arXiv:2302.01638v1 [math.CO] 3 Feb 2023

无弦图的无环色指数

Manu Basavaraju、Suresh Manjanath Hegde 和 Shashanka Kulamarva

卡纳塔克邦国家理工学院，苏拉特卡尔-575025，印度 电子邮箱：manub@nitk.edu.in, smhegde@nitk.ac.in, skulamarva.187ma007@nitk.edu.in

摘要

图的无环边着色是指一种正常边着色，其中不存在双色圈。图 G 的*acyclic chromatic index* 记作 $a'(G)$，是满足以下条件的最小正整数： k 使得 G 具有一种使用 k 种颜色的无环边着色。Fiam˘c´ık 曾猜想，对于任意最大度为 Δ的图G ，都有 $a'(G) \leq \Delta + 2$ 。图 G的线性森林覆盖数记作 $la(G)$，是将 G 的边划分为若干线性森林所需的最少数量。若图中没有任何圈含有弦，则称该图为 *chordless* 。每个二连通无弦图都是 *minimally 2-connected graph*。Basavaraju 和 Chandran 证明，若 G 是 2-退化的，则 $a'(G) \leq \Delta + 1$。由于无弦图也是 2-退化的，因此对于任意无弦图 G，都有 $a'(G) \leq \Delta + 1$ 。Machado、de Figueiredo 和 Trotignon 证明，当 $\Delta \geq 3$时，无弦图的色指数为 Δ 。他们还提出了一种多项式时间算法，可为无弦图求得最优着色。我们通过证明无弦图的无环色指数为 Δ，改进了这一结果；但若 $\Delta = 2$ 且该图含有圈，则其值为 $\Delta + 1$。我们还概述了一种多项式时间算法，可为无弦图求得最优无环边着色。作为推论，我们还证明，除非 G 含有一个满足 $\Delta = 2$的圈（此时$la(G) = \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil = 2$），否则 $la(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$。为得到无环色指数的结果，我们证明了无弦图的一个结构性结果，它细化了 Machado、de Figueiredo 和 Trotignon 为这一类图给出的结构。这一结果本身也可能具有独立意义。

关键词： *Acyclic chromatic index; Acyclic edge coloring; Chordless graphs; Linear arboricity; Minimally 2-connected graphs*

1 引言

本文所考虑的所有图都是有限简单图。图 G 中的一条路径是 G 的一个顶点序列，其中各顶点互不相同，且序列中相邻的顶点彼此相邻。图中的一个圈是指一条路径，以及连接该路径起点和终点的一条边。设给定颜色集 C，图 $G = (V, E)$的正常边着色是一个函数 $c: E \to C$，满足对于任意相邻边 e_1 和 e_2，都有 $c(e_1) \neq c(e_2)$。对给定图 G 进行正常边着色所需的最少颜色数称为 G 的色指数，记为 $\chi'(G)$。线性森林是一个无圈图，其中每个顶点的度至多为 2。换言之，线性森林是若干条路径的不相交并。若图 G 的一个正常边着色满足 G 中不存在双色圈，或者等价地说，任意两个颜色类的并在 G中诱导出一个线性森林，则称该着色为无圈着色。图 G 的无圈色指数（也称无圈边色数）是对 G 进行无圈边着色所需的最少颜色数，记为 $a'(G)$。无圈着色的概念最早由 Gr¨unbaum [13]提出。图的无圈色指数及其顶点类比量可用于界定其他参数，例如定向色数[18] 和图的星色数；二者都有许多实际应用，包括光网络中的波长路由 [4]。根据 Vizing 定理 [9], , 有 $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$, 其中 G中的 $\Delta = \Delta(G)$ 表示一个顶点的最大度。由于任何无圈边着色也是正常边着色，因此有 $a'(G) \geq \chi'(G) \geq \Delta$。

Fiam˘c´ık [11]（Alon、Sudakov 和 Zaks [2]也独立地）猜想，对于任意图 G， $a'(G) \leq \Delta + 2$。迄今为止，对于任意图，已知的 $a'(G)$ 最佳上界是 $\lceil 3.74(\Delta - 1) \rceil + 1$，由 Giotis 等人 [12] 给出，该上界是通过概率技术得到的。尽管这个上界与猜想的界相去甚远，但该猜想已在一些特殊图类中得到证明。Alon 等人 [2]证明，存在一个常数 k，使得对于围长至少为 $k\Delta\log\Delta$ 的任意图 G， $a'(G) \leq \Delta + 2$ 。

众所周知，即使对于特殊图类，求图的色指数也是 NP-完全问题。根据 Holyer [14], 的结果，即使对于三次图，这也是 NP-完全问题。Leven 和 Galil [19] 证明了，对于任意 k，判断是否能够用 k 种颜色对度为 $k \geq 3$ 的正则图的边进行着色是 NP-完全问题。因此，找出哪些图类上的该问题可以在多项式时间内求解颇有意义。已有多项式时间算法可用于求二部图、串并联图等图类的色指数。Machado 等人 [21] 研究了无弦图中的这一问题。

若图 G 中的边 $e = uv$ 满足：从 G 中删除边 e 后得到的圈中，顶点 u 和 v 都在该圈上，则称边 $e = uv$ 为弦。若一个图不含弦，则称其为无弦图。若对于图 G 中的任意边 e，删除该边后得到的图 $G \setminus e$ 不再是 2-连通图，则称 2-连通图 G 为极小 2-连通图。2-连通的无弦图是极小 2-连通图。关于无弦图和极小 2-连通图结构性质的研究，可见 [10], [21] 和 [22]。

Machado 等人 [21] 证明，除非 G 是奇圈，否则任意连通无弦图的边都可以用恰好 Δ 种颜色着色。他们根据 L´evˆeque 等人 [20], 给出的无弦图结构刻画进行了改进，并借此证明了该结果。由于任何正常着色都至少需要 Δ 种颜色，这意味着可以在多项式时间内精确确定任意无弦图的色指数。Machado 等人 [21] 还给出了一个多项式时间算法，可用最少的颜色对给定的无弦图进行着色。

对于某些图类，无圈色指数已得到精确确定，例如：满足$\Delta \neq 4$ (Hou and Wu [16], Hou 等人 [17])的外平面图、满足 $\Delta \neq 4$ (Wang and Shu [23])的串并联图、围长至少为 5 且满足 $\Delta \geq 19$ (Basavaraju 等人 [7])的平面图，以及满足 $\Delta \geq 4.2 \times 10^{14}$ (Cranston [8])的平面图。对于外平面图和串并联图，$a'(G) = \Delta$ 若 $\Delta \geq 5$ 且当 $\Delta = 3$时，他们刻画了需要 4 种颜色的图。请注意，在无圈边着色中，至多有一个颜色类可以是完美匹配，否则，两个完美匹配颜色类的并集至少会形成一个圈。这意味着，对于任意正则图 G，都有 $a'(G) \geq \Delta(G) + 1$。因此，任意三次图的无圈边着色至少需要 4 种颜色。我们还知道，任意三次图最多可用 5 种颜色着色。Andersen 等人 [5] 证明，除 K_4 或$K_{3,\,3}$ 之外的任意三次图都可以用 4 种颜色着色，从而精确确定了三次图的无圈色指数。此外，我们注意到，上述所有结果都是构造性的，因此也给出了求最优着色的多项式时间算法。

图 G 称为 k-退化图，若其每个子图都 G 至少有一个度不超过 k的顶点。注意，若图 G 是无弦图，那么由于 G 的每个子图也都是无弦图，引理 4 保证 G 的每个子图都有一个度不超过 2 的顶点。因此，无弦图类是 2-退化图类的真子类。Basavaraju 和 Chandran [6] 证明，任意 2-退化图的边都可以用 $\Delta + 1$ 种颜色进行无圈着色。因此，对于无弦图 $a'(G) \leq \Delta + 1$， G我们知道其无圈色指数要么是 Δ，要么是 $\Delta + 1$。

任意三次图的无圈色指数都可以精确确定。但 Alon 和 Zaks [3] 证明，即使在 $\Delta = 3$ 的情况下，确定 $a'(G)$ 也是 NP-完全的。由此可推知，当 $\Delta = 3$ 且 G 不是三次图时，确定 $a'(G)$ 也是 NP-完全的。不过，这些图都是 2- 退化图。因此，对于 2- 退化图，确定 $a'(G)$ 是 NP- 完全的。

