arXiv:2302.01611v1 [math.CO] 3 Feb 2023

从整数到对称矩阵的单拟同态

Tim Seynnaeve 鲁汶大学
比利时
ti
m.seynnaeve@kuleuven.be

Nafie Tairi 伯尔尼大学 瑞士
n
afie.tairi@unibe.ch

Alejandro Vargas
南特大学
法国
alejandro@vargas.page

摘要

函数 f 从 $\mathbb{Z}$到任意特征为零的域 K 上的对称矩阵，若对所有 $x,\ y \in \mathbb{Z}$，矩阵 $f(x+y) - f(x) - f(y)$的秩至多为 1，则称其为 1-拟同态。我们证明，任何这样的 1-拟同态与一个实际群同态的距离至多为 2。这为 Kazhdan 和 Ziegler 提出的问题的一个特殊情形给出了肯定答案。

关键词

拟同态、秩度量、线性近似

1 引言

我们继续 [1] 中开启的研究计划，探讨 Kazhdan 和 Ziegler 在其关于近似上同调的工作中提出的问题的一些具体情形 [2]。给定一个函数 f，它以如下方式近似满足同态的性质。

定义 1.1。 设 $(H,+)$ 是一个阿贝尔群。 H 上的范数 是一个映射 $\|\cdot\|\colon H \to \mathbb{R}$，满足

- $\|x\| \geq 0$ 对所有 $x \in H$ 均成立，且当且仅当 $x = 0$ 时取等号，
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 对所有 $x, y \in H$，
- $\|-x\| = \|x\|$ $x \in H$ 均成立。

注意，为 H 配备范数等价于为其配备等变度量 d，也就是说，配备一个满足 $d(x,y) = d(\|x-y\|$ 的度量，对所有 $,, z \in H$ 均成立；二者之间的关系为 $d(,)$ 。

定义 1.2. 设 $(G,+)$ 和 $(H,+)$ 为阿贝尔群，其中 H配备了范数 $\|\cdot\|$。映射 $f\colon G \to H$称为 c-拟同态 （其中 $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$），若对所有 $x, y \in \mathbb{Z}$，均有

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq c. \tag{1}$$

自然会问，每个 c-拟同态能否由一个真正的群同态近似。

问题 1.3. 固定 G、 H 和 c。是否存在一个常数 $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得对于任意 c-拟同态 $f\colon G \to H$，都存在一个群同态 $\varphi\colon G \to H$，满足

$$\forall x \in G\colon \quad \|f(x) - \varphi(x)\| \leq C.$$

这个问题的一个变体——其中 $G = H$和 G可以是非阿贝尔群——早在1960年就由Ulam在 [3, 第六章1] 提出了。我们关注的情形是 $G = \mathbb{Z}$ 为整数加法群，而 H 为某个域 $\mathbb{K}$上的矩阵加法群，其中范数由秩给出。 [1, 注111] 中的论证表明，在这种情形下，若域具有正特征，答案是肯定的。在本文余下部分，我们固定一个特征为零的域 $\mathbb{K}$。注意，每个群同态 $\varphi\colon \mathbb{Z} \to H$ 都具有形式 $\varphi(x) = x \cdot A$，其中 $A \in H$是一个固定元素。

问题 1.4. 固定 $c \in \mathbb{N}$。是否存在一个常数 $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得对于任意自然数 n 和任意 c-拟同态$f\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$，都存在一个矩阵 $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$，使得

$$\forall x \in \mathbb{Z}\colon \quad \mathrm{rk}\,(f(x) - x \cdot A) \leq C.$$

这是Kazhdan和Ziegler提出的问题1.3的具体情形。在假设 [1] 的像落在对角矩阵空间中，并取 f的条件下，该问题已得到肯定解 $C = 28c$。本文研究的是 $c = 1$的情形。我们能够证明一个远优于预期的上界 $C = 28$：事实上，常数 C可以取为2。此外，我们还可以弱化 f的像落在对角矩阵空间中的假设。

定理 1.5. 假设 特征$(\mathbb{K}) = 0$，并令 对称矩阵$(n \times n, \mathbb{K})$ 为对称矩阵空间。若假设 $f\colon \mathbb{Z} \to$ 对称矩阵$(n \times n, \mathbb{K})$ 是一个 *1*-拟同态，则存在一个 $A \in$ 对称矩阵$(n \times n, \mathbb{K})$，使得

$$\mathrm{rk}\,(f(x) - x \cdot A) \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

本文其余部分将用于证明定理 1.5。我们的策略是证明连续差分序列 $\Delta_f(i) = f(i+1) - f(i)$ 满足两类对称性。一类是在局部意义下的反射对称性，我们称之为回文性；另一类是周期性。将 f表示为狄拉克 delta 函数之和，并利用这些对称性，即可得出结果。

关于对称矩阵的两个引理

本节将证明一些关于对称矩阵的初等引理，这些引理将在后续证明中用到。令 $(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathbb{K}^n$ 上的双线性形式，其定义为

$$(x, y) \coloneqq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

对所有 $x,\ y \in \mathbb{K}^n$。那么， $n \times n$ 上的矩阵若对所有 $x,\ y \in \mathbb{K}^n$ 都满足 $(Ax,\ y) = (x,\ Ay)$，则该矩阵是对称的。

引理 2.1。 设 $A \in$ 对称矩阵$(n \times n, \mathbb{K})$。那么 $\mathrm{im}(A) = \ker(A)^{\perp}$。

