arXiv:2302.01631v3 [math.DG] 7 Jan 2025

# 半李群的正则性与完备性

Martin Bauer、Philipp Harms 和 Peter W. Michor

Abstract. 半李群只存在于无限维情形：它们是光滑流形和拓扑群，其右平移是光滑的，而左平移只要求连续。主要例子包括 $H^s$ or$C^k$ 微分同胚群，以及以无限维表示空间为核的李群的半直积。在此，我们主要研究巴拿赫半李群、其 $C^k$元素群、扩张，以及其上的右不变强黎曼度量：令人惊讶的是，完整的霍普夫–里诺定理成立，而即使对希尔伯特流形而言，这通常也并不成立。

## Contents

1. 引言 1 2. 半李群 3 3. 半李群中的可微元素 4 4. 半李群的正则性 7 5. 扩张 8 6. 扩展示例 16 7. 半李群上的黎曼几何 21 8. 局部加法的辅助结果 28 9. 射流的辅助结果 28 10. 右不变函数的辅助结果 34 参考文献 40

## 1. Introduction

无限维黎曼几何可以追溯到黎曼几何的诞生地——黎曼的教授资格论文 [61], ； 他在其中已经提到，可能有必要考虑无限维流形。后来，这些流形被证明在多个领域中至关重要，包括阿诺德的几何图景中的数学流体力学 [3, 20] 以及功能数据与形状分析 [67, 65, 12]。受这些应用的推动，大量研究致力于探讨无限维几何空间的理论性质。这揭示了

2020 *Mathematics Subject Classification.* 58B25、58D05、58B20。

一些令人惊讶的现象：有限维黎曼几何中众所周知的结果，在无限维情形下不再成立。一些显著的例子包括克里斯托费尔符号不存在 [11], 、测地距离消失 [24, 53, 39, 15], , 以及霍普夫–里诺定理失效 [5, 23, 6]。

我们考察一类特殊的无限维流形，即半李群。这类群既是拓扑群，也是光滑流形，并且所有右平移都是光滑的。或者，考虑逆群后，也可以要求所有左平移都是光滑的。（本文中，光滑表示 $C^\infty$。）巴拿赫半李群是单侧可微群的特殊情形。Birkhoff [17] 和 Enflo [26]曾在希尔伯特第五问题的背景下研究过这类群；另见 [16]。在流体动力学以及函数数据或形状分析中，上述应用涉及的半李群最重要的例子是 $C^k$或 $H^s$ 微分同胚群，Eells、Eliasson 和 Palais [21, 25, 60]最早对此进行了研究。 [43], 研究了更为特殊的微分同胚群，并在该文中首次提出了“半李群”这一名称。半李群的另一大类例子是李群与表示空间的半直积。近期，Marquis 和 Neeb [46] 研究了这类半直积的李理论性质，即其正则性以及可微向量子空间。我们将延续他们的研究，从李理论和黎曼几何两个视角考察一般的半李群，这类群不一定是半直积。

根据定义，半李群的群结构与可微结构仅部分兼容。从积极的一面看，这种部分兼容性解释了为何半李群比一般的无限维流形具有更好的正则性和完备性；我们展示了若干相关结果。从消极的一面看，这种部分不兼容性解释了无限维群与表示论中的一些问题。例如，半李群的切丛的典范平凡化可能并非光滑，甚至可能不连续。因此，欧拉坐标与拉格朗日坐标并不兼容，李括号也只在部分情形下有定义。有些出人意料的是，许多半李群还带有一种额外的几何结构，它与群结构和可微结构均兼容，例如右不变光滑联络和右不变光滑黎曼度量。这具有深远的影响，我们在研究半李群时充分利用了这一点。我们的主要贡献如下：

- 半李群中的可微元素：在第3节中，我们研究 $G$中所有 $C^k$ 元素构成的子群$G^k$ ，也就是说，这些元素属于 $G$ ，且其左平移是 $C^k$。随后我们证明，对于任意 $k \in \mathbb{N}$ ，集合 $G^k$ 是一个正则半李群，而逆极限 $k \to \infty$ 是一个正则 Fr´echet 李群。这推广了 Marquis 和 Neeb 的先前结果 [46], ；他们研究了相关问题在 $G$为半直积时的情形。在定理5.6中，我们将讨论我们的结果即使在这一特殊情形下也如何加强了他们的结果。

- 半李群的正则性：接下来，在第4节中，我们将讨论半李群的光滑正则性，也就是说，能否通过求右对数导数的逆，将单位元处切空间中的光滑曲线积分为群中的光滑曲线。我们无法证明每个巴拿赫半李群 $G$ 本身都是正则的，

尽管所有已知的例子都是正则的。不过，我们可以证明，任意一个群 $G^k$对于 $k \geq 1$ 都是正则的。

- 半李群的扩张理论：在第 5 节中，我们证明李群的扩张理论在很大程度上也适用于半李群。我们可以用扩张数据描述所有满足某些条件的扩张；参见定理 5.10。我们描述分裂扩张（半直积；参见引理 5.5）和中心扩张（第 5.13 节），并且能够将扩张中 $C^k$-元素构成的子群描述为另一种扩张；参见定理 5.11。作为所发展理论的一项应用，我们在第 6 节中介绍了纤维丛微分同胚群背景下的两个扩张示例。

- 半李群上的完备性：在第 7 节中，我们研究半李群上的黎曼度量。本部分的主要结果表明，在满足一项额外的技术条件时，半李群上的强右不变黎曼度量满足 Hopf-Rinow 定理的所有完备性结论，即它们是测地完备且度量完备的，并且任意两点之间都存在一条极小测地线。此前，人们只知道测地完备性 [29]。

记号与约定。对于群 $G$，我们用 $\mu$ 表示乘法： $G \times G \to G$ 其中 $\mu(x, y) = x.y = \mu_x(y) = \mu^y(x)$ 表示左平移和右平移。本文的结果适用于以下两种范畴选择：(1) 李群是便利光滑流形 [42] 范畴中的群对象，拓扑群则相对于相应的便利拓扑定义；或者 (2) 拓扑群是豪斯多夫拓扑空间范畴中的群对象，而李群则是以局部凸空间 [31]为模型的 Bastiani $C^\infty$-流形中的群对象。请注意，与选择 (2) 相比，选择 (1) 通常具有更多的态射，且积具有更细的拓扑。对于可度量化空间或 Fr´echet 流形，两种选择没有区别。

致谢。我们衷心感谢埃尔温·薛定谔研究所（维也纳）提供的 Research in Teams 资助。MB 部分获得了美国国家科学基金会项目 DMS-1912037 和 DMS-1953244，以及奥地利科学基金会项目 FWF-P 35813-N 的资助。PH 获得了新加坡国家研究基金会项目 NRF-NRFF13-2021-0012 和新加坡南洋理工大学项目 NAP-SUG 的资助。

## 2. Half-Lie groups

我们首先介绍本文的核心对象：半李群：

2.1 定义。半李群。右（左）半李群是一个光滑流形，可以是无限维的，其底层拓扑空间是一个拓扑群，且右（左）平移是光滑的。我们将根据建模向量空间的性质，称其为希尔伯特、巴拿赫、Fr´echet 等半李群。半李群之间的同态是光滑群同态。

李群既是右半李群，也是左半李群，并且乘法和反演均为光滑的。根据 Segal 的一项结果，每个有限维半李群都是李群 [64]。每个乘法一致连续的巴拿赫半李群实际上都是巴拿赫李群。这可以看作是对无限维情形下希尔伯特第五问题的解答，归功于 Birkhoff [17] 和 Enflo [26], , 另见 [16]。Marquis 和

Neeb [46] 收集了大量半李群的例子。接下来我们介绍两个重要的特殊情形。

2.2 例子。微分同胚群。本文研究半李群的主要动机示例是有限正则性的微分同胚群。这些群自然出现在形状分析 [67, 65, 12] 和数学流体动力学 [4,20, 41]中。若 $(M, g)$ 是有限维紧黎曼流形，或具有有界几何的开黎曼流形，则索博列夫正则性为 $s > \dim(M)/2 + 1$ 的微分同胚群 $\mathrm{Diff}_{H^s}(M)$ 是半李群。同样，群 $\mathrm{Diff}_{W^{s,p}}(M)$（$s > \dim(M)/p + 1$）以及 $\mathrm{Diff}_{C^k}(M)$（$1 \le k < \infty$）也是半李群。然而，它们不是李群，因为左乘并非光滑。

2.3 例子。群表示。设 $\rho\colon G \to U(H)$ 是巴拿赫李群 $G$ 在无限维希尔伯特空间 $H$ 上的一个表示，且作为映射 $G \times H \ni (g,h) \mapsto \rho(g)h \in H$ 连续。那么，右半直积 $G \ltimes H$ 的运算为

$$(g_1, h_1).(g_2, h_2) = (g_1 g_2, \rho(g_2^{-1})h_1 + h_2), \qquad (g,h)^{-1} = (g^{-1}, -\rho(g)h)$$

是一个右半李群，但不是李群。这类例子已由 Marquis 和 Neeb [46] 进行了深入研究。在他们的工作中，左平移和右平移的作用与本文相反，但这并无影响，因为总可以转而考虑逆群。

2.4 备注。左平移的连续性。根据定义，半李群上的左平移是连续的。这并非必然如此。事实上，有些微分同胚群的右平移是光滑的，而左平移却不连续。一个例子是群

$$\mathrm{Diff}_{\mathcal{B}^{(M)}_{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R}^n) = \big\{ \mathrm{Id} + f : f \in \mathcal{B}^{(M)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \det(\mathbb{I}_n + df(x)) > 0 \big\}$$

以超可微函数空间为模型

$$\mathcal{B}^{(M)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{E}^{(M)}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

其中 $(M)$ 是一个强非拟解析权序列，满足 $M_{k+1}/M_k \nearrow \infty$and $\mathcal{E}^{(M)} \supseteq \mathcal{E}^{\{(k!)^{1/2}\}}$，且 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 是由有界导数的光滑函数构成的 Fr´echet 空间。一个例子是 $M_k := (k!)^{1/2}$。更多详情请参见 [43, 定理 13.3] 。

## 3. Differentiable elements in half-Lie groups

接下来，我们考察半李群中的一些子集，其中左乘具有比单纯连续性更好的可微性。具体而言，我们考察左乘的 $k$ 阶 Fr´echet 可微性，记作 $C^k$。

3.1 定义。可微元素。设 $G$ 是一个巴拿赫右半李群。那么， $x \in G$ 称为一个 $C^k$ 元素，如果左平移 $\mu_x$、$\mu_x^{-1}\colon G \to G$ 是 $C^k$。$G$ 中所有 $C^k$ 元素的集合记作 $G^k$。

我们不知道， $\mu_x$的 $C^k$ 性质是否会自动推出 $\mu_x^{-1}$的 $C^k$ 性质。根据反函数定理，如果 $\mu_x$ 在某一点（因而也在任意一点）具有可逆导数，则情况确实如此。

但我们并不知道这一点，因此在定义 3.1 中要求 $\mu_x^{-1}$为 $C^k$ 。

接下来，我们将证明，若 $G$ 具有右不变局部加法，则巴拿赫半李群 $G$中的 $C^k$ 元素集合仍是一个巴拿赫半李群。

3.2 定义。右不变局部加法。设 $G$是一个右半李群。在 $G$ 上的局部加法是一个光滑映射 $\tau: TG \supseteq V \to G$，它定义在 $TG$ 中 0 截面的一个开邻域 $V$ 上，并满足：对于所有 $x \in G$，$\tau(0_x) = x$，且 $(\pi_G, \tau): V \to G \times G$ 是到其值域上的微分同胚。若对于所有 $y \in G$， $T\mu^y(V) = V$且 $\tau \circ T\mu^y = \mu^y \circ \tau$成立，则称局部加法 $\tau$为右不变局部加法。

3.3 备注。右不变局部加法的存在性。许多重要的半李群例子都存在右不变局部加法:

- 紧流形 $M$ 上的任意局部加法都会在半李群 $\mathrm{Diff}^{C^k}(M)$ 上诱导出右不变局部加法， $k \geq 1$。
- 具有有界几何的有限维流形 $M$ 上的任意局部加法都会在半李群 $\mathrm{Diff}^{H^k}(M)$ 上诱导出右不变局部加法，$k > \dim(M)/2 + 1$。
- 巴拿赫半李群上任意右不变弱黎曼度量的指数映射，只要存在且光滑，就是一个局部加法。

[46] 中所考虑的半直积是具有局部加法的半李群。

局部加法与线性联络、喷射和测地线结构密切相关，正如第8节所述。下述定理是本文的第一个主要结果。

3.4 定理。可微元素。对于任意具有右不变局部加法的巴拿赫右半李群 $G$，以下陈述成立:

(a) 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $G^k$ 都是巴拿赫半李群。(b) 切空间 $T_eG^k$ 是所有满足以下条件的 $X \in T_eG$ 的集合：右不变向量场 $R_X: G \ni x \mapsto T_e\mu^x(X) \in TG$ 是 $C^k$。(c) 包含映射 $G^k \to G$ 是光滑的。(d) 对任意 $\ell \in \mathbb{N}$, $G^{k+\ell}$ 都是 $(G^k)^\ell$的子集。(e) $G$ 上的光滑右不变局部加法在子群 $G^k$上诱导出光滑右不变局部加法。

该定理在第10节末尾证明。其思路是将任意 $x \in G^k$ 与左乘 $\mu_x$对应起来，后者属于 $G$上的右不变 $C^k$微分同胚空间。该空间是巴拿赫流形，而巴拿赫流形结构则由 $G^k$ 继承。

3.5 例子。微分同胚群中的可微元素。$(\mathrm{Diff}^{C^k}(M))^\ell = \mathrm{Diff}^{C^{k+\ell}}(M)$，对于任意闭流形 $M$。为证明任意 $g \in (\mathrm{Diff}^{C^k}(M))^\ell$ 都是 $C^{k+\ell}$，我们固定 $x \in M$、 $y \in T_xM$，以及一个向量场 $h \in \mathfrak{X}(M)$，它在某个坐标图中靠近 $x$ 的局部范围内为常值，且等于 $y$。那么，在这个坐标图中，

$$\partial_s^k|_0 \partial_t^\ell|_0 \; g \circ (\mathrm{Id} + th)(x + sy) = g^{(k+\ell)}(x)(y, \ldots, y),$$

对 $x$ 和 $y$ 连续依赖。因此， $g \in \mathrm{Diff}^{C^{k+\ell}}(M)$。反过来，根据引理 9.9，任意 $g \in \mathrm{Diff}^{C^{k+\ell}}(M)$ 都是 $\mathrm{Diff}^{C^k}(M)$ 中的 $C^\ell$元素。因此， $G := \mathrm{Diff}_{C^1}(M)$ 满足 $(G^k)^\ell = G^{k+\ell}$，即定理 3.4.(d) 中等号成立。

对于任意 $\ell \geq k$， $G^k$ 的坐标图限制为 $G^\ell$ 的坐标图。这表明交集 $G^\infty = \bigcap_k G^k$ 是一种类似于 Omori [59] 意义下的巴拿赫逆极限（ILB）流形。

3.6 定义。ILB 流形。ILB 流形是一个以 Fr´echetspace $E$ 为模型的流形 $M$，并具有以下性质：

(a) $E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E^k$ 是巴拿赫空间链 $E^k$ 的逆极限，其中对每个 $k \in \mathbb{N}$， $E^{k+1}$都连续嵌入于 $E^k$。(b) 存在一个由 $\alpha \in A$ 索引的集合，包括覆盖 $M$ 的开集 $U_\alpha$、 $E^0$ 中的开集 $V_\alpha$，以及同胚 $u_\alpha\colon U_\alpha \to E \cap V_\alpha$。(c) 对任意满足 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 的 $\alpha, \beta \in A$，存在 $E^0$ 中的开子集 $V_{\alpha\beta}$ 和 $V_{\beta\alpha}$，使得 $u_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) = V_{\alpha\beta} \cap E$, $u_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) = V_{\beta\alpha} \cap E$，且 $u_\alpha^{-1} \circ u_\beta\colon V_{\beta\alpha} \cap E \to V_{\alpha\beta} \cap E$ 可延拓为光滑映射 $V_{\beta\alpha} \cap E^k \to V_{\alpha\beta} \cap E^k$，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

与此定义相比，Omori [59] 还要求 $E^{k+1}$ 在 $E^k$中稠密。这在当前的一般情形下并不成立。事实上，存在 $G^1 = \{e\}$ 是平凡的 [58]这样的例子。此外，Omori 对 ILB 李群 [59, 的定义 III.3.1] 中的其他性质也可能不成立。尽管如此，以下结论仍然成立：

3.7 引理。半李群中的光滑元素。对于任意带有右不变局部加法的巴拿赫半李群$G$，其中光滑元素 $G^\infty = \cap_{k\in\mathbb{N}} G^k$ 的集合 $G$ 是一个 ILB 流形和一个李群。

该引理将在第10节末尾证明，证明中将明确构造 $G^k$的流形坐标图。

最后，我们考察半李群的李代数。李代数这一术语多少有些误导性，因为李括号并非处处有定义，下一部分将对此作出说明。

3.8 引理。半李群上的李括号。设 $G$ 是一个带有右不变局部加法的巴拿赫半李群。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，李括号

$$[\cdot,\cdot] : T_eG^{k+1} \times T_eG^{k+1} \to T_eG^k$$

可通过以下三种等价方式良好定义：

(a) 任意向量 $X, Y \in T_eG^{k+1}$ 都唯一延拓为 $G^k$上的右不变 $C^1$ 向量场$R_X, R_Y$，且 $[X,Y] := dR_Y(e)(X) - dR_X(e)(Y)$，其中右端是在 $e \in G^k$附近的坐标图中解释的。

(b) 在 $e \in G^k$ 附近定义的光滑实值函数上的导子 $f \mapsto (R_XR_Yf - R_YR_Xf)(e)$，是沿着 $T_eG^k$中某个向量的方向导数，记作 $[X,Y]$。(c) 向量场 $R_X$ 具有一个 $C^1$ 流 $\mathrm{Fl}^{R_X}$：$\mathbb{R} \times G^k \to G^k$，因此导数 $[X,Y] := -\partial_t|_0 (\mathrm{Fl}_t^{R_X})^* R_Y(e) \in T_eG^k$ 存在。

证明。(a) 根据定理 3.4.(d)， $T_eG^{k+1}$ 包含在 $T_e(G^k)^1$, 中；根据定理 3.4.(b)，$R_X$、 $R_Y$是 $G^k$上的右不变 $C^1$ 向量场。特别地，表达式 $dR_Y(e)(X)$–$dR_X(e)(Y)$在 $e \in G^k$附近的坐标图中定义良好。该定义与所选坐标图无关，因此确定了唯一的元素 $[X,Y] \in T_eG^k$。

(b) (a) 中定义的切向量 $[X,Y] \in T_eG^k$ 作用于函数 $f$时，等同于微分 $f \mapsto R_XR_Yf - R_YR_Xf(e)$。因此，(a) 和 (b) 中的定义是一致的。

(c) 根据 (a)，向量场 $R_X$ 在 $G^k$ 上是右不变的 $C^1$。它具有一个全局流 $C^1$ $\mathrm{Fl}^{R_X}\colon \mathbb{R}\times G^k\to G^k$。流 $T\mathrm{Fl}^{R_X}_t\colon TG^k\to TG^k$ 在 0 处可微 $t$，因为根据 10.5，其速度场 $TX$ 是 Lipschitz 的。因此，表达式

$$(\mathrm{Fl}^{R_X}_t)^* R_Y(e) = T(\mathrm{Fl}^{R_X}_{-t})\circ R_Y\circ \mathrm{Fl}^{R_X}_t$$

在 $t$ 处可微，且我们已证明 (c) 中的 $[X,Y]$ 定义良好。根据一个众所周知的论证，该定义与 (b) 中的定义一致 [42, 引理 32.15]: 对于在 $e\in G^k$ 附近定义的任意光滑函数 $f$，以及充分小的 $s$、 $t\in\mathbb{R}$，定义

$$\alpha(t,s) = R_Y(f\circ \mathrm{Fl}^{R_X}_{-s})(\mathrm{Fl}^{R_X}_t(e)).$$

于是， $\partial_u\alpha(u,u) = [X,Y]f$ 在 (b) 的意义下成立，因为

$$\alpha(t,0) = R_Y(f)(\mathrm{Fl}^{R_X}_t(e)),\qquad \alpha(0,s) = R_Y(f\circ \mathrm{Fl}^{R_X}_{-s})(e),$$
$$\partial_t\alpha(0,0) = R_X R_Y f(e),\qquad \partial_s\alpha(0,0) = -R_Y R_X f(e).$$

此外， $\partial_u|_0\alpha(u,u) = [X,Y]f$ 在 (c) 的意义下也成立，因为

$$\alpha(u,u) = (T\,\mathrm{Fl}^{R_X}_{-u}\,R_Y)(f)(\mathrm{Fl}^{R_X}_u(e)) = ((\mathrm{Fl}^{R_X}_u)^* R_Y)(f)(e).$$

