有元素。目标是从 S 中选出最少数量的集合，使所选集合的并集仍包含所有元素:

$$\begin{aligned}&\min \textstyle\sum_{s\in S} x_s\\ \text{s.t.}\quad &\textstyle\sum_{s\in S: i\in s} x_s \geq 1,\ \forall i \in [m],\\ &x_s \in \{0,1\},\ \forall s \in S.\end{aligned}$$

C.4. 组合拍卖

在一个组合拍卖实例中，给定针对 m 个物品的 n 个出价 $\{(B_i, p_i): i \in [n]\}$，其中 B_i 是物品的一个子集，p_i 是其对应的出价。目标是将物品分配给各项出价，使总收益最大化：

$$\begin{aligned} &\min -\textstyle\sum_{i\in[n]} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad &\textstyle\sum_{i:j\in B_i} x_i \le 1, \forall j \in [m], \\ &x_i \in \{0,1\}, \forall i \in [n]. \end{aligned}$$

D. 超参数调优的补充细节

对于 RL-LNS，我们在实验中使用其代码（Wu 等人，2021）中提供的所有超参数。对于其他大邻域搜索方法，实验中使用的所有超参数都在验证集上进行了微调，具体的超参数调优过程如下所述。

对于 β（它限制了邻域大小的上界），我们尝试了从 $\{0.25, 0.5, 0.6, 0.7\}$ 中取值。对于所有方法，$\beta = 0.25$ 效果最差，导致间隙最大。对于 LB-RELAX、IL-LNS 和 CL-LNS，所有取值的表现都相近（因为它们在搜索早期就选择了有效的邻域，并且邻域大小要么不会达到上界，要么在达到上界前就已收敛到较好的解）。对于 RANDOM 和 GRAPH，$\beta = 0.5$ 对它们而言效果最好。因此，我们对所有方法一致地设置为 $\beta = 0.5$。

对于初始邻域大小 k^0，我们发现，对于需要较长运行时间来选择变量的方法（如 LB-RELAX、IL-LNS 和 CL-LNS），最佳取值较为敏感，因此它们从一开始就需要合适的 k^0，我们也为它们仔细调优了这一参数。对于 RANDOM 和 GRAPH，选择变量所需的运行时间较短，并且借助自适应邻域大小机制，它们能够很快找到合适的邻域大小，因此对 k^0 不敏感。使用不同的 k^0 时，它们收敛到相同的原始间隙（相对差异为 $< 1\%$），且原始积分相近（相对差异为 $< 2\%$）。尽管差异很小，我们仍为它们采用最佳的 k^0。

对于控制 k^t 增长比率的 γ，我们尝试了从 $\{1, 1.01, 1.02, 1.05\}$ 取值。总体而言，如果 $\gamma > 1$，γ 对性能的影响不大；不过，$\gamma = 1$ 的表现远差于其他取值。

对于每次修复操作的运行时间限制，我们尝试了 0.5、1、2 和 5 分钟等不同限制。所有方法对此都不敏感，因为大多数修复操作都能在 20 秒内完成。SC 实例上的 IL-LNS 除外，它会选择需要更长修复时间的邻域，因此有必要设置 2 分钟的运行时间限制。因此，我们统一使用 2 分钟。

对于分支定界，我们在验证集上针对每个问题分别对激进模式进行调优。开启激进模式后，分支定界（SCIP）的任意时刻性能并不总是优于关闭该模式时的表现。根据验证结果，对于 MVC 和 SC 实例，我们开启激进模式；对于 CAT 和 MIS 实例，则关闭激进模式。

对于 IL-LNS，它使用与 CL-LNS 相同的训练数据集，但仅使用正样本。我们在验证集上针对每个问题对其超参数进行微调，从而得到不同的 k^0 SC 实例上的结果，相较于 CL-LNS 而言。Sonnerat 等人（2021）在使用学习得到的策略时，采用采样方法来选择变量。对于采样方法中的温度参数 η，我们尝试了从 $\{1/2, 2/3, 1\}$ 到 $\eta = 0.5$ 的取值，其中后者的整体表现最佳。然而，在我们的实验中，我们发现第 4.4 节所述的贪心方法在 SC 和 MIS 实例上的 IL-LNS 中表现更好。因此，CL-LNS 将与 SC 和 MIS 实例上对应的结果进行比较。

对于 LB-RELAX，Huang 等人（2022a）提出了三个变体。为简洁起见，论文中针对每个问题仅展示这三个变体中表现最佳的一个。

在表 4中，我们汇总了实验中使用的所有超参数及其记号和值。

E. 补充实验结果

在本节中，我们增加了两个基线方法，并使用一个额外的指标评估所有方法。结果表明，在所有指标上，CL-LNS 均优于其他所有方法。

我们建立了另外两种基线方法：

表 4. 所使用的超参数、记号及其取值。

超参数	记号	取值
用于确定正样本的次优性阈值	α_{p}	0.5
正样本数量上限	u_{p}	10
用于确定负样本的次优性阈值	α_{n}	0.05
正样本与负样本数量之比	κ	9
特征嵌入维度	d	64
变量特征中最近一段时间的当前最优解值窗口大小		3
图注意力网络中的注意力头数量	H	8
对比损失中的温度参数	τ	0.07
k^t 的增长率	γ	1.02
k^t 相对于变量数的上限比例	β	0.5
IL-LNS 中变量采样的温度参数	η	0.5
初始邻域大小	k^0	针对每种情况进行微调
寻找初始解的运行时间		10 秒
每次重新优化的运行时间限制		2 分钟
学习率（CL-LNS 和 IL-LNS）		10^{-3}
批量大小（CL-LNS 和 IL-LNS）		32
训练轮数（CL-LNS 和 IL-LNS）		30