证明。由于我们的双线性形式是非退化的，我们可知

$$Ax = 0 \iff (Ax, y) = 0\ \forall y \iff (x, Ay) = 0\ \forall y.$$

因此，

$$x \in \ker(A) \iff x \perp \mathrm{im}(A),$$

这意味着 $\mathrm{im}(A) = \ker(A)^{\perp}$。 □

引理 2.2. 设 A、 B 为对称矩阵。此外，假设像$(A) \cap$ 像$(B) = 0$。则秩 $(A+B) =$ 秩 $(A) +$ 秩 (B)。

证明。我们总有以下不等式

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}\,(A+B) &= \dim \mathrm{im}(A+B)\\ &\le \dim(\mathrm{im}(A)+\mathrm{im}(B))\\ &\le \dim(\mathrm{im}(A))+\dim(\mathrm{im}(B))\\ &= \mathrm{rk}\,(A)+\mathrm{rk}\,(B)\,.\end{aligned}$$

我们的假设 $\mathrm{im}(A)\cap\mathrm{im}(B)=0$ 意味着第二个“$\le$”是等式。我们证明第一个“$\le$”同样是等式。为此，我们需要证明 $\mathrm{im}(A+B)=\mathrm{im}(A)+\mathrm{im}(B)$。对两边取 $\perp$ 并应用引理 2.1，这等价于证明 $\ker(A+B)=\ker(A)\cap\ker(B)$。不过，这同样可由我们的假设 $\mathrm{im}(A)\cap\mathrm{im}(B)=0$推出：

$$v\in\ker(A+B)\implies Av=-Bv\implies$$
$$Av=Bv=0\implies v\in\ker(A)\cap\ker(B).$$ □

事实上，我们只需要以下推论：

推论 2.3。设 A,B 为对称矩阵。若 秩 $(B)=1$ 且 像$(B)\not\subset$像(A)，则 秩 $(A+B)=$秩 $(A)+1$。

证明。这只是秩为一时的主要断言 B。 □

推论 2.4. 设 $A\in$对称矩阵$(n\times n,\mathbb{K})$ 且 秩 $(A)\le 2$. 假设存在三个秩-*1* 对称矩阵 $B_i(i=1,2,3)$，使得维数(像(
B_1 + B_2 + B_3 $=3$ $A-B_i$ ≤ 1 $i=$) 像() 像()) 且
1,2,3
秩 () 对于 „ $A=0$ 成立。则 。

证明。反设，秩 $(A)\ge 1$。那么

$$\mathrm{rk}\,(A-B_i)\le 1<2\le\mathrm{rk}\,(A)+\mathrm{rk}\,(B_i)\,,$$

因此，根据引理 2.2 的逆否命题，可得 像$(B_i)\subseteq$像(A)。然而，这将意味着

$$3=\text{维数}(\text{像}(B_1)+\text{像}(B_2)+\text{像}(B_3))\le\text{维数}(\text{像}(A))=\text{秩}\,(A)\le 2,$$

这与假设矛盾 . □

3 德尔塔序列

我们首先说明，不失一般性，可以假设 $f(1)=0$。这由以下观察可得。

观察 3.1。设 H 是一个赋范阿贝尔群，且 $f\colon\mathbb{Z}\to H$ 是任意函数。若 g 定义为

$$g(x)=f(x)+x\cdot C,$$

其中 $C\in H$，则：

- f 是 1-拟同态，当且仅当 g 是。
- 我们有

$$\|f(x)-x\cdot A\|\le 2\iff\|g(x)-x\cdot A'\|\le 2,$$

where $A'=A-C$

因此，取 $C=-f(1)$，可知要证明定理 1.5在附加假设 $f(1)=0$ 成立，只需证明其一般情形。

从现在起，我们始终假设 $f(1)=0$。这样，我们就可以用 f 上的差分算子来重新表述 f 是 1-拟同态这一条件。

定义 3.2。给定函数 $f\colon\mathbb{Z}\to H$，我们将其增量映射 $\Delta_f(x)\colon\mathbb{Z}\to H$ 定义为

$$\Delta_f(x)=f(x+1)-f(x).$$

注 3.3。如果 $f(1)=0$，我们可以用 Δ_f 表示 f：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{x-1}\Delta_f(i)\text{ for }x\ge 1,\tag{3}$$

and

$$f(x)=-\sum_{i=0}^{x}\Delta_f(i)\text{ for }x\le 0.\tag{4}$$

△

引理 3.4. 设 $f\colon\mathbb{Z}\to H$ 是一个映射，满足 $f(1)=0$。映射 f 是一个 c-拟同态，当且仅当对所有 $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 和 $z\in\mathbb{Z}$，都有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\Delta_f(i)-\sum_{i=0}^{k}\Delta_f(z-i)\right\|\le c,\tag{5}$$
$$\left\|\sum_{i=0}^{k}\Delta_f(-i)-\sum_{i=0}^{k-1}\Delta_f(z-i)\right\|\le c.\tag{6}$$

证明。本质上，这只是将方程（3）和（4）代入方程（1）。为避免根据 x、 y和 $x+y$的符号进行分类讨论，我们采用略有不同的方式给出证明。计算可得：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\Delta(i)-\sum_{i=0}^{k}\Delta(z-i)=\\ &\sum_{i=1}^{k}[f(i+1)-f(i)]-\sum_{i=0}^{k}[f(z-i+1)-f(z-i)]=\\ &f(k+1)+f(z-k)-f(z+1).\end{aligned}$$