因此，(b) 和 (c) 中的定义一致。 □

## 4. Regularity of half-Lie groups

4.1 定义。正则半李群。设 $G$ 是一个 Banach右半李群，且 $\mathcal{F}$ 是 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},T_eG)$ 的子集。那么，如果对所有 $X\in\mathcal{F}$，都存在微分方程的唯一解 $g\in W^{1,1\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R},G)$[1]，则称 $G$ 是 $\mathcal{F}$-正则的

$$\partial_t g(t) = T_e\mu^{g(t)}X(t),\qquad g(0)=e.$$

此解称为 $X$ 的演化，记作 Evol($X$)，其在 $t=1$ 处的取值记作 evol($X$)。在特殊情形 $\mathcal{F}=C^\infty(\mathbb{R},T_eG)$ 下，我们将简称 $G$ 的正则性。

每个巴拿赫李群 $G$，尤其是每个有限维李群，都是正则的。事实上，时变右不变向量场

$$R_X:\mathbb{R}\times G\ni(t,x)\mapsto T_e\mu^x(X(t))\in T_xG$$

是光滑的，因此其积分曲线对所有时间都存在且唯一，而 $X$ 的演化就是从单位元出发的 $R_X$ 的积分曲线。对于半李群 $G$，情况更为微妙，因为即使 $X$ 是光滑的， $R_X$ 也可能不是光滑的。然而，如果 $X$ 的取值落在 $T_eG^k$ 中，那么 $R_X$ 就是 $G$ 上的时变 $C^k$ 向量场。以下定理利用这一点证明，对于任意 $k\geq 1$， $G^k$ 都是正则的。

4.2 定理。 $G^k$的正则性。设 $G$是一个带有右不变局部加法的巴拿赫右半李群。那么，对于任意 $k\in\mathbb{N}_{\geq 1}\cup\infty$， $G^k$ 都是正则的。

证明。我们用上标 $G$ 表示关于$G$的右作用的不变性。令 $X\in C^\infty(\mathbb{R},T_eG^k)$，其中 $k\in\mathbb{N}_{\geq 1}$。于是， $X$ 唯一地延拓为一个依赖时间的右不变 $C^k$向量场 $R_X\in C^\infty(\mathbb{R},\mathfrak{X}_{C^k}(G)^G)$。因此， $R_X$存在全局流 $\mathrm{Fl}^{R_X}\colon\ \mathbb{R}\times G\ \to\ G$。由于 $R_X$ 是右不变的，且 $C^k$，可知对每个 $t\in$

[1]空间 $W^{1,\ 1\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R},G)$由所有满足 $g$和 $g'\in L^1_{\mathrm{loc}}$的 $g$组成。

$\mathbb{R}$，$\mathrm{Fl}_t^{R_X}$是右不变的，且 $C^k$。曲线 $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{Fl}_t^{R_X} \in \mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$ 可微。为此，可按照引理 10.8 所述，在 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$ 的一个坐标图中进行局部分析，将流方程改写为积分形式，并利用引理 9.9.(d) 验证被积函数是一个关于时间连续且取值于函数空间$C^k(G, G)$的函数，进而得出积分方程左端在 $C^k(G,G)$中连续可微。因此， $R_X$ 在 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$ 中的演化存在，且由 $\mathrm{Fl}^{R_X}$给出。利用定理 3.4 的证明中所述的微分同胚 $\mathrm{ev}_e \colon \mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G \to G^k$，可得 $X$ 在 $G^k$ 中的演化存在，且由 $\mathrm{Fl}^{R_X}(e)$给出。□

## 5. Extensions

本节研究右半李群范畴中的扩张理论，其中态射定义为光滑群同态。对于李群，（上同调）扩张理论已由 O. Schreier [62, 63], R. Baer [7], S. Eilenberg 和 S. MacLane [22], G. Hochschild [34, 35], 以及 G. Hochschild 和 J.-P Serre [36]建立。Neeb [55, 56, 57]将这一理论推广到了无限维李群。关于（有限维）李群的这一理论的全面论述可参见 [51, 第 15.11–15.27], 节；我们将以此为依据，但会把所有内容改写为右作用，因为右作用更适合我们的目的。我们不再进一步将扩张理论推至其上同调描述；这可以仿照 Neeb [57], 通过考察适当的局部 $C^0$, $\infty$-余循环来完成。

5.1 定义。光滑扩张。设 $N$ 和 $G$ 是右半李群。若存在如下由光滑群同态构成的短正合列，则称右半李群 $E$ 是 $G$ 在 $N$ 上的扩张：

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ p\ } G \longrightarrow e\ .$$

若扩张满足以下条件，则称其具有：

(a) 局部截面：若 $p$ 在 $e$ 附近（等价地，在任意点附近）存在局部光滑截面 $s$，且 $i$ 是始 [42,截面 27.11]。 (b) 局部回缩：若 $i$ 在 $e$ 附近（等价地，在任意点附近）存在局部光滑回缩 $r$，且 $p$ 是终 [42,截面 27.15]。

若 (a) 和 (b) 均成立，则称该扩张为光滑扩张。

若 $E$ 是李群，则条件 (a) 和 (b) 等价，因为$s(p(x)).i(r(x)) = x \in E$。它们推出 $E$ 通过 $(r, p)$ 与 $N \times G$ 局部微分同胚，其局部逆为 $(i \circ \mathrm{pr}_1)\cdot(s \circ \mathrm{pr}_2)$。在条件 (a) 和 (b) 下， $E$ 通过 $(r, p)$ 与 $N \times G$ 局部微分同胚，其局部逆为 $(i \circ \mathrm{pr}_1)\cdot(s \circ \mathrm{pr}_2)$。并非每个由李群构成的光滑正合列都具有上述所要求的局部截面。例如，设 $N$ 是便利向量空间 $E$ 中的一个闭线性子空间，且不是直和项，并设 $G$ 是 $E/N$。那么，局部光滑分裂在 0 处的切映射会使 $N$ 成为直和项。

对于李群的扩张，由 $E$ 中元素给出的共轭在 $N$ 上自动是光滑的。在半李群的扩张中，情况可能并非如此，因此我们作出如下定义：

5.2 定义。光滑共轭。若半李群的扩张 $e \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to e$ 满足：对于任意 $x \in E$，共轭 $n \mapsto x\,i(n)\,x^{-1}$ 在 $N$ 上诱导出光滑自同构，则称该扩张具有光滑共轭。

5.3 定义。等价扩张。若存在连续（微分同胚）同构 $\varphi$，使其与图表中的映射相容，则称两个扩张在拓扑上（光滑地）等价

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & G & \longrightarrow & e \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \| & & \\ e & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & G & \longrightarrow & e. \end{array}$$

注意，若同态 $\varphi$ 存在，则它是一个同构。我们首先考虑分裂扩张这一重要特例。

5.4 定义。分裂扩张。若存在光滑群同态 $s\colon G \to E$，且它是 $p$ 的一个截面，则称此扩张为分裂扩张。

一个看似较弱的条件是，截面 $s$ 是群同态，且在 $e$ 附近光滑；此时 $s$ 会自动在整个 $G$ 上光滑。根据以下引理，分裂扩张等价于半直积。

5.5 引理。分裂扩张与半直积。考虑一个具有光滑共轭的半李群扩张 $e \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to e$。

(a) 任意光滑群同态 $s$，若其为 $p$ 的截面，则确定一个连续右作用 $\rho\colon N \times G \to N$，且对所有 $x \in G$，$n \mapsto \rho(n,x)$ 都是光滑的，具体如下：

$$\rho : N \times G \to N, \qquad i\rho(m,x) = s(x^{-1}).i(m).s(x)$$

(b) 任意此类右作用 $\rho$ 都定义一个半李群和半直积 $G \ltimes N$，它是乘积流形 $G \times N$，其群运算为

$$(x,m).(y,n) = (xy, \rho(m,y)n), \qquad (x,m)^{-1} = (x^{-1}, \rho(m^{-1}, x^{-1}))$$

(c) 扩张 $E$ 在拓扑上等价于光滑分裂扩张

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{(e,\mathrm{Id}_N)} G \ltimes N \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} G \longrightarrow e$$

通过连续同构 $G \ltimes N \ni (x,n) \mapsto s(x).i(n) \in E$。

请注意，这意味着每个半直积都是一个光滑（分裂）扩张 .

证明。(a) 容易验证 $\rho$ 是一个右作用；所声称的连续性和光滑性则由定义 5.1 的条件 (a)–(b) 以及共轭的光滑性得出。

(b) 容易验证，群运算是良定义的，而连续性和光滑性则由 $\rho$ 的相应性质推出。

(c) 容易验证，$G \ltimes N$ 是 $N$ 上的 $G$ 的光滑扩张，其中群同态由 $s(x) = (x,e)$ 给出，而 $\mathrm{pr}_N\colon G \ltimes N \to N$ 起到定义 5.3 所要求的局部光滑缩回的作用。扩张的等价由连续同构 $G \ltimes N \ni (x,n) \mapsto s(x).i(n) \in E$ 描述；对于固定的 $n$，它关于 $x$ 是光滑的；对于固定的 $x$，它关于 $n$ 也是光滑的，因为 $n \mapsto (\rho(n, x^{-1})).s(x) =$

$s(x).i(n)$是光滑的。因此， $G \ltimes N \ni (x,n) \mapsto s(x).i(n) \in E$ 分别光滑且是群同态，但我们不知道它是否光滑。它有连续逆$(p,r)$： $E \to G \times N$，其中 $r$： $E \to N$由 $i(r(x)) = s(p(x)^{-1}).x$给出。□

以下定理明确刻画了半直积中的可微元素。据我们所知，对于一般的分裂扩张，并无相应的刻画，因为它们与半直积在拓扑上等价，但并非光滑等价。

5.6 定理. 半直积中的可微元素. 考虑巴拿赫半李群的半直积

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \ltimes N \xrightarrow{p} G \longrightarrow e,$$

对于某个右作用 $\rho$ ，如引理 5.5 中所述，且具有右不变局部加法，其中$i = (e, \mathrm{Id}_N)$ 且 $p = \mathrm{pr}_1$。那么，对于任意 $k \in \mathbb{N}$， $G \ltimes N$中 $C^k$元素的集合是巴拿赫半李群的半直积

$$e \longrightarrow N^{k,\rho} \xrightarrow{i} (G \ltimes N)^k = G^k \ltimes N^{k,\rho} \xrightarrow{p} G^k \longrightarrow e,$$

其中

$$N^{k,\rho} := i^{-1}\big((G \ltimes N)^k\big) = \Big\{ m \in N^k : \rho(m,y)n \text{ is } C^k \text{ in } (y,n) \in G \ltimes N \Big\} \subseteq N^k.$$

请注意，定理 5.6 中的弗雷歇可微性不能像 [58] 中那样替换为盖托可微性。事实上，对盖托-$C^k$ 元素的作用是不连续的[58, 命题 9.7]。因此，半直积中的乘法不连续，这与半李群的定义相矛盾。

证明。容易验证，$(G \ltimes N)^k = G^k \ltimes N^{k,\rho}$ 作为集合成立。回顾定理 3.4， $G^k$ 是一个带有右不变局部加法的巴拿赫右半李群，$(G \ltimes N)^k$也是如此。因此，投影 $p$： $G^k \times N^{k,\rho} \to G^k$是巴拿赫流形之间的分裂淹没，即 $p$在每一点处的微分都是满射，且其核由 $G^k$的切空间补足。由隐函数定理， [45,命题 II.2.2] $(G \ltimes N)^k$局部微分同胚于乘积流形 $N^{k,\rho} \times G^k$，其中 $N^{k,\rho} = p^{-1}(e)$上存在唯一确定的巴拿赫流形结构。此外，映射 $i$ 和 $p$ 是光滑的，并分别具有光滑局部截面和局部回缩。□

可微元素在表示论中得到了广泛研究。经典情况下，人们考虑有限维李群 $G$ 在无限维向量空间 $N$ 上的表示。此时， $N$ 中的可微元素可以用李代数来刻画，构成一个稠密子空间，并带有自然拓扑，即由 $C^k(G,N)$ [32, 50, 28] 诱导的拓扑。对于无限维李群，会出现若干问题：可微性有几种不同的概念，可微元素的集合可能是平凡的，而且似乎不存在 $C^k(G,N)$[58] 上“良好”的拓扑。例如， $C^k(G,N)$ 上的光滑紧开拓扑过于粗糙，无法确保作用 [58] 的连续性。作为定理5.6的推论，我们对这些问题的解决方案基于以下两点观察：首先，只需

考虑 $C^k(G,N)$ 中 $G$-不变函数构成的子空间；其次，当该子空间赋予 Fr´echet-$C^k$ 拓扑时，作用便成为连续的。

5.7 推论。群表示。设 $\ell\colon G\to L(N)$ 是巴拿赫半李群 $G$ 在巴拿赫空间 $N$ 上的一个表示，且 $\ell\colon G\times N\to N$ 连续。那么，所有满足 $g\mapsto \ell(g^{-1})n$ 正则的 $n\in N$ 所构成的集合是一个巴拿赫空间，其范数由映射 $g\mapsto \ell(g^{-1})n\in N$ 在 $e\in G$ 处的 $k$-喷流的范数诱导。

证明。定义如下，可得到一个满足定理5.6条件的右作用：

$$\rho: N\times G\to N,\qquad \rho(n,g)=\ell(g^{-1})(n).$$

于是，$N^{k,\rho}$ 是一个巴拿赫流形，并且

$$\begin{aligned}N^{k,\rho}&=\Big\{n\in N^k:\rho(n,g')n' \text{ is } C^k \text{ in } (n',g')\in N\times G\Big\}\\&=\Big\{n\in N^k:\ell(g^{-1})n \text{ is } C^k \text{ in } g\in G\Big\}\\&=\Big\{n\in N^k:\ell(g)n \text{ is } C^k \text{ in } g\in G\Big\}\quad \text{if } G \text{ is a Lie group.}\end{aligned}$$ □

5.8 注。描述一般的扩张。一般而言，不存在连续截面 $s: G\to E$。事实上，扩张特别是一个拓扑主 $N$-丛 $E\to G$，因此，连续截面 $s$ 的存在将意味着该丛拓扑平凡。如果扩张具有5.1 (a) 中所述的局部截面，那么存在一个不连续截面 $s: G\to E$，满足 $s(e)=e$，且它在一个开 $e$-邻域 $U\subseteq G$ 上光滑。不失一般性，得益于 $G$ 是拓扑群，$s$ 在 $U^{-1}$ 和 $U.U$ 上也光滑。截面 $s$ 诱导出映射

$$\begin{aligned}&\alpha: G\to \mathrm{Aut}(N), && \alpha^x(n)=s(x)^{-1}ns(x),\\&f: G\times G\to N, && f(x,y)=s(xy)^{-1}s(x)s(y).\end{aligned}\tag{1}$$

假设共轭满足定义 5.2 意义下的光滑性，则 $\alpha$ 的取值属于群 Aut($N$)，即 $N$的光滑群自同构群。此外，乘法的结合律蕴含 $\alpha$ 和 $f$具有以下性质：

$$\begin{aligned}\alpha^x\circ\alpha^y&=\mathrm{conj}_{f(x,y)^{-1}}\circ\alpha^{yx},\\f(e,e)&=f(x,e)=f(e,y)=e,\\e&=f(xy,z)^{-1}f(x,yz)f(y,z)\alpha^z(f(x,y)^{-1}).\end{aligned}\tag{2}$$

注意，(2) 中的第一个性质意味着 $\alpha$ 诱导出一个群反同态 $\bar\alpha: G\to \mathrm{Aut}(N)/\mathrm{Int}(N)$，其中 Int($N$) 是 Aut($N$) 中所有内自同构构成的正规子群。用 $(\alpha,f)$ 表示时，$E$上的群结构由下式给出

$$\begin{aligned}s(x)m.s(y)n&=s(x)s(y)s(y)^{-1}ms(y)n=s(xy)f(x,y)\alpha^y(m)n,\\(s(x)m)^{-1}&=s(x^{-1})\alpha^{x^{-1}}(m^{-1})f(x,x^{-1})^{-1}\end{aligned}\tag{3}$$

由于 $E$是一个右半李群，这意味着 $(x,m)\mapsto f(x,y)\alpha^y(m)n\in N$在 $(e,e)$ 附近是光滑的。由于 $m\mapsto\alpha^y(m)$ 是光滑的，我们得出结论：若 $N$ 是李群，则 $x\mapsto f(x,y)$ 在 $U$上是光滑的，后文将作此假设。

由此，我们给出如下定义：

5.9 定义。扩张数据。半李群 $G$ 和李群 $N$ 的扩张数据是

(a) 一对映射 $\alpha\colon G\to \mathrm{Aut}(N)$ 和 $f\colon G\times G\to N$，满足 (2) 中列出的性质；(b) 存在 $e\in G$ 的一个开邻域 $U$，使得 $\alpha\colon U\times N\to N$ 是光滑的，$f\colon U\times U\to N$ 是连续的，并且对于每个固定的 $y\in U$，$x\mapsto f(x,y)$ 在 $U$ 上是光滑的。

采用这一记号，我们得到光滑扩张的如下刻画：

5.10 定理。光滑扩张。设 $e\to N\xrightarrow{i} E\xrightarrow{p} G\to e$ 是半李群的一个扩张，它具有定义 5.1 (a) 中的局部截面以及定义 5.2 中的光滑共轭。此外，假设 $N$ 是一个李群。

(a) 任意截面（可能不连续）$s\colon G\to E$ of $p$，若满足 $s(e)=e$，且在 $e$ 的某个邻域上光滑，则通过 (1) 定义一个扩张数据 $(\alpha,f)$。(b) 任意扩张数据 $(\alpha,f)$ 定义一个半李群 $E(\alpha,f)$，其底层集合为乘积 $G\times N$，并赋予群运算

$$(x,m).(y,n)=(xy,f(x,y)\alpha^{y}(m)n),$$
$$(x,m)^{-1}=(x^{-1},\alpha^{x^{-1}}(m^{-1})f(x,x^{-1})^{-1}),$$

并通过从 $U\times N$ 右平移扩展流形结构，其中 $U$ 如定义 5.9 所述。

(c) 扩张 $E$ 与光滑扩张拓扑等价

$$e\longrightarrow N\xrightarrow{(e,\mathrm{Id}_N)}E(\alpha,f)\xrightarrow{\mathrm{pr}_1}G\longrightarrow e.$$

(d) 若存在映射 $b:G\to N$（在 $e$ 附近光滑），使得……，则数据 $(\alpha,f)$ 和 $(\alpha_1,f_1)$ 定义的光滑扩张等价

$$\alpha_1^{x}=\mathrm{conj}_{b(x)^{-1}}\circ\alpha^{x},$$
$$f_1(x,y)=b(xy)^{-1}f(x,y)\alpha^{y}(b(x))b(y).$$

对应扩张之间诱导的光滑同构 $E(\alpha,f)\to E(\alpha_1,f_1)$ 由 $(x,n)\mapsto(x,b(x)n)$ 给出。

关于扩张数据 $(\alpha,f)$ 的上同调解释的全面描述，请参见 [51, 第 15.11–15.27] 节，并作适当调整（将左作用改为右作用，并在 $e$ 附近采用适当放宽的光滑性假设）。请注意，对于分裂扩张，可以选择令 $\alpha=\rho$ 为右作用，且令 $f$ 为常值并等于 $e$，这可与引理 5.5 对照得出。

证明。(a) 已在备注 5.8 中证明。

(b) 我们进一步详细说明 $E(\alpha,f)$ 上的流形结构。令 $U:=\mathrm{pr}_1^{-1}(U)$，并赋予其来自 $U\times N$ 的拓扑结构和流形结构。根据假设，$\alpha\colon U\times N\to N$光滑，$f\colon U\times U\to N$ 连续，且 $x\mapsto f(x,y)$ 光滑。受公式 (3) 启发，$E(\alpha,f)$ 上的群乘法是连续的：对于所有满足 $V.W\subseteq U$ 的 $e$-邻域 $V,W\subset U$，有 $\mathrm{pr}_1^{-1}(V)\times\mathrm{pr}_1^{-1}(W)\to\tilde{U}$。同样，对于所有 $y\in\mathrm{pr}_1^{-1}(W)$，右平移均光滑：$\mu^{y}:\mathrm{pr}_1^{-1}(V)\to\tilde{U}$。接着，我们将以 $x\in E(\alpha,f)$ 为指标的坐标图 $(\tilde{U}.x,\mu^{x^{-1}}\colon \tilde{U}.x\to\tilde{U})$ 用作 $E(\alpha,f)$ 的图册。图册

变换为 $\mu^{y^{-1}} \circ \mu^x = \mu^{x.y^{-1}}$: $(\tilde{U}.x \cap \tilde{U}.y).x^{-1} = \tilde{U} \cap (\tilde{U}.y.x^{-1}) \to \tilde{U} \cap (\tilde{U}.x.y^{-1})$，因此它们是光滑的。由此得到的 $E(\alpha, f)$ 上的光滑流形结构具有如下性质：乘法和反演连续，且右平移光滑。此外， $E(\alpha, f)$ 是豪斯多夫的：要么 $\mathrm{pr}_1(x) = \mathrm{pr}_1(y)$，此时我们已经可以在一个坐标图 $x.\tilde{U} = \mathrm{pr}_1^{-1}(\mathrm{pr}_1(x).U)$ 中将它们分开；要么可以用形如 $\mathrm{pr}_1^{-1}(U_1)$ 和 $\mathrm{pr}_1^{-1}(U_2)$ 的开集将它们分开。这证明了 $E(\alpha, f)$ 确实是一个半李群。