结果：
本文研究无弦图，并证明其无圈色指数可以精确确定。这改进了 Machado 等人[21]的结果。为此，我们细化了 [21]中得到的无弦图结构。这个结果（引理5）或许具有独立的研究价值，因为在此处，我们需要比正常边着色所要求的更精细的结构。具体而言，我们证明以下定理。

定理1. 设 G 是最大度为 Δ的连通无弦图。那么，除非 G 是一个圈（此时 $a'(C_n) = \Delta + 1 = 3$），否则 $a'(G) = \Delta$。

注1. 由于图的各连通分支的无圈边着色可以轻易扩展为整个图的着色，因此只需对连通图证明该结论。由此，我们得到以下推论。
推论1. 设 G 是最大度为 Δ的无弦图。那么 $a'(G) = \Delta$，除非 G 含有一个长度为$\Delta = 2$ 的圈（此时 $a'(G) = \Delta + 1 = 3$）。

注2. 图的线性森林覆盖数 G 记作 $la(G)$，是满足以下条件的最小正整数 k：使得 G 的边可以划分为 k 个线性森林。Akiyama 等人猜想[1]，$la(G) \leq \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$。由于无圈边着色中任意两个颜色类的并都是一个线性森林，我们可以推知 $la(G) \leq \lceil {}^{a'(G)}{}_{2} \rceil$。根据 Basavaraju 和 Chandran 的一个结果，[6]，该猜想对 2-退化图成立。本文的结果表明，无弦图的线性森林覆盖数可以精确确定，也就是说，对于无弦图G，有 $la(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$，除非 $\Delta = 2$ 且 G 含有一个圈，此时 $la(G) = \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil = 2$。因此我们得到以下推论。

推论 2. 若 G 是最大度为 Δ 的无弦图，则 $la(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$，除非 G 含有一个 $\Delta = 2$ 的圈（此时 $la(G) = \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil = 2$）。

注 3. 由定理 1 和注1，我们可以推知，对于无弦图，$a'(G)$ 可以在多项式时间内精确确定。我们还给出了一个多项式时间算法的概要，用于以最优数量的颜色对给定无弦图的边进行无环染色。

2 预备知识

设 $G = (V, E)$ 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的简单有限无向图。图 G 中任意顶点 x 的度，记作 $deg_G(x)$ 或简记为 $deg(x)$（若上下文中已明确 G），是图 G 中与顶点 x 关联的边数。度为零的顶点称为孤立顶点。图 G 的最大度和最小度分别记作 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$，或简记为 Δ 和 δ（若图 G 显而易见），分别表示图 G 中顶点的最大度和最小度。对于任意顶点 $x \in V$，$N_G(x)$ 表示图 G 中 x 的所有邻点组成的集合。本文中，若上下文中已明确 G，则将 $N_G(x)$ 写作 $N(x)$。设 R 是 E 的一个子集，即 $R \subseteq E$。那么，$G \setminus R$ 是由顶点集 V 和边集 $E \setminus R$ 得到的 G 的子图。设 $S \subseteq V$。那么，$G \setminus S$ 是由顶点集 $V \setminus S$ 和满足 e 与 v} 关联的边集 $E \setminus \{e \in E / \exists v \in S$ 得到的 G 的子图。若 R 或 S 是单元素集$\{x\}$，则本文中将 $G \setminus \{x\}$ 写作 $G \setminus x$。

若从图 G 中删除顶点 $x \in V$ 后，$G \setminus x$ 变得不连通，则称顶点 $x \in V$ 为割点。若删除少于 k 个顶点不会使图 G 变得不连通，则称图 G 为 k-连通图。设 $S \subseteq V$。那么，$G[S]$ 是由 G 中的顶点集 S 所诱导的子图，即 $G[S] = (V', E')$，其中 $V' = S$ 且 $E' = \{ab \in E / a \in S, b \in S\}$。设 $e = xy$ 是图 G 中的一条边。从图 G 中删除顶点 x 和 y，并将它们替换为一个新顶点 z，使得 $N(z) = (N(x) \setminus y) \cup (N(y) \setminus x)$，这一过程称为对应于边 e 的边收缩。如果该操作产生重边，则只保留这些顶点之间的一条边。路径中的边数称为路径长度。图 G 中任意两个顶点 x 和 y 之间的距离，是最短的 (x, y)-路径所含的边数。图中的奇圈是奇数长度的闭路。若图 G 的顶点集 V 可划分为两个集合 X 和 Y，使得图 G 中的每条边一端在 X 中，另一端在 Y 中，则称图 G 为二部图。已证明，一个图是二部图，当且仅当它不含奇圈。更多记号和定义见 [24]。本文中，凡是只提到“着色”一词，均指无圈边着色。

以下定义和引理由 Basavaraju 和 Chandran [6]给出。下文将提及与我们的讨论相关的定义和引理。

定义 1（[6]）。图 G 的子图 H 上的边着色 c 称为图 G的部分边着色。

注意，H 可以是 G 本身。因此，对 G 的边着色也是 G的部分边着色。若 G 的部分边着色 c 在相应子图 H中是正常的（且无环），则称其为正常的（且无环）。注意，对于部分着色 c，边 e 上的 c（e）可能未定义。因此，每当我们使用 c（e）时，都默认考虑的是满足 c（e）有定义的边 e，即使没有明确说明这一点。设 c 是 G的部分边着色。对于任意顶点 $u \in V$，定义 F_u（c）$= \{c$（uv）$/ v \in N_G$（u）$\}$。对于一条边 $ab \in E$，定义F_{ab}（c）$= F_b$（c）$\setminus \{c$（ab）$\}$。当着色 c的含义从上下文中显而易见时，我们将符号简写为 F_u 和 F_{ab}。注意，F_{ab} 与 F_{ba}不同。

定义2（[6]）。关于部分着色 c 的 G，(α, β)-极大双色路径是 G中的一条极大路径，由交替使用颜色 α和 β着色的边组成。(α, β, a, b)-极大双色路径是从顶点 a 出发、以使用α 着色的边开始，并在顶点 b结束的(α, β)-极大双色路径。

下面的引理（在 [6]中作为一个事实提及）可由无圈边着色的定义推出。本文中我们始终默认该引理成立。

引理 1（[6]）。对于图 G 的正常着色 c 中的一对颜色 α 和 β，相对于着色 c，在图 G 中，经过某个指定顶点 v 的（α，β）-极大双色路径至多有一条。

定义 3（[6]）。图 G 中一条（α，β，a，b）-极大双色路径，若其以顶点 b 为端点，且与该顶点相连的边着色为 α，则称为一条（α，β，ab）-临界路径，当且仅当顶点 a 和 b 在 G 中相邻。

定义 4（[6]）。设 c 是 G 的一个部分着色。设 u、i、$j \in V(G)$ 以及 ui、$uj \in E(G)$。关于边 ui 和 uj 的颜色交换，定义为修改当前部分着色 c，交换边 ui 和 uj 的颜色，从而得到部分着色 c'，即 $c'(ui) = c(uj)$，$c'(uj) = c(ui)$，并且对于 G 中所有其他边 e，$c'(e) = c(e)$。关于边 ui 和 uj 的颜色交换，若交换后得到的着色是正常的，则称为正常颜色交换。关于边 ui 和 uj 的颜色交换，当且仅当交换后得到的着色是无环的，才称为有效颜色交换。

如果在 G 中，对于 G 的部分着色 c，e 的所有相邻边均未被着色为 α，则称颜色 α 是边 e 的候选颜色。如果将颜色 α 指定给 e 不会在 G 中产生任何双色圈，则称候选颜色 α 对边 e 有效。Basavaraju 和 Chandran [6]，将以下引理作为一个显然的事实加以引用。

引理 2（[6]）。设 c 为 G 的部分着色。如果且仅如果存在，候选颜色 β 对边 $e = (a, b)$ 无效，并且仅当存在 $\alpha \in F_b \cap F_{ab}$，使得在 G 中相对于着色 c 存在一条（α，β，ab）-临界路径。

