arXiv:2302.01632v1 [math.OC] 3 Feb 2023

希尔伯特空间 ℓ^2中的线性微分博弈

MARKS RUZIBOEV、KHUDOYORMAMAYUSUPOV、GAFURJAN IBRAGIMOV 和 ADKHAM KHAITMETOV

Abstract. 本文研究双人追逃微分博弈及时间最优零控制问题。求得了相应零控制问题的最优控制，并构造了一种追捕者策略，以保证追击问题得以解决。

1. Introduction and statement of the problem

设对每个 $i \in \mathbb{N}, d_i \times d_i$，给定矩阵 A_i，满足 $2 \leq d_i \leq d$，其中 $d \geq 2$ 为固定整数。我们考虑由下列可数个微分方程组成的系统

$$\dot{x}_i = A_i x_i + u_i - v_i, x_i(0) = x_{i0} \in \mathbb{R}^{d_i}, i = 1, 2, ..., \tag{1}$$

其中，u_i 是追捕者的控制参数，v_i 是逃逸者的控制参数；两者都假设为取值于 $\mathbb{R}^{d_i}$ 的局部可积函数，对所有满足某些约束的 $i \in \mathbb{N}$ 均成立（见定义 2.2）。为方便起见，我们构造列向量$x = (x_1^*, x_2^*, \dots)^*$，其中 x_i^*是 $x_i \in \mathbb{R}^{d_i}$的转置，对 $i = 1$、2、$\dots$[1]均成立。假设$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots,) \in \ell^2$，即$\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \|x_{i0}\|^2 < +\infty$，其中 $\|x_{i0}\|$ 是 $x_{i0} \in \mathbb{R}^{d_i}$的欧几里得范数。令 $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, ...)$为作用于 $\mathbb{R}^\infty$ 上的算子，其作用定义为：对 $x \in \mathbb{R}^\infty$，$Ax = \mathrm{diag}([A_1 x_1]^*, [A_2 x_2]^*, \dots)$。我们希望为适当类别的矩阵 A_i定义 e^{tA}。这里的问题在于，A 未必在 ℓ^2 上定义，甚至未必在 ℓ^∞ 上定义（即对于 $x \in \ell^\infty$，Ax 未必属于 ℓ^∞，因为当 $n \to \infty$时 $|A_i x_i|$ 可能趋于无穷大）。因此，我们必须证明对于 ℓ^2中的初始点，上述柯西问题的解存在。

2010 年数学主题分类。主要分类：49N05、49N75、91A23、91A24、93C15。关键词和短语：无穷系统、控制函数、追捕者、逃逸者。[1]实际上，我们只是将向量 $x_1, x_2, \dots$ 依次向下排列，从而得到一个无穷向量。下文采用这一观点，这大大简化了记号。

我们考虑通常由两个独立问题组成的追逃微分博弈。若存在追捕者的控制函数 u：$\mathbb{R} \to \ell^2$，使得对于 v 的任意控制 $\mathbb{R} \to \ell^2$，方程 (2) 的解 $x : \mathbb{R} \to \ell^2$ 对任意 x_0 均满足 $x(T) = 0$，则追捕博弈可在时间 $T > 0$ 内完成。在这种情况下，T 称为保证追捕时间。下面我们给出对 u、v施加的精确条件。

这一设定的动机源于演化型偏微分方程的控制问题。在这类问题中，利用适当的控制问题分解（例如参见 $[4,5,8–10]$），x_i可以是未知函数的傅里叶系数，而 u_i 和 v_i 则可以是控制参数的傅里叶系数。此外，作为巴拿赫空间中的受控系统，这一设定本身也具有独立研究价值（相关研究例如参见 $[6,13]$）。无穷维系统的微分博弈也已得到充分研究。例如，当系统的演化由抛物型方程支配时，$[21–23]$, 研究了追逃问题，其中偏微分方程问题被化约为一个常微分方程无穷系统。$[3,17–19,23]$研究了有多个参与者的追逃博弈。

对我们而言，系统 (1) 是一个玩具模型：它由可数多个质点组成，这些质点在 $\mathbb{R}^n$ 中做简单运动，彼此之间没有相互作用。这是为了在更自然的设定下理解弱相互作用可控粒子系统而迈出的第一步，例如研究 $[15]$中所考虑系统的控制问题。