(c) 投影 $\mathrm{pr}_1$： $E(\alpha, f) \to G$ 和包含映射 $(e, \mathrm{Id}_N)$： $N \to E(\alpha, f)$ 光滑，并且具有定义 5.1 所要求的光滑局部截面和回缩。因此， $E(\alpha, f)$ 是 $G$ 在 $N$ 上的光滑扩张。扩张的拓扑等价仍由映射 $E(\alpha, f) \ni (x, n) \mapsto s(x).i(n) \in E$ 给出，其中 $s$ 是一个在 $e$ 附近光滑的全局截面，它曾用于构造 5.8 中的扩张数据。通过比较 (3) 与 $E(\alpha, f)$ 中的乘法可知，这是一个群同构；由于 $s(x).i(n) = \alpha^{x^{-1}}(n).s(x)$，它在 $(e, e)$ 附近连续，并且对于固定的 $n$ ，关于 $x$ 分别光滑；对于固定的 $x$ ，关于 $n$ 分别光滑。我们不知道它一般是否光滑。

(d) 剩余的断言容易得出。 □

接下来，我们刻画由扩张数据描述的非分裂扩张中的可微元素。

定理 5.11. 扩张中的可微元素。考虑一个由定义 5.9 中的扩张数据 $(\alpha, f)$ 描述的光滑扩张：

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{i} E = E(\alpha, f) \xrightarrow{p} G \longrightarrow e,$$

其中 $i = (e, \mathrm{Id}_N)$ 且 $p = \mathrm{pr}_1$。假设 $N$、 $G$ 和 $E$ 是具有右不变局部加法的巴拿赫半李群， $N$ 是李群，且 $E$ 上的局部加法与 $i(N)$ 相容。令 $k \in \mathbb{N}$。那么， $E$ 中可微元素构成一个光滑扩张

$$e \longrightarrow i^{-1}(E^k) \xrightarrow{i} E^k \xrightarrow{p} E^k/(i(N) \cap E^k) \longrightarrow e,$$

其中所有空间都是具有右不变局部加法的巴拿赫半李群，并且 $E^k$ 上的局部加法与 $i(i^{-1}(E^k)) = i(N) \cap E^k$ 相容。此外，扩张 $E^k$ 由扩张数据 $(\alpha, f)$ 在上述空间上的限制描述，并且

$$i^{-1}(E^k) = N^{k,\alpha} = \{n \in N : \alpha(n, x) \text{ is } C^k \text{ in } x\}.$$

证明。我们考虑 $k \in \mathbb{N}_{>0}$ 的 $C^k$-元素子群 $E^k$ 。我们首先证明 $p$ 将 $E^k$ 映射到 $G^k$ ，并且 $i^{-1}(E^k) \subseteq N^k$。因此，令 $x \in E^k$，于是 $\mu_x : E \to E$ 是 $C^k$。接着 $p \circ \mu_x = \mu_{p(x)} \circ p$： $E \to G$ 是 $C^k$ ，并且由于 $p$ 是终的， $\mu_{p(x)}$： $G \to G$ 是 $C^k$。因此 $p(x) \in G^k$。若 $n \in i^{-1}(E^k) \subset N$，即 $i(n) \in E^k \cap i(N)$，那么 $i \circ \mu_n = \mu_{i(n)} \circ i$： $N \to E$ 是 $C^k$ ，并且由于 $i$ 是始的， $\mu_n$： $N \to N$ 是 $C^k$。因此 $i^{-1}(E^k) \subseteq N^k$。

接下来我们将证明

$$i^{-1}(E^k) = N^{k,\alpha} = \{m \in N : \alpha(m, \cdot) : G \to N \text{ is } C^k \text{ near } e \in G\}$$
$$E^k/(i(N) \cap E^k) \subseteq G^{k,f} = \{x \in G^k : f(x, \cdot) : G \to N \text{ is } C^k \text{ near } e \in G\}.$$

注意，一般来说， $G^{k,\ f}$ 似乎不是一个群。

也就是说，根据扩张数据（$\alpha, f$），在（$e, e$）附近，扩张与 $U^N \times U^G$ 微分同胚；又由于 $N$ 是一个李群，

$$\begin{aligned} i(i^{-1}(E^k)) &= (\{e\} \times N) \cap E^k \\ &= \{(e,m) : (e,m)(y,n) = (y, f(e,y)\alpha(m,y)n) = (y, \alpha^y(m)n) \text{ is } C^k \text{ in } (y,n)\} \\ &= \{m \in N : \alpha(m,\cdot) : G \to N \text{ is } C^k\}. \end{aligned}$$

由于左平移与所有右平移可交换，因此它正则当且仅当它在单位元附近正则。

对于第二个断言，我们再次考察单位元附近的乘法：由于

$$(x,m).(y,n) = (xy, f(x,y)\alpha(m,y)n) \text{ is } C^k \text{ in } (y,n)$$

由此可得 $x \in G^k$，并且 $f(x,y)\alpha(m,y)n$ 在 $(y,n)$ 中是取值于李群 $N$ 的 $C^k$。因此 $y \mapsto f(x,y)\alpha(m,y)$ 是 $C^k$，又由于我们已知 $\alpha(m,\cdot) : G \to N$ 是 $C^k$，所以得出 $f(x,\cdot) : G \to N$ 是 $C^k$。

接下来，我们借助引理 10.5 中的微分同胚 $E^k \xrightarrow{x \mapsto \mu_x} \mathrm{Diff}^k(E)^E$，研究子群 $i(N) \cap E^k$。我们旨在证明

$$\begin{aligned} i(N) \cap E^k &= \{\varphi \in \mathrm{Diff}^k(E)^E : \varphi(i(N)) = i(N)\} \\ &= \{\varphi \in \mathrm{Diff}^k(E)^E : T_e\varphi(T_e(i(N))) \subseteq Ti(N)\}. \end{aligned}$$

为此，设 $c : \mathbb{R} \to i(N)$ 是一条光滑曲线，则 $\partial_t(\varphi(c(t))) = T\varphi.c'(t) \in Ti(N)$ 当且仅当 $Ti(N) \ni T\mu^{c(t)^{-1}}.T\varphi.c'(t) = T_e\varphi.T\mu^{c(t)^{-1}}.c'(t)$，这是由 $\varphi$ 的右不变性得到的。因此 $\partial_t(p \circ \varphi \circ c)(t) = 0$，且 $\varphi$ 将 $i(N)$ 映射到 $i(N)$。其余部分显而易见。

因此，我们证明了 $i(N) \cap E^k$ 在 $\mathrm{Id}_E$ 附近局部微分同胚于 $E$ 上所有与 $i(N)$相切的右不变 $C^k$向量场所构成空间中的一个开集，该局部微分同胚由一个保持 $i(N)$ 的右不变局部加法 $\tau^E$ 所诱导的坐标图给出。此空间是引理 10.5 中巴拿赫空间 $\mathfrak{X}_{C^k}(E)^E$ 的闭线性子空间；其补空间是由所有满足 $X(e)$ 与 $T_e s$ 相切的 $X \in \mathfrak{X}_{C^k}(E)^E$ 构成的闭线性子空间：$T_eG \to T_eE$ 其中 $s$ 是 $p$ 的一个截面，且在 $e$附近光滑。因此，对于两个因子上唯一确定的可微结构，$E^k$ 局部微分同胚于乘积流形 $N^{k,\,\alpha} \times E^k/N^{k,\,\alpha}$。特别地，定义 5.1 中的条件成立。

由定理 3.4，右不变局部加法 $\tau : TE \supseteq V \to E$ 在 $TE^k \cap V \to E^k$ 上光滑映射，且 $Ti(N) \cap V \to i(N)$，因此 $T(i(N \cap E^k)) \cap V \to i(N) \cap E^k$ 也光滑。因此，诱导的局部加法 $\tau : TE^k \cap V \to E^k$ 保持正规子群 $i(N) \cap E^k$。由于它在 $E^k$ 上光滑，故在 $i^{-1}(E^k)$ 和商空间 $E^k/N^{k,\,\alpha}$ 上诱导出局部加法。□

上述定理假设存在一个保持$i(N)$的右不变局部加法。这意味着，相对于第8节中描述的诱导线性联络，$i(N)$在 $E$中是全测地的。列出下面的结果只是为了说明，如何在一般扩张上构造这样的右不变局部加法有多么困难。

5.12 命题。与子群相容的局部加法。考虑半李群的一个光滑扩张 $e \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to e$，其中 $N$ 是一个李群。设 $\tau^E : TE \supset V \to E$ 是一个局部右不变加法，且与 $i(N)$ 相容。

那么， $\tau^E$ 诱导出右不变局部加法 $\tau^N$: $TN \supset i^{-1}(V) \to N$ 和 $\tau^G$:$TG \supset p(V) \to G$，满足 $p \circ \tau^E = \tau^G \circ Tp$ 和 $i \circ \tau^N = \tau^N \circ Ti$，并且与扩张数据 $(\alpha, f)$ 的关系如下:

$$f(\tau^G(X_x), y)\alpha^y(\tau^N(Y_m)) = \tau^N(T\mu^{\alpha^y(m)}.T_x f(\cdot, y).X_x + T\mu_{f(x,y)}.T_m\alpha^y.Y_m)\,.$$

注意特殊情形 $f(\tau^G(X_x)\ y) = \tau^N(T_x f(\cdot, y).X_x)$。

证明。一般而言，半李群的切丛不是一个群，因为我们无法对乘法 $\mu$ 求微分。不过，我们得到了一列向量丛，它们带有底空间半李群的右作用

(4)
$$\begin{array}{ccccccccc} & & TN & \xrightarrow{Ti} & TE & \xrightarrow{Tp} & TG & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_G} & & \\ e & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & G & \longrightarrow & e \end{array}$$

该序列在纤维意义下是正合的，即 $T_z p : T_z E \to T_{p(z)}G$ 是满射，其核为 $\ker(T_z p) = T\mu^z(T_e i(T_e N))$；而 $T_n i : T_n N \to T_{i(n)}E$ 是单射，且对所有 $z \in E$ 和 $n \in N$，均有 $\mathrm{im}(T_n i) = \ker(T_{i(n)}p)$。用扩张数据 $(\alpha, f)$ 表示，在单位元附近对 $E$ 上的右平移求微分，其中 $E$ 局部看起来像 $(G \times N)$，我们得到

(5)
$$(x, m).(y, n) = (xy, f(x, y)\alpha^y(m)n)$$
$$T_{(x,m)}\mu^{(y,n)}(X_x, Y_m) = \left(T_x\mu^y.X_x, T\mu^{\alpha^y(m)n}.T_x f(\cdot, y).X_x + T\mu_{f(x,y)}.T\mu^n.T_m\alpha^y.Y_m\right).$$

给定 $\tau^E$，根据假设可得 $\tau^N$，由 (4) 可得 $\tau^G$，因此在 $(e, e)$ 附近有 $\tau^E(X_x, Y_m) = (\tau^G(X_x)\ \tau^N_m(Y, m))$。由于 $\tau^E$ 是右不变的，

$$\begin{aligned} \tau^E\left(T_{(x,m)}\mu^{(y,n)}(X_x, Y_m)\right) &= \mu^{(y,n)}\tau^E(X_x, Y_n) = (\tau^G(X_x), \tau^N(Y_m))(y, n) \\ &= \left(\tau^G(X_x).y, f(\tau^G(X_x), y)\alpha^y(\tau^N(Y_m)).n\right) \end{aligned}$$

另一方面，利用 (5) 可得

$$\begin{aligned} &\tau^E\left(T_{(x,m)}\mu^{(y,n)}(X_x, Y_m)\right) \\ &= \tau^E\left(T_x\mu^y.X_x, T\mu^{\alpha^y(m)n}.T_x f(\cdot, y).X_x + T\mu_{f(x,y)}.T\mu^n.T_m\alpha^y.Y_m\right) \\ &= \left(\tau^G(T_x\mu^y.X_x), \tau^N(T\mu^{\alpha^y(m)n}.T_x f(\cdot, y).X_x + T\mu_{f(x,y)}.T\mu^n.T_m\alpha^y.Y_m)\right) \end{aligned}$$

比较各部分，首先可见 $\tau^G$ 和 $\tau^N$ 是右不变的，如下所示:

$$\begin{aligned} \tau^G(X_x).y &= \tau^G(T_x\mu^y.X_x), \text{ so } \tau^G \text{ is right invariant, and} \\ f(\tau^G(X_x), y)\alpha^y(\tau^N(Y_m)).n &= \tau^N(T\mu^{\alpha^y(m)n}.T_x f(\cdot, y).X_x + T\mu_{f(x,y)}.T\mu^n.T_m\alpha^y.Y_m) \\ \tau^N(Y_m).n &= \tau^N(T\mu^n.Y_m), \text{ by choosing } y = e \text{ above, and} \\ f(\tau^G(X_x), y).n &= \tau^N(T\mu^n.T_x f(\cdot, y).X_x) = \tau^N(T_x f(\cdot, y).X_x).n, \end{aligned}$$

其中在最后我们选择了 $m = e$ 和 $Y_m = 0_e$，并使用了 $\tau^N$ 的右不变性。 □

5.13. 中心扩张。若李群 $N$ 位于右半李群 $E$的中心，则扩张 $e \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to e$ 是中心扩张。用扩张数据 $(\alpha, f)$ 表示时，我们有 $\alpha^x = \mathrm{Id}_N$，并且 $f\colon\ G \times G \to N$在 $(e, e)$ 附近连续， $x \mapsto f(x, y)$ 在 $e$附近光滑；又由于 $N$ 是阿贝尔群，

$$f(e,e) = f(x,e) = f(e,y) = e, \quad f(y,z)f(xy,z)^{-1}f(x,yz)f(x,y)^{-1} = e;$$

即， $f$ 是一个规范化群余循环。于是，中心扩张就是定义在集合 $G \times N$ 上的半李群 $E$，其定义如下：

$$(x,m)(yn) = (xy, f(x,y)mn), \qquad (x,m)^{-1} = (x^{-1}, m^{-1}f(x,x^{-1})^{-1}),$$

拓扑和光滑结构通过右平移从 $(e, e)$ 的一个邻域延拓得到。 $E$ 中的 $C^k$-元集合于是构成由 $N$ 给出的中心扩张，该扩张由余循环 $f$ 限制到

$$G^{k,f} = \{x \in G^k : f(x,\cdot) : G \to N \text{ is } C^k \text{ near } e\},$$

在中心情形下，它是一个群。这里 $e \to N \xrightarrow{i} E^k \xrightarrow{p} G^k,\ ^f \to e$ 又是一个中心扩张。一个例子是 $\mathrm{Diff}_{H^s}(S^1)$ 或 $\mathrm{Diff}_{H^s}(\mathbb{R})$ 对 $S^1$ 或 $\mathbb{R}$ 的中心扩张，即维拉索罗-博特群的索博列夫版本。

## 6. 扩张示例

I在下文中，我们将介绍两个重要的扩张示例，即使在
the 正则李群的情形似乎是新的。

接下来，按照 [1] ，我们引入以下空间，它们将构成第一个扩张例子的构件。

6.1 定义。对于紧（为简单起见）黎曼流形 $M$ 上的光滑主丛 $q : P \to M$，其结构群 $G$ 为有限维群，并带有主右作用 $\rho\colon\ P \times G \to P$，令

$$\mathrm{Aut}_{C^k}(P) = \{f \in \mathrm{Diff}_{C^k}(P) : \rho^g \circ f = f \circ \rho^g \ \textit{for all}\ g \in G\},$$
$$\mathrm{Gau}_{C^k}(P) = \{f \in \mathrm{Aut}_{C^k}(P) : p(f) = \mathrm{Id}_M \in \mathrm{Diff}_{C^k}(M)\},$$

其中 $p\colon \mathrm{Aut}_{C^k}(P) \to \mathrm{Diff}_{C^k}(M)$ 定义为 $q \circ f = p(f) \circ q$。这是良定义的，因为 $q \circ f : P \to P \to M$ 在纤维上为常数，因此可以按上述方式分解。对于 $k = \infty$，我们也记 $\mathrm{Aut}(P) = \mathrm{Aut}_{C^\infty}(P)$ 和 $\mathrm{Gau}(P) = \mathrm{Gau}_{C^\infty}(P)$；对于$l > \dim(P)/2 + 1$，我们也将考虑 $H^l$ 版本 $\mathrm{Aut}_{H^l}(P)$ 和 $\mathrm{Gau}_{C^l}(P)$。

注意，映射 $p$ 是到 $\mathrm{Diff}(M)$ 的一个开正规子群上的群同态，我们将其记为 $\mathrm{Diff}^P(M)$。也就是说，$\mathrm{Diff}\ /\mathrm{Diff}^0$（其中 $\mathrm{Diff}^0$ 表示连通分支）对 $G$-主丛在$M$上的模空间的作用可能是非平凡的。注意，通过将 $P$替换为下文所有这些丛的不交并，可以将 $\mathrm{Diff}^P(M)$ 变成 $\mathrm{Diff}(M)$。此外，规范群 $\mathrm{Gau}(P)$ 同构于群 $C^\infty(P, (G, \mathrm{conj}))^G$，其中的光滑映射 $h\colon\ P \to G$ 是等变的，即满足 $h \circ \rho^g = \mathrm{conj}_g \circ h$；而该群又同构于伴随群丛 $P[G, \mathrm{conj}] \to M$ 的光滑截面空间$\Gamma(P[G, \mathrm{conj}])$；参见第 18.15] 节[51,。

6.2 定理。主丛的自同构群。在定义 6.1 的设定下，以下是正则李群的一个光滑扩张：

$$\{\mathrm{Id}_P\} \longrightarrow \mathrm{Gau}(P) \xrightarrow{i=\mathrm{incl}} \mathrm{Aut}(P) \xrightarrow{p} \mathrm{Diff}^P(M) \longrightarrow \{\mathrm{Id}_M\}$$

对于有限正则性映射的相应情形，我们得到允许具有定义 5.1 (a) 中局部截面及定义 5.2 中光滑共轭的半李群的扩张：

$$\{\mathrm{Id}_P\} \longrightarrow \mathrm{Gau}_{C^k}(P) \xrightarrow{i=\mathrm{incl}} \mathrm{Aut}_{C^k}(P) \xrightarrow{p} \mathrm{Diff}^P_{C^k}(M) \longrightarrow \{\mathrm{Id}_M\}$$

$$\{\mathrm{Id}_P\} \longrightarrow \mathrm{Gau}_{H^k}(P) \xrightarrow{i=\mathrm{incl}} \mathrm{Aut}_{H^k}(P) \xrightarrow{p} \mathrm{Diff}^P_{H^k}(M) \longrightarrow \{\mathrm{Id}_M\}$$

即使对于无限维结构群，光滑情形也在 [66] 中得到了讨论 .