3 无弦图的结构

在正式讨论无弦图的结构之前，我们先介绍无弦图的一个真子类。

定义 5. 若图 G 的每条边都至少关联一个度不超过 2 的顶点，则称 G 为 2-稀疏图。

注意，2-稀疏图也是无弦图，因为图中圈的弦是一条边，其端点的度都至少为 3。

定义 6. 连通图 $G = (V, E)$ 的真 2-割集是由一对不相邻顶点 (a, b) 构成的集合，使得 V 可以划分为非空集合 X，Y 和 $\{a, b\}$，满足 X中的任意顶点与 Y中的任意顶点之间都没有边，且 $G[X \cup \{a, b\}]$ 和 $G[Y \cup \{a, b\}]$ 都包含一条 ab-路径，但 $G[X \cup \{a, b\}]$ 和$G[Y \cup \{a, b\}]$ 都不是诱导路径。此时，(X, Y, a, b) 称为真 2-割集 (a, b) 的一个分裂。块 $G_X(a, b)$（分别地，$G_Y(a, b)$）是通过取 $G[X \cup \{a, b\}]$（分别地，$G[Y \cup \{a, b\}]$）并添加一个新的顶点 w 得到的图；该顶点称为标记顶点，并与 a 和 b都相邻。

无弦图和极小 2-连通图的结构由 Dirac [10] 和 Plummer[22]研究。最近，L´evˆeque 等人 [20] 给出了无弦图的另一项结构性质。具体而言，他们证明了以下引理。

引理 3 ([20])。如果 G 是二连通无弦图，则它要么是 2-稀疏的，要么 G 有一个真 2-割集。

这项性质有助于证明许多关于无弦图的结果。但 Machado 等人 [21] 在研究无弦图的边着色时，需要针对上述陈述中提到的真 2-割集，对图的结构作进一步细化。因此，他们证明了以下引理。

引理 4 ([21])。设 G 是一个非 2-稀疏的二连通无弦图。设 (X, Y, a, b) 是 G 的一个真 2-割集的分裂，并且 $|X|$ 在所有可能的此类分裂中取最小值。那么，a 和 b 在 X 中都至少有两个邻点，并且 $G_X(a, b)$ 是 2-稀疏的。

这一结构性结果帮助他们证明，每个最大度至少为 3 的无弦图的边都可以用 Δ 种颜色着色。这种分裂有助于归纳证明。核心思路是利用 2-稀疏的 $G_X(a, b)$ 的结构，将 $G_Y(a, b)$ 的着色扩展为对 G 的着色。

在本文中，我们也使用归纳法。真 2-割集和 $G_X(a, b)$ 在选择较小子图时发挥着重要作用。但由于着色必须是无圈的，我们需要将圈限制在一个块中，以便处理它们。我们尝试将可能出现的圈限制在 $G_X(a, b) \setminus w$ 中，因为它是 2-稀疏的。但主要

难点在于，2-稀疏侧的所有边都与顶点 a 和 b相 incident。在正常边着色中，我们可以通过在必要时适当置换颜色，将这些顶点上缺失的颜色赋给 $G_X(a,\ b)\setminus w$ 中的边。但对于无圈边着色，这种做法行不通，因为即使置换颜色，也可能在图中产生圈。因此，相比 Machado 等人所需的结构，我们需要关于真 2-割集的结构精细得多。[21]。

注意，当所有边都与 a 或 b 相接时，图 $G_X(a,b)$ 同构于完全二部图 $K_{2,\ t}$，其中 $t\geq 2$。当 $t=2$ 时，图 $G_X(a,b)$ 是一个 4-环。我们证明以下引理。

引理 5. 设 G 是一个 2-连通、非 2-稀疏的无弦图。那么存在 G 中的一个分裂 (X,Y,a,b)，具有以下性质。

(i). $G_X(a,b)$ 是 2-稀疏的。

(ii). 对任意 $t\geq 3,\ \ G_X(a,b)$ 均不同构于 $K_{2,\ t}$。

(iii). 在 $G_X(a,b)$ 中，有 $deg(a)\geq 3$，并且 $deg(b)\geq 3$ 或 $deg(b)=2$，其中 X 取最小值。

证明。由于 G 是一个 2-连通、非 2-稀疏的无弦图，由引理 3 和引理 4 可知，具有性质 (i) 的分裂存在。我们将 $S(G)$ 定义为所有图 G 的真 2- 割集的分裂 (X,Y,a,b) 所组成的集合，其中 $G_X(a,b)$ 是 2- 稀疏的。若图 G 的真 2-割集 (a,b) 存在一个分裂 (X,Y,a,b)，使得对于某个 $t\geq 3,\ \ G_X(a,b)$ 同构于 $K_{2,t}$，则称 (a,b) 为隔离对。图 G 的所有隔离对组成的集合记为 $I(G)$。对于每个 $(a,b)\in I(G)$，我们按如下方式定义相应的所有度为 2 的邻点的集合，记作 $N_G^2(a,b)$。

$$N_G^2(a,b)=\{x\in V(G)\ /\ N(x)=\{a,b\}\}$$

注意，对于任意 $(a,b)\in I(G)$，$|N_G^2(a,b)|\geq 2$。对于每个 $(a,b)\in I(G)$，我们从 $N_G^2(a,b)$ 中任意选取一个顶点作为该对 (a,b) 的代表顶点，并将其记为 r_{ab}。G 的 ip删除子图是指从 G 中删除每个隔离对 $(u,v)\in I(G)$ 对应的 $N_G^2(u,v)$ 中除 r_{uv} 之外的所有顶点后得到的图。我们对该子图 H作如下观察。

观察1. 若 $(u,v)\in I(G)$，则 r_{uv} 是集合 $N_H(u)\cap N_H(v)$ 中唯一的 2度顶点。

观察 2. 在 H 中，相对于其在 G 中的度有所降低的顶点，只有那些在 G中属于某个隔离对的顶点。

观察 3. 从 G得到 H 时，从 G 中删除的所有顶点在 G中的度均为 2。

现在，为了证明引理的性质（ii），只需证明存在一个分裂（X,Y,a,b）$\in S$（G），使得 G_X（a,b）不同构于 $K_{2,\ t}$对任意 $t\geq 3$均成立。若存在这样的分裂，则可得到一个满足引理性质（ii）的分裂。否则，每个分裂（X,Y,a,b）$\in S$（G）都满足：对某个 $t\geq 3,\ \ G_X$（a,b）同构于$K_{2,\ t}$。由于 G 是 2-连通的，因此 δ（G）≥ 2。令 H 为 G的 ip删除子图。由于δ（G）≥ 2，显然 δ（H）≥ 2。

断言1. H中不存在隔离对，即 I（H）$=\phi$。

证明。反设 H 中存在一个隔离对（u,v），这意味着 H中存在一个分裂（X,Y,u,v），使得对某个 $t\geq 3,\ \ H_X$（u,v）同构于$K_{2,t}$。由于（u,v）$\in I$（H），我们有 deg_H（u）≥ 3且 deg_H（v）≥ 3。由于 $|N_H^2$（u,v）$|\geq 2,\ \ N_H$（u）$\cap N_H$（v）至少包含两个度为 2 的顶点。假设（u,v）$\in I$（G）。那么根据观察1，r_{uv}是 N_H（u）$\cap N_H$（v）中唯一的2度顶点，这与$|N_H^2$（u,v）$|\geq 2$矛盾。因此，我们推断（u,v）$\notin I$（G）。于是，存在一个顶点$z\in N_H^2$（u,v），使得 deg_G（z）≥ 3。但是 deg_H（z）$=2$。因此，根据观察 2，z是某个隔离对的一部分，设该隔离对为 G中的（z,w）。注意，$r_{zw}\in V$（H）且 $zr_{zw}\in E$（H）。但我们知道 N_H（z）$=\{u,v\}$。因此，可以推断 $r_{zw}\in\{u,v\}$。但是 deg_H（r_{zw}）$=2$，这与 deg_H（u）≥ 3且 deg_H（v）≥ 3矛盾。因此，我们可以推断 I（H）$=\phi$，从而断言成立。■

此外，我们声称 H 中存在一个在 G 中度数更高的 2度顶点。

断言 2。 存在一条边 $ac \in E(G)$，满足 $deg_H(a) = 2, deg_G(a) > 2$ 且 $deg_G(c) > 2$。

证明。假设 H 是 2-稀疏的。由于 G 不是 2-稀疏的，因此存在一条边 $ac \in E(G)$，使得 $deg_G(a) > 2$ 且 $deg_G(c) > 2$。于是，由观察 3 可推得 $a, c \in V(H)$。由于 H 是 2-稀疏的，这些顶点中必有一个—— a 或 c ——在 H 中的度为 2。不失一般性，设其为 a。因此，我们得到了所需的边 ac，满足断言中的条件。