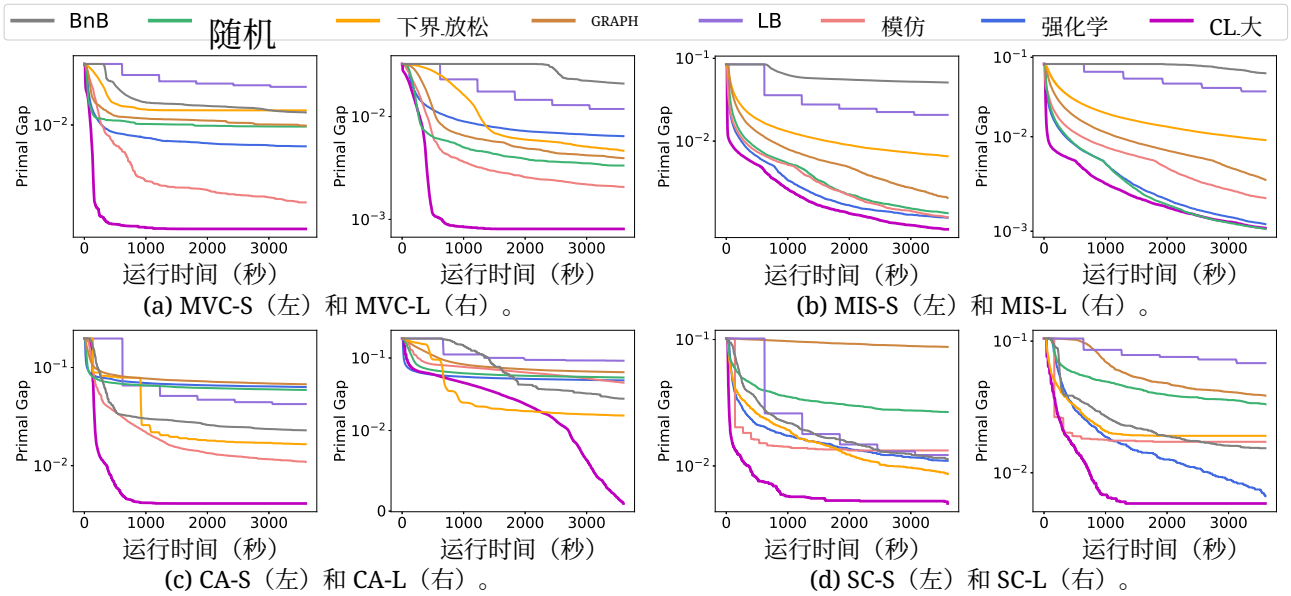
• LB：使用 LB 启发式选择邻域的大邻域搜索。我们将每次迭代求解 LB 整数线性规划的时间限制设为 10 分钟；

• GRAPH：一种大邻域搜索方法，其根据与 GINS 类似的整数线性规划二部图表示来选择邻域（Maher 等人, 2017）。二部图表示由分别位于两侧、代表变量和约束的节点组成；如果某个变量在某个约束中的系数非零，则用一条边连接该变量与该约束。该方法从二部图中的一个随机变量节点开始执行广度优先搜索，并选取最先扩展的 k^t 个变量节点。

图6 展示了原始间隙随运行时间变化的完整结果。图7 展示了存活率随运行时间变化的完整结果。图8 展示了原始界随运行时间变化的完整结果。表5、6、7 和8分别列出了小规模实例在运行时间截断为 15、30、45 和 60 分钟时的平均原始界、原始间隙和原始积分。表9、10、11 和12 分别列出了大规模实例在运行时间截断为 15、30、45 和 60 分钟时的平均原始界、原始间隙和原始积分。

接下来，我们使用另一项指标评估性能：对于某种方法，在时间 q 时的与虚拟最佳值的差距，是指该方法截至时间 q 找到的最佳原始界与方法组合中任意方法截至时间 q 找到的最佳原始界之间的归一化差值。

