涡流问题的二维/一维多尺度有限元法T公式的平衡误差估计器

Markus Sch¨obinger[1], Karl Hollaus[1]维也纳工业大学，分析与科学计算研究所，维德纳大街 8-10 号，奥地利维也纳 1040

二维/一维多尺度有限元法（MSFEM）是一种高效的方法，可用于模拟每片铁片都处于相同场中的旋转电机。该方法通过多项式展开解析铁片厚度方向上的变化，将三维薄片简化为二维横截面。本文针对二维/一维多尺度有限元法框架下的涡流问题T 公式，提出了一种基于通量平衡和 Prager-Synge定理的平衡误差估计器。结果表明，该估计器既能很好地近似总误差，也能通过准确估计局部误差分布来实现自适应网格细化。

索引词—二维 /一维 MSFEM 方法、涡流、误差估计器

arXiv:2302.01601v1 [math.NA] 3 Feb 2023

I. 引言

THE 采用有限元法模拟由许多钢片组成的电机中的涡流，会迅速产生规模大到难以求解的方程组。在许多电机中，有源区内的每片钢片都处于相同的磁场中，因此只需模拟单片钢片，就能大幅减少计算量。然而，这个简化后的问题仍然相当复杂。在保持良好解近似的同时进一步简化问题的一种方法是进行空间分解。

单片钢片的厚度不到一毫米，而长度和宽度则以米计。[1]中介绍了一种方法，将钢片的二维横截面和一维厚度作为两个耦合问题来处理。该方法对这两个问题进行迭代求解，直至收敛。 [2]对这种耦合的性质进行了更详细的分析。

在 [3] 和 [4] 中，提出了不同的方法，将一维问题作为预处理步骤单独处理，以获得二维问题所需的参数。

[5] 中提出的二维/一维多尺度有限元法（MSFEM）借鉴了多尺度有限元法的思想，在二维问题中使用经典有限元函数，同时采用预定义的多项式形函数近似沿第三轴的变化；这与 [6] 中提出的基于三角函数形函数的方法类似。该方法只需对薄片的二维横截面划分网格，即可通过单次迭代求解问题。它还能够纳入薄片之间的绝缘层，并正确处理边缘效应 [7]。

本文提出了一个用于二维/一维多尺度有限元法**T**形式的误差估计器。该估计器基于通量平衡，其理论与文献 [8] 中提出的 MSFEM**T** 形式误差估计器相同。为适应二维 / 一维多尺度有限元法框架，该估计器经过重新构建，使其构造和评估仅需二维网格，同时适用于完整的三维区域。

一个数值算例表明，该估计量在全局和局部意义上都能很好地近似误差。利用后一特性实现的自适应网格细化，能够以显著少于均匀网格细化所需的自由度，实现高精度的二维/一维多尺度有限元法解。

II. $\mathbf{T}-\Phi$公式

我们采用$\mathbf{T}-\Phi$ 公式，按照 [9] 中所述求解涡流问题的参考解。问题区域 Ω 分为导电区域 Ω_c（由钢片构成）和非导电区域 Ω_0，（由空气区域和绝缘层构成）。假设薄片沿坐标轴对齐，其横截面位于 $x-y$平面，厚度方向与 z 轴对齐。Ω 的总厚度为 $d = d_{Fe} + d_0$ ，其中薄片厚度为 d_{Fe} ，绝缘层厚度为 d_0。

磁场强度$\mathbf{H}$ 表示为

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla\Phi + \mathbf{H}_{BS} \tag{1}$$

其中，电流矢量势 $\mathbf{T} \in H$(旋度,Ω_c) 满足旋度$\mathbf{T} = \mathbf{J}$，磁标势为 $\Phi \in H^1(\Omega)$，给定的毕奥-萨伐尔场为 $\mathbf{H}_{BS}$。涡流问题在频域下的强形式为

$$\operatorname{curl}\rho\operatorname{curl}\mathbf{T} + i\omega\mu(\mathbf{T} - \nabla\Phi + \mathbf{H}_{BS}) = \mathbf{0}, \tag{2}$$

其中， $\rho = \sigma^{-1}$ 为电阻率，电导率为 σ； μ 为磁导率，$\omega = 2\pi f$ 与频率 f 有关， i 为虚数单位。