证明。我们首先证明光滑范畴中的结果。Aut($P$) 和 Gau($P$) 是光滑流形及正则李群，这一点可用与定理 6.5 中较复杂情形的证明类似的方法证明。剩下要证明的是 $p$ 存在局部光滑截面，以及 $i$ 存在回缩。为此，我们在丛 $P \to M$ 上使用主联络 $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$，以及相应的水平提升映射 $C\colon P \times_M TM \to TP$，其定义为 $C(u,\cdot) := (T_u q|_{\ker \omega_u})^{-1}\colon T_{q(u)}M \to \ker\ \omega_u \subset T_uP$，并满足 $C(u.g, X_x) = T_u r^g.C(u, X_x)$，其中 $x = q(u)$ 且 $X_x \in T_xM$。注意，对于 $M$ 上的任意光滑向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$，其水平提升 $C(X) \in \mathfrak{X}(P)$ 由 $C(X)(u) = C(u, X(q(u)))$ 给出；它是水平的（即属于 $\omega$ 的核），并且在主右作用下不变，即 $(r^g)^* C(X) = X$。对于 $M$ 上的非自治向量场，这一点同样成立。

现在我们在 $M$ 上选取一个黎曼度量，并使用其指数映射 $\exp : TM \to M$，由此得到一个微分同胚 $TM \supseteq V \xrightarrow{\pi_M, \exp} U \subseteq M \times M$，它将 0 截面的一个开邻域 $V$ 映到对角线的一个开邻域 $U$。对于一个足够接近 $\mathrm{Id}_M$ 的微分同胚 $\varphi \in \mathrm{Diff}^P(M)$，使得对所有 $x \in M$ 都有 $(x, \varphi(x)) \in U$，我们考虑由 $\varphi_t(x) = \exp(t.(\pi_M, \exp)^{-1}(\varphi(x)))$ 给出的光滑曲线 $[0,1] \ni t \mapsto \varphi_t \in \mathrm{Diff}^P(M)$，它从 $\mathrm{Id}_M$ 到 $\varphi$；其右对数导数 $t \mapsto X_t$ 由 $X_t(\varphi_t^{-1}(x)) = \partial_t \varphi_t(x)$ 或 $X_t = (\partial_t \varphi_t) \circ \varphi_t^{-1}$ 给出。水平提升 $f = \mathrm{evol}(t \mapsto C(X_t))$ 的演化（截至时间 1 的积分曲线）于是给出一个 $G$-等变的光滑微分同胚，其定义于 $P$，并满足 $p(f) = \varphi$；它也光滑地依赖于 $\varphi$，因而给出了所需的光滑局部截面 $s$ of $p$。相应的光滑局部收缩 $r\colon \mathrm{Aut}(P) \to \mathrm{Gau}(P)$ 由 $i(r(f)) = f \circ s(p(f))^{-1}$ 给出。这证明了我们有一个光滑扩张。包含映射 $i : \mathrm{Gau}(P) \to \mathrm{Aut}(P)$ 是始的，因为 $i$ 是一个闭光滑子流形的嵌入。这可通过在定理 6.5 的证明中加入 $G$-等变性看出。

接下来，我们证明有限正则性空间情形下的结果。为说明 $\mathrm{Gau}_{C^k}(P) \cong \Gamma_{C^k}(P[G, \mathrm{conj}])$ 和 $\mathrm{Gau}_{H^k}(P) \cong \Gamma_{H^k}(P[G, \mathrm{conj}])$ 实际上是李群，我们注意到其群结构是逐点定义的：有限维群丛 $P[G, \mathrm{conj}] \to M$ 上光滑的逐纤维群乘法和求逆，通过从左侧复合的方式作用于 $C^k$-或 $H^k$-截面空间。

$\mathrm{Aut}_{C^k}(P)$ 中的共轭会在 $\Gamma_{C^k}(P[G, \mathrm{conj}])$ 上诱导出光滑自同构，$H^k$ 情形也类似：为此，我们使用光滑映射 $\tau\colon P \times_M P \to G$，该映射由 $u_x.\tau(u_x, v_x) = v_x$ 唯一确定，并满足 $\tau(u_x.g, v_x.g') = g^{-1}.\tau(u_x, v_x).g'$，且

$\tau(u_x, u_x) = e$，其中简记 $u_x.g = \rho^g(u_x)$；见 [51, 第 18.2 节和第 18.15] 节。对于 $f \in \mathrm{Aut}_{C^k}(P)$，若 $f(u_x) =: v_y$，且 $h \in \mathrm{Gau}_{C^k}(P)$，则有

$$\begin{aligned}(f \circ h \circ f^{-1})(v_y) = (f \circ h)(f^{-1}(v_y)) = f(h(u_x)) = f(u_x.\tau(u_x, h(u_x)))\\ = f(u_x).\tau(u_x, h(u_x)) = v_y.\tau(u_x, h(u_x))\end{aligned}$$

由于 $P \ni u_x \mapsto \tau(u_x, h(u_x))$ 是 $\mathrm{Gau}_{C^k}(P) \ni h$ 在 $C^k(P, (G, \mathrm{conj}))$ 中的代表元，由 [51, 第 18.15]，节，结论得证。

$p\colon \mathrm{Aut}_{C^k}(P) \to \mathrm{Diff}^P_{C^k}(M)$ 的局部光滑截面可以像在光滑范畴中那样构造，因为 $P$ 上光滑联络的水平提升是光滑的。此外，$i$ 也是始的，理由与光滑范畴中的相同。将 $C^k$ 换为 $H^k$ 时也同样成立。□

6.3 注。注意，若 $P$ 是紧的，则 $\mathrm{Aut}(P)$ 是 $\mathrm{Diff}(P)$ 的分裂光滑子流形，参见定理 6.5 的证明。此外，若主丛 $P \to M$ 存在平坦联络，则上述给出的 $s$ 构造在一个整体变换离散子群的作用下，给出光滑群同态。说明如下。对于平坦联络，水平丛是可积的，因此经过每一点 $u \in P$ 都存在一个水平叶 $L$，使得 $q|_L\colon L \to M$ 是覆盖映射。该覆盖映射的甲板变换经 $G$-等变延拓后，构成这个离散子群。若 $M$ 进一步是单连通的，则 $q : L \to M$ 是微分同胚，且 $s(\varphi)(u.g) = (q|_L)^{-1}(\varphi(p(u))).g$ 是光滑群同态。在此情形下，上述扩张化为直积。

接下来我们将研究一般纤维丛的情形。我们引入以下微分同胚空间；下文中，我们将只考虑所有微分同胚群的连通分支 $\mathrm{Diff}^0$。

6.4 定义。对于有限维紧纤维丛 $q\colon E \to M$，我们 $t$

$$\mathrm{Diff}^0_{C^k,\mathit{fiber}}(E) := \left\{f \in \mathrm{Diff}^0_{C^k}(E) : q \circ f = p(f) \circ q\right\},$$
$$\mathrm{Diff}^0_{C^k,\mathit{fiber}}(E)_{\mathrm{Id}_M} := \left\{f \in \mathrm{Diff}^0_{C^k,\mathit{fiber}}(E) : p(f) = \mathrm{Id}_M\right\}$$

其中 $p\colon \mathrm{Diff}^0_{C^k,\ \mathit{fiber}}(E) \to \mathrm{Diff}^0_{C^k}(M)$ 由定义关系 $q \circ f = p(f) \circ q$ 唯一确定。对于 $k = \infty$，我们也将记作 $\mathrm{Diff}^0_{C^\infty,\ \mathit{fiber}}(E) = \mathrm{Diff}^0_{\mathit{fiber}}(E)$ 和 $\mathrm{Diff}^0_{C^\infty,\ \mathit{fiber}}(E)_{\mathrm{Id}_M} = \mathrm{Diff}^0_{\mathit{fiber}}(E)_{\mathrm{Id}_M}$；对于 $l > \dim(P)/2 + 1$，我们还将考虑 $H^l$ 版本 $\mathrm{Diff}^0_{H^l,\ \mathit{fiber}}(E)$ 和 $\mathrm{Diff}^0_{H^l,\ \mathit{fiber}}(E)_{\mathrm{Id}_M}$。

接下来，$p$ 证明是一个满射群同态，这一点可以参照定理 6.2 的证明类似地得出。为简化叙述，我们假设纤维丛的全空间 $E$ 是紧的。经过更多技术处理，这些构造也适用于非紧的 $E$ 和 $M$（所有微分同胚都必须在无穷远处适当地趋于单位元）。

6.5 定理。紧纤维丛的保纤维微分同胚。在定义 6.4 的设定下，以下是李群的一个光滑扩张：

$$\{\mathrm{Id}_E\} \longrightarrow \mathrm{Diff}^0_{\mathit{fiber}}(E)_{\mathrm{Id}_M} \xrightarrow{i=\mathrm{incl}} \mathrm{Diff}^0_{\mathit{fiber}}(E) \xrightarrow{p} \mathrm{Diff}^0(M) \longrightarrow \{\mathrm{Id}_M\}$$

对于有限正则性映射的相应版本，我们得到具有局部截面的半李群扩张，如定义 5.1 (a) 所述:

$$\{\mathrm{Id}_E\} \longrightarrow \mathrm{Diff}^0_{C^k,fiber}(E)_{\mathrm{Id}_M} \xrightarrow{i=\mathrm{incl}} \mathrm{Diff}^0_{C^k,fiber}(E) \xrightarrow{p} \mathrm{Diff}^0_{C^k,}(M) \longrightarrow \{\mathrm{Id}_M\}$$

$$\{\mathrm{Id}_E\} \longrightarrow \mathrm{Diff}^0_{H^k,fiber}(E)_{\mathrm{Id}_M} \xrightarrow{i=\mathrm{incl}} \mathrm{Diff}^0_{H^k,fiber}(E) \xrightarrow{p} \mathrm{Diff}^0_{H^k,}(M) \longrightarrow \{\mathrm{Id}_M\}$$

与定理 6.2 相比，核 $\mathrm{Diff}^0_{C^k,\ fiber}(E)_{\mathrm{Id}_M}$ 和 $\mathrm{Diff}^0_{H^k,\ fiber}(E)_{\mathrm{Id}_M}$ 只是半李群，共轭也只是连续的。

证明。我们首先证明空间 $\mathrm{Diff}^0_{\mathrm{fiber}}(E)$ 是正则李群，也是 $\mathrm{Diff}^0(E)$ 的闭子群。因此，我们从 $C^\infty_{\mathrm{fiber}}(E,E)$ 开始，其中 $\mathrm{Diff}^0_{\mathrm{fiber}}(E)$ 是开集。我们使用喷射 $S\colon TE\to T^2E$，它与纤维 $TE_x$ 相切，并且可投影到 $q$，得到喷射 $\bar S\colon TM\to T^2M$；通过对《[42]》第五节稍作扩展的版本可以证明其存在，该版本将收录于未来的第二版中。我们使用它们诱导的指数映射，这些映射满足

$$q\circ\exp^E = q\circ\pi_E\circ \mathrm{Fl}^S_1 = \pi_M\circ Tq\circ \mathrm{Fl}^S_1 = \pi_M\circ \mathrm{Fl}^{\bar S}_1\circ Tq = \exp^M\circ Tq\,.$$

$$TE\supset U^E \xrightarrow{(\pi_E,\exp^E)} V^E\subset E\times E \text{ and } TM\supset U^M \xrightarrow{(\pi_M,\exp^M)} V^M\subset M\times M$$

它们是零截面与对角线邻域之间的微分同胚，并诱导出取值于建模空间 $\Gamma(f^*TE) = C^\infty_f(E,TE) = \{s\in C^\infty(E,TE)\colon \pi_E\circ s = f\}$ 的光滑图册。

$$\begin{aligned}
C^\infty(E,E)\supset U_f &= \{g\in C^\infty(E,E) : (f,g)(E)\subset V^E\} \xrightarrow{u_f} \tilde U_f\subset \Gamma(f^*TE)\\
u_f(g) &= (\pi_E,\exp^E)^{-1}\circ(f,g), \qquad u_f(g)(x) = (\exp^E)^{-1}_{f(x)}(g(x)),\\
u_f^{-1}(s) &= \exp^E\circ s, \qquad (u_f^{-1}(s))(x) = \exp^E_{f(x)}(s(x)),\ \text{and}\\
C^\infty(M,M)\supset U_{\bar f} &= \{\bar g\in C^\infty(M,M) : (\bar f,\bar g)(M)\subset V^M\} \xrightarrow{u_{\bar f}} \tilde U_{\bar f}\subset \Gamma(\bar f^*TM)\\
u_{\bar f}(\bar g) &= (\pi_M,\exp^M)^{-1}\circ(\bar f,\bar g), \qquad u_{\bar f}^{-1}(\bar s) = \exp^M\circ\bar s
\end{aligned}$$

注意，图册变换只是由光滑映射型映射从左侧进行的复合（推前）

$$C^\infty_{f'}(E,TE)\ni s\mapsto (u_f\circ u_{f'}^{-1})(s) = (\pi_E,\exp^E)^{-1}\circ(f,\exp^E\circ s)\in C^\infty_f(E,TE).$$

若 $f,g\in C^\infty_{\mathrm{fiber}}(E,E)$ 满足 $\bar f = p(f)$ $\bar g = p(g)$ $\in$微分同胚群$^0(M)$，则

$$\begin{aligned}
Tq\circ u_f(g) &= Tq\circ(\pi_E,\exp^E)^{-1}\circ(f,g) = (\pi_M,\exp_M)^{-1}\circ(q\times q)\circ(f,g)\\
&= (\pi_M,\exp_M)^{-1}\circ(q\circ f, q\circ g) = (\pi_M,\exp_M)^{-1}\circ(\bar f,\bar g)\circ q = u_{\bar f}(\bar g)\circ q
\end{aligned}$$

因此，$u_f(g)\in C^\infty_f(E,TE)$ 可 $q$-投影到 $u_{\bar f}(\bar g)\in C^\infty_{\bar f}(M,TM)$。由于 $Tq\colon TE\to TM$在 $q\colon E\to M$上是纤维线性的，沿 $f$的 $q$-可投影向量场空间是所有沿 $f$的向量场所在空间 $C^\infty_f(E,TE)$ 的一个闭线性子空间。

它甚至还是一个有补的线性子空间：为说明这一点，我们在 $x \in M$上的纤维 $E_x$ 中选择一个光滑变化的概率密度族 $\mu_x$。对于任意 $s \in C^\infty_f(E, TE)$，我们通过对纤维取平均来定义 $\bar{s} \in C^\infty_{\bar{f}}(M, TM)$：

$$\bar{s}(x) = \int_{E_x} T_{f(y)} q.s(y) \mu_x(dy) \in T_{\bar{f}(x)} M, \qquad x \in M.$$

接下来，我们选取一个 Ehresmann 联络，它由一个水平丛 $HE$ in$TE$确定，该水平丛与垂直丛 $VE = \ker Tq$互补，并定义线性映射

$$C^\infty_f(E, TE) \ni s \mapsto s^{\mathrm{ver}} + C(\bar{s} \circ q, f) \in C^\infty_f(E, TE),$$

其中， $s^{\mathrm{ver}}$ 是 $s$的垂直分量，而 $C\colon TM \times_M E \to TE$ 是水平提升。该线性映射将沿 $f$ 的所有向量场构成的集合缩回到沿 $f$的所有 $q$-可投影向量场构成的集合。

因此， $C^\infty_{\mathrm{fiber}}(E, E)$是 $C^\infty(E, E)$的一个分裂闭光滑子流形；由此，$\mathrm{Diff}^0_{\mathrm{fiber}}(E)$是 $\mathrm{Diff}^0(E)$的一个分裂光滑子流形，群运算作为限制是光滑的。$\mathrm{Diff}^0_{\mathrm{fiber}}(E)$的李代数是所有可投影光滑向量场构成的空间。可投影向量场的光滑曲线的演化给出一条可投影微分同胚的光滑曲线，因此我们得到一个正则李群。这些论证同样适用于由保纤维微分同胚构成的群 $\mathrm{Diff}^0_{\mathrm{fiber}}(E)_{\mathrm{Id}}$ ，它也是 $\mathrm{Diff}^0_{\mathrm{fiber}}(E)$ 和 $\mathrm{Diff}^0(E)$ 的光滑分裂子流形。因此， $i\colon \mathrm{Diff}^0_{\mathrm{fiber}}(E)_{\mathrm{Id}_M} \to \mathrm{Diff}^0_{\mathrm{fiber}}(E)$ 是始的。

借助 Ehresmann 联络的光滑水平提升 $C\colon TM \times_M E \to TE$，我们可以构造 $s$ of $p\colon \mathrm{Diff}^0_{\mathrm{fiber}}(E) \to \mathrm{Diff}^0(M)$ 的局部光滑截面，参见 [51, 第 17 节, 3], 与定理 6.2 的证明类似。

剩下需要证明有限正则性微分同胚的情形：注意，坐标图的构造只以 $C^\infty$-微分同胚 $f$ 为中心，这一构造同样适用于此处的情形，即适用于分别建模于 $\Gamma_{C^k}(f^*TE) = C^k_f(E, TE)$ 和 $\Gamma_{H^k}(f^*TE) = H^k_f(E, TE)$ 中 $q$-可投影向量场的巴拿赫空间，以及那些 $q$-投影到单位元的向量场的流形。此处所述的图册变换是光滑的，因为它们是由相同的光滑映射推前得到的。

有几种方法可以证明右平移是光滑的：一种方法是考虑以 $C^k$-或 $H^k$-微分同胚为中心的坐标图，验证图册变换是光滑的，并注意到正如引理 10.8 的证明中所述，由 $f$ 给出的右平移在坐标图 $C^k_h(E, TE) \to C^k_{h \circ f}(E, TE)$ 中就是单位元； $H^k$的情形同理。另一种方法是只使用以光滑映射为中心的坐标图。此时，右平移由具有 $C^k$ 或 $H^k$ 正则性的函数的右复合以及与光滑函数的左复合给出；根据引理 5.4 和 5.7], 这些复合仍然是光滑的 [52, 。还有一种方法是利用 $\mathrm{Diff}^0(E)$ 上的右平移是光滑的，并且 $\mathrm{Diff}^0_{\mathrm{fiber}}(E)$ 到 $\mathrm{Diff}^0(E)$ 的包含映射是光滑且始的。

无论哪种情况，这都表明所有涉及的空间都是半李群。映射 $i$和 $p$ 是群的光滑同态，因为相对于适当选取的坐标图，它们仍然是有界线性映射。最后，借助 Ehresmann联络，可以再次构造 $p$ 的光滑截面 $s$，正如定理 6.2 的证明中明确所做的那样。□

## 7. Riemannian geometry on half-Lie groups

本节从不同层面探讨弱黎曼度量和强黎曼度量下度量拓扑与流形拓扑之间的联系，最终给出适用于半李群上强黎曼度量的霍普夫–里诺定理。

7.1 定义. 半李群上的黎曼度量。设 $M$ 是一个配备了光滑黎曼度量 $g$的无限维流形。若满足以下条件，则称该度量为右不变度量：

$$g_x(T_e\mu^x h, T_e\mu^x k) = g_e(h,k), \qquad x \in G, \qquad h,k \in T_eG.$$

若内积 $g_x$ 在每个 $x \in M$上都诱导出流形拓扑，则称度量 $g$ 为强度量；否则称为弱度量。

注意，任意右不变黎曼度量 $g$ 都由 $T_eG$上的内积 $g_e$ 唯一确定。然而，给定的 $T_eG$ 上的内积不一定能延拓为 $G$上的光滑右不变黎曼度量，因为 $x \mapsto T_e\mu^x$ 可能并不光滑，甚至可能不连续。尽管如此，许多重要的半李群都具有光滑右不变黎曼度量。

以下定理指出，任何带有强黎曼度量的流形都是希尔伯特流形（即以希尔伯特空间为模型）。唯一的假设是该流形以便利向量空间为模型，也就是说，以麦基完备局部凸空间为模型。这是一个较弱的完备性条件，而所有巴拿赫空间和 Fr´echet 空间都是便利的。该定理改编自 Martins Bruveris 未发表的笔记，并以类似形式（但没有证明）见于 [2]。

7.2 定理。强黎曼度量。设 $g$ 是便利流形 $M$上的弱黎曼度量。则以下条件等价：

(a) $g$ 是 $M$上的强黎曼度量。(b) $M$是希尔伯特流形，且 $g^\vee\colon TM \to T^*M$是满射。(c) $M$是希尔伯特流形，且 $g^\vee\colon TM \to T^*M$是向量丛同构。

证明。(a) $\Rightarrow$ (b)：固定一点 $x \in M$。根据假设，$T_xM$ 的局部凸拓扑可由 $\|\cdot\|_{g_x}$赋范。在赋范空间中，每个柯西序列都是麦基柯西序列；而在便利向量空间中，每个麦基柯西序列都收敛。因此，$(T_xM, g_x)$ 是希尔伯特空间。这意味着 $M$ 是希尔伯特流形，因为 $M$ 局部微分同胚于 $T_xM$，这一点从坐标图中很容易看出。此外，根据里斯表示定理，$g^\vee\colon TM \to T^*M$是满射。

(b) $\Rightarrow$(c) 根据开映射定理，$g_x^\vee\colon T_xM \to T_x^*M$对每个 $x \in M$都是线性同构。

(c) $\Rightarrow$(a)：固定一点 $x \in M$，并定义 $U = \{u \in T_xM : \|u\|_{g_x} < 1\}$。那么 $U$ 是绝对凸的。由于 $g_x^\vee$ 是满射，$T_xM$ 上的每个有界线性泛函都可写成 $g^\vee(v)$ 的形式，其中某个 $v \in T_xM$。每个这样的泛函在 $U$ 上都有界，因为 $\sup_{u\in U} |\langle g^\vee(v)\ u\rangle| = |g(v,u)| \le \|v\|_g$。因此，$U$ 在 $T_xM$ 中有界。内积$g_x$ 是有界双线性的；由于 $T_xM$ 可度量，这等价于连续双线性。因此，范数$\|\cdot\|_{g_x}$ 连续，从而 $U$ 在 $T_xM$ 中是开集。现在，$U$ 是 $T_xM$ 中一个绝对凸且有界的 0 邻域。于是，闵可夫斯基泛函 $v \mapsto \inf\{t>0 :\ v \in tU\}$ 是一个范数，它诱导出 $T_xM$ [37, Proposition 6.8.4] 的局部凸拓扑。由于 $\mu_U = \|\cdot\|_{g_x}$，由 $g$ 诱导的拓扑与

$T_xM$ 的拓扑一致。这对所有 $x \in M$ 都成立，因此 $g$ 是强黎曼度量。□

测地距离。对于弱黎曼度量，度量在切空间上诱导的拓扑弱于流形拓扑。从这个意义上说，度量与流形拓扑之间的联系在无穷小层面上被打破了。在整体层面，这会导致一种令人惊讶的现象：测地距离可能无法区分不同点，甚至可能完全消失。Eliashberg 和 Polterovich 最先在辛同胚群 [24] 上发现了这类弱黎曼度量的例子，随后 Michor 和 Mumford 又在整个微分同胚群以及浸入空间 [53]中发现了这类例子。另见 [9, 38]。在以下定理中（该定理最初发表于 [15],），我们刻画了巴拿赫半李群中测地距离消失的现象：

7.3 定理。测地距离消失。设 $G$ 是一个带有右不变黎曼度量的巴拿赫半李群。假设任意 $x \in G$ 的左平移关于测地距离 $d$都是利普希茨连续的，即，

$$|\mu_x| := \inf \{C \in \mathbb{R}_+ : d(xx_0, xx_1) \leq Cd(x_0, x_1), \forall x_0, x_1 \in G\} < \infty .$$

因此，与单位元之间的测地距离消失的群元素构成一个正规子群。如果黎曼度量是强度量，那么测地距离总是非退化的，即，与其测地距离消失的元素构成的正规子群是平凡子群。

证明。令 $G^0$ 为所有与单位元之间的测地距离消失的群元素 $x \in G$ 的集合，即 $d(e, x) = 0$。那么，由于对每个$x_0$、 $x_1 \in G^0$ ，都有 $G^0$ 是 $G$ 的子群：

$$d(e, x_0x_1^{-1}) \leq d(e, x_1^{-1}) + d(x_1^{-1}, x_0x_1^{-1}) = d(x_1, e) + d(e, x_0) = 0,$$