~ ~另一方面，假设 H 不是 2-稀疏的。那么，由于 $I(H) = \phi$，根据引理 4，我们得到 $S(H)$ 中的一个分裂 (X, Y, u, v)，使得对于任意 $t \geq 3$， $G_{\tilde{X}}(u, v)$ 都不同构于 $K_{2,t}$。由于每个分裂 $(X, Y, a, b) \in S(G)$ 都满足：存在某个 $t \geq 3$，使得 $G_X(a, b)$ 同构于 $K_{2,t}$，因此我们有 $(X, Y, u, v) \notin S(G)$，这意味着 $G_{\tilde{X}}(u, v)$ 不是 2-稀疏的。于是，存在一条边 $ac \in E(G_{\tilde{X}}(u, v))$，使得 $deg_{G_{\tilde{X}}(u,v)}(a) > 2$（因此 $deg_G(a) > 2$），且 $deg_{G_{\tilde{X}}(u,v)}(c) > 2$（因此 $deg_G(c) > 2$）。因此，由观察 3 可推得 $a, c \in V(H)$。此外，~ ~$H_{\tilde{X}}(u, v)$ 是 2-稀疏的，因为 $(X, Y, u, v) \in S(H)$。因此，这些顶点中必有一个—— a 或 c——在 $H_{\tilde{X}}(u, v)$ 中的度为 2（在 H 中也是如此）。不失一般性，设其为 a。因此，我们得到了所需的边 ac，满足断言中的条件。

因此，无论哪种情况，都存在一条边 $ac \in E(G)$，满足 $deg_H(a) = 2, deg_G(a) > 2$ 且 $deg_G(c) > 2$. ■

根据断言 2，在 H 中存在一个 2度顶点 a，它在 G 中的度更高。根据观察 2，顶点 a 属于 G 中的某个隔离对，不妨设为 (a, b)，并对应一个分裂 (X, Y, a, b)。由于 $(a, b) \in I(G)$， $X = N^2_G(a, b)$ 且 $Y = V(G) \setminus (\{a, b\} \cup N^2_G(a, b))$。我们知道 $r_{ab} \in H$。由于 $deg_G(c) > 2$ 且 $ac \in E(G)$，可推得 $c \in Y$。由于 $deg_H(a) = 2$ 且 $r_{ab} \in H$， c 是 Y 中 a 的唯一邻点。因此 $N_H(a) = \{c, r_{ab}\}$。现在考虑顶点对 (b, c)。如果 $bc \in E(G)$，那么要么 c 是一个割点，要么 bc 是一条弦；这与 G 是一个二连通无弦图矛盾。因此 $bc \notin E(G)$。现在，考虑一个分裂 (X', Y', b, c)，其中 $X' = X \cup \{a\}$ 且 $Y' = Y \setminus c$。我们断言 $G_{X'}(b, c)$ 是 2- 稀疏的。由于 $G_X(a, b)$ 是 2- 稀疏的，只需证明 $deg_{G_{X'}(b,c)}(c) = 2$。由于 c 是 Y 中 a 的唯一邻点，且 $bc \notin E(G)$，我们有 $N_G(c) \cap X' = \{a\}$。因此，$deg_{G_{X'}(b,c)}(c) = 2$，这意味着 $G_{X'}(b, c)$ 是 2-稀疏的。因此，根据定义，$(X', Y', b, c) \in S(G)$。注意，$b \notin N_{G_{X'}(b,c)}(a)$，这意味着对于任意 $t \geq 3$， $G_{X'}(b, c)$ 都不同构于 $K_{2,t}$。但这与以下事实矛盾： $S(G)$ 中的每个分裂，特别是 (X', Y', b, c)，都满足 $G'_X(b, c)$ 同构于某个 $K_{2,t}$，其中 $t \geq 3$。因此，我们可以得出结论：存在一个分裂 $(X, Y, a, b) \in S(G)$，使得对于任意 $t \geq 3$， $G_X(a, b)$ 都不同构于 $K_{2,t}$。这将引理的性质 (ii) 纳入 $S(G)$。

现在，我们将 $S'(G)$ 定义为所有满足以下条件的真 2-割集的分裂 (X, Y, a, b) 的集合： G 中的任意真 2-割集，其 $G_X(a, b)$ 为 2-稀疏，且对于任意 $t \geq 3$，都不同构于 $K_{2,t}$。考虑 $S'(G)$ 中的一个分裂 $s = (X, Y, a, b)$，使得 X 最小。由于 G 是无弦图， $G_X(a, b)$ 中每条 (a, b)-路径都是诱导路径。因此， $G_X(a, b)$ 中长度最大的 (a, b)-路径 P 也是诱导路径。由于 $(X, Y, a, b) \in S'(G)$， P 至少有 3 条边；否则，相应的 $G_X(a, b)$ 同构于某个 $K_{2,t}$，其中 $t \geq 3$，这就造成矛盾。因此，存在 $x, y \in X$，使得 x 与 a 相邻但不与 b 相邻，并且 y 与 b 相邻但不与 a 相邻。注意，按照真 2- 割集的定义， a 和 b 在 X 中各至少有一个邻点，在 Y 中也各至少有一个邻点。

首先我们断言， a 或 b 中至少有一个在 X中有至少两个邻点。反证法，假设 a 和 b 在 X中都只有一个邻点。由于 $G[X \cup \{a, b\}]$ 不是 G 中的诱导路径，而 G 是一个无弦图，因此 a 和 b 在 X 中的唯一邻点是 G中两个不同且不相邻的顶点。这意味着 x和 y分别是 a和 b在 X中的唯一邻点。现在，考虑分裂(X', Y', x, b)，其中 $X' = X \setminus x$和 $Y' = Y \cup \{a\}$。由于对任意$t \geq 3$，$deg_{G_X}(a,b)(b) = deg_{G_{X'}}(x,b)(b) = 2$, $G_{X'}(x, b)$都不同构于$K_{2,t}$。此外， $G_{X'}(x, b)$是2-稀疏的，因为 $G_X(a, b)$是2-稀疏的。因此我们可以推断，$(X', Y', x, b) \in S'(G)$，这与 s 在 $S'(G)$中的极小性矛盾。因此， a 或 b 中至少有一个在 X中有至少两个邻点，这意味着在 $G_X(a, b)$中，要么 $deg(a) \geq 3$，要么 $deg(b) \geq 3$。不失一般性，设$deg(a) \geq 3$在 $G_X(a, b)$中。

如果 $deg(b) \geq 3$属于 $G_X(a, b)$，那么问题就解决了。否则，令 $deg(b) = 2$属于 $G_X(a, b)$。这意味着 y 是 b 在 X 中唯一的邻点。现在，考虑分裂 (X'', Y'', a, y)，其中 $X'' = X \setminus y$ 和 $Y'' = Y \cup \{b\}$。如果对于任意 $t \geq 3$， $G_{X''}(a, y)$ 都不同构于 $K_{2,t}$，那么由于 $G_{X''}(a, y)$ 是 2-稀疏的（因为 $G_X(a, b)$ 是 2-稀疏的），我们有 $(X'', Y'', a, y) \in S'(G)$，这与 s 在 $S'(G)$ 中的极小性矛盾。因此，对于某个 $t \geq 3$， $G_{X''}(a, y)$ 同构于 $K_{2,t}$，从而如所需，推出 X 的极小性。

至此，引理的证明完成。 ■

4 定理1

证明。设 G 是给定的连通无弦图，其有 n 个顶点和 m 条边。若 $\Delta = 1$，则 G 只有一条边，任何着色都只需一种颜色，这表明 $a'(G) = 1 = \Delta$。若 $\Delta = 2$ 且 G 是无环的，则 G 是一条路径。我们知道，任何路径都可以用 2 种颜色进行无圈边着色。若 $\Delta = 2$ 且 G 不是无环的，则 G 是一个圈。注意，根据无圈边着色的定义，对一个圈的边进行无圈边着色至少需要 3 种颜色。显然，3 种颜色也足够。因此，$a'(G) = 3 = \Delta + 1$。于是我们假设 $\Delta \geq 3$。此外，在证明中必要时，我们对 m 使用归纳法。