乘以试验函数并进行分部积分，再结合辅助条件 $\mathbf{divB} = 0$，得到弱形式：求 $\mathbf{T} \in H$(旋度,Ω_c) 和 $\Phi \in H^1(\Omega)$，使得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho\operatorname{curl}\mathbf{T}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{v} + i\omega\mu(\mathbf{T}-\nabla\Phi)\cdot(\mathbf{v}-\nabla q)\\ = -\int_\Omega i\omega\mu\mathbf{H}_{BS}\cdot(\mathbf{v}-\nabla q)\end{aligned} \tag{3}$$

对所有 $\mathbf{v} \in H$(旋度，Ω_c) 以及所有 $q \in H^1(\Omega)$ 均成立。

III. 二维/一维多尺度有限元法$\mathbf{T}$公式

本文采用二维/一维 MSFEM 方法求解$\mathbf{T}$- 形式，该形式已在 [5] 和[10]中详细描述。三维未知分量$\mathbf{T} - \nabla\Phi$由以下方式近似：

$$\mathbf{T}_{\text{2D/1D}} = \begin{pmatrix} \phi_0(z)\mathbf{T}_{0,x}(x,y) + \phi_2(z)\mathbf{T}_{2,x}(x,y) \\ \phi_0(z)\mathbf{T}_{0,x}(x,y) + \phi_2(z)\mathbf{T}_{2,y}(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中，$\mathbf{T}_2 \in H$(旋度$_{2D}$，$\Omega_{2D,\ c}$) 和 $\mathbf{T}_0 = \nabla\Phi_0$ with $\Phi_0 \in H^1(\Omega_{2D})$ 定义在 Ω_{2D} 的二维投影上。此处及下文中，索引中的坐标 x、y 或 z 表示向量值函数的各个分量。形函数 ϕ_0 和 ϕ_2 分别是预先定义的 0 阶和 2 阶分片多项式，另见附录 A。二维向量函数 $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_x(x,\ y),\ \mathbf{V}_y(x,\ y))^T$ 的二维旋度算子 curl_{2D} 定义为

$$\text{curl}_{2D}\,\mathbf{V} := \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{V}_y - \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{V}_x. \quad (5)$$

空间 H(旋度$_{2D}$) 的离散化详见 [11]。

因此，完整的磁场强度为

$$\mathbf{H}_{\text{2D/1D}} = \mathbf{T}_{\text{2D/1D}} + \mathbf{H}_{BS}. \quad (6)$$

为便于后文引用，$\mathbf{H}_{\text{2D/1D}}$ 的（三维）旋度定义为

$$\text{curl}\,\mathbf{H}_{\text{2D/1D}} = \begin{pmatrix} -\phi_2'(z)\mathbf{T}_{2,y}(x,y) \\ \phi_2'(z)\mathbf{T}_{2,x}(x,y) \\ \phi_2\,\text{curl}_{2D}\,\mathbf{T}_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

为得到弱形式，将式（4）分别应用于式（3）中的试函数和试验函数。注意，$\mathbf{H}_{\text{2D/1D}}$ 仅通过形函数 ϕ_0 和 ϕ_2依赖于 z，而这些形函数是先验已知的。因此，可以对 z 进行解析积分。由此得到弱二维/一维多尺度有限元法形式：求$\mathbf{T}_2 \in H$(旋度$_{2D}$，$\Omega_{2D,\ c}$)和 $\Phi_0 \in H^1(\Omega_{2D})$，使得

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{2D}} \overline{\rho\phi_2'^2}\mathbf{T}_2\cdot\mathbf{V}_2 + \overline{\rho\phi_2^2}\,\text{curl}_{2D}\,\mathbf{T}_2\,\text{curl}_{2D}\,\mathbf{V}_2 \\ &\quad + i\omega\left(\overline{\mu\phi_0^2}\nabla\Phi_0\cdot\nabla q + \overline{\mu\phi_2^2}\mathbf{T}_2\cdot\mathbf{V}_2\right) \\ &\quad + i\omega\overline{\mu\phi_0\phi_2}\left(\nabla\Phi_0\cdot\mathbf{V}_2 + \mathbf{T}_2\cdot\nabla q\right) \\ &= -\int_{\Omega_{2D}} i\omega\left(\overline{\mu\phi_0^2}\mathbf{H}_{BS}\cdot\nabla q + \overline{\mu\phi_0\phi_2}\mathbf{H}_{BS}\cdot\mathbf{V}_2\right) \end{aligned} \quad (8)$$

对于所有 $\mathbf{V}_2 \in H$(旋度$_{2D}$,$\Omega_{2D,c}$) 和 $q \in H^1(\Omega_{2D})$，其中上横线表示相应函数已关于 z积分。