这里用到了测地距离的三角不等式和右不变性。此外， $G^0$ 是 $G$ 的正规子群，因为对所有 $x_0 \in G^0$ 和 $x \in G$ ，都有

$$d(e, xx_0x^{-1}) = d(x, xx_0) \leq |\mu_x| d(e, x_0) = 0,$$

这里用到了测地距离的右不变性以及左平移的 Lipschitz 性质。强度量的非退化性可由与有限维情形相同的论证得出，参见例如 [45]。□

测地线方程。李群上的测地线方程可以等价地用拉格朗日形式表示为 $\nabla_{\partial t} c_t = 0$，或用欧拉形式表示为 $u_t = \mathrm{ad}_u^\top u$，其中 $u = (T_e\mu^c)^{-1} c_t$ 是右平凡化速度 [3, 4]。这是由于公式 $\nabla_{R_X} R_X = R_{\mathrm{ad}_X^\top X}$ 将列维-奇维塔协变导数与伴随算子的转置联系起来；这里， $R_X$ 是与 $X$ 对应的右不变向量场。两者之一存在即蕴含另一个存在；对于强黎曼度量，这一性质总是成立，但对于弱黎曼度量则未必成立 [11]。对于半李群，拉格朗日描述仍然有效，但欧拉描述会失效。原因有几个。首先，右平凡化速度 $u$ 关于时间可能不可微（甚至不连续），因此无法以任何标准意义满足欧拉测地线方程 $u_t = \mathrm{ad}_u^\top u$ 。其次，正如我们接下来将展示的，转置伴随 $\mathrm{ad}_u^\top u$ 仅对 $u \in T_eG^1$ 存在，并且除非 $T_eG^1$ 在 $T_eG$ 中稠密，否则它并不唯一。

7.4 引理。测地线方程。设 $G$ 是一个带有右不变黎曼度量 $g$ 的右半李群。那么，克里斯托费尔符号 $\Gamma$（在坐标图中定义为）存在，

$$g(\Gamma(X,X),Y)=\frac{1}{2}dg(Y)(X,X)-dg(X)(X,Y),\qquad X,Y\in T_xG,$$

$im$蕴含伴随算子的转置作为二次映射 $TG^1\to TG$ 的存在性
$de$定义为

$$g_e(\mathrm{ad}_X^\top X,Y)=g_e(X,\mathrm{ad}_X Y),\qquad X,Y\in T_eG^1.$$

证明。对于任意 $X$、$Y\in T_eG^1$，我们在一个坐标图中计算

$$\begin{aligned}g(\nabla_{R_X}R_X,R_Y)&=g(dR_X.R_X,R_Y)-g(\Gamma(R_X,R_X),R_Y)\\&=g(dR_X.R_X,R_Y)-\tfrac{1}{2}dg(R_Y)(R_X,R_X)+dg(R_X)(R_Y,R_X)\\&=g(dR_X.R_Y,R_X)-g(dR_Y.R_X,R_X)\\&=-g([R_X,R_Y],R_X)=g(R_{[X,Y]},R_X)=g([X,Y],X).\end{aligned}$$

因此，$\nabla_X R_X=\nabla_{R_X}R_X(e)\in T_eG$ 满足 $\mathsf{ad}_X^\top X$ 的定义性质。 □

接下来，我们证明测地线方程解的存在性会从 $G$ 传递到赋有诱导（弱）黎曼度量的 $G^k$。因此，沿测地线不会出现正则性的损失或提升。许多具体情形下都已证明了类似结果 [20, 18, 14, 10]。我们将针对一般的右不变流陈述以下定理；将测地线方程解释为一个流方程（相对于测地喷射），并注意到测地喷射是右不变向量场，即可得到测地线方程的相应结果。

7.5 定理。无损无增。设 $G$ 为一个半李群。设 $S$ 是 $TG$ 上的光滑向量场，它对于 $G$ 在 $TG$ 上的右作用是不变的，并且是一个二阶微分方程，即 $T(\pi_G)\circ S=\mathrm{Id}_{TG}$。设 $t_0\in(0,\infty]$，并令 $U\subset TG$ 为一个极大开集，使得 $S$ 的流作为映射存在

$$\mathrm{Fl}^S:(-t_0,t_0)\times U\to TG.$$

则该流限制为一个光滑映射

$$\mathrm{Fl}^S:(-t_0,t_0)\times\left(U\cap TG^k\right)\to TG^k$$

对于任意 $k\geq 1$，也就是说，在沿着 $S$ 演化的过程中，正则性既不会增加，也不会降低 .

向量场 $S\colon TG\to T^2G$ 是一个喷射，如果它还满足 $T(m_t^G).m_t^{TG}S(X)=S(tX)$，其中标量乘法 $m_t^G$ 作用于 $TG\to G$，而 $m_t^{TG}$ 作用于丛 $\pi_{TG}\colon T^2G\to TG$。那么 $\pi_G\circ\mathrm{Fl}_t^S$ 是一个测地结构；例如参见 [51, 第 22.7], 节。

证明。注意， $TG$ 不是半李群，因为它不是群；它仅带有 $G$的连续右作用。由于 $S$ 是不变的，集合 $U$ 在 $G$的右作用下也不变。对于 $X\in U$ 和 $0\leq t<t_0$，我们有

$$\begin{aligned}\mu_{(\pi_G\circ\mathrm{Fl}_t^S)(X)}(y)&=(\mu^y\circ\pi_G\circ\mathrm{Fl}_t^S)(X)=(\pi_G\circ T\mu^y\circ\mathrm{Fl}_t^S)(X)\\&=(\pi_G\circ\mathrm{Fl}_t^S\circ T\mu^y)(X)=((\pi_G\circ\mathrm{Fl}_t^S)\circ R_X)(y).\end{aligned}$$

如果 $X \in TG^k$，那么 $R_X\colon\ G \to TG$ 是 $C^k$。由于 $\pi_G \circ \mathrm{Fl}_t^S\colon\ U \to G$ 是 $C^\infty$，映射 $\mu_{(\pi_G \circ \mathrm{Fl}_t^S)(X)} = (\pi_G \circ \mathrm{Fl}_t^S) \circ R_X\colon\ G \to G$ 是 $C^k$。由于 $T(\pi_G) \circ S = \mathrm{Id}_{TG}$，我们有

$$\partial_t(\pi_G \circ \mathrm{Fl}_t^S)(X) = T(\pi_G)(\partial_t \mathrm{Fl}_t^S(X)) = (T(\pi_G) \circ S \circ \mathrm{Fl}_t^S)(X) = \mathrm{Fl}_t^S(X)$$

这意味着 $\mathrm{Fl}_t^S\colon\ U \cap TG^k \to TG$ 是 $C^k$，其逆为 $\mathrm{Fl}_{-t}^S$。此外，

$$(\pi_G \circ \mathrm{Fl}_{s+t}^S)(X) = (\pi_G \circ \mathrm{Fl}_s^S \circ \mathrm{Fl}_t^S)(X) = (\pi_G \circ \mathrm{Fl}_s^S)(\partial_t(\pi_G \circ \mathrm{Fl}_t^S)(X)),$$

因此，$\mu_{(\pi_G \circ \mathrm{Fl}_t^S)(X)}$ 有 $\mu_{(\pi_G \circ \mathrm{Fl}_{-t}^S(X)}$ 作为 $C^k$ 逆映射，因此 $(\pi_G \circ \mathrm{Fl}_t^S)(X) \in G^k$，从而 $\mathrm{Fl}_t^S\colon\ U \cap TG^k \to TG^k$。□

作为上述定理的推论，我们立即得到以下关于右不变黎曼度量的指数映射的结果：

7.6 推论。exp 的无损无增。设 $G$ 是一个半李群，且 $g$ 是 $G$上的右不变光滑黎曼度量。如果黎曼指数映射 $\exp^g$ 在 $TG$中的一个极大开集 $U = -U$ 上存在且光滑，那么 $\exp^g$ 限制为一个光滑映射

$$\exp^g : \Big(U \cap TG^k\Big) \to TG^k$$

对于任意 $k \geq 1$，也就是说，在沿 $S$ 演化的过程中，正则性既不会增加也不会降低。

Hopf-Rinow 定理。以下定理是本文的第二个主要结果，即适用于半李群的 Hopf–Rinow 定理。回顾一下，在有限维情形中，霍普夫–里诺定理断言测地完备性、度量完备性和测地凸性三者等价。对于无限维强黎曼流形，度量完备性蕴含测地完备性 [45, 29], ，但其他所有蕴含关系都可能不成立 [33, 47, 5]。但对于带有强右不变度量的半李群，情况并非如此：如下所示，它们在度量意义上和测地意义上都是完备的，并且在满足弱闭包条件时也是测地凸的。

7.7 定理。半李群上的 Hopf–Rinow 定理。设 $G$ 是一个连通半李群，配备了一个右不变强黎曼度量 $g$，并令 $d\colon\ G \times G \to \mathbb{R}_+$ 为 $G$ 上诱导的测地距离。

那么，$(G, g)$具有以下完备性性质：
(a) 空间$(G, d)$是完备度量空间，即每个 $d$-柯西序列都在 $G$中收敛；(b) 指数映射$\exp_e^g$：$T_eG \to G$ 在整个 $T_eG$上有定义；(c) 指数映射$\exp^g$：$TG \to G$ 在整个 $TG$上有定义；
(d) 空间$(G, g)$是测地完备的，即每条测地线都能在整个 $\mathbb{R}$上最大限度地定义。

进一步假设 $G$ 是 $L^2$-正则的，并且对于每个 $x \in G$，集合

$$\mathcal{A}_x := \big\{\xi \in L^2([0,1], T_eG) : \mathrm{evol}(\xi) = x\big\} \subset L^2([0,1], T_eG)$$

都是弱闭的。那么
(e) 空间（$G$, $g$）是测地凸的，即 $G$ 中任意两点都可以由一条长度最短的测地线连接。

此外，测地完备性相关的结论，即(b)–(d)项，同样适用于弱黎曼流形（$G^k$, $g$），其中 $g$ 是 $G$ 上黎曼度量的限制。

7.8 注记。集合 $\mathcal{A}_x$ 的闭包条件可由以下条件推出：evol : $L^2([0,1],T_eG) \to G$ 关于 $L^2([0,1],T_eG)$ 上的弱拓扑以及 $G$ 上的某个豪斯多夫拓扑连续。

证明。由定理 7.2 可知， $G$ 是一个希尔伯特流形，在整个证明过程中我们将反复使用这一点。为证明 (a)，令 $d$ 为 $G$ 中的测地距离，其定义为连接两点的所有分段光滑曲线长度的下确界。我们知道， $d$ 是一个度量，其诱导的拓扑就是流形拓扑。令 $\exp^g : TG \to G$ 为黎曼指数映射。于是

$$\mathfrak{g} := T_eG \supset B_\varepsilon \xrightarrow{\exp_e^g} U_\varepsilon \subset G$$

它是从 $\mathfrak{g}$ 中的一个 $g_e$-球 $B_\varepsilon = \{X \in \mathfrak{g} : \|X\|_{g_e} < \varepsilon\}$ 到 $G$ 中 $e$ 的一个开邻域 $U_\varepsilon = \exp_e^g(B_\varepsilon)$ 的微分同胚，其中 $\varepsilon > 0$。由高斯引理 [51, 引理 23.2，推论 23.3]，我们有

$$U_\eta := \exp_e^g(B_\eta) = \{x \in G : d(e,x) < \eta\} \text{ and}$$
$$\bar{U}_\eta := \exp_e^g(\overline{B_\eta}) = \{x \in G : d(e,x) \le \eta\} \text{ for all } 0 < \eta < \varepsilon.$$

现在考虑 $B_\varepsilon \subset \mathfrak{g}$ 上的强黎曼度量 $\tilde{g} := (\exp_e^g)^*(g|_U)$ 以及光滑映射

$$B_\varepsilon \ni X \mapsto ((g_e^\vee)^{-1} \circ \tilde{g}_X^\vee : \mathfrak{g} = T_X B_\varepsilon \to T_X^* B_\varepsilon \to T_X B_\varepsilon = \mathfrak{g}) \in L(\mathfrak{g},\mathfrak{g}).$$

对于足够小的球 $B_\eta$，我们有

$$\|(g_e^\vee)^{-1} \circ \tilde{g}_X\|_{L(\mathfrak{g},\mathfrak{g})} \le 2 \text{ and } \|(\tilde{g}_X^\vee)^{-1} \circ g_e^\vee\|_{L(\mathfrak{g},\mathfrak{g})} < 2$$

对所有 $X \in B_\eta$ 都成立。因此，在 $B_\eta$ 上，强黎曼度量 $\tilde{g}$ 和 $g$ 相对于彼此一致有界。接下来，我们考虑 $G$ 中的一个 $d$-柯西序列 $(x_i)$。对于适当的 $N$，对所有 $i \ge N$ 都有 $d(x_N, x_i) < \eta/2$。于是，由于右平移是等距的，$(y_i := x_i.x_N^{-1})_{i \ge N}$ 是 $U_{\eta/2}$ 中的柯西序列；而 $(Y_i := (\exp_e^g)^{-1}(y_i)$ 是 $(B_{\eta/2}, \tilde{g})$ 中的柯西序列，因此也属于 $(B_{\eta/2}, g_e)$ 中的柯西序列。因此，序列 $(Y_i)$ 在 $\bar{B}_\eta/2$ 中关于 $g_e$-范数收敛于极限 $Y$，而 $y := \exp_e^g(Y)$ 是序列 $(y_i)$ 的极限，由此证明了 (a)。

(b)–(d) 直接由度量完备性推出，因为 Hopf-Rinow 定理的这一论断在无限维情形下仍然成立，参见例如 [45]。或者，也可以如 [29] 中所述直接看出：由于 $g$ 是强的，测地指数映射在 $0 \in T_eG$ 的某个邻域上有定义。此外，由于 $g$ 是右不变的，测地线的右平移仍是测地线。因此，可以将定义在区间 $(-s, s)$ 上的测地线延拓为定义在更大区间 $(-t, t)$ 上的测地线，其中 $t > s$。由此可知，测地指数映射在整个 $T_eG$ 上都有定义。

还需证明空间 $(G, g)$ 是测地凸的。我们首先证明，任意两个元素 $x_0$ 和 $x_1$之间都存在极小路径。 $x_0$ 和 $x_1$ 之间的测地距离可以通过对所有路径取黎曼能量的最小值来计算

$$E(x) = \int_0^1 g_x(x_t, x_t)dt,$$

路径满足 $x \in H^1([0,1],G)$，且 $x(0) = x_0$和 $x(1) = x_1$。利用黎曼度量的右不变性，我们可以将其改写为

$$E(x) = \int_0^1 \langle T\mu^{x^{-1}}.x_t, T\mu^{x^{-1}}.x_t\rangle dt := \|T\mu^{x^{-1}}.x_t\|^2_{L^2([0,1],\mathfrak{g})}.$$

因此，根据半李群 $G$ 的 $L^2$-正则性，即李群中 $H^1$-路径与 $\mathfrak{g}$ 中 $L^2$-路径之间的一一对应关系，我们可以将测地距离的计算改写为以下极小化问题

$$\inf \|\xi\|^2_{L^2([0,1],\mathfrak{g})}$$

其中，下确界是在集合上取的

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_{x_1.x_0^{-1}} \cap \left\{\xi \in L^2([0,1],\mathfrak{g}) : \|\xi\|^2_{L^2([0,1],\mathfrak{g})} \le 2\,\mathrm{dist}(x_0,x_1)^2\right\} =$$

$$\left\{\xi \in L^2([0,1],\mathfrak{g}) : \mathrm{evol}(\xi) = x_1.x_0^{-1}\right\} \cap \left\{\xi \in L^2([0,1],\mathfrak{g}) : \|\xi\|^2_{L^2([0,1],\mathfrak{g})} \le 2\,\mathrm{dist}(x_0,x_1)^2\right\}.$$

根据定义， $\mathcal{B}$ 有界。利用 $\mathcal{A}_{x_1.x_0^{-1}}$ 弱闭这一假设可知， $\mathcal{B}$ 也弱闭，因而是紧的。

接下来，我们选取一个序列 $\xi_n \in \mathcal{B}$，使得

$$\left|\inf_{\xi\in\mathcal{B}} \|\xi\|^2_{L^2([0,1],\mathfrak{g})} - \|\xi_n\|^2_{L^2([0,1],\mathfrak{g})}\right| < \frac{1}{n}$$

˜由于 $B$ 是紧的，存在 $\xi \in \mathcal{B}$，它是 $\xi_n$的一个聚点。选取一个子序列后，我们可以假设 $\xi_n \to \xi$ 弱收敛。由于巴拿赫空间上的每个范数都是序列弱下半连续的，因此可得

$$\|\tilde{\xi}\|^2_{L^2([0,1],\mathfrak{g})} = \inf_{\xi\in B} \|\xi\|^2_{L^2([0,1],\mathfrak{g})}.$$

因此， $x$ =Evol(ξ) 是一条能量极小路径。还需证明 $x$ 是测地线方程的解，但这可由标准论证得出：由于 $x$ 是 $t \in [0,1]$的极小路径，它在每个子区间上也都是极小路径，故由高斯引理可得结论。

最后我们指出， $G^k$ 的测地完备性可直接由无损无增结果推出；推论 7.6。□

7.9 例子。微分同胚群上的索伯列夫度量。对于紧的有限维黎曼流形 $(M,g)$，我们考虑例子 2.2 中引入的索伯列夫微分同胚群 $\mathrm{Diff}_{H^s}(M)$。我们在这个无限维半李群上赋予阶数为 $s$的强右不变索伯列夫度量，即

$$G^s_\varphi(h\circ\varphi, k\circ\varphi) = \int_M g((1-\Delta)^{s/2}h, (1-\Delta)^{s/2}k)\,\mathrm{vol},$$

其中 $h$ 和 $k$ 是 $H^s$ 向量场，而 $\Delta$ （分别为 vol）是（有限维）黎曼度量 $g$的拉普拉斯算子（体积形式）。要证明 $G$ 确实是一个黎曼度量，只需检验它对基点的依赖是否光滑：对于整数阶，这相对容易，因为可以推导出它对 $\varphi$的依赖的显式公式，参见例如 [20]。另一方面，对于实数 $s$，这涉及高度复杂的估计，直到最近才得到证明 [13, 8]。因此，立即可得（ $\mathrm{Diff}_{H^s}(M)$ $G^s$）的测地线完备性和度量完备性。为了证明极小化子的存在

还需验证定理 7.7 中的附加假设，而这已在 [19]中得到隐式证明。由此，我们恢复了 [19] 中关于索伯列夫微分同胚群的所有完备性结论。

7.10. 曲率。对于配备右不变黎曼度量的李群，已有成熟的曲率公式；对于微分同胚群，这些公式归功于 [3]；但它们用到了李代数上的李括号，而半李群并不具备李代数。在这里，我们想概述另一种公式，该公式由[49], 提出，涉及逆度量和局部常值 1-形式，并用到对称化力（来自牛顿定律 $F = m.c''$，它属于 $T^2G$ 及其对偶空间）和应力（即李括号的一半）。该公式非常适用于黎曼浸没的奥尼尔公式，并已用于计算 [48] 和 [49, 第9节.6]中的地标空间曲率。

那么，设 $G$ 是一个配备右不变光滑黎曼度量 $g$的半李群。我们考虑光滑 1-形式 $\alpha$、$\beta$：在弱度量 $g$的情形下， $G \to g(TG) \subset T^*G$。注意，对于强度量，我们有 $g(TG) = T^*G$。接着，我们引入辅助向量场$X_\alpha$ 和 $X_\beta$，它们扮演着“局部常值”扩张的角色，将 1-形式 $\alpha$、$\beta$ 在点 $x \in G$ 处的取值 $\alpha^\sharp = g^{-1} \circ \alpha$和 $\beta^\sharp$ 延拓出去；曲率正是在该点计算，并且 1-形式 $\alpha$、$\beta$ 在该处也表现为局部常值。更确切地说，假设给定 $X_\alpha$ 和 $X_\beta$，使得：

(a) $X_\alpha(x) = \alpha^\sharp(x) \quad X_\beta(x) = \beta^\sharp(x)$, (b) 接着， $\alpha^\sharp - X_\alpha$ 在 $x$ 处为零，因此有良定义的导数 $D_x(\alpha^\sharp - X_\alpha)$，其属于 $\mathrm{Hom}(T_xG, T_xG)$。对于向量场 $Y$，我们有 $D_x(\alpha^\sharp - X_\alpha).Y_x = [Y, \alpha^\sharp - X_\alpha](x) = \mathcal{L}_Y(\alpha^\sharp - X_\alpha)|_x$。对于 $\beta$也同样成立。(c) $\mathcal{L}_{X_\alpha}(\alpha) = \mathcal{L}_{X_\alpha}(\beta) = \mathcal{L}_{X_\beta}(\alpha) = \mathcal{L}_{X_\beta}(\beta) = 0$, (d) $[X_\alpha, X_\beta] = 0$。