如果 G 不是 2-连通的，那么存在一个顶点 $x \in V$，它是割点。令 C_1、C_2、...、C_k 为 $G \setminus x$ 中的连通分支。对于每个 $i \in \{1, 2, ..., k\}$，我们定义 C'_i 为 $G[V(C_i) \cup x]$。由于每个 C'_i 都是无弦的，且边数少于 m，根据归纳假设（I.H.），我们用 Δ 种颜色对所有 C'_i's 进行无环着色，因为 $\Delta(C'_i) \leq \Delta, \forall i$。将此着色记为 c'。现在，我们将 c' 扩展为 G 的一种着色 c。注意，除与 x 相 incident 的边之外，每个 C'_i 的着色彼此独立。现在，置换每个 C'_i 中的颜色，使与 x 相 incident 的边获得不同的颜色，从而得到 G 的着色 c。容易看出，着色 c 是正常且无环的，因此证毕。因此，我们也假设 G 是 2-连通的。这也意味着 $\delta(G) \geq 2$。

如果 G 有一条边 uv，其端点的度均为 2，那么通过将边 uv 收缩为一个新顶点 k_{uv}，可由 G 得到图 H。设 u' 为 u 除 v 以外的邻点，并设 v' 为 v 在 G中除 u 以外的邻点。注意，H 是无弦图，且其边数少于 m。因此，根据归纳假设，H 可以用 Δ种颜色着色，因为 $\Delta(H) \leq \Delta$。设 d 为这样的一种着色。现在我们将着色 d 扩展为 G的着色 c。令$c(uu')$为 $= d(k_{uv}u')$，令 $c(vv')$为 $= d(k_{uv}v')$，并给边 uv 指定一种不同于这两种颜色的颜色（由于 $\Delta \geq 3$，我们至少有三种颜色）。对于 G中的任意其他边 e，令 $c(e)$为 $= d(e)$。不难看出，着色 c 是无环的，故结论成立。因此，我们也可以假设 G 没有一条端点度均为 2 的边。

以下　　观察结果和后续引理在下文中多次用到　　of.

观察 4. 设 G 是一个 2-连通、2-稀疏图，且没有任何一条边同时关联两个度为 2 的顶点。那么 G是二分图。

证明. 由于 G 是 2-稀疏且 2-连通的，因此有 $\delta(G) = 2$。又由于 G 是 2-稀疏的，顶点集合$\{x \in V(G) \mid deg(x) \geq 3\}$ 构成一个独立集。现在，由于任意两个度为 2 的顶点之间都没有边相连，度为 2 的顶点集合也构成一个独立集。因此，G 是二分图。■

观察 5. 设 G 是一个 2-连通、非 2-稀疏无弦图，且没有任何一条边同时关联两个度为 2 的顶点；再设 (X, Y, a, b) 是 G 的一个分裂，使得 $G_X(a, b)$ 是 2-稀疏的，$deg(a) \geq 3$ 且 $deg(b) \geq 3$。那么，$G_X(a, b)$ 中任意一条 (a, b)-路径的长度都是偶数。

证明。由于 G 是 2-连通且不是 2-稀疏的，根据引理 4，存在 G 的一个分裂 (X, Y, a, b)，使得 $G_X(a, b)$ 是 2-稀疏的。由于在 G 和 $deg(a) \geq 3$ 以及 $deg(b) \geq 3$ 中，不存在同时关联两个度为 2 的顶点的边，因此在 $G_X(a, b)$ 中也不存在同时关联两个度为 2 的顶点的边。于是，根据观察 4，$G_X(a, b)$ 是二部图，且 a 和 b 位于二部划分的同一侧。因此，任意 (a, b)-路径的长度都应为偶数。■

引理 6。设 d 是图 G 的一个部分无圈边着色，且至多使用 Δ 种颜色。设 $P = v_1 v_2 \cdots v_k$ 是一条极大双色路径，其中 $d(v_{2i-1}v_{2i}) = \alpha$ 且 $d(v_{2i}v_{2i+1}) = \beta$，对所有$1 \leq i \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$均成立。对于所有 $v_{2i-1} \in V(P)$，设 $deg(v_{2i-1}) = 2$；对于所有 $v_{2i} \in V(P)$，设 v_{2i} 的邻点全都是度为 2 的顶点。设 $N(v_1) = \{v_2, s\}$，$deg(s) \geq 3$，且 $s \notin V(P)$。此外，设边 $v_1 s$ 在着色 d 中未着色。那么，存在 G 的一个有效的部分无环边着色 c，至多使用 Δ 种颜色，使得 d 中已着色的所有边以及边 $v_1 s$ 都在 c 中着色。

证明。若边 sv_1 存在可用颜色，则将该颜色赋给 sv_1，即可得到所需的着色 c。以下假设边 $v_1 s$ 不存在可用颜色。因此，要么边 sv_1 没有候选颜色，这意味着 $|F_s \cup F_{v_1}| = \Delta$ 和 $\alpha \notin F_{v_1 s}$；要么没有候选颜色（例如 η）可用于边 sv_1，这意味着 $\alpha \in F_{v_1 s}$，并且相对于着色 d，G 中存在一条 $(\alpha, \eta, v_1 s)$-临界路径。注意，在后一种情况下，$\eta \neq \beta$，因为 (α, β)-双色路径 P 并未到达顶点 s。

通过沿路径 P 交换颜色 α 和 β，我们从 d得到一种着色 c'，使得 $F_{sv_1}(c') = \{\beta\}$ 且$F_{v_1 s}(c') = F_{v_1 s}(d)$。如果此次交换没有形成双色圈，那么我们令着色为 $c'' = c'$。

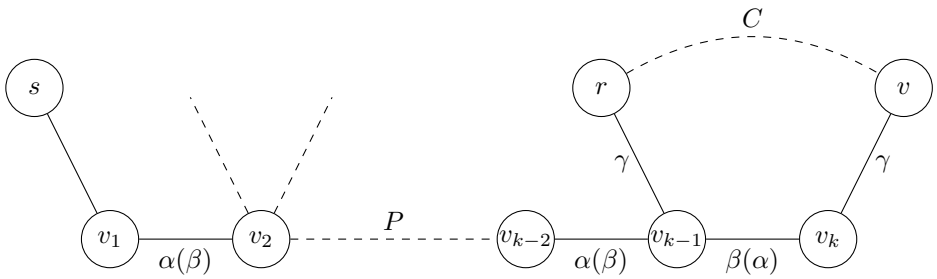

图1：路径 P 及其邻域

否则，令 C 为此次交换形成的双色圈（图1展示了一个例子）。由于 P是极大的，显然 C 不是一个 (α,β)-双色圈。注意， C 中的一种颜色必定是 α或 β，因为我们没有改变 α和 β以外的任何颜色。这意味着 $V(P)\cap V(C)\subseteq\{v_1,v_2,v_{k-1},v_k\}$，因为 P 中交替出现的度为 2 的顶点只看到颜色 α 和 β。因此，圈 C 可能只包含路径 P的第一条边或最后一条边。圈 C 不能包含 P 的第一条边，因为边 v_1s 在着色 d 和 c'中都没有被赋予任何颜色。因此，我们可以推断，该圈只包含 P的最后一条边（即 $v_{k-1}v_k$），且 $V(P)\cap V(C)=\{v_{k-1},v_k\}$。这也意味着 $deg(v_{k-1})\geq 3$且$deg(v_k)=2$。我们还可以推断， C 是通过在 P中交换颜色所形成的唯一双色圈，因为形成的任何圈都必须包含顶点 v_k，并且 $deg(v_k)=2$。

设 r 是圈 C 上与 v_{k-1} 相邻、但不在路径 P上的邻点。显然， $deg(r)=2$ 且 $deg(v_{k-2})=2$。容易看出， $d(v_{k-1}v_k)=\beta$。因此， $c'(v_{k-1}v_k)=\alpha$。注意， $F_{v_{k-1}v_{k-2}}=\{\alpha\}$。设 $c'(v_{k-1}r)=\gamma$。因此， C 是一个(α,γ)-双色圈。现在交换边 $v_{k-1}r$ 和 $v_{k-1}v_{k-2}$上的颜色，得到着色 c''，显然这会消除双色圈 C。任何新形成的双色圈 C' 都应至少包含边 $\{v_{k-1}r,v_{k-1}v_{k-2}\}$ 中的一条，因此至少包含顶点 $\{r,v_{k-2}\}$中的一个。注意，由于 $F_r=\{\alpha,\beta\}$ 且 $F_{v_{k-2}}=\{\alpha,\gamma\}$，我们可以推断圈 C' 包含颜色之一 α 。由于$c''(v_{k-1}v_k)=\alpha$，圈 C'包含顶点 v_k。但是 $F_{v_k}=\{\alpha,\gamma\}$，这意味着 C'是一个(α,γ)-双色圈。这是矛盾的，因为从 v_{k-1} 出发、朝顶点 v_k 延伸的(α,γ)-双色路径终止于 r。因此，着色 c'' 是 G的一个有效部分着色。