2. Main results

正如我们先前指出的，我们必须论证下列柯西问题解的存在性

$$\dot{x}_i = A_i x_i + w_i, x_i(0) = x_{i0} \in \mathbb{R}^{d_i}, i = 1, 2, ..., \tag{2}$$

其中 $w_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d_i}$ 局部可积。我们在连续函数空间 $\mathcal{C}([0,T]; \ell^2)$ 中寻找方程 (2) 的解，其中某个 $T > 0$ 满足：$x : [0,T] \to \ell^2$ 的坐标 $x_i(\cdot)$ 几乎处处可微。

定义 2.1. 如果存在一族非奇异矩阵 $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和常数 $C \geq 1$，使得 $\|P_i\| \cdot \|P_i^{-1}\| \leq C$，且对所有 $i \in \mathbb{N}$，$P_i A_i P_i^{-1}$ 都是若尔当标准形矩阵，则称矩阵族 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 一致可正规化。

注意，存在一致可正规化的矩阵族；也就是说，如果所有元素已经处于若尔当标准形，那么对所有 $i \in \mathbb{N}$，我们都可以取 $P_i = \mathrm{Id}$。另一方面，也可以构造出不能一致可正规化的矩阵族。本文将

假设式（2）和式（1）中的矩阵族是一致可正规化的，并且参与者的控制参数满足以下约束。

定义 2.2。固定 $\theta > 0$，令 $B(\theta)$ 表示所有函数 $w(\cdot) = (w_1(\cdot)\ w_2(\cdot)\ ...)$ 的集合，其中 w: $[0,T] \to \ell^2$，其可测坐标为 $w_i(\cdot) \in \mathbb{R}^{d_i}$、$0 \le t \le T$、$i = 1$、2、...，并满足约束条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T \|w_i(s)\|^2 ds \le \theta^2. \tag{3}$$

$B(\theta)$ 称为可容许控制函数的集合。

我们有如下结果

定理 A。设 $\{A_i\}$ 是一个一致可正规化矩阵族。若矩阵 A_1、A_2、.. 的特征值的实部均为负，则对于任意 $w \in B(\theta)$，$\theta > 0$ 系统 (2) 对任意 $z_0 \in \ell_2$ 都有唯一解。此外，解 $x(t) = (x_1(t)\ x_2(t) \dots)$ 的相应分量由下式给出

$$x_i(t) = e^{tA_i} x_{i0} + \int_0^t e^{(t-s)A_i} w_i(s) ds, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

定义 2.3. 如果对于具有任意初始条件 $x_0 \in \ell^2$ 的方程 (2) 的解 $x(t)$，有 $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$，且对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $w_i \equiv 0$，则称系统 (2) 为全局渐近稳定。此外，如果存在可容许控制$u \in B(\theta)$，使得从 x_0 出发的方程 (2) 的解满足$x(T) = 0$，则称系统 (2) 从 $x_0 \in \ell^2$ 零可控，其中 $T = T(u) \in \mathbb{R}_+$。若系统 (2) 从任意 $x_0 \in \ell^2$ 零可控，则称其为大范围零可控。此外，$\inf_{u\in B(\theta)} T(u)$ 称为最优转移时间，而实现该最小值的 $u \in B(\theta)$ 称为时间最优控制。

定理 B. 在定理 A 的假设下，系统 (2) 全局渐近稳定且大范围零可控。时间最优控制存在，并且可以显式构造。

请注意，时间最优控制的显式形式需要先进行一些压缩，并将在第 4 节中给出。

此外，我们考虑一个追逃微分博弈 (1)。固定 $\rho, \sigma > 0$。函数$u(\cdot) \in B(\rho)$（$v(\cdot) \in B(\rho)$）称为追捕者（逃逸者）的可容许控制。

定义 2.4. 对每个 $v \in \ell^2$，函数 $u\colon [0,T] \times \ell^2 \to \ell^2$，其坐标为 $u_k(t) = v_k(t) + \omega_k(t)$, $\omega \in B(\rho - \sigma)$，若是追捕者的可容许控制，则称为追捕者的策略。