相对于坐标图的局部常值 1-形式和向量场满足这些性质。利用这些形式和向量场，我们进而定义：

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\alpha,\beta) &:= \tfrac{1}{2} d(g^{-1}(\alpha,\beta)), \qquad \text{a 1-form on } M \text{ called the symmetriced force,}\\
\mathcal{D}(\alpha,\beta)(x) &:= D_x(\beta^\sharp - X_\beta).\alpha^\sharp(x)\\
&= d(\beta^\sharp - X_\beta).\alpha^\sharp(x), \quad \text{a tangent vector at } x \in G \text{ called the } \textit{stress}.
\end{aligned}$$

那么，按照上述记号，由于 [49, 第 2 节3], ，我们得到截面曲率的如下公式，其中 $\langle \alpha、X \rangle$ 表示 1-形式在切向量上的取值。

$$\begin{aligned}
&g\big(R(\alpha^\sharp,\beta^\sharp)\beta^\sharp,\alpha^\sharp\big)(x) = R_{11} + R_{12} + R_2 + R_3\\
&R_{11} = \tfrac{1}{2}\left(\mathcal{L}^2_{X_\alpha}(g^{-1})(\beta,\beta) - 2\mathcal{L}_{X_\alpha}\mathcal{L}_{X_\beta}(g^{-1})(\alpha,\beta) + \mathcal{L}^2_{X_\beta}(g^{-1})(\alpha,\alpha)\right)(x)\\
&R_{12} = \langle \mathcal{F}(\alpha,\alpha), \mathcal{D}(\beta,\beta)\rangle + \langle \mathcal{F}(\beta,\beta), \mathcal{D}(\alpha,\alpha)\rangle - \langle \mathcal{F}(\alpha,\beta), \mathcal{D}(\alpha,\beta) + \mathcal{D}(\beta,\alpha)\rangle\\
&R_2 = \left(\|\mathcal{F}(\alpha,\beta)\|^2_{g^{-1}} - \big\langle \mathcal{F}(\alpha,\alpha)), \mathcal{F}(\beta,\beta)\big\rangle_{g^{-1}}\right)(x)\\
&R_3 = -\tfrac{3}{4}\|\mathcal{D}(\alpha,\beta) - \mathcal{D}(\beta,\alpha)\|^2_{g_x}
\end{aligned}$$

## 8. Auxiliary results on local additions

局部加法定义见定义 3.2。这里，我们汇总一些进一步的性质，并说明它们与喷射、线性联络和测地结构之间的关系。

8.1 注。局部加法的局部右不变性。右不变局部加法 $\tau$ 在开 $e$-邻域 $U \subseteq G$ 上的限制是一个光滑映射$\tau^U := \tau|_{TU\cap V}\colon TU \cap V \to G$，具有以下性质：

(a) $\tau^U(0_x) = x$对所有 $x \in U$成立；(b) $\tau^U(T_x\mu^y(X_x)) = \mu^y(\tau^U(X_x))$，对于 $x, y \in G$且满足 $x \in U \cap U.y^{-1}$和 $X_x \in T_xG \cap V$；(c) $(\pi_U, \tau^U)\colon TU \cap V \to G \times G$是到其像上的微分同胚。

我们称 $\tau^U$ 为 $e$附近的局部右不变局部加法。显然，我们可以从 $\tau^U$重构出 $\tau$。

8.2 注记。局部加法的归一化。每个局部加法 $\tau\colon TG \supseteq V \to G$都可以归一化，使得对所有 $X_x \in TG$，$\partial_t|_0\tau(tX_x) = X_x$。为此，必须将 $\tau$ 替换为 $\tau \circ A^{-1}$，其中 $A$ 是由下式给出的纤维逐点线性映射

$$A_x : T_xG \to T_xG, \qquad A_x(X_x) = \partial_t|_0\tau(tX_x) = (T_{0_x}\tau \circ \mathrm{vl})(0_x, X_x).$$

这里，$\mathrm{vl}\colon TG \times_G TG \to V(TG) \subset T^2G$是垂直提升，其定义为 $\mathrm{vl}(X_x, Y_x) = \partial_t|_0 X_x + tY_x$；参见 [42, 第29节.9] 或 [51, 第8节.12]。映射 $A \in L(TG, TG)$ 在纤维上可逆，其逆映射为 $A_x^{-1} = \mathrm{vpr} \circ T_{0_x}(\tau|_{T_xG\cap V})^{-1}$，因为 $(\pi_G, \tau)\colon V \to G \times G$是到其像上的微分同胚。

8.3 注记。喷射、线性联络与测地结构。局部加法与喷射、线性联络及测地结构密切相关；定义和记号见 [51,第 22.6–22.8] 节。设 $\tau\colon TG \supseteq V \to G$ 是一个局部加法。不失一般性，假设 $\tau$ 已经规范化。于是，向量场

$$S : TG \to T^2G, \qquad S(X_x) := \partial_t^2|_0\tau(tX_x),$$

满足喷射的定义性质：

$$\begin{aligned}
\pi_{TG}S(X_x) &= \pi_{TG}\partial_t^2|_0\tau(tX_x) = \partial_t|_0\tau(tX_x) = X_x,\\
T(\pi_G)S(X_x) &= T(\pi_G)\partial_t^2|_0\tau(tX_x) = \partial_t|_0(\pi_G\partial_t\tau(tX_x)) = \partial_t|_0(\tau(tX_x)) = X_x,\\
S(sX_x) &= \partial_t^2|_0\tau(tsX_x) = \partial_t|_0\big(m_s^{TG}\partial_r|_0\tau(trsX_x)\big) = m_s^{T^2G}T(m_s^{TG})S(X_x),
\end{aligned}$$

其中，$m_s^{TG}$表示丛 $TG \to G$上的标量乘法 $s \in \mathbb{R}$。喷射 $S$也可以等价地表示为一个对称线性联络。若 $G$ 是巴拿赫流形，则 $S$ 的流在局部存在，并由此导出测地结构 $\mathrm{geo}(X)(t) = (\pi_G \circ \mathrm{Fl}_t^S)(X)$。测地结构是一种具有额外性质的局部加法。若局部加法 $\tau$ 是右不变的，则喷射、线性联络和测地结构也都是右不变的。

## 9. Auxiliary results on jets

本节汇集若干关于喷流和函数的可微性的技术性结果，供后续使用。未作解释的标准记号见 [42, 第 41] 节。在第9节中，$x$、$y$、$z$分别是巴拿赫空间 $E$、$F$、$G$的开子集 $U$、$V$、$W$中的点，$f\colon U \to V$和 $g\colon V \to W$是 $k$次可微函数，且 $k \in \mathbb{N}$。

9.1 定义。喷流。从 $U$ 到 $V$ 的 $k$-喷流空间定义为

$$J^k(U,V) := U \times V \times \mathrm{Poly}^k(E,F), \quad \textit{where} \quad \mathrm{Poly}^k(E,F) = \prod_{j=1}^{k} L^j_{\mathrm{sym}}(E;F)$$

带有多重线性映射的范数之和。它是巴拿赫空间 $J^k(E,F)$ 的一个开子集。我们将 $\alpha$ 和 $\beta$ 分别记作源投影与靶投影，即，

$$\alpha = \mathrm{pr}_1 : J^k(U,V) \to U, \qquad \beta = \mathrm{pr}_2 : J^k(U,V) \to V.$$

函数 $f\colon U \to V$ 在 $x \in U$ 处的 $k$-喷流定义为

$$j^k_x f = \Big(x, f(x), df(x), \frac{1}{2!}d^2 f(x), \dots, \frac{1}{k!}d^k f(x)\Big) \in J^k(U,V).$$

9.2 定义。喷流复合。在纤维积

$$J^k(V,W) \times_V J^k(U,V) = \big\{(\tau,\sigma) \in J^k(V,W) \times J^k(U,V) : \alpha(\tau) = \beta(\sigma)\big\},$$

喷流复合 $\bullet\colon J^k(V,W) \times_V J^k(U,V) \to J^k(U,W)$ 定义为

$$(y,z,q) \bullet (x,y,p) = \big(x, z, \pi_k(q \circ p)\big),$$

其中， $\pi_k$ 会舍弃所有阶数为零或大于 $k$ 的单项式，而 $\circ$ 表示多项式的复合。

9.3 引理。喷流复合。喷流复合满足定义性质

$$j^k_{f(x)} g \bullet j^k_x f = j^k_x (f \circ g)$$

并满足以下界

$$\begin{aligned} \|\tau \bullet \sigma\| &\le (1 + \|\tau\|)(1 + \|\sigma\|^k), \\ \|\tilde\tau \bullet \tilde\sigma - \tau \bullet \sigma\| &\le \|\tilde\tau - \tau\|(1 + \|\tilde\sigma\|^k) + (1 + \|\tau\|)\|\tilde\sigma - \sigma\|(1 + k\|\tilde\sigma\|^{k-1} + k\|\sigma\|^{k-1}). \end{aligned}$$

证明。定义性质是 Fa`a di Bruno 公式的多维版本（参见 [54, 第 2 节4], 例如），该公式指出，两个函数复合后的泰勒级数等于它们各自泰勒级数的复合。我们还将用到，多重线性映射的多重复合对于巴拿赫空间而言是有界运算。在后续计算中， $\sigma = (x,y,p) \in J^k(U,V)$， $\tau = (y,z,q) \in J^k(V,W)$，所有指标的取值范围均为 1 到 $k$。

$$\begin{aligned} \|q \circ p\| &= \Big\| \sum_j q_j \Big( \sum_{i_1} p_{i_1}, \dots, \sum_{i_j} p_{i_j} \Big) \Big\| \le \sum_j \|q_j\| \Big( \sum_{i_1} \|p_{i_1}\| \Big) \cdots \Big( \sum_{i_j} \|p_{i_j}\| \Big) \\ &= \sum_j \|q_j\| \|p\|^j \le \|q\| \max_j \|p\|^j \le \|q\|(1 + \|p\|^k), \end{aligned}$$

$$\|\tau \bullet \sigma\| = \|(x, z, \pi_k(q \circ p))\| \le \|x\| + \|z\| + \|q\|(1 + \|p\|^k) \le (1 + \|\tau\|)(1 + \|\sigma\|^k),$$

$$\begin{aligned}\|q\circ\tilde p - q\circ p\| &= \Big\|\sum_j\sum_{\ell=1}^{j} q_j\Big(\sum_{i_1}p_{i_1},\dots,\sum_{i_\ell}\tilde p_{i_\ell}-p_{i_\ell},\cdots\sum_{i_j}p_{i_j}\Big)\Big\|\\ &\le \sum_j\sum_{\ell=1}^{j}\|q_j\|\|\tilde p\|^{\ell-1}\|\tilde p-p\|\|p\|^{j-\ell}\\ &\le \|q\|\max_j\sum_{\ell=1}^{j}\|\tilde p\|^{\ell-1}\|\tilde p-p\|\|p\|^{j-\ell}\\ &\le \|q\|\|\tilde p-p\|(1+k\|\tilde p\|^{k-1}+k\|p\|^{k-1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\tilde q\circ\tilde p - q\circ p\| &\le \|(\tilde q-q)\circ\tilde p\| + \|q\circ\tilde p - q\circ p\|\\ &\le \|\tilde q-q\|(1+\|\tilde p\|^k) + \|q\|\|\tilde p-p\|(1+k\|\tilde p\|^{k-1}+k\|p\|^{k-1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\tilde\tau\bullet\tilde\sigma-\tau\bullet\sigma\| &= \big\|\big(\tilde x-x,\tilde z-z,\pi_k(\tilde q\circ\tilde p-q\circ p)\big)\big\|\\ &\le \|\tilde z-z\|+\|\tilde q-q\|(1+\|\tilde p\|^k)\\ &\quad+\|\tilde x-x\|+\|q\|\|\tilde p-p\|(1+k\|\tilde p\|^{k-1}+k\|p\|^{k-1})\\ &\le \|\tilde\tau-\tau\|(1+\|\tilde\sigma\|^k)+(1+\|\tau\|)\|\tilde\sigma-\sigma\|(1+k\|\tilde\sigma\|^{k-1}+k\|\sigma\|^{k-1}).\ \square\end{aligned}$$

9.4 定义。喷射求值。令 $\pi_H$ 和 $\pi_V$ 表示到 $TU\cong U\times E$ 的第一和第二分量的投影。在纤维积上

$$J^k(U,V)\times_U TU=\big\{(\sigma,\xi)\in J^k(U,V)\times TU:\alpha(\sigma)=\pi_H(\xi)\big\},$$

喷射求值 $\odot\colon\ J^k(U,V)\times_U TU\to J^{k-1}(TU,TV)$ 定义为

$$\begin{aligned}(x,y,p)\odot(x,X) = \Big(&(x,X),\big(y,p_1(X)\big),\dots,\\ &\big(p_{k-1}(\pi_H,\dots,\pi_H),p_k(\pi_H,\dots,\pi_H,X)+(k-1)p_{k-1}(\pi_H,\dots,\pi_H,\pi_V)\big)\Big).\end{aligned}$$

9.5 引理。喷射求值。喷射求值满足定义性质

$$j^k_xf\odot\xi=j^{k-1}_\xi Tf,\qquad \xi\in T_xU$$

并满足以下界

$$\begin{aligned}\|\sigma\odot\xi\|&\le\|\xi\|+(k+1)\|\sigma\|+\|\xi\|\|\sigma\|,\\ \|\tilde\sigma\odot\tilde\xi-\sigma\odot\xi\|&\le\|\tilde\sigma-\sigma\|(k+\|\tilde\xi\|)+\|\tilde\xi-\xi\|(1+\|\sigma\|).\end{aligned}$$

证明。为验证定义性质，首先从表达式

$$Tf(x,X)=\big(f(x),df(x)(X)\big)$$

出发，并计算关于（$x$, $X$）的迭代导数。结果如下：

$$\begin{aligned}&\big(df(x)(\pi_H)\ d^2f(x)(\pi_H,X)\ +df(x)(\pi_V)\big),\big(d^2f(x)(\pi_H,\pi_H)\ d^3f(x)(\pi_H,\\&\pi_H,X)\ +2d^2f(x)(\pi_H,\pi_V)\big),\big(d^3f(x)(\pi_H,\pi_H,\pi_H)\ d^4f(x)(\pi_H,\pi_H,\pi_H,\\&X)\ +3d^3f(x)(\pi_H,\pi_H,\pi_V)\big),\\&\dots\\&\big(d^{k-1}f(x)(\pi_H,\dots,\pi_H),d^kf(x)(\pi_H,\dots,\pi_H,X)+(k-1)d^{k-1}f(x)(\pi_H,\dots,\pi_H,\pi_V)\big).\end{aligned}$$

这些项与 $\sigma\odot\xi$ 在 $\sigma=(x,y,p)\ =j_x^kf$ 和 $\xi=(x,X)$ 的表达式一致。为验证第一个界，对于任意 $\ell\in\{1,\dots,k-1\}$，收集公式 $\|\sigma\odot\xi\|$ 中涉及 $p_\ell$ 的项。这些项为：

$$p_\ell(\pi_H,\dots,\pi_H,X),\qquad p_\ell(\pi_H,\dots,\pi_H),\qquad \ell p_\ell(\pi_H,\dots,\pi_H,\pi_V).$$

这些项的范数之和由 $\|p_\ell\|(\|X\|+k)$ 控制。因此，总体而言可得

$$\|\sigma\odot\xi\|\le\|\sigma\|+\|\xi\|+\|\sigma\|(\|\xi\|+k)=\|\xi\|+(k+1)\|\sigma\|+\|\xi\|\|\sigma\|.$$

对于第二个界，估计

$$\begin{aligned}\|\tilde\sigma\odot\tilde\xi-\sigma\odot\xi\|&\le\|\tilde x-x\|+\|\tilde X-X\|+\|\tilde y-y\|+\|(\tilde p_1-p_1)(\tilde X)\|+\|p_1(\tilde X-X)\|\\&\quad+\dots+\|(\tilde p_{k-1}-p_{k-1})(\pi_H,\dots,\pi_H)\|+\|(\tilde p_k-p_k)(\pi_H,\dots,\pi_H,\tilde X)\|\\&\quad+\|p_k(\pi_H,\dots,\pi_H,\tilde X-X)\|+(k-1)\|(\tilde p_{k-1}-p_{k-1})(\pi_H,\dots,\pi_H,\pi_V)\|\\&\le\|\tilde\sigma-\sigma\|(k+\|\tilde\xi\|)+\|\tilde\xi-\xi\|(1+\|\sigma\|).\end{aligned}$$

□

9.6 定义。喷射反演。在可逆的 $k$-喷流集合上，

$$J^k(U,V)^\times=U\times V\times GL(E,F)\times\prod_{j=2}^k L^j_{\mathrm{sym}}(E;F),$$

反演 $(\cdot)^{-1}$：$J^k(U,V)^\times\to J^k(V,U)^\times$ 定义为

$$(x,y,p_1,\dots,p_k)^{-1}=\big(y,x,q_1,\dots,q_k\big),$$

其中 $(q_1,\dots,q_k)$递归定义为

$$q_1=p_1^{-1}\in GL(F,E),\qquad q_k=-\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_j\le k\\ i_1+\dots+i_j=k}}q_j(p_{i_1}\circ q_1,\dots,p_{i_j}\circ q_1).$$

9.7 引理。喷射反演。喷射反演是连续的，并且对任意微分同胚群 $f$ 满足定义性质

$$(j_x^kf)^{-1}=j^k_{f(x)}(f^{-1}).$$

证明。喷射反演的连续性可由反演 $GL(E,F)\to GL(F,E)$ 的连续性，以及巴拿赫空间之间多重线性映射范畴中复合映射的连续性推出。对方程 $g\circ f=\mathrm{Id}_U$ 求 $k$ 阶导数，可得

对于 $k=1$，有 $(g^{(1)}\circ f)(f^{(1)})=\mathrm{Id}_E$；对于 $k\geq 2$，有

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_j\leq k\\ i_1+\cdots+i_j=k}}(g^{(j)}\circ f)(f^{(i_1)},\dots,f^{(i_j)})=0.$$

令 $p_j=f^{(j)}$ 和 $q_j=g^{(j)}\circ f$，并求解 $q_k$，即可得到定义性质 y. □

9.8 引理。光滑曲线 $c\in C^\infty(\mathbb{R},C^k(U,V))$ 的空间与所有满足以下条件的 $\hat{}c\colon \mathbb{R}\times U\to V$ 所构成的空间同构：对于所有 $i\in\mathbb{N}$ 和 $j\in\mathbb{N}_{\leq k}$，迭代导数 $\partial_t^i d_U^j\hat{}c\colon \mathbb{R}\times U\to L^j(E,F)$ 存在且连续。

证明。$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(c(t+s)-c(t))=c'(t)$ 存在且在 $C^k(U,F)$ 中收敛，当且仅当

$$\lim_{s\to 0}\left\|\tfrac{1}{s}\big(d_V^j\hat{c}(t+s,x)-d_V^j\hat{c}(t,x)\big)-\partial_t d_V^j\hat{c}(t,x)\right\|_{L^j_{\mathrm{sym}}(E;F)}=0\quad\text{for } 0\leq j\leq k$$

对于 $\mathbb{R}\times U$ 的紧子集中的 $(t,x)$，上述结论一致成立，因为巴拿赫空间的开子集是紧生成的。通过迭代，将 $\partial_t$ 换成 $\partial_t^i$ 时结论也成立。□

9.9 引理。拉回与推前。(a) 沿任意函数 $f\in C^k(U,V)$ 的拉回 $f^*\colon C^k(V,W)\ni g\mapsto g\circ f\in C^k(U,W)$ 是光滑的。

(b) 沿任意函数$g\in C^\infty(V,W)$ 的推前 $g_*\colon C^k(U,V)\ni f\mapsto g\circ f\in C^k(U,W)$ 是光滑的。(c) 沿任意函数$g\in C^{k+\ell}(V,W)$ 的推前 $g_*\colon C^k(U,V)\ni f\mapsto g\circ f\in C^k(U,W)$ 是 $C^\ell$。(d) 复合 $C^k(U,V)\times C^k(V,W)\ni(f,g)\mapsto g\circ f\in C^k(U,W)$ 是序列连续的。

证明。照例，$C^k(V,W)$ 上的拓扑是通过 $k$-喷流，由 $C(V,W\times\mathrm{Poly}^k(F,G))$ 上的紧开拓扑诱导而来。这里，$\mathrm{Poly}^k(F,G)=\prod_{j=1}^k L^j_{\mathrm{sym}}(F;G)$ 是定义 9.1 中所述的巴拿赫空间。

(a) 对于 $f\in C^k(U,V)$，拉回映射

$$f^*=C^k(g,W):C^k(V,W)\to C^k(U,W)\quad\text{is the restriction of the linear mapping}$$
$$f^*=C^k(g,G)\ :C^k(V,G)\ \to C^k(U,G),\quad\text{which is bounded, thus smooth.}$$

(b) 对于 $g\in C^\infty(V,W)$，推前 $g_*=C^k(U,g)\colon C^k(U,V)\to C^k(U,W)$ 根据引理 9.8 和迭代链式法则将光滑曲线映为光滑曲线。根据便捷分析的原理，[42], 该映射 $g_*$ 在通常意义下是 $C^\infty$ 的，因为空间 $C^k(U,F)$ 是巴拿赫空间的逆极限，因此 $c^\infty$-拓扑与通常拓扑一致。