现在，我们需要为边 v_1s 着色。注意，要么 $c''(v_1v_2)=\beta$，要么 $c''(v_1v_2)=\gamma$，且 $k=3$。如果$\alpha\notin F_{v_1s}$，那么我们将颜色 α 赋给边 v_1s，得到着色 c。注意， F_{sv_1} 要么是 $\{\beta\}$，要么是 $\{\gamma\}$。如果 $F_{sv_1}=\{\beta\}$，那么相对于着色 c，唯一可能的双色圈是一个 (α,β)-圈。但我们知道，路径 P 终止于 v_k。在着色 c''中，从 v_1 出发的 (β,α)-双色路径将终止于 v_k 或 v_{k-2}，二者都不同于 s。因此，我们得出结论：相对于 c''，不存在 (β,α,v_1s)-临界路径。如果 $F_{sv_1}=\{\gamma\}$，那么相对于着色 c，唯一可能的双色圈是一个 (α,γ)-圈。但我们知道，在着色 c''中，从 v_1 出发的 (α,γ)-双色路径将经过 v_k 并终止于 r。此外，由于 $deg(r)=2$且 $deg(s)\geq 3$， $r\neq s$。因此，我们得出结论：相对于 c''，不存在 (γ,α,v_1s)-临界路径。由此，着色 c 即为所需的着色。

另一方面，假设 $\alpha\in F_{v_1s}$。那么我们有 $|F_{v_1s}(d)\cup F_{sv_1}(d)|\leq\Delta-1$，并且存在候选颜色 η，可用于边 v_1s，相对于着色 d 以及 c''。回想一下， $\eta\neq\beta$。
假设 $F_{sv_1}=\{\beta\}$。设颜色 η 不适用于边 v_1s。那么，相对于 c''，存在一条（β,η,v_1s）-临界路径。将这条路径记为 $Q=v_1v_2u_1u_2\cdots s$。注意， $deg(u_1)=2$，因此 $c''(u_1u_2)=\beta$。回想一下，曾经存在一条相对于 d 的（α,η,v_1s）-临界路径，这意味着 $d(u_1u_2)=\alpha$。从 d 得到 c'' 时，唯一从 α 改着为 β 的边是 P 中的边。若 $k\leq 3$，那么很容易看出 P 不会到达顶点 u_1。若 $k>3$，则注意，在着色 d下， P 中任何着为 α 的边都连接一个 2度顶点和一个高次顶点。然而， $deg(u_1)=2$，这意味着 $v_k\neq u_1$。因此，无论 k 的值为何， P 都不会到达顶点 u_1。所以， $c''(u_1u_2)=\alpha$，这与 $c''(u_1u_2)=\beta$ 矛盾。因此，颜色 η 适用于边 v_1s。

现在，我们有 $F_{sv_1}\neq\{\beta\}$。接着， $F_{sv_1}=\{\gamma\}$ 与 $k=3$。注意， $c''(v_2r)=\beta, F_{v_2r}=\{\alpha\}$，且 $c''(v_2v_3)=\alpha$。回想一下，曾存在一个 (α,γ)-双色圈 C'，它涉及顶点 $\{r,v_2,v_3\}$，相对于着色 c'；这进而意味着存在一条 (α,γ)-双色路径，从 v_1 出发，经过 r

并以 v_3 为终点，相对于着色 d。假设 $\eta = \gamma$。那么，由于对于边 v_1s而言，相对于 d不存在可用颜色，因此存在一条 (α, γ, v_1s)-临界路径。因此，在着色 d中，从 v_1 出发、经过 r 的 (α,γ)-双色路径以 s为终点；这与 $v_3 \neq s$矛盾。由此可推知 $\eta \neq \gamma$。假设颜色 η 对于边 v_1s而言不是可用颜色。那么，相对于 c''，存在一条 (γ, η, v_1s)-临界路径。设这条路径为 $R = v_1v_2w_1w_2\cdots s$。注意， $deg(w_1) = 2$，因此 $c''(w_1w_2) = \gamma$。回想一下，相对于 d，曾存在一条 (α, η, v_1s)-临界路径，这意味着 $d(w_1w_2) = \alpha$。注意，在 d 中唯一被着色为 α 、而在 c'' 中被重新着色为 γ 的边是边 v_1v_2。因此， $c''(w_1w_2) = \alpha$，这与 $c''(w_1w_2) = \gamma$矛盾。于是，颜色 η 对于 c''中的边 v_1s 是可用的。

因此，无论 $F_{sv_1} = \{\beta\}$ 是否，颜色 η 都是 c''中边 v_1s 的可用颜色。因此，我们将η 赋给边 v_1s ，得到所需的有效着色 c。■

回顾一下，我们有一个 2-连通图 G ，其中有 $\Delta \geq 3$、 $\delta \geq 2$ ，且不存在同时关联两个度为 2 的顶点的边。根据 G 是否为 2-稀疏图，分以下几种情况讨论。

情况 i： G是 2-稀疏图。

考虑 G的任意一条边 xy 。由于 G 是 2-稀疏图，因此 $deg(x) = 2$ 或 $deg(y) = 2$。不失一般性，假设 $deg(x) = 2$。那么 $3 \leq deg(y) \leq \Delta$。由于 $deg(x) = 2$， $|N(x) \setminus y| = 1$。设 x' 是x 除 y以外的邻点。设$G' = G \setminus xy$。由于 G' 是无弦图且其边数少于 m ，根据归纳假设，我们可以用 Δ 种颜色对 G' 进行无环着色，因为 $\Delta(G') \leq \Delta$。设 c' 是与子图 G'对应的 G 的无圈部分边着色。令 $c'(xx') = \alpha$。现在，我们将 c' 扩展为 G的着色 c 。

若 $F_{yx} \cap F_{xy} \neq \phi$，则 $\alpha \in F_{yx} \cap F_{xy}$。因此 $|F_{yx} \cup F_{xy}| \leq \Delta - 1$。于是，存在边 xy 的候选颜色 γ。若不存在 (α, γ, xy)-临界路径，则根据引理 2， γ 对边 xy 也有效。否则，存在一条 (α, γ, xy)-临界路径，记为 P。令 y' 为沿着 P 与 y 相邻的顶点。则 $c'(yy') = \alpha$，且 $F_{yy'} = \{\gamma\}$，因为 $deg(y') = 2$。令 β 为一种既非 α 又非 γ 的颜色（β 存在，因为 $\Delta \geq 3$）。令 Q 为从顶点 x 出发的 (α, β)-极大双色路径。由于 $F_{yy'} = \{\gamma\}$， Q 无法通过一条颜色为 α 的边到达 y 。

若 $F_{yx} \cap F_{xy} = \phi$，则对于任意 β， G 中都不存在 (α, β, xy)-临界路径。因此，若边 xy 存在至少一种候选颜色 γ ，则根据引理 2， γ 也有效，我们便得证。否则，边 xy 没有候选颜色。因此 $|F_{yx} \cup F_{xy}| = \Delta$。令 β 为一种不同于 α 的颜色。令 Q 为从顶点 x 出发的 (α, β)-极大双色路径。由于 G 中不存在 (α, β, xy)-临界路径， Q 无法通过一条颜色为 α 的边到达 y 。

因此，无论 $F_{yx} \cap F_{xy} = \phi$ 与否，我们都有一条从 x 出发的（α, β）-极大双色路径 Q ，它不会经由一条着色为 α的边到达 y 。若 Q 经由一条着色为 β的边到达 y ，则我们在 2-稀疏图 G中得到一个奇圈，这与观察 4 矛盾。因此可以推断， Q 不会到达y。由于 G 是 2-稀疏的， Q 中的交替顶点度均为 2，且 x 的度等于 2； Q 中任意高次顶点的所有邻点的度也均为 2。此外，我们有 $N(x) = \{x', y\}$、 $deg(y) \geq 3$ 以及$y \notin V(Q)$。又由于边 xy 在 c'中未着色，路径 Q 和着色 c' 满足引理 6 所要求的条件。因此，根据引理 6，我们得到 G 的一个无环部分边着色 c ，其中边 xy具有一个可用颜色。由于 G 的所有边均已着色， c 也是 G的一个无环边着色。