定理 C. 假设 $\rho > \sigma$ 以及定理 A 的假设均成立。那么，对于逃逸者的任意可容许控制 v，存在追捕者的策略 u 和 $\vartheta_1 > 0$，使得方程 (1) 的解满足 $z(\tau) = 0$，其中某个 $0 \le \tau \le \vartheta_1$，即博弈 (1) 可在时间 ϑ_1内完成。

3. Existence and uniqueness

注意，若我们通过令每个分量 x_i 如 (4) 中所示，定义 $x(t) = (x_1(t)\ x_2(t) \dots)$，则 $x(t)$ 满足 (2) 中的方程和初始条件。这也说明解的唯一性。因此，只需证明对于任意 $T > 0$, $x(\cdot) \in C([0,T], \ell^2)$。现在我们将证明，对所有 $t \ge 0$，均有 $x(t) \in \ell^2$。

3.1. 对 $\|e^{tA}\|$ 的估计。由于 $A = \mathrm{diag}\{A_1, A_2, \dots\}$，我们有 $e^{tA} = \mathrm{diag}\{e^{tA_1}, e^{tA_2}, \dots\}$。回顾一下，对于每个 i，都存在一个非奇异变换 $P_i : \mathbb{R}^{d_i} \to \mathbb{R}^{d_i}$，使得$A_i = P_i J_i P_i^{-1}$，其中 J_i 是 A_i 的若尔当标准形。

Thus

$$\|e^{tA_i}\| \le \|P_i\| \cdot \|e^{tJ_i}\| \cdot \|P_i^{-1}\| \le C\|e^{tJ_i}\|.$$

根据假设，矩阵的所有特征值 $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{id_i}$ 的实部均为负。令$2\alpha_i = -\max_{1 \le j \le d_i} Re(\lambda_{jd_i}) > 0$，则可以找到一个次数至多为 $d_i \le d$ 的多项式 $Q_i(t)$（见 [16, §13]），使得

$$\|e^{tA_i}\| \le C|Q_i(t)|e^{-2t\alpha_i} \le \bar{C}e^{-t\alpha_i}. \tag{5}$$

因此，对于任意 $x \in \ell^2$ 和 $t \in [0, +\infty)$，我们有

$$\|e^{tA}x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|e^{tA_i}x_i\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} \|e^{tA_i}\|^2 \|x_i\|^2 \le \bar{C}^2\|x\|^2. \tag{6}$$

这意味着，对于每个 $t \in [0, +\infty$, $\ell^2 \to \ell^2$ 是一个有界线性算子 e^{tA}。此外，容易验证 e^{tA} 是一个半群，即 $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$。

3.2. 定理 A 的证明。我们首先证明，对于所有 $x_0 \in \ell^2$ 以及所有 $t \in [0,T]$， $x(t) \in \ell^2$ 。事实上，

$$\|x(t)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|e^{tA_i}x_{i0} + \int_0^t e^{(t-s)A_i}w_i(s)ds\|^2 \leq 2\|e^{tA}x_0\|^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \| \int_0^t e^{(t-s)A_i}w_i(s)ds\|^2. \quad (7)$$

下面估计上述不等式的最后一项。我们有

$$\| \int_0^t e^{(t-s)A_i}w_i(s)ds\|^2 \leq \bar{C}^2 \left(\int_0^T \|w_i(s)\|ds \right)^2 \leq \bar{C}^2 T \left(\int_0^T \|w_i(s)\|^2 ds \right) \quad (8)$$

其中，在最后一步中，我们对 1 和 $\|w_i(s)\|$ 使用了柯西-施瓦茨不等式。先将 (8) 代入 (7)，再利用 (6)、(5) 和约束条件 (3)，得到

$$\|x(t)\|^2 \leq 2\bar{C}^2\|x_0\|^2 + 2\bar{C}^2 T\theta^2,$$

这就证明了该断言。

现在我们可以证明，对于任意 $T > 0$，都有 $x(t) = (x_1(t)\ x_2(t) \dots) \in \mathcal{C}([0,T], \ell^2)$。由于 $\|x(t)\|^2$ 有界，且其上界与 t 无关，因此对于任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $N = N(\varepsilon, t, t_0) \in \mathbb{N}$，使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \|x_i(t) - x_i(t_0)\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