IV. 误差估计

所提出的误差估计器基于 Prager 和 Synge 的定理以及 [12]，中介绍的理论，该理论可加以调整，从而得到以下恒等式，这也是后续所有计算的基础：

$$\|\text{curl}\,\mathbf{T} - \text{curl}\,\mathbf{T}_{\text{2D/1D}}\|_\rho^2 + \|\sigma\gamma - \text{curl}\,\mathbf{T}\|_\rho^2 = \|\sigma\gamma - \text{curl}\,\mathbf{T}_{\text{2D/1D}}\|_\rho^2, \quad (9)$$

其中$\mathbf{T}$ 是涡流问题（2）的强解，γ 是满足以下条件的平衡通量

$$\text{curl}\,\gamma = -i\omega\mu(\mathbf{T}_{\text{2D/1D}} + \mathbf{H}_{BS}). \quad (10)$$

能量范数 $\|.\|_\rho$ 可解释为对涡流损耗的度量，即对于电流密度$\mathbf{J}$，有

$$\|\mathbf{J}\|_\rho^2 = \int_\Omega \rho\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}^* = \int_\Omega \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}^*, \quad (11)$$

其中星号表示复共轭。

二维标量$\mathbf{T}$形式的（9）的一种变体已在 [8]中得到证明，向量值静磁场情形的相应变体则已在 [12]中得到证明。（9）的证明与之类似。

注意，（9）左侧的第一项是以涡流损耗范数度量的二维/一维多尺度有限元法解的误差。假设已知一个合适的 γ，便可计算（9）的右侧。由于左侧所有各项都保证非负，右侧给出了误差的上界。

主要问题在于如何构造一个合适的 γ，它既需在Ω上满足（10），又必须能够仅利用Ω_{2D}来构造。如果误差估计器需要完整的三维区域Ω，其计算量将远高于$\mathbf{T}^{2D/1D}$ 的计算量，从而抵消采用二维/一维多尺度有限元法的优势。同样，估计量的计算（如（9）右侧定义的三维积分）也必须能够仅利用Ω_{2D}完成。

这同样是通过对 γ采用二维/一维 MSFEM 方法来实现的。更具体地说，我们设

$$\gamma = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(z)\gamma_{1,x}(x,y) + \hat{\phi}_3(z)\gamma_{3,x}(x,y) \\ \hat{\phi}_1(z)\gamma_{1,y}(x,y) + \hat{\phi}_3(z)\gamma_{3,y}(x,y) \\ \phi_0(z)\gamma_{0,y}(x,y) + \phi_2(z)\gamma_{2,y}(x,y) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

with

$$\hat{\phi}_1 := \int \phi_0\,dz \quad \text{and} \quad \hat{\phi}_3 := \int \phi_2\,dz \quad (13)$$

并将待求未知量设为 $\gamma_0, \gamma_2 \in H^1(\Omega_{2D})$ 和 $\gamma_1, \gamma_3 \in H(\text{curl}_{2D}, \Omega_{2D})$。

注意，公式 (9) 右侧的估计量由 $\sigma\gamma$ 构成。由于电导率的原因，$\sigma\gamma$ 在绝缘体中等于零；而 $\text{curl}\mathbf{T}^{2D/1D}$ 仅包含含有形函数 ϕ_2 的分量，见公式 (7)，该分量在绝缘体中同样为零。因此，在构造 γ 时，只需考虑导电材料的区域，即 $\gamma_0,\ \gamma_2 \in H^1(\Omega_{2D,\ c})$ 和 $\gamma_1,\ \gamma_3 \in H(\text{curl}_{2D},\ \Omega_{2D,\ c})$。由此可知，$\phi_2' = K\hat{}\phi_1$ 对常数 $K = 2\sqrt{6}/d_{Fe}^2$ 成立。

γ 的旋度为

$$\operatorname{curl}\gamma=\begin{pmatrix}\phi_0\dfrac{\partial}{\partial y}\gamma_0-\phi_0\gamma_{1,y}+\phi_2\dfrac{\partial}{\partial y}\gamma_2-\phi_2\gamma_{3,y}\\ \phi_0\gamma_{1,x}-\phi_0\dfrac{\partial}{\partial x}\gamma_0+\phi_2\gamma_{3,x}-\phi_2\dfrac{\partial}{\partial x}\gamma_2\\ \hat{\phi}_1\operatorname{curl}_{2D}\gamma_1+\hat{\phi}_3\operatorname{curl}_{2D}\gamma_3\end{pmatrix}. \quad (14)$$