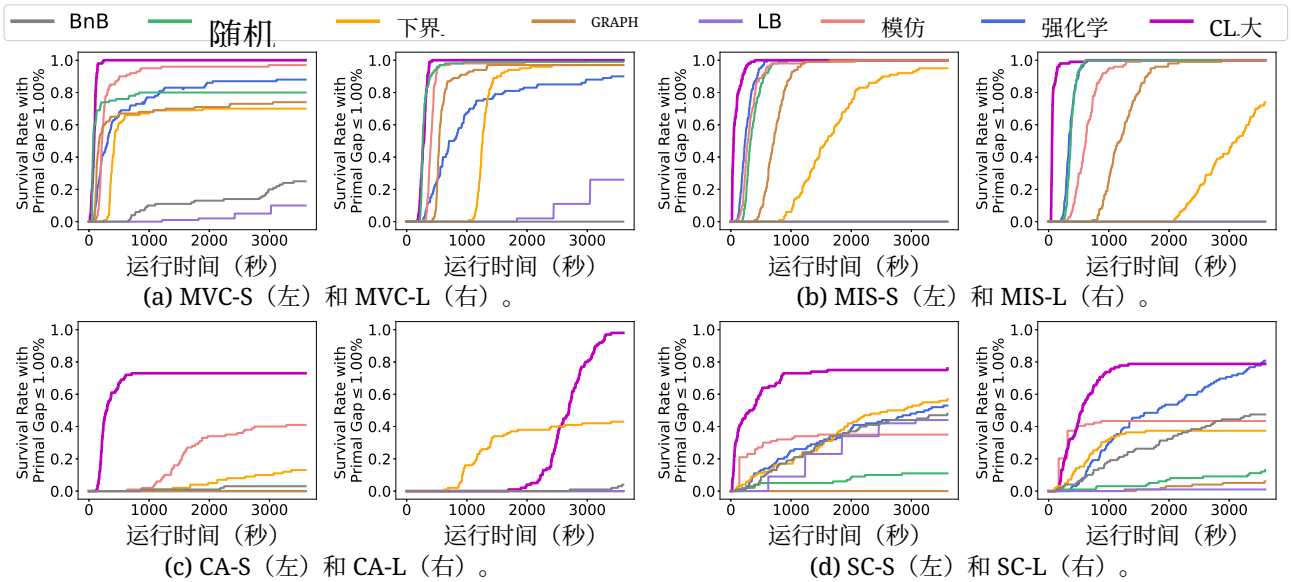
图 9 展示了最佳表现率随运行时间变化的完整结果。图 10 展示了与虚拟最佳值的差距随运行时间变化的完整结果。



(a) MVC-S（左）和 MVC-L（右）。 (b) MIS-S（左）和 MIS-L（右）。

(c) CA-S（左）和 CA-L（右）。 (d) SC-S（左）和 SC-L（右）。

图6.原始间隙（ 越低越好）随时间的变化，在100个实例上取平均。对于机器学习方法，策略仅在小型训练实例上 e 进行训练， 但在小型和大型测试实例上均进行了测试。



(a) MVC-S（左）和 MVC-L（右）。 (b) MIS-S（左）和 MIS-L（右）。

(c) CA-S（左）和 CA-L（右）。 (d) SC-S（左）和 SC-L（右）。

图7.在达到原始间隙阈值 1.00% 所需时间的不同情况下，100个实例的存活率（越高越好）。对于机器学习方法，策略仅在小型训练实例上训练，但在小型和大型测试实例上均进行测试。