情形 ii： G 不是 2-稀疏的。

由引理 3， G 有一个真 2-割集及其对应的分裂。令 S 为 G 的所有分裂 (X, Y, a, b) 的集合，使得 $G_X(a, b)$ 是 2-稀疏的，且对任意 $t \geq 3$， $G_X(a, b)$ 都不同构于 $K_{2,t}$，并且在 $G_X(a, b)$ 中， $deg(a) \geq 3$，且 $deg(b) \geq 3$ 或 $deg(b) = 2$ ，其中 X 是极小的。由引理 5，我们知道 $S \neq \phi$。若 S 中存在一个分裂 (X, Y, a, b)，使得 $deg(a) \geq 3$ 且 $deg(b) \geq 3$，则考虑分裂 (X, Y, a, b)。否则，考虑 S 中一个分裂 (X, Y, a, b)，使得 $deg(a) \geq 3$ 且 $deg(b) = 2$，其中 X 在 S 中是极小的。令 x 为 $G_X(a, b)$ 中一个与 a 相邻但不与 b 相邻的顶点，并令 y 为 $G_X(a, b)$ 中一个与 b 相邻但不与 a 相邻的顶点。由于在 G 中以及在 $G_X(a, b)$ 中，$deg(a) \geq 3$， X 中与 a 相邻的任何邻点的度都应为 2，因为 $G_X(a, b)$ 是 2-稀疏的。这意味着 $deg(x) = 2$。用类似的论证，若 b 在 X 中至少有两个邻点（即，若 $deg(b) \geq 3$），则 X 中与 b 相邻的任何邻点（特别是顶点 y）的度都是 2。

现在考虑 $G' = G \setminus xa$。由于 G' 是无弦图且其边数少于 m，根据归纳假设，我们可以用 Δ 种颜色对 G' 的边进行无环着色，因为 $\Delta(G') \leq \Delta$。令 c' 为与子图 G'对应的 G 的无圈部分边着色。由于 $deg(x) = 2$ ，且 x 与 a 相邻但不与 b相邻，因此 x 应有一个不同于 a的邻点 u 。令$c'(xu) = \alpha$。现在，我们将 c' 扩展为 G的着色 c 。以下断言将在证明后续部分中发挥作用。

断言 3. 设 R 为从顶点 x 出发的 (α,β)-极大双色路径， T 为从顶点 x 出发的 (α,γ)-极大双色路径。那么， R 或 T 至少有一个未到达顶点 b。

证明。为导出矛盾，假设 R 和 T 都能到达顶点 b。由于 G 没有一条端点度数均为 2 的边，且 $G_X(a,b)$ 是 2-稀疏的， R 和 T 中的交替顶点度数均为 2。这些路径从一个 2 度顶点 x 出发，其中从 2 度顶点到高次顶点的边着色为 α ，从高次顶点到 2 度顶点的边着色为 β ，并且相对于 R 和 T， γ 。假设 R 和 T 通过一条着色为 α 的边到达顶点 b 。这意味着 $deg(b) \geq 3$。我们可以推断， X 中 b 的任意邻点度数都是 2。设 X 中 b 的一个邻点为 r ，使得 $c'(rb) = \alpha$。由于 r 的度为 2， r 在 $\{\beta,\gamma\}$ 中至多能看到一种颜色，这与我们假设 R 和 T 都能到达顶点 b 相矛盾。因此我们可以推断， R 和 T 无法通过一条着色为 α 的边到达顶点 b ，这表明 R 和 T 分别通过着色为 β 和 γ 的边到达顶点 b ，从而 $deg(b) \geq 3$。由于我们已经有 $deg(a) \geq 3$， R (或 T) 与边 (a,x) 一起构成 $G_X(a,b)$ 中的一条奇数长度的 (a,b)-路径，这与观察 5 相矛盾。因此我们可以推断， R 或 T 无法到达顶点 b。■

假设边 xa 没有候选颜色。因此 $|F_{ax} \cup F_{xa}| = \Delta$，这意味着 $F_{ax} \cap F_{xa} = \phi$。令 β 和 γ 为除 α 之外的两种颜色。显然， G 中不存在 (α,β,xa)-临界路径，也不存在 (α,γ,xa)-临界路径，因为 $F_{ax} \cap F_{xa} = \phi$。令 R 和 T 分别为从顶点 x 出发的 (α,β)-极大双色路径和 (α,γ)-极大双色路径。于是根据断言 3， R 或 T 不会到达 b。不失一般性，假设 R 不会到达 b。由于 R 也不会到达 a ，且 b， R 完全处于 $G_X(a,b)$ 中，而该图是 2-稀疏的。注意，由于 $G_X(a,b)$ 是 2-稀疏的， R 中的交替顶点度为 2， x 的度等于 2，并且 R 中任意高次顶点的所有邻点度均为 2。此外，我们有 $N(x) = \{u,a\}$， $deg(a) \geq 3$ ，以及 $a \notin V(R)$。又因为边 ax 在 c' 中尚未着色，路径 R 和着色 c' 满足引理 6 所要求的条件。因此，根据引理 6，我们得到 G 的一个无环部分边着色 c ，其中边 xy 有一个可用颜色。由于 G 的所有边都已着色， c 是 G 的一个无环边着色。

另一方面，假设存在边 xa 的一个候选颜色 γ。如果 G 中不存在一条 (α,γ,xa)-临界路径，那么 γ 也是可用颜色，证毕。因此，我们可以假设存在一条位于 G 中的 (α,γ,xa)-临界路径 P。令 v 为沿路径 P 与顶点 a 相邻的顶点。注意到 $c'(av) = \alpha$ 和 $\gamma \in F_{av}$。令 β 为一种既不同于 α 也不同于 γ 的颜色。令 Q 为从顶点 x 出发的 (α,β)-极大双色路径。

假设 Q 未到达顶点 b。如果 Q 通过一条着色为 β 的边到达 a ，那么 $G_X(a,b)$ 中有一个奇圈，而该图是 2-稀疏的，这与观察 4 矛盾。另一方面，如果 Q 通过一条着色为 α 的边到达 a ，那么边 $av \in Q$ ，这意味着 $v \in X$。由于 $v \in N(a)$， $deg(v) = 2$。因此， $F_{av} = \{\beta\}$，这与事实 $\gamma \in F_{av}$ 矛盾。由此可推知， Q 也既未到达 a ，也未到达 b。因此， Q 完全位于 $G_X(a,b)$ 中，而该图是 2-稀疏的。于是， Q 中的交替顶点的度均为 2，且 x 的度等于 2； Q 中任何高次顶点的所有邻点的度也都是 2。此外，我们有 $N(x) = \{u,a\}$， $deg(a) \geq 3$ ，以及 $a \notin V(Q)$。又由于边 ax 在 c' 中未着色，路径 Q 和着色 c' 满足引理 6 所要求的条件。因此，根据引理 6，我们得到 G 的一个无环部分边着色 c ，其中边 xy 有一个可用颜色。由于 G 的所有边都已着色， c 是 G 的一个无环边着色。

现在，我们假设 Q 到达顶点 b。注意，由于 P 是一个 (α,γ,xa)-临界路径，因此它也是一条从 x 开始的 (α,γ)-极大双色路径。因此，根据断言 3， P 无法到达顶点 b ，这意味着 P 完全包含在 $G_X(a,b)$ 中，而该图是 2-稀疏的。因此， $G_Y(a,b)$ 中与顶点 a 关联的任意边都不能着色为 α。令 z 和 w 分别为沿着 P 和 Q 从顶点 u 出发的后继顶点。

假设 $w \neq b$。现在，我们对边 uz 和 uw 进行颜色交换，从而得到 G 的部分着色 c'' ，该着色对应于子图 $G \setminus xa$。由于 $F_{uw} = F_{uz} = \{\alpha\}$，该颜色交换是有效的。注意，通过这次颜色交换，我们移除了 (α,γ,xa)-临界路径，并且由于 $F_{uw} = \{\alpha\}$，没有形成新的 (α,γ,xa)-临界路径。因此，我们可以推断， γ 是 c'' 中边 xa 的可用颜色。于是，通过将颜色 γ 指派给边 xa，我们可以得到 G 的无圈边着色 c 。