将条件 (10) 中的 (4) 和 (14) 代入并展开，再比较形函数对应的系数，可得方程

$$\frac{\partial}{\partial y}\gamma_0-\gamma_{1,y}=-i\omega\mu(\mathbf{T}_{0,x}+\mathbf{H}_{BS,x}), \quad (15)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\gamma_2-\gamma_{3,y}=-i\omega\mu\mathbf{T}_{2,x}, \quad (16)$$
$$\gamma_{1,x}-\frac{\partial}{\partial x}\gamma_0=-i\omega\mu(\mathbf{T}_{0,y}+\mathbf{H}_{BS,y}), \quad (17)$$
$$\gamma_{3,x}-\frac{\partial}{\partial x}\gamma_2=-i\omega\mu\mathbf{T}_{2,y}, \quad (18)$$
$$\operatorname{curl}_{2D}\gamma_1=0, \quad (19)$$
$$\operatorname{curl}_{2D}\gamma_3=0. \quad (20)$$

由 (19) 和 (20) 可知，$\gamma_1=\nabla\Phi_1$ 和 $\gamma_3=\nabla\Phi_3$满足 Φ_1，$\Phi_3\in H^1(\Omega_{2D,\,c})$。据此，剩余方程可改写为

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\gamma_0-\dfrac{\partial}{\partial y}\Phi_1\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\Phi_1-\dfrac{\partial}{\partial x}\gamma_0\end{pmatrix}=-i\omega\mu\left(\mathbf{T}_0+\mathbf{H}_{BS}\right), \quad (21)$$
$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\gamma_2-\dfrac{\partial}{\partial y}\Phi_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\Phi_3-\dfrac{\partial}{\partial x}\gamma_2\end{pmatrix}=-i\omega\mu\mathbf{T}_2. \quad (22)$$

注意，(21) 和 (22) 并不能唯一确定 γ 的所有分量。每个解都能给出一个有效的误差估计器，但高估（由 (9) 左侧的第二项给出）可能变得任意大。由 (9) 可知，由于误差与 γ 无关，最小化高估等价于最小化估计量。为此，需要施加额外条件。

由于当 $\sigma\gamma$ 是旋度$\mathbf{T}_{2D/1D}$ 的良好近似时，估计量较小，因此比较 (7) 和 (12) 可得

$$\nabla\Phi_1\approx K\rho\begin{pmatrix}-\mathbf{T}_{2,y}\\ \mathbf{T}_{2,x}\end{pmatrix}, \quad (23)$$
$$\nabla\Phi_3\approx\mathbf{0}, \quad (24)$$
$$\gamma_0\approx 0, \quad (25)$$
$$\gamma_2\approx\rho\operatorname{curl}_{2D}\mathbf{T}_2 \quad (26)$$

应成立。

本文在以下约束下求解（21）

$$\|\sigma\gamma_0\|_\rho^2+\left\|\sigma\hat{\phi}_1\nabla\Phi_1-\phi_2'\begin{pmatrix}-\mathbf{T}_{2,y}\\ \mathbf{T}_{2,x}\end{pmatrix}\right\|_\rho^2\to\min \quad (27)$$

并在以下约束下求解（22）

$$\|\sigma\phi_2\gamma_2-\phi_2\operatorname{curl}_{2D}\mathbf{T}_2\|_\rho^2+\|\sigma\hat{\phi}_3\nabla\Phi_3\|_\rho^2\to\min. \quad (28)$$

虽然由于忽略了各分量之间的相互依赖关系，这并不能得到估计量的最优极小化解，但数值算例表明，这样做足以将高估控制在可接受的范围内。这种方法的主要优势在于，无须求解一个大型最小化问题，而只需分别求解两个较小的问题；这不仅本身速度更快，还可以并行求解。

问题（21）和（27）的弱形式如下：求 $\gamma_0,\Phi_1\in H^1(\Omega_{2D,c})$ 及一个拉格朗日乘子 $\lambda_1\in H_\lambda(\Omega_{2D,c})$，使得