对于任意满足 $t_0 \leq t$ 的 $t, t_0 \in [0,T]$，我们有

$$\sum_{i=1}^{N} \|x_i(t) - x_i(t_0)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \|e^{tA_i} - e^{t_0A_i}\|^2 \cdot \|x_{i0}\|^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \left\| e^{tA_i} \int_0^t e^{-sA_i}w_i(s)ds - e^{t_0A_i} \int_0^{t_0} e^{-sA_i}w_i(s)ds \right\|^2 = (I) + (II).$$

我们首先估计 (I)。注意到

$$\|e^{tA_i} - e^{t_0A_i}\| \leq \|P_i\| \cdot \|P_i^{-1}\| \cdot \|e^{tJ_i} - e^{t_0J_i}\| \leq \bar{C}\|e^{t_0J_i}\| \cdot |Q_i(t-t_0)|e^{-|t-t_0|\alpha_i}. \quad (10)$$

回想一下， $Q_i(t-t_0)$ 是一个次数至多为 d 的多项式，其系数仅取决于 J_i 的维数 d_i 。因此，我们可以找到一个与 i 无关的 δ ，使得

$$\bar{C}^3|Q_i(t-t_0)| \cdot \|x_0\|^2 < \frac{\varepsilon}{4} \text{ and } \bar{C}^3|Q_i(t-t_0)| < \frac{\varepsilon}{8T} \quad (11)$$

对所有 $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$。因此，由 (5) 和 (11) 可得 (I) 的如下估计 :

$$\sum_{i=0}^{N} \|e^{tA_i} - e^{t_0 A_i}\|^2 \cdot \|x_0\|^2 \leq \sum_{i=0}^{N} \|e^{tA_i}\|^2 \cdot \|e^{(t-t_0)A_i} - \mathrm{Id}\,\|^2 \cdot \|x_0\|^2 \leq \sum_{i=0}^{N} \bar{C}^3 |Q_i(t-t_0)| e^{-|t-t_0|\alpha_i} \cdot \|x_0\|^2 < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{12}$$

对于 (II)，我们记作

$$\sum_{i=1}^{N} \left\| (e^{tA_i} - e^{t_0 A_i}) \int_0^t e^{-sA_i} w_i(s) ds - e^{t_0 A_i} \left(\int_{t_0}^t e^{-sA_i} w_i(s) ds \right) \right\|^2.$$

因此，对于每个 i，上述和中的每一项都有如下界:

$$\left(\int_0^t \|e^{(t-s)A_i} - e^{(t_0-s)A_i}\| \cdot \|w_i(s)\| ds + \int_{t_0}^t \|e^{(t_0-s)A_i}\| \cdot \|w_i(s)\| ds \right)^2.$$

将不等式 (10) 和 (11) 应用于第一项，并将不等式 (5) 应用于第二项，我们得到

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\varepsilon}{8T} \int_0^T 1_{[0,t]} \cdot \|w_i(s)\| ds + \int_0^T 1_{[t_0,t]} \cdot \bar{C} e^{-t\alpha_i} \cdot \|w_i(s)\| ds \right)^2,$$

其上界为

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\int_0^T \left(\frac{\varepsilon}{8T} 1_{[0,t]} + 1_{[t_0,t]} \cdot \bar{C} \right) \|w_i(s)\| ds \right)^2.$$

现在，利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\left(\frac{\varepsilon}{8} + |t_0 - t| \cdot \bar{C} \right)^2 \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \|w_i(s)\|^2 ds.$$

由于 $|t - t_0| < \delta$ 选择 $\delta > 0$ 充分小，并利用 (3)，我们将后一个表达式估计为不超过 $\frac{\varepsilon}{4}$，对所有 $\varepsilon < 4\theta^2$均成立。因此，我们得出 $(II) < \frac{\varepsilon}{4}$。结合这一估计、估计式 (12) 和 (9)，可得 $x(\cdot) \in \mathcal{C}([0,1],1)$，从而完成证明。