令 $x=k+1,y=z-k$，可知方程（5）成立，当且仅当对于 $x\in\mathbb{Z}_{\ge 1}$ 和 $y\in\mathbb{Z}$，-拟同态条件（1）成立。类似地，计算可得：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k}\Delta(-i)-\sum_{i=0}^{k-1}\Delta(z-i)=\\ &\sum_{i=0}^{k}[f(-i+1)-f(-i)]-\sum_{i=0}^{k-1}[f(z-i+1)-f(z-i)]=\\ &-f(-k)-f(z+1)+f(z+1-k).\end{aligned}$$

通过设定 $x=-k$， $y=z+1$，我们看到，方程（6）等价于 $x\in\mathbb{Z}_{\le 0}$ 和 $y\in\mathbb{Z}$的拟同态条件，证毕。 □

特别地，条件（5）对于 $k=0$ 表示 $\|\Delta（y）\|\le c$对所有 $y\in\mathbb{Z}$均成立。

记号 3.5。在本文余下部分， f表示一个 1-拟同态 $\mathbb{Z}\to\mathrm{Sym}(n\times n,\ \mathbb{K})$，满足 $f(1)=0$；其增量映射 Δ_f记为 Δ。我们将用 L_i表示 $\mathrm{im}(\Delta(i))$。由于 $\mathrm{rk}\,(\Delta(i))\le 1$，因此 $\dim(L_i)\le 1$。

注意，如果 $\dim(\sum_{i\in\mathbb{Z}}L_i)\le 2$，那么根据（3）和（4），我们还对所有 $\mathrm{rk}\,(f(x))\le 2$都有 $x\in\mathbb{Z}$，且定理 1.5在 $A=0$下成立。因此，从现在起我们假设：

假设 3.6。维数$(\sum_{i\in\mathbb{Z}}L_i)\ge 3$。

于是我们可以作出如下观察。

引理 3.7。 若假设 3.6 成立，则 $\Delta(0)+\Delta(-1)=0$。

证明。 注意，方程（6）关于 $k=1$ 告诉我们，对于所有 $z\in\mathbb{Z}$都有

$$\operatorname{rk}(\Delta(0)+\Delta(-1)-\Delta(z))\le 1.$$

根据假设 36，我们可以应用推论 2 4 得出 $\Delta(0)+\Delta(-1)=0$。 □

观察 3.8。 仍在假设3.6下，现在关于6）的方程 $k\ge 0$ 可以改写为

$$\operatorname{rk}\left(\sum_{i=2}^{k+1}\Delta(-i)-\sum_{i=0}^{k}\Delta(y-i)\right)\le 1. \tag{7}$$

˜注意这种对称性：如果我们定义 $\Delta(x):=\Delta(-1-x)$，那么 Δ 当且仅当 $\tilde{\Delta}$ 满足假设（5）和（7）时，前者也满足这些假设。

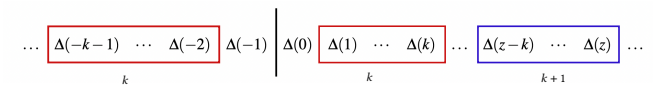

图 1： 方程（5）表明，右侧红色块的和与蓝色块的和相差一个秩一矩阵。类似地，方程（6）表明，左侧红色块的和与蓝色块的和相差一个秩一矩阵。

接下来注意，如果 维数$(\sum_{i\in\mathbb{Z}}L_i)\ge 3$，但 维数$(\sum_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}}L_i)\le 2$，仍然有 秩$(f(x))\le 2$ 对所有 $x\in\mathbb{Z}$ 都成立。因此我们将用一个稍强的条件替换假设 3.6：

假设 3.9。维数$(\sum_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}}L_i)\ge 3$。

在此假设下，我们将证明 Δ 必须具有非常特定的结构。

4 回文性

现在我们证明， Δ 满足一种令人联想到回文的性质。

记号 4.1。对于 $m\in\mathbb{N}$，记作

$$V_m=L_{-m-1}+\cdots+L_{-2}+L_1+\ldots+L_m. \tag{8}$$

注意， L_{-1}、 L_0 不属于求和项。假设3.9 准确地说，存在一个 m，满足 $V_m\ge 3$维数为 $V_m\ge 3$。

引理 4.2。 设 m 满足 $V_m\supsetneq V_{m-1}$。

(1) 对所有 $i\in\{1,\dots,m-1\}$，都有

$$\Delta(i)=\Delta(m-i)=\Delta(-i-1)=\Delta(i-m-1). \tag{9}$$

(2) 此外，若维数为 $V_m\ge 3$，则有

$$\Delta(m+1)=-\Delta(m)\quad \textit{and}\quad \Delta(-m-2)=-\Delta(-m-1).$$

In particular, $L_m=L_{m+1}$ *and* $L_{-m-2}=L_{-m-1}$.