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{2D,c}}\overline{\sigma\phi_0^2}\gamma_0\chi_0+\overline{\sigma\hat{\phi}_1^2}\nabla\Phi_1\cdot\nabla\chi_1\\&\quad+\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\chi_0-\dfrac{\partial}{\partial y}\chi_1\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\chi_1-\dfrac{\partial}{\partial x}\chi_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\gamma_0-\dfrac{\partial}{\partial y}\Phi_1\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\Phi_1-\dfrac{\partial}{\partial x}\gamma_0\end{pmatrix}\cdot\kappa_1\\&=\int_{\Omega_{2D}}K\overline{\hat{\phi}_1^2}\begin{pmatrix}-\mathbf{T}_{2,y}\\ \mathbf{T}_{2,x}\end{pmatrix}\cdot\nabla\chi_1-i\omega\mu\left(\mathbf{T}_0+\mathbf{H}_{BS}\right)\cdot\kappa_1\end{aligned} \quad (29)$$

对所有 $\chi_0,\chi_1\in H^1(\Omega_{2D,c})$ 和 $\kappa_1\in H_\lambda(\Omega_{2D,c})$ 均成立。其中，根据德拉姆复形，拉格朗日乘子空间 $H_\lambda(\Omega_{2D,c})$ 是空间 $H(\mathrm{div},\Omega_{2D,c})$ 在无散函数上的限制。

类似地，问题（22）和（28）的弱形式如下：求 γ_2，$\Phi_3\in H^1(\Omega_{2D,c})$ 及一个拉格朗日乘子 $\lambda_2\in H_\lambda(\Omega_{2D,c})$，使得

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{2D,c}}\overline{\sigma\phi_2^2}\gamma_2\chi_2+\overline{\sigma\hat{\phi}_3^2}\nabla\Phi_3\cdot\nabla\chi_3\\&\quad+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\chi_2-\dfrac{\partial}{\partial y}\chi_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\chi_3-\dfrac{\partial}{\partial x}\chi_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\gamma_2-\dfrac{\partial}{\partial y}\Phi_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\Phi_3-\dfrac{\partial}{\partial x}\gamma_2\end{pmatrix}\cdot\kappa_2\\&=\int_{\Omega_{2D}}\overline{\phi_2^2}\operatorname{curl}_{2D}\mathbf{T}_2\chi_2-i\omega\mu\mathbf{T}_2\cdot\kappa_2\end{aligned} \quad (30)$$

对所有 $\chi_2,\chi_3\in H^1(\Omega_{2D,c})$ 和 $\kappa_2\in H_\lambda(\Omega_{2D,c})$。

计算出所有分量后，即可在二维网格上评估总估计量

$$\begin{aligned}&\|\sigma\gamma-\operatorname{curl}\mathbf{T}_{2D/1D}\|_\rho^2=\\&\int_{\Omega_{2D,c}}\overline{\sigma\hat{\phi}_1^2}\nabla\Phi_1\cdot\nabla\Phi_1^*+\overline{\sigma\hat{\phi}_3^2}\nabla\Phi_3\cdot\nabla\Phi_3^*\\&\quad+\overline{\sigma\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3}\left(\nabla\Phi_1\cdot\nabla\Phi_3^*+\nabla\Phi_3\cdot\nabla\Phi_1^*\right)\\&\quad-\overline{\hat{\phi}_1^2}\left(\nabla\Phi_1\cdot\begin{pmatrix}-\mathbf{T}_{2,y}\\ \mathbf{T}_{2,x}\end{pmatrix}^*+\begin{pmatrix}-\mathbf{T}_{2,y}\\ \mathbf{T}_{2,x}\end{pmatrix}\cdot\nabla\Phi_1^*\right)\\&\quad-\overline{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3}\left(\nabla\Phi_3\cdot\begin{pmatrix}-\mathbf{T}_{2,y}\\ \mathbf{T}_{2,x}\end{pmatrix}^*+\begin{pmatrix}-\mathbf{T}_{2,y}\\ \mathbf{T}_{2,x}\end{pmatrix}\cdot\nabla\Phi_3^*\right)\\&\quad+\overline{\rho\hat{\phi}_1^2}\begin{pmatrix}-\mathbf{T}_{2,y}\\ \mathbf{T}_{2,x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\mathbf{T}_{2,y}\\ \mathbf{T}_{2,x}\end{pmatrix}^*+\overline{\sigma\phi_0^2}\gamma_0\gamma_0^*\\&\quad+\overline{\sigma\phi_0\phi_2}(\gamma_0\gamma_2^*+\gamma_2\gamma_0^*)+\overline{\sigma\phi_2^2}\gamma_2\gamma_2^*\\&\quad-\overline{\phi_0\phi_2}\left(\gamma_0\operatorname{curl}\mathbf{T}_2^*+\operatorname{curl}\mathbf{T}_2\gamma_0^*\right)\\&\quad-\overline{\phi_2^2}\left(\gamma_2\operatorname{curl}\mathbf{T}_2^*+\operatorname{curl}\mathbf{T}_2\gamma_2^*\right)\\&\quad+\overline{\rho\phi_2^2}\operatorname{curl}\mathbf{T}_2\operatorname{curl}\mathbf{T}_2^*,\end{aligned} \quad (31)$$