4. Proof of theorem B

4.1. 渐近稳定性。我们将证明，当 $t \to \infty$ 时， $\|x(t)\| \to 0$ 。由于对于任意 ε，$x_0 \in \ell^2$，存在 $N = N(\varepsilon)$ 使得 $\sum_{i=N+1}^{\infty} \|x_{i0}\|^2 < \frac{\varepsilon}{2\bar{C}}$。根据（4）和（5），我们有

$$\|x(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|e^{tA_i} x_{i0}\|^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \bar{C} e^{-t\alpha_i} \|x_{i0}\|^2 + \bar{C} \sum_{i=N+1}^{\infty} \|x_{i0}\|^2.$$

令 $\alpha_{\min}=\min_{1\le i\le N}\alpha_i>0$，由上述不等式可得

$$\|x(t)\|^2\le\sum_{i=1}^{N}\bar{C}e^{-t\alpha_i}\|x_{i0}\|^2+\bar{C}\sum_{i=N}^{\infty}\|x_{i0}\|^2\le\bar{C}e^{-t\alpha_{\min}}\|x_0\|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

存在 t_ε，使得 $\bar{C}e^{-t\alpha_{\min}}\|x_0\|\le\frac{\varepsilon}{2}$ 对所有 $t<t_\varepsilon$都成立。证明至此完成。

注意，如果 $\alpha_{\inf}=\inf_{i\ge1}\alpha_i>0$，那么系统是指数稳定的。由于在这种情况下我们不必在 N处截断，因此可以写成

$$\|x(t)\|^2\le\sum_{i=1}^{\infty}\bar{C}e^{-t\alpha_i}\|x_{i0}\|^2\le\bar{C}e^{-t\alpha_{\inf}}\sum_{i=1}^{\infty}\|x_{i0}\|^2\le\bar{C}e^{-t\alpha_{\inf}}\|x_0\|^2.$$

4.2. 格拉米矩阵。本小节证明（1）的零可控性，从而完成定理 B 的证明。我们的方法依赖于格拉米算子和一个可观测性不等式。令

$$W(\tau)=\int_0^{\tau}e^{-sA}\cdot e^{-sA^*}ds,\quad \tau\in\mathbb{R}$$

其中 A^* 是 ℓ^2中 A的伴随算子。根据定义可得

$$W(\tau)=\operatorname{diag}\{W_1(\tau),W_2(\tau),W_3(\tau)\dots\},\ \text{with } W_i(\tau)=\int_0^{\tau}e^{-sA_i}\cdot e^{-sA_i^*}ds,i\ge1.$$

由于对每个 i， A_i 都是一个有限矩阵，因此对于每个 i和 $\tau\in\mathbb{R}$， $W_i(\tau)$ 都是正定、对称且可逆的算子[2]，也就是说，$W_i^{-1}(\tau)$存在且有界。定义

$$W^{-1}(\tau)=\operatorname{diag}\{W_1^{-1}(\tau),W_2^{-1}(\tau),W_3^{-1}(\tau)\dots\}$$

显然，对于每个 $\tau\in\mathbb{R}$，$W_1^{-1}(\tau)$ 是 $W_1(\tau)$ 的逆算子。我们将证明 $W^{-1}(\tau):\ell^2\to\ell^2$ 是一个有界线性算子。对于任意 $s\in\mathbb{R}$、 $i\in\mathbb{N}$ 和 $x_i\in\mathbb{R}^{d_i}$，有

$$\langle W_i(\tau)x_i,x_i\rangle=\int_0^{\tau}\|e^{-sA_i^*}x_i\|^2ds\ge\int_0^{\tau}(m(P_i)e^{\beta_i s}m(P_i^{-1})\|x_i\|)^2ds=\int_0^{\tau}\frac{e^{2\beta_i s}\|x_i\|^2}{\|P_i\|^2\cdot\|P_i^{-1}\|^2}ds.$$

其中 $m(P_i)$ 是 P_i 的最小半范数，且 $\beta_i=-\min_{1\le j\le d_i}Re(\lambda_j)$。由于假设 A_i 的特征值实部严格为负且与零有正距离，因此有 $\beta=\inf_i\beta_i>0$。因此有

$$\|W_i(\tau)\|\ge\frac{\langle W_i(\tau)x_i,x_i\rangle}{\|x\|^2}\ge\frac{1}{C^2}\int_0^{\tau}e^{2\beta_i s}ds\ge\frac{1}{C^2\beta_i}\left(e^{2\beta_i\tau}-1\right),$$