(c) 我们先考虑 $\ell=0$。根据 Fa`a di Bruno 公式，对于任意 $m\leq k$,

$$\partial_x^m g(f(x))=\sum_{n=1}^{m}g^{(n)}(f(x))B_{m,n}(f^{(1)}(x),\dots,f^{(m-n+1)}(x)),$$

其中 $B_{m,\ n}$ 是贝尔多项式。函数

$$C(U,V)\ni f\mapsto j^n_f g\in C(U,\mathrm{Poly}^n(F,G))$$

is c在紧开拓扑下连续。因此，总体而言，存在一个连续映射

$$C^k(U,V) \ni f \mapsto g(f(x)) \in C^k(U,G).$$

这就证明了关于 $\ell = 0$ 的陈述。接下来我们考虑 $\ell = 1$。为了确定 $g_*$ 的候选导数，我们对任意 $x \in U$ 计算

$$d(\mathrm{ev}_x \circ g_*)(f)(h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(g(f(x)+th(x)) - g(f(x))\big) = g'(f(x))h(x). \tag{6}$$

因此，若 $dg_*$ 可微，则其导数由下式给出

$$\begin{array}{ccccc} C^k(U,V) & \longrightarrow & C^k(U,L(F,G)) & \longrightarrow & L(C^k(U,F),C^k(U,G)) \\ f & \longmapsto & g'\circ f & \longmapsto & (h \mapsto (g'\circ f).h) \end{array} \tag{7}$$

左侧箭头的连续性由已证明的情形 $\ell = 0$ 得出。右侧箭头的连续性可如下看出。对于任意紧集 $K \subseteq U$，函数

$$C^k(K,L(F,G)) \times C^k(K,F) = C^k(K,L(F,G)\times F) \xrightarrow{\mathrm{ev}_*} C^k(K,G)$$

是连续的，因为求值映射 ev 是线性的，而且微分与线性映射可交换。根据巴拿赫空间之间连续线性映射的指数律，这等价于函数的连续性

$$C^k(K,L(F,G)) \to L(C^k(K,F),C^k(K,G)).$$

由于限制 $C^k(U,\cdots) \to C^k(K,\cdots)$ 是连续的，因此可得函数的连续性

$$C^k(U,L(F,G)) \to L(C^k(U,F),C^k(K,G)).$$

由于 $K$ 是任意的，并且 $C^k(U,G)$ 相对于所有到 $C^k(K,G)$ 的限制所生成的始拓扑，因此可得该函数的连续性

$$C^k(U,L(F,G)) \to L(C^k(U,F),C^k(U,G)).$$

这证明了候选导数 (7) 在 Fr´echet 意义下的连续性。沿曲线 $s \mapsto (f+sh,h)$ 计算候选导数，得到一条连续曲线，其黎曼积分由 (6) 确定，且为

$$\int_0^t (g'\circ(f+sh))(h)ds = g\circ(f+th) - g\circ f.$$

由此可知， $g_*$ 在 $f$ 处沿方向 $h$ 存在 Gateaux 导数，导数为 $(g'\circ f)(h)$。总之，我们证明了 $g_*$ 连续 Fr´echet 可微。这就证明了情形 $\ell = 1$。最后，对于 $\ell > 1$，可利用归纳法，并用到如下事实： $g_*$ 的 Fr´echet 导数是一个推前 (7)。

(d) 我们先考虑 $k = 0$ 的情形；见 [30, 命题 13.9 (c)]。设 $f_n \to f$ 和$g_n \to g$ 属于紧开拓扑，设 $K$ 是 $U$ 的一个紧子集，并设 $O$ 是 $V$ 的一个开子集，且包含 $g(f(K))$。那么，集合 $L = f(K) \cup \bigcup_n f_n(K)$ 是紧的。因此，当 $n$ 充分大时， $g_n \circ f_n(K) \subseteq g_n(L) \subseteq O$。由于 $K$ 和 $O$ 是任意的， $g_n \circ f_n$ 在紧开拓扑下收敛到 $g \circ f$。这就证明了情形$k = 0$。如 (c) 中那样将此结果应用于 Fa`a di Bruno 公式，即可证明情形 $k > 0$。□

9.10 定义。流形之间的喷流。设 $M$ 和 $N$ 是流形，其图册分别为 $(U_i, u_i)$ 和 $(V_j, v_j)$。那么，$J^k(M,N)$ 是通过图表变换映射将开集 $J^k(u_i(U_i)\,v_j(V_j))$ 粘合在一起而得到的流形

$$J^k(u_{i'}(U_i\cap U_{i'}), v_{j'}(V_j\cap V_{j'}))\ni\sigma\mapsto$$
$$\mapsto j^k(v_j\circ v_{j^{-1}})\bullet\sigma\bullet j^k(u_{i'}\circ u_i^{-1})\in J^k(u_i(U_i\cap U_{i'}), v_j(V_j\cap V_{j'})).$$

9.11 定义。纤维丛截面的喷流。设 $M$ 是一个带有图册 $(U_i, u_i)$ 的流形，且 $p: N\to M$ 是以 $M$ 为底空间、标准纤维为 $S$、纤维丛图册为 $(U_i, \psi_i\colon N|U_i\to U_i\times S)$、图册变换为 $(\psi_{ij}=\mathrm{pr}_2\circ\psi_i\circ\psi_j^{-1}\colon U_i\cap U_j\times S\to S)$ 的纤维丛。那么 $J^k(E)$ 是通过图表变换映射将流形 $J^k(U_i,S)$ 粘合在一起而得到的流形

$$J^k(U_i\cap U_j,S)\ni\sigma\mapsto j^k(\psi_{ij}(\alpha(\sigma),\cdot))\bullet\sigma\in J^k(U_i\cap U_j,S).$$

源投影 $\alpha\colon J^k(N)\to M$ 定义了一个以 $M$ 为底空间的纤维丛。

## 10. 关于右不变函数的辅助结果

本节中发展的方法用于确定群 $G^k$ 在 $G$ 中可微元素上的半李群结构。在第10节中，$G$ 是一个单位元为 $e\in G$ 的巴拿赫右半李群，并且 $k\in\mathbb{N}$。

任意群元素所对应的左平移都是右不变函数。反过来，每个右不变函数都是某个群元素所对应的左平移。这引出了以下定义。

10.1 定义。右不变 $C^k$ 函数。函数 $f\colon G\to G$ 称为右不变的，如果 $f\circ\mu^y=\mu^y\circ f$ 对所有 $y\in G$都成立。对于任意 $k\in\mathbb{N}$，令 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$ 表示 $G$上的右不变 $C^k$ 微分同胚空间，并赋予其 $C(G, J^k(G,G))$的紧开拓扑。

本节的主要结果是定理 10.2，它证明了若 $G$ 具有右不变局部加法，则 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$ 是一个巴拿赫半李群。若不要求右不变性，这一结果便不成立。事实上，若 $G$ 是无限维的，则 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)$不是巴拿赫流形，而且复合映射 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)\times\mathrm{Diff}^{C^k}(G)\to\mathrm{Diff}^{C^k}(G)$ 是不连续的。

10.2 定理。右不变 $C^k$ 微分同胚。设 $G$ 是一个带有右不变局部加法的巴拿赫右半李群。那么，对于任意 $k\in\mathbb{N}$，空间 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$ 是一个带有右不变局部加法的巴拿赫半李群，并且在单位元处的求值 $e\in G$ 是光滑的：

$$\mathrm{ev}_e:\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G\ni f\mapsto f(e)\in G.$$

证明。由下文的引理 10.8 和 10.9 可得。 □

10.3 引理。右乘的局部有界性。存在一个包含于某个坐标图定义域内的 $U$ 的邻域，使得对于所有 $k\in\mathbb{N}$ 和所有紧子集 $K\subseteq G$，

$$\sup_{x\in K}\sup_{y\in U}(\|j^k_x\mu^y\|+\|j^k_x\mu^{y^{-1}}\|)<\infty,$$

相对于通过坐标图从 $T_eG$ 诱导的范数。

证明。令 $U$ 为 $e \in G$ 附近某个坐标图的定义域。通过该坐标图，可以将 $U$ 识别为巴拿赫空间 $E = T_eG$ 的一个开子集。必要时缩小 $U$，使得 $U$ 在 $E$ 中有界。利用反演和乘法的连续性，还可进一步得到 $U = U^{-1}$，并且 $\mu(U,U)$ 在 $E$ 中有界。于是，对于任意 $x \in U$，集合 $\{\mu^y(x) : y \in U\}$ 在 $E$ 中有界。由于 $C^\infty(U,E)$ 上的有界结构由点求值生成，集合 $\{\mu^y : y \in U\}$ 在 $C^\infty(U,E)$ 中有界。由于喷射延拓是有界线性映射，集合 $\{j^k\mu^y : y \in U\}$ 在 $C^\infty(U, J^k(E,E))$ 中有界。特别地，集合 $\{j^k_x\mu^y : x \in K, y \in U\}$ 在 $J^k(E,E)$ 中有界。该集合与 $\{j^k_x\mu^{y^{-1}} : x \in K, y \in U\}$ 相同，因为 $U = U^{-1}$。在赋范空间$J^k(E,E)$ 中的有界性，也可以等价地表述为引理中的形式。□

10.4 定义。右不变 $C^k$ 向量场。向量场 $X : G \to TG$ 称为右不变的，若对所有 $y \in G$, $X \circ \mu^y = T_e\mu^y \circ X$。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，令 $\mathfrak{X}_{C^k}(G)^G$表示 $G$上的右不变 $C^k$ 向量场空间，并赋予 $C(G, J^k(TG))$的紧开拓扑。

10.5 引理。右不变向量场的喷流。对于任意 $k \in \mathbb{N}$以及右不变的 $k$次可微向量场 $X$，其在 $y \in G$ 处的 $k$阶喷流由其在 $e \in G$ 处的 $k$阶喷流唯一确定，如下所示：

$$j^k_y X = (j^{k+1}_e \mu^y \odot X(e)) \bullet j^k_e X \bullet j^k_y \mu^{y^{-1}},$$

对于某些光滑二元运算 $\bullet$ 和 $\odot$，它们在第9节中定义。

证明。由 $X$的右不变性可知，

$$\begin{aligned} j^k_y X &= j^k_y X \bullet j^k_e \mu^y \bullet j^k_y \mu^{y^{-1}} = j^k_e(X \circ \mu^y) \bullet j^k_y \mu^{y^{-1}} \\ &= j^k_e(T\mu^y \circ X) \bullet j^k_y \mu^{y^{-1}} = j^k_{X(e)} T\mu^y \bullet j^k_e X \bullet j^k_y \mu^{y^{-1}} \\ &= (j^{k+1}_e \mu^y \odot X(e)) \bullet j^k_e X \bullet j^k_y \mu^{y^{-1}}. \end{aligned}$$ □

10.6 推论。右不变向量场喷流的界。设 $k \in \mathbb{N}$，且 $X$ 和 $Y$ 是 $G$上的 $k$次可微右不变向量场。那么，对于 $e \in G$周围某个坐标图定义域内的任意$y$，有

$$\|j^k_y X - j^k_y Y\| \le \|j^k_e X - j^k_e Y\| p(\|j^k_e X\|, \|j^k_e Y\|, \|j^{k+1}_e \mu^y\|, \|j^k_y \mu^{y^{-1}}\|),$$

*for* 某个多项式 $p$ 仅依赖于 $k$，其范数由坐标图 $T_eG$ 诱导 .

证明。将引理 9.3 和引理 9.5 的估计应用于引理 10.5 中的表达式即可得出此结论。□

10.7 引理。右不变 $C^k$ 向量场。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，空间 $\mathfrak{X}_{C^k}(G)^G$关于该范数是巴拿赫空间

$$\|X\| := \|X(e)\|_{T_eG} + \cdots + \|d^k X(e)\|_{L^{(k)}(T_eG,\ldots,T_eG;T_eG)}.$$

证明。$k$-喷流上的紧开拓扑强于范数拓扑。为了证明它与范数拓扑一致，设 $(X_n)$ 是一个在范数意义下收敛到 $X \in \mathfrak{X}_{C^k}(G)^G$ 的序列。由引理 10.3，存在 $e \in G$ 的一个邻域 $U$，在该邻域内，右平移在紧集上一致有界，具体含义如该引理所述。由此可得

根据推论 10.6，$j^k X_n$ 在 $U$ 中于紧集上一致收敛到 $j^k X$。这等价于在 $C(U, J^k(G,G))$ 上的紧开拓扑中收敛。类似引理 10.5，利用右平移可得：对任意 $y \in G$，在 $C^k(\mu^y(U)$ $J^k(G,G))$ 上的紧开拓扑中收敛。由于集合 $\mu^y(U)$ 构成 $G$ 的一个开覆盖，故在 $C^k(G,$ $J^k(G,G))$ 上的紧开拓扑中收敛。根据定义，这意味着在 $\mathfrak{X}_{C^k}(G)$ 中收敛。类似的论证表明范数拓扑是完备的：对于任意柯西序列 $(X_n)$，由引理 10.3 和推论 10.6 可知，$\|j^k X_n - j^k X_m\| \to 0$ 在 $U$ 中于紧集上一致收敛，这意味着存在一个极限 $X \in \mathfrak{X}_{C^k}(G)$。□

10.8 引理。右不变 $C^k$ 微分同胚的巴拿赫流形。设 $G$带有右不变局部加法。那么，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，空间 $\mathbf{Diff}_{C^k}(G)^G$ 是带有右不变局部加法的巴拿赫流形。对于任意 $g \in \mathbf{Diff}_{C^k}(G)^G$，拉回 $g_*\colon \mathbf{Diff}_{C^k}(G)^G \ni f \mapsto f \circ g \in \mathbf{Diff}_{C^k}(G)^G$是光滑的。此外，求值映射 $\mathbf{ev}_e : \mathbf{Diff}_{C^k}(G)^G \to G$ 是光滑的。

证明。右不变 $C^k$ 函数 $f\colon G \to G$ 属于 $\mathbf{Diff}_{C^k}(G)^G$，当且仅当 $T_e f$ 连续可逆。事实上，由右不变性可知，这意味着 $T_x f$ 在所有 $x \in G$处均可逆；再由反函数定理可知，这意味着 $f^{-1}$ 是 $C^k$。因此，$\mathbf{Diff}_{C^k}(G)^G$是右不变 $C^k$ 函数集合 $C^k(G,G)^G$ 的开子集，该集合赋有 $C(G, J^k(G,G))$的紧开拓扑。接下来，我们证明右不变 $C^k$ 函数集合$C^k(G,G)^G$是一个巴拿赫流形。设 $\tau\colon TG \supseteq U \to G$表示 $G$上的局部加法，设 $\pi\colon TG \to G$ 为典范投影。回顾引理 10.7，右不变 $C^k$ 向量场空间 $\mathfrak{X}_{C^k}(G)^G$ 是巴拿赫空间，并定义开子集

$$V = \{X \in \mathfrak{X}_{C^k}(G)^G : X(e) \in U\}.$$

对于任意 $f \in C^k(G,G)^G$ 和 $X \in V$，函数 $\tau \circ X \circ f$是右不变函数，且 $C^k$ 是由 $C^k$ 函数复合而成。因此，下述映射定义良好：

$$v_f : V \to C^k(G,G)^G, \qquad X \mapsto \tau \circ X \circ f.$$

它是单射，因为右不变函数由其在单位元处的取值唯一确定。令 $U_f = v_f(V)$。那么，$U_f$由所有满足 $(h \circ f^{-1}(e)\ e) \in (\tau,\pi)(U)$ 的 $h \in C^k(G,G)^G$ 组成。由于 $(\tau,\pi)(U)$ 是 $G \times G$ 的一个开子集，可知 $U_f$ 是开集。$f$ 附近的坐标图定义为 $u_f = v_f^{-1}\colon U_f \to V$，这是一个同胚。对于任意 $g \in C^k(G,G)^G$，集合 $u_f(U_f \cap U_g)$ 由所有满足 $(\tau \circ X \circ f \circ g^{-1}(e)\ e)$ 包含于 $(\tau,\pi)(U)$ 的 $X \in V$ 组成。因此，$u_f(U_f \cap U_g)$ 在 $V$ 中是开集。由对称性，$u_g(U_f \cap U_g)$ 也是开集。坐标图变换由下式给出

$$u_f \circ u_g^{-1} : \begin{cases} u_g(U_f \cap U_g) \to u_f(U_g \cap U_g), \\ \qquad X \mapsto (\tau,\pi)^{-1} \circ (\tau \circ X \circ g \circ f^{-1}, \mathrm{Id}_G). \end{cases}$$

右端是一个 $C^k$ 向量场，它根据引理 9.9 光滑地依赖于 $C^k$ 向量场 $X$。因此，图册变换是光滑的，由此可知 $C^k(G,G)^G$是一个光滑巴拿赫流形。我们在 $C^k(G,G)^G$上定义一个右不变局部加法：将任意满足 $X(e) \in U$的 $X \in T$微分同胚群$C^k(G)^G$映射到 $\tau \circ X \in$微分同胚群$C^k(G)^G$；容易

验证这具有所需的性质。在坐标图$u_f$和$u_{g\circ f}$中，右复合 $g \in C^k(G,G)^G$ 在 $V$上是恒等映射，

$$u_{f\circ g}(\mu^g(u_f(X))) = u_{f\circ g}(\mu^g(\tau \circ X \circ f)) = u_{f\circ g}(\tau \circ X \circ f \circ g) = X,$$

因此是光滑的。此外，求值映射也是光滑的，这可从坐标图 $u_f$ 中看出：

$$\mathrm{ev}_e \circ u_f^{-1}(X) = \tau \circ X \circ f(e).$$

证明至此完成。 □

**10.9** 引理。右不变 $C^k$ 微分同胚的拓扑群。设 $G$ 带有右不变局部加法。那么，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，空间 $\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G$ 是一个拓扑群。

证明。复合映射 $\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G \times \mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G \to \mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G$ 根据引理 9.9.(d) 是序列连续的。由于 $\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G$ 在局部同胚于可度量化空间 $\mathfrak{X}_{C^k}(G)^G$，而这由引理 10.7 得出，因此序列连续性蕴含连续性。

我们断言，反演 $\mathrm{Diff}_{C^0}(G)^G \to \mathrm{Diff}_{C^0}(G)^G$ 在紧开拓扑下是序列连续的（因而也是连续的）。设 $f_n \to f$ 是 $\mathrm{Diff}_{C^0}(G)^G$ 中的一个收敛序列。那么，根据反演 $G \to G$ 的连续性，$f_n(e) \to f(e)$，且 $f_n(e)^{-1} \to f(e)^{-1}$。由右不变性，$f^{-1}(e) = f(e)^{-1}$，且 $f_n^{-1}(e) = f_n(e)^{-1}$。因此，$f_n^{-1}(e) \to f^{-1}(e)$。根据引理 10.3，在 $U$ 中，右平移在紧集上一致有界，其中 $U$ 是 $e \in G$ 的一个充分小的图表定义域。因此，$f_n^{-1} \to f^{-1}$ 在 $U$ 的紧集上一致收敛。等价地，$f_n^{-1} \to f^{-1}$ 在 $U$ 上按紧开拓扑收敛。通过右平移，对于任意 $y \in G$，$f_n^{-1} \to f^{-1}$ 在 $\mathrm{Diff}\ \mu^y(U)$ 上按紧开拓扑收敛。由于集合 $\mu^y(U)$ 构成 $G$ 的一个开覆盖，这意味着在整个 $G$ 上按紧开拓扑收敛。断言得证。

我们断言，反演 $\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G \to \mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G$是序列连续的（因而也是连续的）。设 $f_n \to f$ 是 $\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G$中的一个收敛序列，并设 $K$ 是 $G$的一个紧子集。由于 $f_n^{-1} \to f^{-1}$属于 $\mathrm{Diff}_{C^0}(G)^G$，集合 $L = f^{-1}(K) \cup \bigcup_n f_n^{-1}(K)$ 是紧的。我们假设 $K$ 和 $L$ 包含在坐标图定义域中。无损一般性地可以作此假设，因为任意给定的紧集都可以表示为有限个紧集的并，并且对于充分大的 $n$，所需性质在这些紧集上成立。在坐标图中，$f_n^{-1}$在 $K$上一致收敛于 $f^{-1}$，且 $j^k f_n$ 在 $L$上一致收敛于 $j^k f$。于是，$j^k_{f_n^{-1}} f_n$ 在 $K$ 上一致收敛于 $j^k_{f^{-1}} f$，因为

$$\|j^k_{f_n^{-1}(x)} f_n - j^k_{f^{-1}(x)} f\| \le \|j^k_{f_n^{-1}(x)} f_n - j^k_{f_n^{-1}(x)} f\| + \|j^k_{f_n^{-1}(x)} f - j^k_{f^{-1}(x)} f\|$$

其中，第一个加数关于 $x \in K$ 一致趋于零，因为 $j^k f_n$ 在 $L$上一致趋于 $j^k f$；第二个加数关于 $x \in K$ 一致趋于零，因为 $j^k f$ 在 $L$上一致连续。根据引理 9.7，喷射反演是连续的，因而在紧集上一致连续，所以 $(j^k_{f_n^{-1}} f_n)^{-1}$ 收敛于 $(j^k_{f^{-1}} f)^{-1}$

在 $K$ 上一致收敛。等价地，根据喷射反演的定义 9.6，$j^k(f_n^{-1})$ 在 $K$ 上一致收敛到$j^k(f^{-1})$。这就证明了该断言。□