还可以在局部使用被积函数，以识别对总误差贡献最大的有限元。

V. 数值算例

考虑图 1 所示的机器。利用旋转对称性，只需对整台机器的十二分之一进行仿真。钢片的磁导率规定为 $\mu = 1000\mu_0$，电导率为 $\sigma = 2.08\text{MS}$。频率为 50Hz。源未在有限元网格中解析，而仅通过其毕奥-萨伐尔场纳入计算。所有计算均使用开源软件 Netgen/NGSolve [13] 完成。

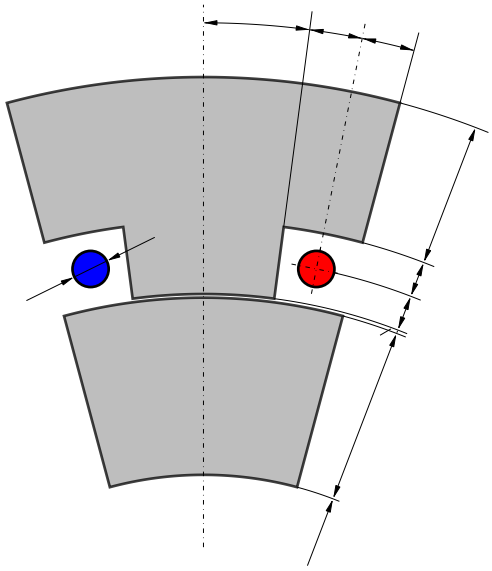

图 1. 虚构机器的十二分之一，由钢片（灰色）和空气区域（留白）组成。正、负源分别以红色和蓝色绘出。所有尺寸均以 mm 为单位。薄片厚度为 $d = 0.5\text{mm}$，填充系数为 0.95。

计算从给定几何形状下可能的最粗网格开始，见图 2。在每次迭代中，都会针对每个有限元分别计算估计量。随后，对估计值至少达到所遇到的最大估计量一半的所有单元进行细化。在此过程中，为避免出现悬挂节点，也可能细化一些相邻单元。

可以看出，网格细化集中在内边缘（电流因边缘效应而转向的位置）、角点（场强峰值所在处，另见图 3）以及内外边界（需要在此处准确处理边界条件）。还要注意，沿垂直对称线几乎没有网格细化，因为此处的场完全平行，易于处理。

图 3 展示了对该估计量的定性评估，其中给出了经过两次网格细化后，误差（相对于高阶三维参考解）和估计量的分布。可以看出，该估计量能够准确识别误差集中的区域，进一步证明了细化这些区域的合理性。