这意味着

$$\|W_i^{-1}(\tau)\|\le2C^2\beta_i\left(e^{2\beta_i\tau}-1\right)^{-1}\le C^2/\tau.\tag{13}$$

[2]注意，对于固定的 $\tau\in\mathbb{R}$， $W(\tau)$ 不一定是有界算子。

此外，对于任意 $x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^2$，若满足 $\|x\|=1$，则有

$$\|W^{-1}(\tau)x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|W_i^{-1}(\tau)x_i\|^2\le\sum_{i=1}^{\infty}\|W_i^{-1}(\tau)\|^2\cdot\|x_i\|^2\le C^2/\tau. \tag{14}$$

4.3. 大范围零可控性。下文假设 $\theta>0$，且可容许控制集的定义与第2节相同。回顾一下，$x(t)=e^{tA}x_0+e^{tA}\int_0^t e^{-sA}w(s)ds$ 是系统 (2) 在初始状态 $x(0)=x_0$ 下的唯一解。容易验证，函数

$$u^0(t)=-e^{-tA^*}\cdot W^{-1}(\tau)x_0\quad\text{for every}\quad x_0\in\ell^2,\tau\in\mathbb{R}^+ \tag{15}$$

若该控制可容许，即对于每个固定的$\tau\in\mathbb{R}^+$，都有 $\int_0^\tau e^{-sA}u^0(s)ds=-x_0$，则它解决了控制问题。事实上，由 (15) 可得

$$-\int_0^\tau e^{-tA_i}u^0dt=\int_0^\tau e^{-tA_i}e^{-tA_i^*}dt\cdot W_i^{-1}(\tau)x_{i0}=x_{i0},\ \text{for all } i\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

因此，剩下只需证明 u^0 是可容许的，即存在 $\tau>0$ 使得$\infty\ \tau\|u^0\|^2=\sum\int\|u_i^0(s)\|^2ds\le\theta^2,\ u_i^0(s)\in\mathbb{R}^{d_i}.i=1\ 0$

根据 $W(\tau)$ 的定义及柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\|u^0(t)\|^2dt&=\int_0^\tau\|e^{-tA^*}W^{-1}(\tau)u^0\|^2dt\\&=\int_0^\tau\left\langle e^{-tA}\cdot e^{-tA^*}W^{-1}(\tau)x_0,W^{-1}(\tau)x_0\right\rangle dt\\&=\langle x_0,W^{-1}(\tau)x_0\rangle\le\|x_0\|^2\cdot\|W^{-1}(\tau)\|.\end{aligned} \tag{17}$$

结合不等式（14）和（15），可知 u^0 是可容许的 i f

$$C\|x_0\|^2/\sqrt{\tau}\le\theta^2. \tag{18}$$

至此证明完成，因为（18）式左端会随着 τ 增大而衰减。

4.4. 时间最优控制。方程（14）表明，对于每个 $x_0\in\ell^2$，$W^{-1}(\tau)x_0\rangle$ 会随着 τ递减。因此，对于每个 $x_0\in\ell^2$，都存在唯一的 $\vartheta\in\mathbb{R}_+$，使得

$$\langle x_0,W^{-1}(\tau)x_0\rangle>\theta^2,\ \text{for } \tau>\vartheta,\ \text{and } \langle x_0,W^{-1}(\vartheta)x_0\rangle=\theta^2. \tag{19}$$

我们断言，ϑ 是最优时间。我们使用以下来自 [20] 的结果。

命题 4.1. 设 $B(t)$, $t \in [0, \vartheta_0]$ 是一个 $[0, \vartheta_0]$ 上行列式不恒为 0、阶数为 d 的连续矩阵函数。则在满足条件 $\int_0^{\vartheta_0} B(s)w(s)ds = w_0 \in \mathbb{R}^d$ 的可测函数$w : [0, \vartheta_0] \to \mathbb{R}^d$ 中，由公式 $w(s) = B^* F^{-1}(\vartheta_0)x_0$, $F(\vartheta_0) = \int_0^{\vartheta_0} B(s)B^*(s)ds$ 定义、几乎处处在 $[0, \vartheta]$ 上成立的函数，使泛函 $\int_0^{\vartheta_0} |w(s)|^2 ds$ 取得最小值。