注 4.3。 为了更直观地表述引理 4.2：若 $V_m\supsetneq V_{m-1}$ 且维数为 $V_m\ge 3$，则 Δ 具有如下结构：

i	$-m-2$	$-m-1$	$\cdots$	-1	0	$\cdots$	m	$m+1$
$\Delta(i)$	α	$-\alpha$	$a\ b\ \cdots\ b\ a$	β	$-\beta$	$a\ b\ \cdots\ b\ a$	γ	$-\gamma$

△

证明。 对于第（1）项，我们证明 3 个等式： $i\in\{1,\dots,m-1\}$：

- $\Delta(i)=\Delta(m-i)$，这表示右侧蓝色块的回文性；
- $\Delta(m-i)=\Delta(-i-1)$，这表示块相等；
- $\Delta(-i-1)=\Delta(i-m-1)$，这体现了左侧蓝色块的回文性。

注意，第三个等式可由前两个等式通过将 i代入 $m-i$得到。由对称性（参见观察 3.8），不妨设 $L_m\not\subset V_{m-1}$。

我们首先用归纳法证明恒等式 $\Delta(i)=\Delta(m-i)$。对于基础情形 $i=1$，注意，在方程（5）中令 $k=1$ 和 $z=m$，即可得到

$$\operatorname{rk}(\Delta(1)-\Delta(m-1)-\Delta(m))\le 1.$$

由推论 2.3 可得 $\Delta(1)=\Delta(m-1)$。对于情形 $i=2$，在方程（5）中代入 $k=2$ 和 $z=m$：

$$\operatorname{rk}(\Delta(1)+\Delta(2)-\Delta(m-2)-\Delta(m-1)-\Delta(m))\le 1.$$

利用 $\Delta(1)=\Delta(m-1)$ 和推论 2.3 可得 $\Delta(2)=\Delta(m-2)$。

对于更高阶的 i，证明方法类似。具体来说，若等式对 i成立，则在方程（5）中令 $k=i+1$ 和 $z=m$，即可得到等式对 $i+1$ 成立。等式 $\Delta(m-i)=\Delta(-i-1)$ 的证明类似，使用方程（7）。

对于第（2）项，我们要证明 $\Delta(m+1)+\Delta(m)=0$。若 i属于 $\{1,\dots m-1,m\}$，方程（5）对 $z=m+1$ 和 $k=i$成立，再结合（9），可得

$$\operatorname{rk}(\Delta(m+1)+\Delta(m)-\Delta(i))\le 1.$$

当 i属于 $\{-m-1,-m,\dots,-2\}$ 时，可由方程（7）对 $z=m+1$ 和 $k=-i-1$ 推导出同一等式。由于 $\dim V_m\ge 3$，由推论 2.4 可知，这意味着 $\Delta(m+1)+\Delta(m)=0$。证明 $\Delta(-m-2)+\Delta(-m-1)=0$ 的方法类似。最后，我们有$L_m=\operatorname{im}(\Delta(m))=\operatorname{im}(\Delta(m+1))=L_{m+1}$，另一个也同理。□

5 APAP 序列

现在，我们的目标是证明第 4 节中观察到的有限模式可以无限延伸。我们将满足此模式的序列称为 APAP，即 几乎周期且几乎回文。本节中，我们定义 APAP 序列并证明一些一般引理；下一节将证明我们的德尔塔序列是 APAP。就本节而言，H可以是任意阿贝尔群。

定义 5.1。 若序列 $(\Delta(i))_{i=-N}^{N-1}$ 满足 $\Delta(i)\in H$，则称其为周期为 $p\in[2,N]$的 APAP 序列，当且仅当

$$\Delta(i+p)=\Delta(i)\quad \text{if } i\not\equiv -1 \text{ or } 0 \mod p, \tag{10}$$

$$\Delta(j-1)+\Delta(j)=0\qquad \forall j\in\{-N+1,\dots,N-1\} \text{ with } p\mid j, \tag{11}$$

$$\Delta(p-1-i)=\Delta(i)\quad \forall i=1,\dots,p-2. \tag{12}$$

从现在起，我们将分别称条件（10）、（11）、（12）。我们将 $\Delta(1)\dots,\Delta(p-3)$ $\Delta(p-2)$ 称为回文块，并将 B_Δ 称为“块和” $\Delta(1)+\cdots+\Delta(p-2)$。

注 5.2。 接下来的两幅图展示了 APAP 序列的样子。首先来看整体图：



蓝色方框表示回文块，红色圆圈表示 p-消去。每个方框的长度为 $p-2$。请注意，蓝色方框始终表示同一个方框，而红色圆圈则不然。

接下来，我们看到同一幅图，只是现在放大了：

i	$(a-1)p-1$	$(a-1)p$	$\cdots$	$ap-1$
$\Delta(i)$	α	$-\alpha$	$a\ b\ \cdots\ b\ a$	β

i	ap	$\cdots$	$(a+1)p-1$	$(a+1)p$
$\Delta(i)$	$-\beta$	$a\ b\ \cdots\ b\ a$	γ	$-\gamma$

在这幅图中，我们可以看到红色部分的抵消现象和蓝色的回文块。△

下面的结论是一个简单的计算，利用了 APAP 序列的三个性质。

引理 5.3。设 $(\Delta(i))_{i=-N}^{N-1}$ 是一个周期为 p 的 *APAP* 序列。对于任意 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，在 $(\Delta(i))_{i=-N}^{N-1}$ 中，任意 kp 个连续元素的和，只要第一个元素的下标不是 p 的倍数，便为常数。此外，该常数等于 $k\cdot B_\Delta$。□