最后，作为定量评估，图 4 展示了二维/一维多尺度有限元法解的总误差与有限元问题所需自由度（nDoF）之间的关系，涵盖自适应细化和均匀细化两种情况。可以

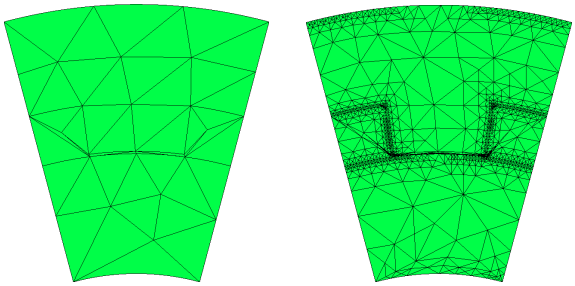

图 2. 初始网格（左）以及经过十次迭代自适应细化后的网格（右）。

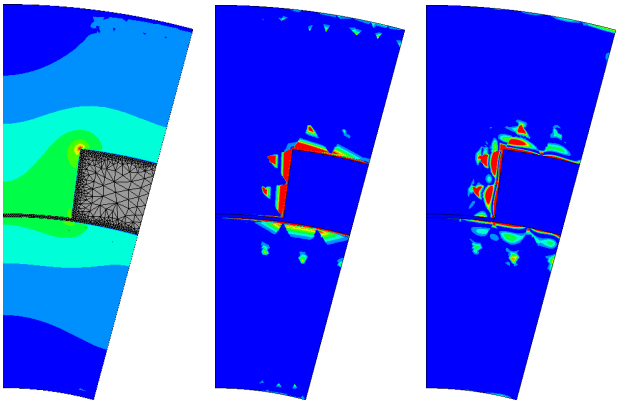

图 3. 在区域的一半上绘制的**J** 绝对值参考解（左）、相对于参考解的误差（中）以及误差估计器（右），均为经过两次网格细化后的结果。

看出，自适应细化显著提高了收敛率。此外，该估计量能够很好地近似误差的变化趋势，且仅有轻微高估。

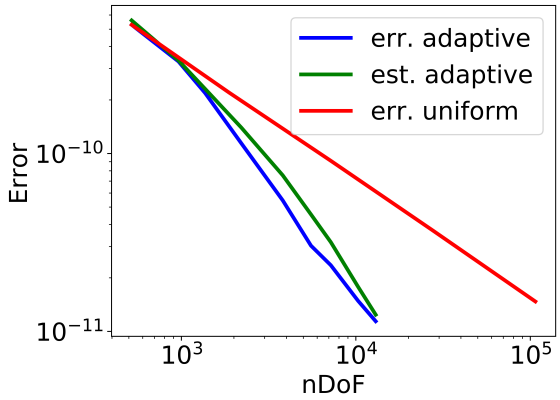

图 4. 以涡流损耗范数度量的总误差，包括自适应网格细化和均匀网格细化的结果，以及自适应方法的总估计误差。

VI. 结论

本文基于通量平衡理论，提出了一种用于涡流问题二维/一维多尺度有限元法**T**形式的后验误差估计器。该估计器还采用二维/一维 MSFEM 方法，以避免其

计算成本高于问题求解本身。数值算例表明，该估计器能够从整体和局部两个层面可靠地估计误差。因此，它是用于自适应网格细化、提高二维/一维多尺度有限元法解收敛率的高效工具。

致谢

本研究得到奥地利科学基金（FWF）项目 P31926 的资助。

参考文献

[1] O. Bottauscio 和 M. Chiampi，《通过直接耦合的二维/一维电磁场公式分析叠片铁芯》，IEEE《磁学汇刊》，第 38 卷，第 5 期，第 2358–2360 页，2002 年。[2] J. Pippuri、A. Belahcen、E. Dlala 和 A. Arkkio，《在二维有限元分析中纳入叠片中的涡流》，IEEE《磁学汇刊》，第 46 卷，第 8 期，第 2915–2918 页，2010 年。[3] J. Gyselinck、R. Sabariego 和 P. Dular，《三维有限元模型中叠片铁芯的非线性时域均匀化技术》，IEEE《磁学汇刊》，第 42 卷，第 4 期，第 763–766 页，2006 年。[4] C. Geuzaine、S. Steentjes、K. Hameyer 和 F. Henrotte，《铁磁叠片铁芯的实用两步均匀化技术》，IET Meas. Sci. Technol.，第 9 卷，第 2 期，第 152–159 页，2015 年。[5] M. Sch¨obinger、J. Sch¨oberl 和 K. Hollaus，《薄铁片中涡流线性二维/一维问题的多尺度有限元法》，IEEE《磁学汇刊》，第 55 卷，第 1 期，第 1–12 页，2019 年。[6] P. Rasilo 等，《用于电机损耗预测的叠片铁磁铁芯模型》，IET Electr. Power Appl.，第 5 卷，第 7 期，第 580–588 页，2011 年。[7] K. Hollaus 和 M. Sch¨obinger，《采用磁矢势的二维/一维方法中的气隙与边缘效应 A 以及 MSFEM》，IEEE《磁学汇刊》，第 56 卷，第 1 期，第 1–5 页，2020 年。[8] M. Sch¨obinger、J. Sch¨oberl 和 K. Hollaus，《二维涡流问题多尺度有限元法的平衡误差估计器》，IEEE《磁学汇刊》，第 57 卷，第 6 期，第 1–4 页，2021 年。[9] O. B´ır´o，《涡流问题的边元公式》，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，第 169 卷，第 3–4 期，第 391–405 页，1999 年。[10] K. Hollaus 和 M. Sch¨obinger，《叠片导电介质中采用 T、Phi–Phi 的涡流问题混合多尺度有限元法》，IEEE《磁学汇刊》，第 56 卷，第 4 期，第 1–4 页，2020 年。[11] J. Schoeberl 和 S. Zaglmayr，《具有局部完全序列性质的高阶 N´ed´elec 单元》，Compel-the International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering - COMPEL-INT J COMPUT MATH ELEC，第 24 卷，384，2005 年 6 月，第 374 页。–。[12] D. Braess 和 J. Sch¨oberl，《边元的平衡残差误差估计器》，Math. Comp.，第 77 卷，第 262 期，第 651–672 页，2008 年。[13] J. Sch¨oberl。Netgen/ngsolve。 [在线]。网址：https://ngsolve.org/