假设存在定义在 $[0, \vartheta$ 上的可容许控制 $u(\cdot)$，使得对于某个 $\tau < \vartheta$, $x(\tau) = 0$。根据定义，我们有

$$e^{\tau A_i} x_{0i} + \int_0^\tau e^{(\tau - s)A_i} u_i(s)ds = 0 \text{ for all } i \in \mathbb{N}.$$

由于 $e^{(\tau-s)A_i}$ 是连续矩阵函数，因此我们可以对每个 $i \in \mathbb{N}$ 应用上述命题，并得出泛函 $J(u) = \int_0^\tau \sum_{k=1}^\infty \|u_i(s)\|^2 ds$ 由式 (15) 中定义的 u^0 取到最小值。因此，我们有

$$J(u) \geq J(u^0) = \int_0^\tau \sum_{k=1}^\infty \|u_i^0(s)\|ds = \langle x_0, W^{-1}(\tau)x_0\rangle > \langle x_0, W^{-1}(\vartheta)x_0\rangle = \theta^2.$$

这表明 $u(\cdot)$ 不可容许。这个矛盾说明, ϑ 是转移到原点的最优时间，而 $u^0(t) = -e^{-tA^*} \cdot W^{-1}(\vartheta)x_0$ 是时间最优控制。

5. Differential game problem: Proof of theorem C

现在我们考虑对策问题 (1)。回顾方程

$$\langle x_0, W^{-1}(\tau)x_0\rangle = (\rho - \theta)^2$$

具有唯一解 ϑ_1。固定 $T > \vartheta$。我们定义

$$u(t, v) = v - e^{-tA^*} \cdot W^{-1}(\vartheta_1)x_0 \tag{20}$$

令 $v(\cdot)$ 为逃逸者的任意可容许控制。我们证明（20）是可容许的 .

$$\|u(t, v)\| = \|v\| + \|e^{-tA^*} W^{-1}(\vartheta_1)x_0\| \leq \sigma + \langle x_0, W^{-1}(\vartheta_1)x_0\rangle^{1/2} = \rho.$$

此外，很容易证明 $x(\vartheta_1) = 0$。至此，证明完成。

6. Conclusion

本文研究了由相互独立的有限维块组成的无限维可控系统。我们解决了最优零控制问题，并为追捕者构造了完成追捕博弈的保证策略。我们利用格拉米矩阵来构造最优控制。考虑比（1）更一般的方程会更有意义，但我们将这一问题留待进一步研究。因为我们的结果无法推广到这种情形，而且还需要找到可控性卡尔曼条件的一个类似物。

我们证明了，如果 $\rho < \sigma$，就可以完成追捕博弈。由于在我们的设定中，系统是全局渐近稳定的，因此我们预计，对于任意 $\rho, \sigma > 0$，都可以完成追捕博弈。然而，为 $0 < \rho < \sigma$制定策略被证明是一个颇具挑战性的问题。此外，我们在此没有尝试研究逃逸问题。我们认为，在区间 $(0, \vartheta_1)$ 内可以逃逸。不过，这留待未来工作探讨。

Acknowledgement

M. Ruziboev (MR) 的研究得到了奥地利科学基金（FWF）M2816 迈特纳资助的支持。

Data availability statement

我们在这项工作中没有生成或分析任何数据。

References

[1] S. Albeverio，S.A. Alimov，关于与热交换过程相关的时间最优控制问题。Appl. Math. Optim.，57，58–68，（2008）。[2] A.A. Agrachev，A. V. Sarychev，利用退化强迫实现二维 Euler 方程和纳维–斯托克斯方程的可控性。Commun. Math. Phys. 265，第3期，673–697（2006）。[3] I.A. Alias，G. Ibragimov，A. Rakhmanov。在希尔伯特空间中，有限多个追捕者对无限多个逃逸者的逃逸微分博弈。《动态博弈与应用》。10.1007/s13235-016- 0196-0，6(2)：1–13，（2016）。[4] A.A. Azamov，J.A. Bakhramov，O.S. Akhmedov，关于杆上热传导方程的切尔诺乌斯科时间最优问题，Ural Math. J. 5，第1期，13–23（2019）。[5] A.A. Azamov，M.B. Ruziboev，演化偏微分方程的时间最优问题。《应用数学与力学杂志》77，220–224，（2013）。[6]A.Azamov，G. Ibragimov，K. Mamayusupov，M. Ruziboev，关于无限线性微分方程组的稳定性与零可控性。J Dyn Control Syst（2021）。https://doi.org/10.1007/s10883-021-09587-6