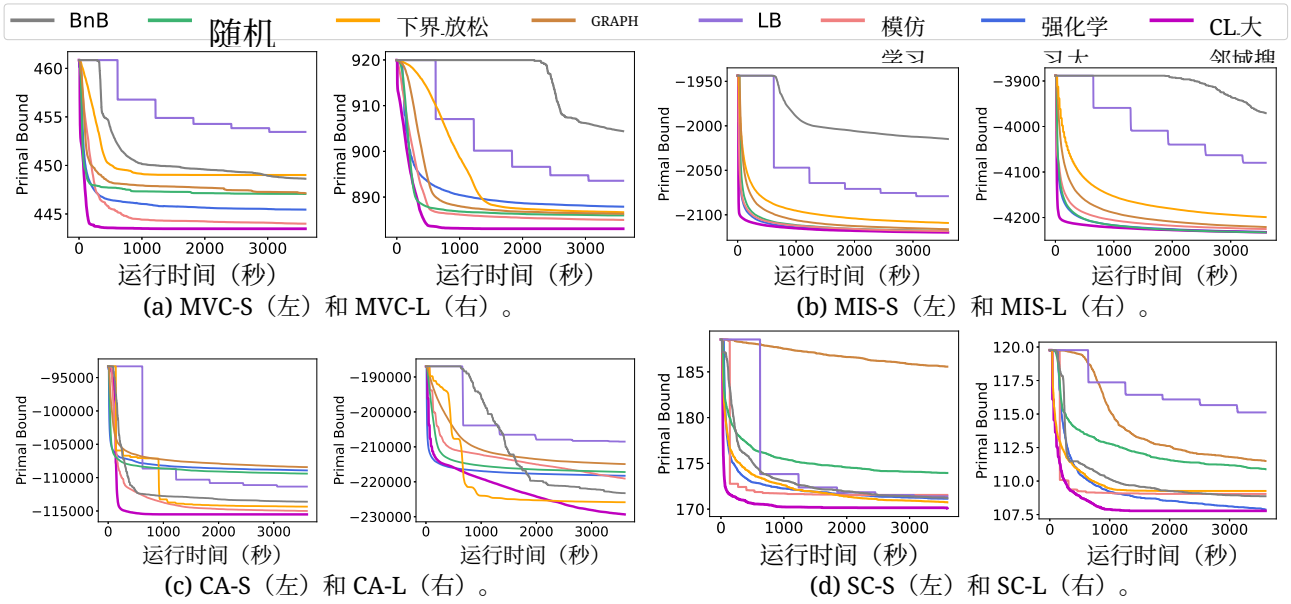


图8. 原始界（ 越低越好）随时间的变化，在100个实例上取平均。对于机器学习方法，策略 s
仅在小型训练实例上进行训练 ，但在小型和大型测试实例上均进行测试。

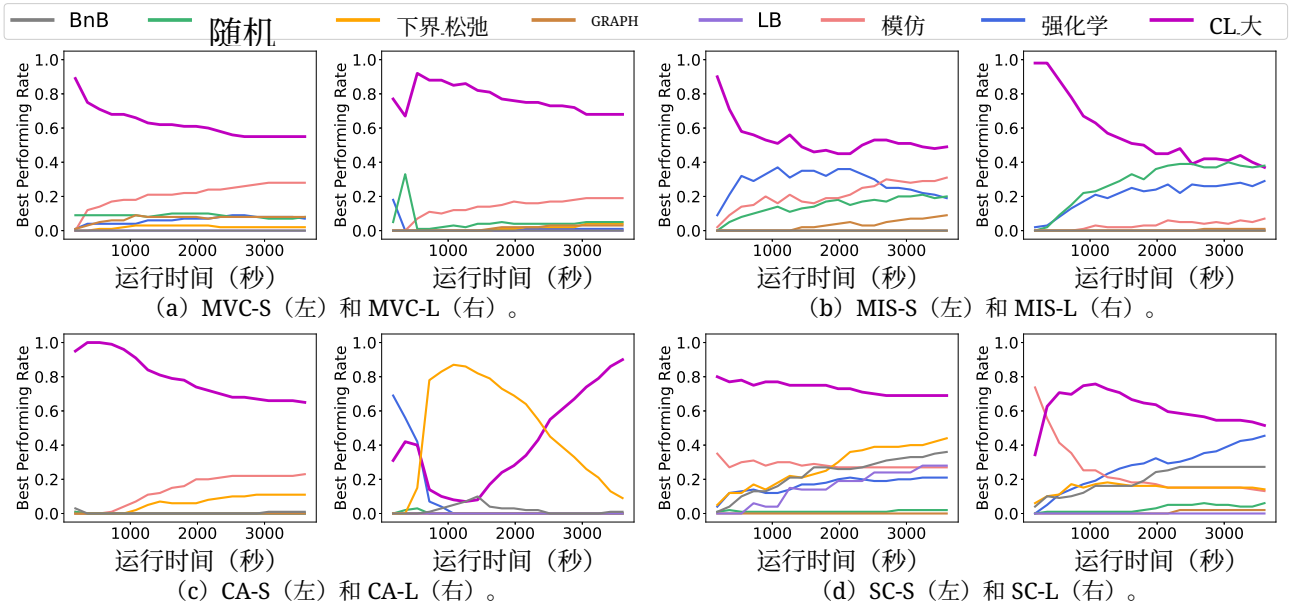
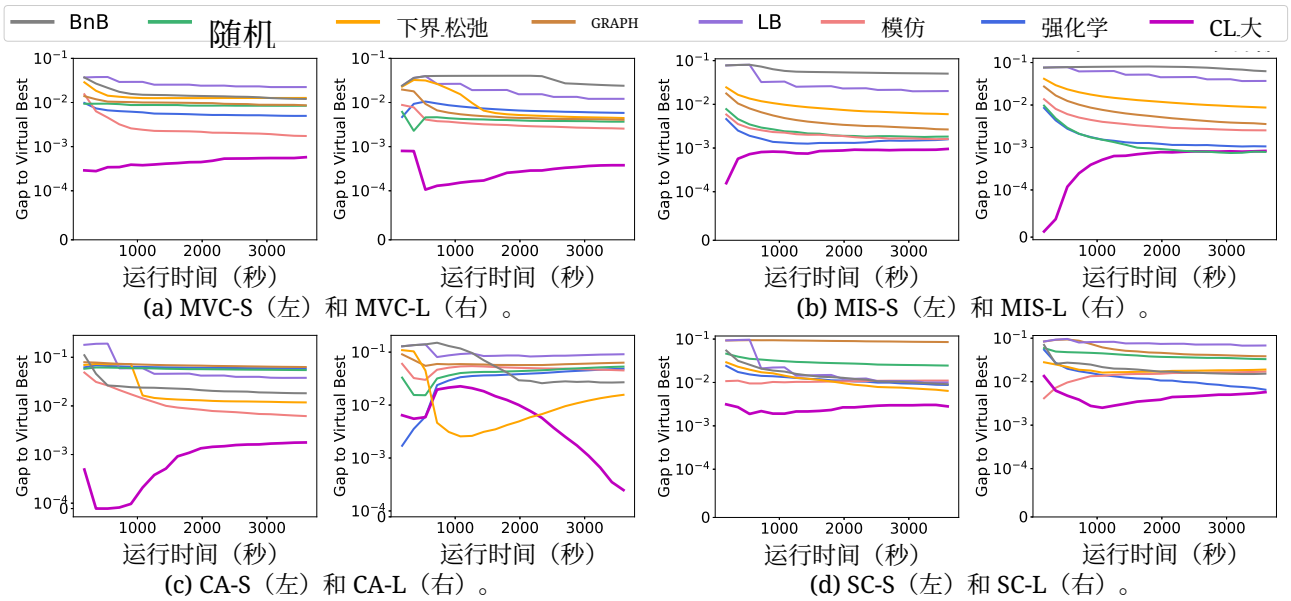