我们得到 APAP 序列的第一个来源是引理 4.2：

引理 5.4。设 m 满足 $V_m\supsetneq V_{m-1}$ 且维数 $V_m\geq 3$。序列 $(\Delta(i))_{-m-2}^{m+1}$ 是周期为 $m+1$ 的 *APAP*。此外，对于使该序列成为 *APAP* 的任何其他周期 p，都有 $p|m+1$。

证明。由于维数 $V_m\geq 3$，序列 $(\Delta(i))_{-m-2}^{m+1}$ 是周期为 $m+1$ 的 APAP，这由引理 4.2的两条结论可得。现在假设 $(\Delta(i))_{-m-2}^{m+1}$ 是周期为 p 的 APAP。由于 $V_m\supsetneq V_{m-1}$ 至少 $L_m\notin V_{m-1}$ 或 $L_{-m-1}\notin V_{m-1}$ 其中之一成立。根据观察 3.8 的对称性，我们不妨假设前者成立。

假设 p 不整除 $m+1$，因此 $m\not\equiv -1$ 模 p。若进一步有 $m\not\equiv 0$ 模 p，则 $\Delta(m)=\Delta(j)$，其中 j 是 m 除以 p 后的余数。由于 $j<p<m+1$，我们得到 $\Delta(m)=\Delta(j)$ 属于 V_{m-1}，矛盾。最后，假设 $m\equiv 0$ 模 p，则 $\Delta(m-1)+\Delta(m)=0$，这再次推出 $\Delta(m)$ 属于 V_{m-1}，矛盾。□

接下来，我们利用引理 5.4 中的最后一个断言，研究同一序列上的两个不同 APAP 结构如何相互作用。我们将在断言 6.3 中应用这一结果。

引理 5.5。设 $(\Delta(i))_{i=-N}^{N-1}$ 为周期为 p 的 *APAP*。假设存在一个 $q\in[2,p-1]$ 使得

(1) $\Delta(i)=\Delta(i+q)$ *for* $i=1,\dots,p-q-2$ *(q-periodicity),*
(2) $\Delta(i)=\Delta(q-1-i)$ *for* $i=1,\dots,q-2$ *(palindromicity of the first* $q-2$ *elements),*
(3) $\Delta(q-1)+\Delta(q)=0$,

记 $g=$最大公约数(p,q)。若 $g>1$，则 Δ 为周期为 g 的 *APAP*。若 $g=1$，则所有 $\Delta(i)$ 都相差一个符号。

我们将利用以下简单的数论引理推导这一结论：

引理 5.6。设 $q<p$ 为整数，记 $g=$最大公约数(p,q)。考虑由下述关系在 $\mathbb{Z}$ 上生成的等价关系 $\sim$：

- $x\sim y$ 当且仅当 $x\equiv y$ 模 q（q-周期），
- $x\sim q-1-x$ 对 x 属于 $\{0,\dots,q-1\}$（q-回文），
- $x\sim p-1-x$ 对 x 属于 $\{0,\dots,p-1\}$（p-回文）。

那么，我们有：$x\sim y$ 当且仅当 $x\equiv y$ 模 g 或 $x+y\equiv -1$ 模 g。

引理5.6的证明。我们先证明 $\sim$ 也具有 p-周期性。为此，任取 $x\in\mathbb{Z}$，并令 $m\in\mathbb{Z}$ 为满足 $p-q\leq x-mq\leq p-1$ 的唯一整数。确实，

$$\begin{aligned}x\sim x-mq&\sim p-1-(x-mq)\sim q-1-(p-1-x+mq)\\&=x-p-(m-1)q\sim x-p.\end{aligned}$$

在前面的计算中，$x-mq$ 包含于 $\{0,\dots,p-1\}$ 中，而 $p-1-(x-mq)$ 属于 $\{0,\dots,q-1\}$，因此这些运算是有效的。q-周期性与 p-周期性的组合等价于 g-周期性，即当 $x\equiv y$ 模 g 时，$x\sim y$。此外，回文性给出：当 $x+y\equiv -1$ 模 g 时，$x\sim y$。事实上，根据 g-周期性，不妨设 x 属于 $\{1,\dots,g-1\}$，于是由

q $x\sim q-1-x\sim$ -回文性和周期性可得。
$-1-x\sim y$ □

引理 5.5 的证明。我们首先考虑 $g>1$ 的情形。记 $[a]_q$ 为 $\{1,\dots,q\}$ 中与 a 模 q 同余的唯一整数。

命题 5.7。只需在区间 $[1,q]$ 上检验 APAP 性质。换言之：如果我们验证恒等式

(a) $\Delta(i)=\Delta(i+g)$ for $i\in\{1,\dots,q-g-2\}$ with $i\not\equiv -1$ or 0 mod g,
(b) $\Delta(kg-1)+\Delta(kg)=0$ for $k=1,\dots,q/g$,
(c) $\Delta(i)=\Delta(g-1-i)$ for $i=1,\dots,g-2$,

那么 Δ 是周期为 g 的 APAP。

证明。关于回文性无需证明。对于周期性：给定任意满足 $i\not\equiv -1$ 或模 g 余 0 的数，我们有

$$\Delta(i)=\Delta([i]_p)=\Delta([[i]_p]_q)=\Delta([i]_g),$$

其中我们使用了 p-周期性、q-周期性以及 (a)。

消去过程类似：如果 $p|j$ 那么 $\Delta(j)=-\Delta(j-1)$ 通过 p-消去；如果 $g\mid j$ 但 $p\nmid j$ 那么我们可以使用 p-周期性、q-周期性以及 (b) 来得到

$$\begin{aligned}\Delta(j-1)+\Delta(j)&=\Delta([j-1]_p)+\Delta([j]_p)\\&=\Delta([[j-1]_p]_q)+\Delta([[j]_p]_q)=0.\end{aligned}$$ □