[7] M. Badra，T. Takahasi，关于抛物型系统近似能控性与可稳定性的Fattorini判据，ESAIM Control Optim. Calc. Var.，第20卷，第3期，924–956，（2014）。[8] F.L. Chernousko，非线性动力系统中控制的分解与综合。Trudy Mat. Inst. Steklov. 211（1995），Optim. Upr. i Differ. Uravn.，457–472。[9] F. L. Chernous'ko，动力系统中的分解与次优控制，《应用数学与力学杂志》第54卷，第727–734页，（1990）。[10] F. L. Chernous'ko，分布参数系统中的有界控制，《应用数学与力学杂志》第56卷，第5期，第707–723页，（1992）。[11] J. Coron，Shengquan Xiang，利用三个标量控制实现黏性Burgers方程的小时间全局稳定化，纯粹与应用数学杂志´卷´，（2021）。[12] J. Coron，《控制与非线性》。Mathematical Surveys and Monographs，136。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007年，xiv+426页。[13] R. F. Curtain，H. Zwart，《无穷维线性系统理论导论》，纽约，施普林格出版社，xviii，698页（1995）。[14] K. Deimling，巴拿赫空间中的常微分方程，Lecture Notes in Mathematics，第596卷，施普林格出版社，纽约州纽约市，（1977）。[15] A. Daletskii，D. Finkelshtein，Dmitri，具有无界数量相互作用邻居的非平衡粒子动力学。（英文摘要）J. Stat. Phys. 173（2018），第6期，1639–1659。[16] B. P. Demidoviˇc，《稳定性数学理论讲义》，出版社“Nauka”，莫斯科，1967年，第472页。[17] G.I. Ibragimov，S. Kuchkarova，R.M. Hasim，B.A. Pansera，双块微分方程无穷系统的微分博弈。Mathematics 2022，10，2541。[18] G.I. Ibragimov，希尔伯特空间中微分博弈的最优追逃时间 l_2。Science Asia. 39S：25–30，（2013）。[19] G. Ibragimov，M. Ferrara，M. Ruziboev，A.B. Pansera，具有积分约束的单个逃逸者与多个追捕者之间的线性逃逸微分博弈。Internat. J. Game Theory 50，第3期，729–750，（2021）。[20] E.B. Lee，L. Markus，《最优控制理论基础》。John Wiley & Sons, Inc.，纽约—伦敦—悉尼，1967年，x+576 页。[21] N.Yu. Satimov，M. Tukhtasinov，关于一阶受控演化方程的若干博弈问题，Differential Equations，41(8)，1169–1177，（2005）。[22] N.Yu. Satimov，M. Tukhtasinov，关于二阶演化方程的博弈问题。Russian Mathematics. 51(1)：49–57，（2007）。[23] M. Tukhtasinov，M.Sh. Mamatov，关于受控分布参数系统中的追捕问题。Mathematical Notes. 84(2)：256–262，（2008）。

（Marks Ruziboev） Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-MorgensternPlatz 1, Austria
电子邮箱：marks.ruziboev@univie.ac.at

(KhudoyorMamayusupov) V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academyof Sciences, 4, University street, Olmazor, Tashkent, 100174, Uzbekistan电子邮箱：mamayusupov@mathinst.uz

(Gafurjan Ibragimov) University of Digital Economics and Agrotechnologies, Tashkent, 100022, Uzbekistan电子邮箱：ibragimov@upm.edu.my

(Adkham Khaitmetov) Department of Higher Mathematics, Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad Al-Khwarizmi, 100084, Tashkent, Uzbekistan电子邮箱：adhamhaitmetov@gmail.com