图9。在 100 个测试实例中，最佳表现率（越高越好）随运行时间的变化。对于机器学习方法，策略仅在小型训练实例上进行训练，但在小型和大型测试实例上均进行测试。



(a) MVC-S（左）和 MVC-L（右）。 (b) MIS-S（左）和 MIS-L（右）。

(c) CA-S（左）和 CA-L（右）。 (d) SC-S（左）和 SC-L（右）。

图10.在100个测试实例上取平均值后，与虚拟最佳值的差距（越低越好）随运行时间的变化情况。对于机器学习方法，策略仅使用小规模训练实例进行训练，但在小规模和大规模测试实例上均进行测试。

表5.小规模实例的测试结果：在15分钟时间截断下的原始界（PB）、原始间隙（PG）（百分比）和原始积分（PI），以及在100个实例上取平均后的结果及其标准差。

	PB	PG（%）	PI	PB	PG（%）	PI
	MVC			MIS		
BnB	450.41±9.85	1.71±0.48	25.7±3.3	-1,981.72±23.49	6.66±0.89	74.2±4.4
LB	456.78±11.22	3.07±1.00	32.9±5.1	-2,047.01±18.76	3.58±0.60	62.4±3.8
随机	447.33±11.33	1.02±1.28	11.5±11.3	-2,110.73±11.86	0.58±0.19	12.8±1.6
GRAPH	447.98±11.30	1.16±1.28	14.0±10.6	-2,104.62±12.23	0.87±0.17	18.5±1.7
LB-RELAX	449.23±11.49	1.43±1.51	19.6±10.9	-2,093.80±12.07	1.38±0.23	22.9±2.1
IL-LNS	444.50±9.69	0.40±0.28	10.2±5.5	-2,111.49±12.10	0.54±0.20	10.5±1.8
RL-LNS	446.12±10.10	0.76±0.36	11.9±2.9	-2,113.48±11.72	0.45±0.17	9.5±1.7
CL-LNS	443.**51**±9.58	0.**18**±0.10	4.**0**±2.1	**-2,**114.**66**±12.42	0.**39**±0.19	6.4±1.6
	CA			SC		
BnB	-112,703±1,682	3.06±0.70	67.4±16.6	173.26±13.00	2.28±1.34	45.9±13.0
LB	-108,647±2,227	6.55±1.42	140.7±9.9	173.83±12.93	2.60±1.31	70.6±15.6
随机	-108,576±1,709	6.61±1.12	69.1±8.5	175.61±12.76	3.60±1.44	43.6±13.8
GRAPH	-107,189±1,977	7.81±1.15	84.7±9.8	187.69±14.24	9.77±2.17	89.9±19.9
LB-RELAX	-107,133±1,816	7.86±0.76	89.5±6.2	172.79±12.76	2.02±1.21	30.0±11.4
IL-LNS	-113,501±1,611	2.38±0.66	52.4±10.9	171.72±12.42	1.43±1.00	26.9±9.2
RL-LNS	-108,120±1,906	7.01±1.10	71.8±9.3	172.35±12.45	1.79±0.96	41.4±8.2
CL-LNS	**-115,499±1,626**	0.**66**±0.33	33.**3**±6.8	170.**27**±12.21	0.**59**±0.67	11.7±7.4

表6. 小规模实例上的测试结果：在30分钟时间截断时的原始界（PB）、原始间隙（PG）（百分比）和原始积分（PI），在100个实例上取平均值及其标准差。

	PB	PG（%）	PI	PB	PG（%）	PI
	MVC			MIS		
BnB	449.67±9.69	1.55±0.44	40.2±6.6	-2,004.24±26.21	5.60±1.00	127.1±12.4
LB	454.89±11.55	2.66±1.16	58.2±14.1	-2,064.30±16.40	2.77±0.51	89.9±7.3
随机	447.16±11.22	0.98±1.26	20.6±22.5	-2,115.23±11.82	0.37±0.16	16.9±2.7
GRAPH	447.75±11.39	1.11±1.30	24.2±22.1	-2,111.84±12.06	0.53±0.16	24.4±2.7
LB-RELAX	449.02±11.53	1.38±1.51	32.1±24.2	-2,102.85±11.97	0.95±0.19	33.0±3.6
IL-LNS	444.27±9.61	0.35±0.25	13.5±6.9	-2,115.30±12.04	0.36±0.18	14.4±3.2
RL-LNS	445.71±9.98	0.67±0.35	18.2±5.7	-2,116.64±11.53	0.30±0.15	12.7±2.9
CL-LNS	443.**48**±9.56	0.**17**±0.09	5.**5**±3.6	**-2,**117.**58**±11.86	0.**26**±0.17	9.**3**±3.0
	CA			SC		
BnB	-113,068±1,595	2.75±0.62	93.5±18.6	172.09±12.65	1.63±1.20	62.9±22.5
LB	-110,303±2,001	5.13±1.08	191.6±16.9	172.37±12.71	1.79±1.11	89.4±22.3
随机	-109,040±1,685	6.21±1.05	126.8±17.6	174.70±12.75	3.10±1.38	73.4±24.6
GRAPH	-107,802±1,892	7.28±1.07	152.2±18.9	186.79±14.13	9.33±2.28	175.7±38.8
LB-RELAX	-114,103±1,521	1.86±0.57	109.5±9.4	171.60±12.43	1.36±1.02	44.6±19.3
IL-LNS	-114,621±1638	1.41±0.58	68.1±13.9	171.59±12.45	1.35±1.00	39.3±17.4
RL-LNS	-108,562±1,854	6.63±1.05	132.9±18.2	171.70±12.30	1.42±0.88	55.7±15.6
CL-LNS	**-115,513±1,621**	0.**65**±0.32	39.**1**±11.6	170.**16**±12.13	0.**53**±0.63	16.**7**±12.3