附录

A. 形函数

假设薄片厚度沿 z 轴方向，形函数的定义使用辅助缩放变量 $s := \frac{2z}{d_{Fe}}$，它将任意区间 $\left[-\frac{d_{Fe}}{2}, \frac{d_{Fe}}{2}\right]$ 转换为归一化区间 $[-1, 1]$。本文使用的形函数定义如下：

$$\phi_0(s) = 1, \tag{32}$$

$$\hat{\phi}_1(s) = \frac{d_{Fe}s}{2}, \tag{33}$$

$$\phi_2(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(s^2 - 1), \tag{34}$$

$$\hat{\phi}_3(s) = \frac{d_{Fe}\sqrt{6}}{8} s \left(\frac{s^2}{3} - 1\right), \tag{35}$$

另请参见图 5。在绝缘层中，ϕ_0 和 ϕ_2 分别通过常数 1 和 0 进行扩展。函数 ϕ_1 和 ϕ_3 仅出现在估计量的定义中，而该估计量仅在薄片内部定义。

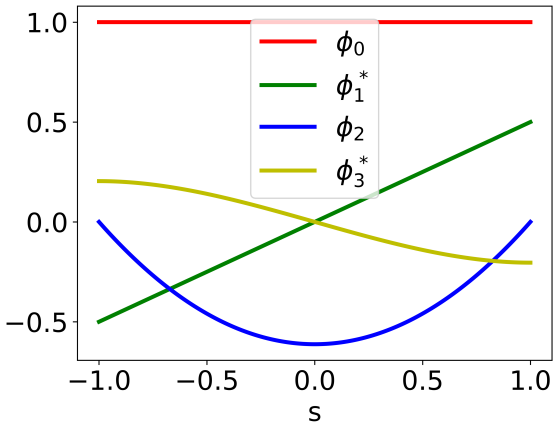

图 5. 所用的形函数 ϕ_0、$\hat{}\phi_1$、ϕ_2、$\hat{}\phi_3$。请注意，为了更清晰地显示，$\hat{}\,\phi_1$ 和 $\hat{}\,\phi_3$ 已缩放至 $d_{Fe} = 1$。

为简洁地写出所需的积分，令 κ 为一个通用材料参数，其在薄片中等于 κ_{Fe}，在绝缘体中等于 κ_0。在应用中，κ 可根据需要代替 σ、ρ 或 μ，也可以通过隐式设定 $\kappa_{Fe} = \kappa_0 = 1$将其省略。式 (8)、(29)、(30) 和 (31) 所需的积分为

$$\overline{\kappa\hat{\phi}_1^2} = \frac{d_{Fe}^3\kappa_{Fe}}{12} \tag{36}$$

$$\overline{\kappa\phi_2^2} = \frac{d_{Fe}\kappa_{Fe}}{5} \tag{37}$$

$$\overline{\kappa\phi_2'^2} = \frac{2\kappa_{Fe}}{d_{Fe}} \tag{38}$$

$$\overline{\kappa\phi_0\phi_2} = -\frac{\sqrt{6}d_{Fe}\kappa_{Fe}}{6} \tag{39}$$

$$\overline{\kappa\hat{\phi}_3^2} = \frac{17d_{Fe}^3\kappa_{Fe}}{840} \tag{40}$$

$$\overline{\kappa\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3} = -\frac{\sqrt{6}d_{Fe}^3\kappa_{Fe}}{60} \tag{41}$$

含有 ϕ_0^2 的项属于特殊情况，需要区分在包含薄片和绝缘体的整个区域上的积分与仅在薄片上的积分。因此

$$\overline{\kappa\phi_0^2} = \kappa_{Fe}d_{Fe} + \kappa_0 d_0 \quad \text{in (8)}, \tag{42}$$

$$\overline{\kappa\phi_0^2} = \kappa_{Fe}d_{Fe} \quad \text{in (29), (30) and (31)}. \tag{43}$$