**10.10** 引理。右不变 $k$-喷流的巴拿赫流形。设 $G$ 具有右不变局部加法。那么，集合

$$J^k_e(G,G)^G = \left\{ j^k_e f : f \in \mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G \right\}$$

是 $J^k_e(G,G)$ 的子流形，并且 $\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G$ 与 $J^k_e(G,G)^G$ 微分同胚，其对应映射为

$$j^k_e : \mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G \ni f \mapsto j^k_e f \in J^k_e(G,G)^G.$$

证明。我们将在任意给定的 $\sigma = j^k_e f \in J^k_e(G,G)^G$ 周围构造一个子流形图。令 $U$ 为右不变局部加法 $\tau$: $TG \supseteq U \to G$ 的定义域，令 $U^k_f$ 为所有满足 $(x, f(e)) \in (\tau,\pi)(U)$ 的 $\rho = (e,x,p) \in J^k_e(G,G)$ 所成的开集，并令 $V^k_f$ 为所有满足 $X \in U$ 的 $\eta = (f(e)\ X, q) \in J^k_{f(e)}(TG)$ 所成的开集。那么，函数

$$u^k_f : U^k_f \ni \rho \mapsto j^k(\tau,\pi)^{-1} \bullet (\rho, j^k_e f) \bullet j^k_{f(e)} f^{-1} \in V^k_f$$

是光滑的，且其逆函数也光滑

$$(u^k_f)^{-1} : V^k_f \ni \eta \mapsto j^k\tau \bullet \eta \bullet j^k_e f \in U^k_f.$$

此外， $u^k_f$ 在右不变喷流上的限制如下:

$$u^k_f : U^k_f \cap J^k_e(G,G)^G \to V^k_f \cap J^k_{f(e)}(TG)^G.$$

根据引理 10.7， $\mathfrak{X}_{C^k}(G)^G$ 是 $\mathfrak{X}_{C^k}(G)$ 的闭线性子空间；由于这些空间与喷射空间同构，$J^k_{f(e)}(TG)^G$ 是 $J^k_{f(e)}(TG)$ 的闭线性子空间。因此， $u^k_f$ 是 $j^k_e f \in J^k_e(G,G)^G$ 周围的子流形图，由此我们证明了 $J^k_e(G,G)^G$ 是 $J^k_e(G,G)$ 的子流形。

剩下要证明的是，该子流形与 $\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G$ 微分同胚。在引理 10.8 中构造的 $\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G$ 坐标图中，

$$u_f : C^k(G,G)^G \supseteq U_f \to V_f \subseteq \mathfrak{X}_{C^k}(G)^G,$$

映射 $j^k_e$ 是将右不变向量场与其在 $e \in G$ 处的 $k$-阶喷流相对应的映射:

$$u^k_f \circ j^k_e \circ u_f^{-1} : V_f \ni X \mapsto j^k_{f(e)} X \in V^k_f \cap J^k_{f(e)}(TG)^G.$$

根据引理 10.7，这是一个连续线性映射，且其逆映射连续。 □

**10.11** 引理。推前。设 $G$ 带有右不变局部加法。对于任意 $k$、$\ell \in \mathbb{N}$ 和 $f \in C^{k+\ell}$（$G$、$G$）$^G$，沿 $f$ 的推前是一个 $C^\ell$ 函数

$$\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G \ni g \mapsto f \circ g \in \mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G.$$

证明。根据引理 10.10，通过将右不变函数与其在 $e \in G$ 处的 $k$-阶喷流相对应，$\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G$ 与 $J^k_e(G,G)$ 微分同胚。因此，只需证明函数

$$J^k_e(G,f) : J^k_e(G,G)^G \ni \sigma \mapsto j^k_{\beta(\sigma)} f \bullet \sigma \in J^k_e(G,G)^G$$

是 $C^\ell$。这里， $J^k_e(G,\cdot)$ 被视为一个协变函子，而 $J^k_e(G,f)$ 是该函子作用于态射 $f$ 后所得的结果。

我们声称 $J^k_e(G,f)$ 是 Gateaux-$C^\ell$，也就是说，该映射

$$T^\ell J^k_e(G,f) : T^\ell J^k_e(G,G)^G \to T^\ell J^k_e(G,G)^G \tag{8}$$

是连续的。函子 $T^\ell$ 和 $J^k_e(G,\cdot)$ 在自然同构$\kappa$意义下可交换，这称为典范翻转。抽象地说，至少在有限维情形下，这是

这些函子保持乘积 [40, 的结果（第 36–37], 节），但也可以轻易地手动验证。因此，该断言等价于连续性

(9)
$$J^k_e(G,T^\ell f)=\kappa^{-1}\circ T^\ell J^k_e(G,f)\circ\kappa: J^k_e(G,T^\ell G)^G\ni\sigma\mapsto j^k_{\beta(\sigma)}T^\ell f\bullet\sigma\in J^k_e(G,T^\ell G)^G.$$

这由喷流复合的连续性以及 $j^kT^\ell f$ 的连续性得出。因此，我们已经证明了 $J^k_e(G,f)$ 是 Gateaux-$C^\ell$，如所声称的。

´echet-$C^\ell$ 性质 $J^k_e(G,f)$ 等价于函数 (8) 在具有紧基的有界子集上的一致连续性，即在丛 $\pi$ 的子集 $B$ 上的一致连续性：$T^\ell J^k_e(G,G)^G\to J^k(G,G)^G$，其中 $\pi(B)$ 是紧的，并且 $B$ 的垂直分量在任意丛图中都是一致有界的。与前面类似，通过函子 $T^\ell$ 与 $J^k_e(G,\cdot)$ 的交换，这等价于函数 (9) 在具有紧基的有界子集上的一致连续性。这是以下事实的结果：根据引理 9.3，喷流复合在具有紧基的有界子集上一致连续；并且映射 $j^kT^\ell f$ 在具有紧基的有界子集上一致连续，因为 $f$ 在 $C^{k+\ell}$ 的意义下是 ´echet-□。

至此，我们完成了对 $G$ 上右不变 $C^k$ 微分同胚的研究。接下来，我们通过将 $G$ 中任意 $C^k$ 元素$x\in G^k$ 与左平移 $\mu_x\in\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$ 相对应，将这些结果推广到 $G$ 中 $C^k$ 元素所成的群。

定理 3.4 的证明。左乘是一个双射

$$G^k\ni x\mapsto\mu_x\in\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G,$$

其逆映射是求值映射

$$\mathrm{Diff}_{C^k}(G)^G\ni f\mapsto f(e)\in G^k.$$

通过这个双射，$G^k$ 中的乘法对应于 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$ 中的复合，$G^k$ 中的反演对应于 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$ 中的反演，而包含映射 $G^k\to G$ 对应于 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G\to G$ 在 $e\in G$ 处的求值映射。因此，将该双射声明为微分同胚后，由引理 10.8、10.9 和 10.11 可知，$G^k$ 是一个巴拿赫半李群，且光滑地包含于 $G$ 中，并且 $G^{k+\ell}$ 包含于 $(G^k)^\ell$ 中。此外，切空间 $T_eG^k$ 与切空间 $T_e\,\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$ 相对应，也就是说，它与 $G$ 上的右不变 $C^k$ 向量场空间相对应。在这一对应下，$G^k$ 上的右不变局部加法由限制 $G$ 上的右不变局部加法得到。在局部定义的图 $\tau^{-1}:G\to T_eG$ 和 $(\tau,\tau)^{-1}\circ(\pi,\tau):TG\to T_eG\times T_eG$ 中，映射 $\tau\colon TG\to G$ 是连续线性的，并且限制为局部定义的线性映射 $\tau:TG^k\to G^k$。根据闭图定理，限制映射 $\tau\colon TG^k\to G^k$ 在局部坐标图中是连续线性的，因而是光滑的。□

引理 3.7 的证明。$\mathrm{Diff}_{C^\infty}(G)^G$ 是一个 ILB 流形，因为引理 10.8 中为 $\mathrm{Diff}_{C^0}(G)^G$ 构造的坐标图和图册变换，限制后即为 $\mathrm{Diff}^{C^k}(G)^G$，$k\in\mathbb{N}$的坐标图和图册变换。乘法 $G^\infty\times G^\infty\to G^\infty$ 是光滑的，因为复合映射 $\mathrm{Diff}_{C^\infty}(G)^G\times\mathrm{Diff}_{C^\infty}(G)^G\to\mathrm{Diff}_{C^\infty}(G)^G$ 根据便捷微积分 [42,推论 3.13]是光滑的。□

## References

[1] Abbati, M. C., Cirelli, R., Mani`a, A., Michor, P.：主丛自同构的李群。J. Geom. Phys. **6**, 215 235 1989 0692 58010 1040392 – ( ) Zbl . MR Abraham, R., Marsden, J. E., [2] Ratiu, T.：流形、张量分析及其应用。第 3 版，75，Springer Science & Business Media ( 2012 0875 58002 0960687 ) Zbl . MR Arnold, V.：论无限维李群的微分几 [3] 何及其在理想流体流体动力学中的应用。Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16, 319–361 (1966) Zbl 0148.45301 MR 202082[4] Arnold, V. I., Khesin, B. A.：流体动力学中的拓扑方法。应用数学科学丛书 125, 1998 0902 76001 1612569 施普林格出版社，纽约 ( ) Zbl . MR Atkin, [5] C. J.：Hopf-Rinow定理在无限维情形下不成立。Bull. London Math. Soc. 7, 261 266 1975 0374 58006 – ( ) Zbl . MR 400283 [6] Atkin, C. J.：无限维空间中的测地完备性与度量完备性。Hokkaido Math. J. 26, 1–61 ( 1997 0871 58006 1432537 ) Zbl . MR Baer, R.：群及其同构的扩张。Math. Zeit. 38, 375–416 ( [7] 1934) Zbl 0009.01101[8] Bauer, M., Bruveris, M., Cismas, E., Escher, J., Kolev, B.：伪微分惯性算子对应的EPDiff方程的适定性。J. Differential Equations 269, 288–325 (2020) Zbl 1437.58013 MR 4081525[9] Bauer, M., Bruveris, M., Harms, P., Michor, P. W.：测地线方程为 KdV 方程的黎曼度量的测地距离消失。Ann. Global Anal. Geom. 41, 461–472 (2012) Zbl 1246.58005 MR 2891297[10] Bauer, M., Bruveris, M., Harms, P., Michor, P. W.：函数演算的光滑扰动及其在度量空间黎曼几何中的应用。Communications in Mathematical Physics **389**, 899 931 2022 1482 58005 4369721 – ( ) Zbl . MR Bauer, M., Bruveris, M., Michor, P. W.：实 [11] 直线上微分同胚群上的一阶齐次Sobolev度量。J. Nonlinear Sci. **24**, 769 808 2014 1309 35064 3265197 – ( ) Zbl . MR Bauer, [12] M., Bruveris, M., Michor, P. W.：形状空间与微分同胚群几何概述。J. Math. Imaging Vision **50**, 60 97 2014 1310 58005 3233135 – ( ) Zbl . MR Bauer, M., [13] Escher, J., Kolev, B.： $\mathbb{R}^d$上的分数阶EPDiff方程的局部与整体适定性。J. Differential Equations **258**, 2010 2053 2015 1323 58007 3302529 – ( ) Zbl . MR Bauer, [14] M., Harms, P., Michor, P. W.：浸入空间上的分数阶Sobolev度量。Calc. Var. Partial Differential Equations **59**, 62, 27 2020 1441 58010 4073208 论文编号，页数 ( ) [15] Zbl . MR Bauer, M., Harms, P., Preston, S. C.：距离消失现象与 SQG 的几何方法。Arch. Ration. Mech. Anal. **235**, 1445 1466 2020 1434 35084 4065645 – ( ) Zbl . MR Benyamini, [16] Y., Lindenstrauss, J.：几何非线性泛函分析。美国数学会 ( 48, 1998 0946 46002 1727673 ) Zbl . MR Birkhoff, G.：解析群。Transactions of the American [17] Mathematical Society 43, 61–101 ( 1938 0018 20502 ) Zbl . Bruveris, M.：Sobolev 空间之间映射的正则性。Annals of Global Analysis and Geometry [18] **52**, 11 24 2017 1373 58005 3669789 – ( ) Zbl . MR Bruveris, M., Vialard, F.-X.：关于微分同胚群的完备性。 [19] J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **19**, 1507 1544 2017 1370 58003 3635359 – ( ) Zbl . MR Ebin, D. G., [20] Marsden, J.：微分同胚群与不可压缩流体的运动。Ann. of Math. ( 2 **92**, 102 163 1970 0211 57401 271984 ) – ( ) Zbl . MR Eells, J.：整体分析的一个框架。 [21] **72**, 571 807 Bull AMS – ( 1966 0191 44101 0203742 ) Zbl . MR Eilenberg, S., MacLane, S.：抽象群中的上同调理论，II。带有非阿贝尔核的群扩张。Ann. Math. ( [22] 2 **48**, 326 341 1947 0029 34101 0020996 ) – ( ) Zbl . MR Ekeland, I.：无限 [23] 维情形下的Hopf-Rinow定理。J. Differential Geometry 13, 287–301 ( 1978 0393 58004 540948 ) Zbl . MR Eliashberg, Y., Polterovich, L.：哈密顿微分同胚群上的双不变度量。International Journal of Mathematics 04, 727–738 [24] (1993) Zbl 0795.58016 MR 1245350

[25] Eliasson, H. I.：《映射流形的几何》。J. Differential Geometry 1, 169–194 (1967) Zbl 0163.43901 MR 0226681[26] Enflo, P.：乘法在一侧可微或线性的拓扑群。Mathe- matica Scandinavica
**24**, 195 207 1969 0205 32801 0259960 – ( ) Zbl . MR Faa di Bruno：关于一种新的微分
[27] `
计算公式的注记。The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 1, 359–360 (1857) [28] G°arding, L.：关于李群连续表示的注记。Proceedings of the National Academy of Sciences
**33**, 331 332 1947 0031 05703 0021943 – ( ) Zbl . MR Gay-Balmaz, F., Ratiu, T. S.：《普遍
[29]
Teichm¨uller 空间的几何与 Euler–Weil– Petersson 方程》。Advances in Mathematics
**279**, 717 778 2015 1320 32018 3345193 – ( ) Zbl . MR
[30] ¨
Glockner, H.：向量值函数的平滑算子与延拓算子。arXiv:2006.00254 (2020年) [31] Gl¨ockner, H., Neeb, K.-H.：《无限维李群：一般理论与主要例子》。施普林格 [32] Goodman, R. W.：李群表示的解析向量与整向量。Transactions of the American Mathematical Society **143**, 55 76 1969 0189 14102 0248285 –
[33]
( ) Zbl . MR Grossman, N.：没有共轭焦点的希尔伯特流形。Proceedings of the American Math- ematical Society
**16**, 1365 1371 1965 0135 40204 0188943 – ( ) Zbl . MR Hochschild, G.：李群的群扩张 I、
[34]
II。Ann Math. 54, 96–109; 537–551 (1951) Zbl 0045 30802 0041858, 0043789 . MR Hochschild, G.：有限型
[35]
上同调类与李代数的有限维核。Am. J. Math. **76**, 763 778 1954 0057 27204 0065547 – ( ) Zbl .
MR Hochschild, G., Serre, J.-P.：群扩张的上同调[36]。Trans. AMS 74, 110–134 (1953) Zbl 0050.02104 MR 0052438
[37] 1981 0466 46001 0632257 Jarchow, H.：局部凸空间。
[38]
Teubner ( ) Zbl . MR Jerrard, R., Maor, C.：微分同胚群上右不变度量的测地距离：临界索伯列夫指数。Ann. Glob. Anal. Geom. **56**, 351 360 2019 1423 58005 3951750 – ( ) Zbl .
[39]
MR Jerrard, R., Maor, C.：微分同胚群上右不变索伯列夫度量的测地距离消失。Ann. Glob. Anal. Geom.
**55**, 631 656 2019 1427 58002 3995369 – ( ) Zbl . MR Kolar, I.,
[40] ´ ´
Michor, P. W., Slovak, J.：《微分几何中的自然运算》。Springer Science & Business Media (
1993, 2013 0782 53013 1202431 ) Zbl . MR Kolev, B.：EPDiff方程的局部适定性：综述。
[41]
Journal of Geometric Mechanics **9**,167 189 2017 1362 58003 3651315 – ( ) Zbl . MR Kriegl, A., Michor,
P. W.：《整体分析的便利框架》。美国数学会，普罗维登斯 [42] ( 1997 0889 58001 1471480 )
Zbl . MR Kriegl, A., Michor, P. W., Rainer, A.： $\mathbb{R}^n$上的微分同胚群[43]奇异动物园。Ann. Glob. Anal. Geom.
**47**, 179 222 2015 1316 58008 3313140 – ( ) Zbl . MR Kriegl, A., Michor, P. W., Rainer, A.：测
[44]
试函数空间与微分同胚群的指数律。Indagationes Mathematicae
**27**, 225 265 2016 1346 46019 3437748 – ( ) Zbl . MR Lang,
[45] 191,
S.：《微分几何基础》。Graduate Texts in Mathematics Springer- Verlag, 纽约 (
1999 0932 53001 1666820 ) Zbl . MR Marquis, T., Neeb, K.-H.：半李群。Transform.
[46]
Groups 23, 801–840 (2018) Zbl 1407.22004 MR 3836195[47] McAlpin, J. H.：无限维流形与莫尔斯理论。博士论文，哥伦比亚大学 ( 1965 2614999 ) MR Micheli, M., Michor, P. W., Mumford, D.：以余度量表示的截面曲率及其在地标黎
[48]
曼流形中的应用。SIAM J. Imaging Sci. 5, 394–433 (2012) Zbl 1276.37047 MR 2902666[49] Micheli, M., Michor, P. W., Mumford, D.：微分同胚群上的索伯列夫度量与子流形空间的导出几何。Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 77, 109–138 (2013) Zbl 1280.58005 MR 3098790[50] Michor, P. W.：酉表示的矩映射。Annals of Global Analysis and Geometry 8, 299–313 (1990) MR 0729.22016 MR 1089239

[51] 数学研究生读物第93卷，微分几何专题会，罗德岛州普罗维登斯（ 2008 1175 53002 2428390 ）Zbl . MR Michor, P. W.：连续介质力学中的映射流形。载于：几何连续介质力学，连续介质力学进展第42卷，Birkh¨auser Basel，3–75（2020年）Zbl 1445.58002 MR 4291941[52] Michor, P. W., Mumford, D.：子流形空间与微分同胚群上的测地距离消失。Doc. Math. **10**, 217 245 2005 1083 58010 2148075 – ( ) Zbl . MR Michor, P. W., Mumford, D.：$\mathbb{R}^n$上的微分同胚群动物园。Ann. Global Anal. Geom. 44, 529 540 2013 1364 22009 – ( ) Zbl . MR 3132089[54] [55] Neeb, K.-H.：无限维李群的中心扩张。Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52**, 1365 1442 2002 1019 22012 1935553 – ( ) Zbl . MR Neeb, K.-H.：无限维李群的阿贝尔扩张。载于：[56] 数学论文集，第XV辑，Trav. Math. 15, 69 194 2004 1079 22018 2143422 卢森堡大学，卢森堡，– ( ) Zbl . MR Neeb, K.-H.：无限维李群的非阿贝尔扩张。Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57**, 209 271 2007 1158 17308 2316238 – ( ) Zbl . MR Neeb, K.-H.：关于无限维李群表示的可微向量。《泛函分析杂志》 **259**, 2814 2855 2010 1204 22016 2719276 – ( ) Zbl . MR Omori, H.：无限维李群。美国数学会（1997）Zbl 0871.58007 MR 1421572[59] 158,[60] Palais, R. S.：整体非线性分析基础。W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹（ 1968 0164 11102 0248880 ）Zbl . MR Riemann, B.：关于几何基础中的假设。由Jürgen Jost编辑，并附历史与数学评论。Birkh¨auser（2016）Zbl 1343.01024 MR 3469866[61] [62] Schreier, O.：¨关于群的扩张 I。Monatsh. Math. Physik 34, 164–180（1926）Zbl JFM 52.0113.04[63] Schreier, O.：¨关于群的扩张 II。Hamburger Abh. 4, 321–346（1926）Zbl JFM 52.0113.04[64] Segal, I.：乘法在一侧可微的拓扑群。《美国数学会通报》 **52**, 481 487 1946 0061 04411 0017284 – ( ) Zbl . MR Srivastava, A., Klassen, E. P.：函数型与形状数据分析。施普林格统计学丛书，施普林格出版社，纽约（ 2016 1376 62003 3821566 ）Zbl . MR Wockel, C.：主丛对称群上的李群结构。J. Funct. Anal. 251, 254 288 2007 1130 22010 – ( ) Zbl . MR 2353707[65] [66] [67] Younes, L.：形状与微分同胚。第二版，应用数学科学丛书第171卷，施普林格，柏林（2019）Zbl 1423.53002 MR 3932112

Florida State University, Tallahassee and University of Vienna, Vienna*Email address*: bauer@math.fsu.edu

Research Industrial Systems Engineering (RISE) Schweiz AG, 3053 Münchenbuchsee,Switzerland*Email address*: philipp.harms@rise-world.com

University of Vienna, Vienna
*Email address*: peter.michor@univie.ac.at