表7. 小规模实例：45分钟时限下的原始界（PB）、原始间隙（PG）（百分比）和原始积分（PI）f, 对100个实例取平均及其标准差。

	PB	PG（%）	PI	PB	PG（%）	PI
	MVC			MIS		
BnB	449.28±9.77	1.46±0.42	53.7±9.9	-2,010.68±21.72	5.29±0.79	176.0±19.7
LB	453.84±11.65	2.44±1.26	80.7±24.6	-2,075.43±14.84	2.24±0.46	111.6±10.5
随机	447.09±11.21	0.96±1.26	29.4±33.6	-2,116.96±11.54	0.29±0.15	19.8±3.9
GRAPH	447.42±11.19	1.04±1.27	33.9±33.4	-2,114.42±11.74	0.41±0.16	28.6±3.8
LB-RELAX	449.01±11.53	1.38±1.51	44.6±37.6	-2,106.88±11.40	0.76±0.20	40.6±5.0
IL-LNS	444.13±9.68	0.32±0.26	16.5±8.5	-2,117.43±11.79	0.26±0.17	17.2±4.5
RL-LNS	445.54±9.98	0.63±0.34	24.0±8.6	-2,117.79±11.34	0.25±0.14	15.2±4.1
CL-LNS	443.**48**±**9**.56	0.**17**±**0**.09	7.**1**±**5**.**1**	**-2,**119.**04**±**11**.98	0.**19**±**0**.16	11.**3**±**4**.2
	CA			SC		
BnB	-113,421±1,599	2.45±0.62	116.3±22.0	171.47±12.67	1.27±1.01	75.9±30.6
LB	-111,113±1,835	4.43±0.81	233.3±22.3	171.54±12.85	1.30±0.98	102.4±28.5
随机	-109,253±1,697	6.03±1.02	181.9±26.2	174.15±12.94	2.78±1.30	99.8±35.3
GRAPH	-108,169±1,834	6.96±1.06	216.2±27.8	186.12±14.24	9.00±2.23	258.1±58.1
LB-RELAX	-114,268±1,512	1.72±0.57	125.3±13.6	170.98±12.38	1.00±0.88	54.8±25.6
IL-LNS	-114,871±1,602	1.20±0.56	79.7±17.3	171.55±12.47	1.33±0.97	51.2±25.7
RL-LNS	-108,776±1,813	6.44±1.04	191.7±27.0	171.35±12.29	1.22±0.85	67.5±22.6
CL-LNS	**-115,513±1,621**	0.**65**±**0**.32	44.**9**±**17**.**0**	170.**15**±**12**.12	0.**53**±**0**.62	21.**5**±**17**.**5**

表8. 小规模实例上的测试结果：原始界（PB）、原始间隙（PG）（百分比）、60分钟时间截止时的原始积分（PI），以及对100个实例取平均后的标准差。

	PB	PG（%）	PI	PB	PG（%）	PI
	MVC-S			MIS-S		
BnB	448.63±9.58	1.32±0.43	66.1±13.1	-2,014.85±20.04	5.10±0.69	222.8±25.9
LB	453.45±11.81	2.35±1.30	102.2±35.9	-2,079.07±14.34	2.07±0.44	130.9±13.6
随机	447.06±11.21	0.96±1.26	38.0±44.8	-2,117.92±11.31	0.24±0.14	22.1±5.0
GRAPH	447.14±10.83	0.98±1.20	42.9±44.0	-2,116.15±11.58	0.32±0.15	31.8±5.0
LB-RELAX	449.01±11.53	1.38±1.51	57.0±51.2	-2,109.17±11.17	0.65±0.20	46.9±6.5
IL-LNS	444.00±9.73	0.29±0.23	19.2±10.2	-2,118.38±11.77	0.22±0.17	19.4±5.8
RL-LNS	445.45±9.99	0.61±0.34	29.6±11.5	-2,118.44±11.36	0.22±0.14	17.2±5.2
CL-LNS	443.**48**±**9**.56	0.**17**±**0**.09	8.**7**±**6**.**7**	**-2,**119.**78**±**12**.14	0.**15**±**0**.15	12.**8**±**5**.**4**
	CA-S			SC-S		
BnB	-113,608±1,611	2.28±0.59	137.4±25.9	171.22±12.50	1.13±0.95	86.7±37.9
LB	-111,342±1,732	4.23±0.75	272.1±26.9	171.39±12.81	1.22±0.97	113.7±35.2
随机	-109,397±1,684	5.90±1.02	235.6±34.9	173.95±12.98	2.67±1.29	124.3±45.4
GRAPH	-108,422±1,775	6.74±1.03	277.7±36.5	185.57±14.17	8.74±2.13	337.8±76.4
LB-RELAX	-114,348±1,516	1.65±0.57	140.5±18.3	170.74±12.35	0.86±0.83	63.2±31.6
IL-LNS	-115,001±1,564	1.09±0.51	90.0±20.8	171.55±12.47	1.33±0.97	63.2±34.3
RL-LNS	-108,920±1,816	6.32±1.03	249.2±35.9	171.14±12.30	1.10±0.77	77.8±28.9
CL-LNS	**-115,513±1,621**	0.**65**±**0**.32	50.**7**±**22**.**7**	170.**11**±**12**.10	0.**50**±**0**.58	26.**2**±**12**.8