现在我们验证上述条件 (a)、(b)、(c)。为此，我们形式化地定义 q-周期映射 $\tilde{\Delta}:\mathbb{Z}\to H$，其定义为 $\tilde{\Delta}(i)=\tilde{\Delta}([i]_q)$。由于 Δ 和 $\tilde{\Delta}$ 在区间 $[1,q]$ 上一致，根据命题 5.7，我们现在可以改为处理 $\tilde{\Delta}$。我们考虑前一个引理中的等价关系 $\sim$。于是，证明 (a) 和 (c) 就等价于证明：Δ 在除由 0 生成的等价类之外的每个等价类上都是常数。事实上，同一等价类中的两个数 x 和 y 可以通过引理 5.6 中的链连接起来，而唯一不能由此推出 Δ 相等的情形是 $x=0$、$q-1$ $p-1$ 或，但此时我们处于坏等价类中。

剩下的工作是证明 (b)。为此，我们实际上将证明更强的断言：$\tilde{\Delta}(kg-1)=\tilde{\Delta}(kg)=0$ 对于 $k=1,\dots,q/g$。将 Δ 视为一个映射 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\to H$，我们断言：

$$\tilde{\Delta}(i)=\tilde{\Delta}(p-1-i)\tag{13}$$

对每个 $i\in\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 都成立。唯一的非平凡情形是 $i=0$：若 $q=p-1$，则 $\tilde{\Delta}(0)=\tilde{\Delta}(q)=\tilde{\Delta}(p-1)$；若 $q<p-1$，则根据 q-周期性和 p-回文性，可得 $\tilde{\Delta}(0)=\tilde{\Delta}(q)=\tilde{\Delta}(p-1-q)=\tilde{\Delta}(p-1)$。

这自然引出了该序列

$$\tilde{\Delta}(0), \tilde{\Delta}(p-1), \tilde{\Delta}(-p), \ldots, \tilde{\Delta}(-(k-1)p), \tilde{\Delta}(kp-1), \tilde{\Delta}(-kp), \ldots$$

除了根据方程（13）有 $\tilde{\Delta}(-(k-1)p) = \tilde{\Delta}(kp-1)$ 之外，我们还可以由 $\tilde{\Delta}(i)$ 是周期为 p 的 APAP，得到 $\tilde{\Delta}(kp-1) = \tilde{\Delta}(-kp)$，但 $[kp]_q - 1 = 0$ 或 $[kp]_q = 0$ 的情况除外。由于 $g > 1$，我们不会遇到 $[kp]_q = 1$。因此，我们令 $b = \frac{q}{g}$ 为满足 $[bp]_q = 0$ 的最小自然数，于是得到

$$\tilde{\Delta}(0) = \tilde{\Delta}(p-1) = \tilde{\Delta}(-p) = \cdots = \tilde{\Delta}(-(b-1)p) = \tilde{\Delta}(bp-1).$$

注意，在上述等式链中，自变量的集合包含每个与 0 或 -1 模 g 同余的 $x \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$。此外，由于 $\tilde{\Delta}(q-1) + \tilde{\Delta}(q) = 0$，我们得到 $\tilde{\Delta}(bp-1) = -\tilde{\Delta}(0)$，从而整个序列等于 0，正如所需。

现在假设 g 等于 1。根据 q-周期性，只需证明 $\tilde{\Delta}(1)\ldots, \tilde{\Delta}(q)$ 的值相差一个符号。我们如上定义 $\tilde{\Delta}$，并令 a 为满足 $[ap]_q = 1$ 的最小自然数。然后，通过类似的论证，我们发现

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(0) = \tilde{\Delta}(p-1) = \tilde{\Delta}(-p) = \cdots = \tilde{\Delta}(-(a-1)p) = \\ = \tilde{\Delta}(ap-1) = -\tilde{\Delta}(ap) = \cdots \\ = -\tilde{\Delta}(qp-1) = \tilde{\Delta}(0).\end{aligned}$$

注意，在上述内容中，由于 $g = 1$，我们有 $[ap]_q = 0$ 首次成立于 $a = q$。因此我们发现，对于 $x \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$，所有的 $\tilde{\Delta}(x)$ 都相差一个符号，正如所需。□

6 德尔塔序列是 APAP

在下述定理中，我们使用与前文相同的记号，即给定一个 1-拟同态 f，我们用 L_i 表示空间 $\mathrm{im}(\Delta_f(i))$。

定理 6.1. 设 $f\colon \mathbb{Z} \to$ 对称矩阵$(n \times n, \mathbb{K})$ 是一个 *1*-拟同态。假设 维数$(\sum_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}} L_i) \geq 3$。我们可以找到一个自然数 p，使得 Δ_f 是周期为 p 的 *APAP*。此外，p 可以选取得满足 维数$(L_1 + \cdots + L_{p-2}) \leq 2$；因此特别有 秩$(B_\Delta) \leq 2$。