表9.大规模实例的泛化结果：在15分钟时间截断下，100个实例的原始界（PB）、原始间隙（PG）（百分比）和原始积分（PI）的平均值及标准差。

	PB	PG（%）	PI	PB	PG（%）	PI
	MVC			MIS		
BnB	919.96±12.38	4.06±0.38	36.8±3.4	-3,888.39±20.62	8.24±0.31	76.3±2.8
LB	907.06±12.46	2.69±0.36	32.7±3.2	-3,959.15±59.75	6.57±1.34	70.0±3.6
随机	886.97±12.69	0.49±0.25	11.5±2.0	-4,215.32±15.86	0.52±0.12	12.4±1.0
GRAPH	888.28±12.61	0.64±0.26	18.0±2.3	-4,185.96±17.29	1.22±0.17	23.2±1.5
LB-RELAX	901.37±12.66	2.08±0.30	30.1±2.8	-4,148.06±19.51	2.11±0.20	33.2±1.8
IL-LNS	886.32±12.63	0.42±0.26	12.6±1.8	-4,203.74±16.80	0.80±0.17	14.8±1.7
RL-LNS	890.78±12.34	0.92±0.30	18.7±2.5	-4,215.17±15.97	0.53±0.14	11.5±1.2
CL-LNS	883.**18**±**12**.52	0.**06**±**0**.05	7.**7**±**1**.**5**	**-4,**220.**96**±**15**.68	0.**39**±**0**.14	6.**8**±**1**.**5**
	CA			SC		
BnB	-194,128±14,403	15.43±6.20	164.4±11.8	110.42±7.44	2.92±1.49	63.3±12.2
LB	-203,872±4,522	11.18±1.72	149.9±8.6	117.36±8.84	8.58±2.85	89.3±19.3
随机	-215,183±2,670	6.26±0.74	75.8±6.0	112.91±7.72	5.04±2.03	59.9±16.8
GRAPH	-210,157±2,697	8.44±0.85	108.8±6.9	116.28±7.84	7.81±1.86	89.2±19.6
LB-RELAX	**-222,638±4,846**	3.**01**±**1**.78	102.5±12.3	109.66±7.24	2.25±1.51	36.2±13.3
IL-LNS	-211,938±3,323	7.67±1.22	89.9±8.9	109.12±6.97	1.79±1.26	32.4±10.7
RL-LNS	-216,788±2,730	5.56±0.85	58.**1**±**6**.**9**	109.38±6.89	2.03±1.08	83.6±8.8
CL-LNS	-218,510±2,989	4.81±0.81	61.3±7.1	107.**95**±**6**.78	0.**73**±**0**.57	23.**1**±**8**.**6**

表10.大规模实例上的泛化结果：原始界（PB）、原始间隙（PG）（百分比）和原始积分（PI），在300秒时间截断下，对100个实例及其标准差取平均值。

	PB	PG（%）	PI	PB	PG（%）	PI
	MVC			MIS		
BnB	919.96±12.38	4.06±0.38	73.4±6.8	-3,888.39±20.62	8.24±0.31	150.5±5.6
LB	900.15±12.32	1.95±0.35	52.6±6.0	-4,009.23±71.94	5.39±1.59	123.1±15.1
随机	886.39±12.71	0.43±0.25	15.6±3.9	-4,225.74±15.63	0.28±0.10	15.8±1.8
GRAPH	886.89±12.79	0.48±0.23	22.9±3.9	-4,206.29±16.76	0.74±0.16	31.6±2.7
LB-RELAX	887.64±12.21	0.57±0.23	39.4±4.4	-4,177.14±18.22	1.42±0.16	48.5±3.0
IL-LNS	885.58±12.65	0.33±0.26	15.9±4.0	-4,216.32±17.30	0.50±0.17	20.4±3.0
RL-LNS	888.89±12.64	0.71±0.30	25.8±4.8	-4,224.37±15.79	0.31±0.13	15.1±2.2
CL-LNS	**883.07±12.61**	**0.05±0.04**	**8.1±2.1**	**-4,226.65±15.56**	**0.26±0.13**	**9.7±2.6**
	CA			SC		
BnB	-216,772±13,060	5.58±5.42	257.1±56.4	109.39±7.26	2.02±1.36	84.4±22.2
LB	-206,526±3,750	10.03±1.39	245.1±19.2	116.43±8.97	7.84±2.88	162.6±39.2
随机	-216,326±2,603	5.76±0.74	129.4±12.1	111.71±7.65	4.02±1.86	100.6±32.0
GRAPH	-213,142±2,713	7.14±0.78	177.6±13.2	112.74±7.64	4.91±1.80	141.7±31.1
LB-RELAX	**-225,154±4,366**	**1.91±1.60**	121.9±23.9	109.26±7.07	1.91±1.42	53.9±24.5
IL-LNS	-214,495±3,148	6.56±1.01	154.0±17.9	109.04±6.94	1.72±1.19	48.1±21.3
RL-LNS	-217,600±2,705	5.20±0.84	106.3±14.2	108.66±6.83	1.38±0.99	98.1±15.1
CL-LNS	-223,257±2,667	2.74±0.71	**95.0±12.5**	**107.78±6.64**	**0.58±0.45**	**28.6±12.6**

表11.大规模实例的泛化结果：原始界（PB）、原始间隙（PG）（百分比）、45分钟时间截断时的原始积分（PI），以及对100个实例取平均后的标准差。

	PB	PG（%）	PI	PB	PG（%）	PI
	MVC			MIS		
BnB	907.44±12.77	2.73±0.43	107.2±9.4	-3,913.03±46.93	7.66±1.06	222.6±9.1
LB	894.77±12.41	1.36±0.30	66.3±8.2	-4,063.18±54.80	4.11±1.18	165.2±25.7
随机	886.15±12.71	0.40±0.24	19.2±5.9	-4,230.24±15.56	0.17±0.09	17.8±2.5
GRAPH	886.53±12.72	0.44±0.23	27.0±5.7	-4,215.85±16.16	0.51±0.16	37.1±3.9
LB-RELAX	887.00±12.32	0.49±0.23	44.1±5.8	-4,191.17±17.76	1.09±0.16	59.7±4.2
IL-LNS	885.23±12.65	0.29±0.24	18.7±6.0	-4,222.04±16.64	0.36±0.16	24.2±4.3
RL-LNS	888.25±12.70	0.63±0.31	31.8±7.2	-4,228.78±15.68	0.20±0.12	17.3±3.1
CL-LNS	**883.07±12.61**	**0.05±0.04**	**8.6±2.7**	**-4,230.20±15.19**	**0.17±0.11**	**11.6±3.6**
	CA			SC		
BnB	-221,424±7,149	3.54±2.83	293.0±71.3	109.02±7.39	1.67±1.38	100.7±32.1
LB	-208,294±3,906	9.26±1.42	330.9±27.6	115.67±8.66	7.25±2.68	230.3±60.0
随机	-216,819±2,611	5.54±0.73	180.1±18.1	111.24±7.54	3.63±1.81	134.9±46.8
GRAPH	-214,331±2,641	6.63±0.83	239.2±19.7	111.96±7.60	4.25±1.78	182.5±43.6
LB-RELAX	-225,641±4,235	1.70±1.53	138.1±37.1	109.26±7.07	1.91±1.42	71.1±36.5
IL-LNS	-216,705±3,062	5.59±0.97	208.7±25.7	109.04±6.94	1.72±1.19	63.6±31.8
RL-LNS	-217,987±2,711	5.03±0.81	152.3±21.4	108.22±6.75	0.99±0.87	108.6±21.2
CL-LNS	**-227,235±2,698**	**1.01±0.54**	**111.7±16.6**	**107.78±6.64**	**0.58±0.45**	**33.9±17.6**

表12. 大规模实例的泛化结果：60分钟时间截止时的原始界（PB）、原始间隙（PG）（百分比）和原始积分（PI），以及在100个实例上的平均值和标准差。

	PB	PG（%）	PI	PB	PG（%）	PI
	MVC-L			MIS-L		
BnB	904.41±12.95	2.41±0.40	130.2±11.1	-3,970.78±71.54	6.29±1.62	285.1±18.2
LB	893.56±12.62	1.22±0.30	77.8±10.1	-4,079.76±43.09	3.72±0.87	200.7±32.5
随机	886.00±12.74	0.38±0.24	22.7±8.0	**-4,232.68±15.42**	**0.11±0.08**	19.0±3.1
GRAPH	886.34±12.67	0.42±0.23	30.9±7.6	-4,220.89±16.42	0.39±0.15	41.1±5.1
LB-RELAX	886.68±12.33	0.46±0.23	48.4±7.5	-4,199.04±17.54	0.91±0.16	68.6±5.5
IL-LNS	885.00±12.56	0.27±0.23	21.2±8.1	-4,225.28±16.25	0.29±0.15	27.1±5.5
RL-LNS	887.90±12.67	0.59±0.30	37.3±9.6	-4,231.52±15.97	0.14±0.12	18.9±4.1
CL-LNS	**883.07±12.61**	**0.05±0.04**	**9.1±3.4**	-4,232.50±14.86	0.12±0.11	**12.9±4.4**
	CA-L			SC-L		
BnB	-223,225±5,106	2.74±1.87	320.9±83.1	108.87±7.35	1.54±1.33	115.0±42.5
LB	-208,500±3,976	9.17±1.43	414.0±36.9	115.12±8.77	6.80±2.73	293.5±79.7
随机	-217,204±2,612	5.37±0.75	229.2±24.4	110.88±7.55	3.31±1.79	166.4±61.3
GRAPH	-214,926±2,649	6.37±0.86	297.5±26.9	111.49±7.51	3.85±1.74	218.9±56.7
LB-RELAX	-225,848±4,201	1.61±1.50	153.0±50.3	109.26±7.07	1.91±1.42	88.3±48.9
IL-LNS	-219,074±3,278	4.56±0.98	254.2±33.4	109.04±6.94	1.72±1.19	79.1±42.4
RL-LNS	-218,273±2,725	4.91±0.81	197.0±28.5	107.87±6.74	0.66±0.72	116.2±27.1
CL-LNS	**-229,331±2,800**	**0.09±0.10**	**116.1±18.0**	**107.78±6.64**	**0.58±0.45**	**39.2±23.2**