定理 6.1 的证明。令 m 取为满足 $\dim V_m > 2$ 的最小值。由引理 4.2 可知，序列 $(\Delta(i))_{i=-m-2}^{m+1}$ 是周期为 $m+1$ 的 APAP。令 p 为使得 $(\Delta(i))_{i=-m-2}^{m+1}$ 是周期为 p 的 APAP 的最小正整数。由引理 5.4 可知，p 是 $m+1$ 的因数。我们将证明整个序列 $(\Delta(i))_{i=-\infty}^{\infty}$ 是周期为 p 的 APAP。然后，利用 m 的最小性，我们得到

$$\dim(L_1 + \cdots + L_{p-2}) = \dim V_{p-2} \leq 2,$$

这意味着 $\mathrm{rk}\,(B_\Delta) \leq 2$。

现在，假设对于某个 N，序列 $(\Delta(i))_{i=-N}^{N-1}$ 是周期为 p 的 APAP。我们将同时在序列两端各延伸一项，并证明 $(\Delta(i))_{i=-N-1}^{N}$ 仍然是周期为 p 的 APAP；由此通过归纳法证明该定理。

我们分三种情况讨论。如果 $N \equiv -1 \bmod p$，则无需证明任何内容，如下图所示。

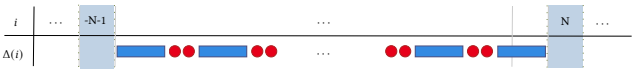

图3： 这里可以看到，对于 $i = -N$ 和 $i = N-1$，我们以回文块开始并结束。我们对 APAP 的定义不取决于接下来为 $i = N$ 和 $i = -N-1$ 填入什么项。

接下来，假设 $N \equiv 0 \bmod p$。这种情况如下所示：



图3： 这里，我们的 Δ 对于 $i = N$ 以“终端消去”开始，例如 $-\alpha$，并以另一个“起始消去”结束，例如 γ。结合整体图景来看，我们可以发现，项 $\Delta(-N-1)$ 和 $\Delta(-N)$ 的和，以及项 $\Delta(N-1)$ 和 $\Delta(N)$ 的和，应该为零。

因此我们需要证明

$$\Delta(N-1) + \Delta(N) = 0 \qquad \Delta(-N-1) + \Delta(-N) = 0.$$

我们采用与引理 4.2中第 () 项证明类似的推理。由等式 (5) 和 (7) 可得

$$\mathrm{rk}\,(\Delta(i) - \Delta(N-1) - \Delta(N)) \leq 1$$

对于 i 属于 $\{-N, \ldots, N-1\} \setminus \{-1, 0\}$。由于 维数 $V_m > 2$，存在三个指标 i 使得 L_i 线性无关，因此由推论 2.4 可得 $\Delta(N-1) + \Delta(N) = 0$。另一个等式可类似推出。对于最后一种情况

，假设 $N \neq -1$ ，0 模 p。

令 i 为 N 除以 p 所得的剩余。现在，$\Delta(N)$ 和 $\Delta(-N-1)$ 都位于一个回文块中，我们要证明 $\Delta(N) = \Delta(i) = \Delta(-N-1)$。我们只证明第一个等式，第二个等式的证明类似。

我们将分两步通过矛盾证明 $\Delta(N) = \Delta(i)$：(1) 假设 $\Delta(N) \neq \Delta(i)$，则 $L_N \not\subset V_2$。(2) $L_N \not\subset V_2$ 与 p 的最小性相矛盾。

命题 6.2. 假设 $\Delta(N) \neq \Delta(i)$，则 $L_N \not\subset V_2$。

证明。 将5式与 $k = m$ 和 $z = N$ 结合，得到：

$$\mathrm{rk}\left(\sum_{j=1}^{m} \Delta(j) - \sum_{j=0}^{m} \Delta(N-j)\right) \leq 1.$$

将前一个表达式中的求和改写为

$$\left(-\Delta(m+1) + \sum_{j=1}^{m+1} \Delta(j)\right) - \left(\Delta(N) - \Delta(N-m-1) + \sum_{j=1}^{m+1} \Delta(N-j)\right).$$

注意，根据归纳假设，$\sum_{j=1}^{m+1} \Delta(j)$ 和 $\sum_{j=1}^{m+1} \Delta(N-j)$ 都是 APAP 序列中 $m+1$ 个连续元素的和。又因为 $m+1$ 是 p 的倍数，所以引理 5.3 说明这两个和相互抵消。由于 $N - m - 1 \equiv i$ 模 p，我们有

$$\mathrm{rk}\,(\Delta(i) + \Delta(m) - \Delta(N)) \leq 1.$$

注意到 $L_m \not\subset V_2$ 但 $L_i \subseteq V_2$。因此，如果还满足 $L_N \subseteq V_2$ 这将意味着 $L_m \not\subset \mathrm{im}(\Delta(i) - \Delta(N))$，但此时推论 2.3 给出

$$\mathrm{rk}\,(\Delta(i) + \Delta(m) - \Delta(N)) = \mathrm{rk}\,(\Delta(i) - \Delta(N)) + 1 \geq 2,$$

这就产生了矛盾。□

命题 6.3。 如果 $L_N \not\subset V_2$，就会与 p 的最小性产生矛盾。

证明。 我们记 $q = i + 1$，其中 i仍然是 N模 p的剩余。我们将应用引理 5.5 来证明 $(\Delta(i))_{i=-N}^{N-1}$是周期为 最大公约数(p, q) 的 APAP。为此，我们需要验证三个条件。

记 $N = ap + q - 1$。我们将 5) 式应用于 $k = 1$ 和$z = N$:

$$\mathrm{rk}\,(\Delta(1) - (\Delta(N) + \Delta(N-1))) \leq 1. \tag{14}$$

由于我们的序列是周期为 p的 APAP，我们得到 $\Delta(N-1) = \Delta(ap+q-2) = \Delta(q-2)$，因此

$$\mathrm{rk}\,(\Delta(1) - (\Delta(N) + \Delta(q-2))) \leq 1. \tag{15}$$

由于 $L_N \not\subset V_2$ $L_1\ L_{q-2} \subset V_2$ 2 3 $A =$但 ,, 我们可以应用推论 。于 ()$(q-2)$和 ()，从而得出 ()$(q-2)$。对 $k = 2$、.....、$q-2$ 重复这一论证，我们得到

$$\Delta(k) = \Delta(q-1-k) \text{ for } k = 1, \ldots, q-2,$$

这表明引理5.5的条件（2）。

对于 $k = q-1$，我们得到

$$\mathrm{rk}\,(\Delta(q-1) - (\Delta(N) + \Delta(ap))) \leq 1,$$

但现在L_{ap}不必属于V_2，因此我们得不到任何新信息。不过，对于 $k = q$，我们得到

$$\mathrm{rk}\,(\Delta(q-1) + \Delta(q) - (\Delta(N) + \Delta(ap) + \Delta(ap-1))) \leq 1.$$

现在我们知道 $\Delta(ap) + \Delta(ap-1) = 0$，从而得出

$$\Delta(q-1) + \Delta(q) = 0,$$

这表明引理5.5的条件（3）。

现在我们继续处理 $k = q + 1$:

$$\mathrm{rk}\,(\Delta(q+1) - (\Delta(N) + \Delta(ap-2))) \leq 1.$$

但我们知道 $\Delta(ap-2) = \Delta(p-2) = \Delta(1)$，因此得出

$$\Delta(q+1) = \Delta(1).$$

我们可以将此过程继续到 $k = p-2$，并得到

$$\Delta(k) = \Delta(k-q) \text{ for } k = q+1, \ldots, p-2, \tag{16}$$

这是引理 5.5 的条件（1）。我们已经验证了所有条件，因此有 $(\Delta(i))_{i=-N}^{N-1}$是周期为 g 的 APAP：=最大公约数(p, q)。因此，较短的序列 $(\Delta(i))_{i=-m-2}^{m+1}$是周期为 g 且严格小于 p 的 APAP，这与我们对 p 的选择矛盾。□

This finishes our induction, and thus the proof. □

7 主要结果的证明

综合以上各点，我们得到:

定理 1.5 的证明。根据定理 6.1，我们得到 Δ 是周期为 p 的 APAP。定义

$$A = \frac{B_\Delta}{p} = \frac{\Delta(1) + \cdots + \Delta(p-2)}{p} = \frac{f(p-1)}{p}.$$

我们将证明，等式 (2) 在此 A 下成立。我们只考虑 $x \geq 1$ 这一情形；另一种情形的证明类似。记 $x = ap + r$ 其中 $1 \leq r \leq p$。若 $x \geq 1$，则有 $f(x) = \Delta(1) + \cdots + \Delta(x-1)$。应用引理 5.3 可得:

$$\begin{aligned} f(x) =& \Delta(1) + \cdots + \Delta(x-1) \\ =& aB_\Delta + \sum_{j=1}^{r-1} \Delta(ap+j) \\ =& apA + \sum_{j=1}^{r-1} \Delta(ap+j). \end{aligned} \tag{17}$$

分两种情况。首先，假设 $r = p$。方程（17）变为

$$\begin{aligned} f(x) &= apA + \sum_{j=1}^{p-1} \Delta(ap+j) \\ &= apA + \sum_{j=1}^{p-2} \Delta(ap+j) + \Delta(x-1) \\ &= apA + pA + \Delta(x-1) = xA + \Delta(x-1). \end{aligned}$$

由此可得

$$\mathrm{rk}\,(f(x) - xA) = \mathrm{rk}\,(\Delta(x-1)) \leq 1.$$

若 $r < p$，方程（17）变为

$$f(x) = apA + \sum_{j=1}^{r-1} \Delta(j).$$

特别地，$\mathrm{im}(f(x) - x \cdot A) \subseteq \sum_{i=1}^{p-2} L_i$。但根据定理 6.1，$\dim \sum_i L_i \leq 2$，因此 $\mathrm{rk}\,(f(x) - xA) \leq 2$。□

致谢

TS 和 NT 获得瑞士国家科学基金会（SNSF）项目资助，项目编号为 200021 191981。TS 还获得佛兰德斯科学基金会（FWO）1219723N 号资助。AV 获得瑞士国家科学基金会（SNSF）200142 号资助。

参考文献

[1] Jan Draisma、Rob HEggermont、TimSeynnaeve、Nafie Tairi 和 Emanuele Ventura。2022 年。整数到汉明度量的拟同态。*arXiv* 预印本 *arXiv*:
2204 08392 *2022* 10 1145 1219092 1219093。（）。

[2] http://doi.acm.org/./.David Kazhdan 和 Tamar Ziegler。近似上同调。*Selecta Math. (N.S.)* 24, 1 2018 10 1007 00029 017 0335 5（6 月）。https://doi.org/./s---S.

[3] M. Ulam。数学问题集。Interscience 出版社，纽约—伦敦。xiii+150 页。