另一方面，假设 $w = b$。这意味着 $y = u$, $deg(b) = 2$ 和 $c'(yb) = c'(uw) = \beta$。因此， y 是 b 在 X 中的唯一邻点，这说明 (X',Y',a,y)（其中 $X' = X \setminus y$ 且 $Y' = Y \cup \{b\}$ ）是 G 中的一个分裂。注意， $deg(a) \geq 3$ 且 $deg(y) \geq 3$。此外， $G_{X'}(a,y)$ 是 2-稀疏的，因为 $G_X(a,b)$ 是 2-稀疏的。因此，若 $G_{X'}(a,y)$ 不同构于 $K_{2,t}$（对任意 $t \geq 3$），则 $(X',Y',a,y) \in S$，这与 S 中 X 的极小性矛盾。因此， $G_{X'}(a,y)$ 对某个 $t \geq 3$ 同构于 $K_{2,t}$。由此可推知， y 在

X' 也是 a 的邻点。因此， $uz = yz$ 被赋予颜色 γ ，且由于 $c'(av) = \gamma$ 和 $v \in X$，我们有 $z = v$。（参见图2）。此外，根据 $\Delta(G)$ 的值，证明分为两个子情形。

子情形-i： $\Delta(G) \geq 4$。

在此子情形中，我们有一个颜色 $\eta \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}$。如果与顶点 y 关联的边中没有一条被着成 η，那么我们将边 xy 的颜色改为 η ，并将颜色 γ 赋给边 xa ，从而得到 G的一个着色 c 。由于 $c(az) = \alpha$，着色 c中不会形成新的(γ, η)-双色圈。因此， c 就是 G所需的无圈边着色。于是，我们可以假设存在一个顶点 $k \in N(y) \cap X$ ，使得 $c'(yk) = \eta$。由于 y 在 X 中的任一邻点也是顶点 a 的邻点，因此顶点 k 和 z 都与顶点 a 相邻。由于 P 是一个 (α, γ, xa)-临界路径， $c'(az) = \alpha$。因此， $c'(ak) \neq \alpha$。此外，由于 γ 是边 xa的候选颜色， $c'(ak) \neq \gamma$ （参见图2）。现在，我们对边 yx 和 yk 进行颜色交换，得到与子图 $G \setminus xa$对应的 G 的一个部分着色c''。着色 c'' 是正常的，因为 $c''(ak) = c'(ak) \neq \alpha$。此外，由于 $c''(ak) \neq \gamma$，相对于 c''不存在(α, γ, xa)-临界路径。由于 $c''(az) = \alpha$，颜色交换不会形成新的(γ, η, xa)-临界路径。因此，我们可以推断， γ 是 c''中边xa 的可用颜色。于是，将颜色 γ 赋给边 xa，即可得到 G 的一个无圈边着色 c 。

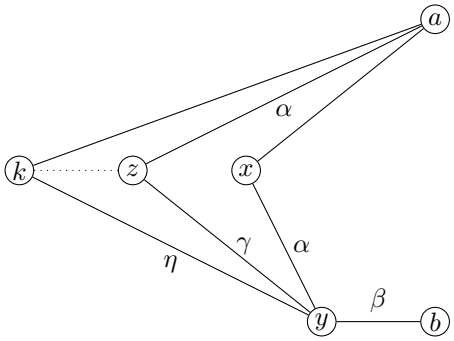

图2： $G[X \cup \{a, b\}]$ 当 $\Delta \geq 4$

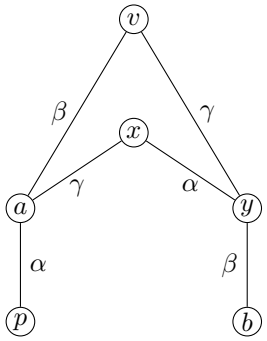

图3： $G[X'' \cup \{p, b\}]$ 当 $\Delta = 3$

子情形 ii： $\Delta(G) = 3$。

在此子情形中， $G_{X'}(a, y)$ 与 $K_{2,3}$ 同构。因此，显然， $v = z$是 X' 中除 x之外的 a和 y的公共邻点。令 p 为 Y' 中 a 的唯一邻点。现在，对于此子情形，我们将通过重新定义分裂和着色来分别进行着色。考虑一个分裂 (X'', Y'', p, b)，其中 $X'' = \{x, v, y, a\}$和 $Y'' = Y \setminus p$。容易看出， $G_{X''}(p, b)$是2-稀疏的，因为 $G_X(a, b)$是2-稀疏的。另请注意， $deg(x) = 2$， $deg(v) = 2$， $deg(a) = 3$且 $deg(y) = 3$。现在考虑图 $G'' = G_{Y''}(p, b)$。注意， G''是无弦的，且其边数少于 m 。因此，根据归纳假设，我们得到 G'' 的一个无圈边着色 c'' ，使用 Δ 种颜色，因为 $\Delta(G'') \leq \Delta$。令w为 $G_{Y''}(p, b)$中的标记顶点。令 $c''(pw) = \alpha$且 $c''(bw) = \beta$。令 γ为一种既不同于 α也不同于β的颜色。现在，我们尝试将 c'' 扩展为 G的着色 c 。对于 $G'' \setminus w$中的任意一条边 e ，赋予 $c(e) = c''(e)$。现在，赋予$c(pa) = c''(pw) = \alpha$， $c(by) = c''(bw) = \beta$， $c(av) = \beta$， $c(yx) = \alpha$ 以及 $c(ax) = c(yv) = \gamma$ （参见图3）。容易看出，相对于着色 c， G 中不存在双色圈，这意味着 c 是 G的一个无圈边着色。

因此，无论如何，我们都能够对图进行着色 G ，使用 Δ 种颜色，这标志着定理 1 的证明完成。 ■

5 算法与复杂度分析

本节概述一种多项式时间算法，用于以 $a'(G)$ 种颜色对无弦图 G 进行无圈着色，并分析该算法的复杂度。与通常一样， n 和 m 分别表示输入图 G 的顶点数和边数。若 $\Delta = 1$ ，或者 $\Delta = 2$ 且 G 为无圈图，则 G 要么是一个匹配，要么是一组路径。注意，这两种结构都可以轻易地用 $a'(G)$ 种颜色着色。若 $\Delta = 2$ 且 G 非无圈，则 G 中的每个连通分支要么是路径，要么是圈，且至少有一个连通分支是圈。注意，无圈边着色中，圈需要三种颜色，而路径需要两种颜色。因此， G 可以用 $a'(G)$ 种颜色着色。因此，我们可以假设 $\Delta \geq 3$。根据注1，我们假设 G 连通。我们还可以假设 G 是 2-连通的（因此 $\delta(G) \geq 2$），否则我们

可以使用 Hopcroft 和 Tarjan 的线性时间算法 [15] 计算 G的 2-连通分量，并且从块重构着色到 G很简单。若 G 有一条同时关联两个度为 2 的顶点的边，则可以收缩该边，并得到所得图的着色。注意，将此着色扩展到图 G 很简单。因此，我们收缩 G 中所有同时关联两个度为 2 的顶点的边。注意，文中讨论的着色（当 $\Delta \leq 2$ 时）及所有扩展都可以在线性时间内完成。因此，我们得到一个 2-连通图 G，它满足 $\Delta \geq 3$，且没有同时关联两个度为 2 的顶点的边。

首先检查图 G 是否为 2-稀疏图，这可以在线性时间内完成。如果 G 是 2-稀疏图，则取该 2-稀疏图中的一条未着色边 xy。回想一下，我们假设 G 没有一条端点的度均为 2 的边。因此，要么 $deg(x) = 2$，要么 $deg(y) = 2$。不失一般性，假设 $deg(x) = 2$。现在，从 x 出发，得到一条不会到达 y 的极大双色路径 Q（其存在性已在第 4 节的情形 i 中证明），然后按照引理 6 中的策略，得到该图的部分无圈边着色，其中边 xy也已着色。请注意，上述步骤可以在线性时间内完成 $O(m)$，因为这只需进行相邻颜色检查并沿路径重新着色。我们对 2-稀疏图 G中的每条边重复此步骤。因此，2-稀疏图的着色可以在 $O(m^2)$ 时间内完成。

否则，如果 G 不是 2-稀疏的，那么令 (X, Y, a, b) 为 G 中满足引理 5 所述性质的一个分裂。现在，我们选择顶点 a 的一个邻点，记作 x，并在假设 $G \setminus ax$ 已着色的情况下为边 ax 着色。为此，我们从 x 出发，找到一条不会到达 a、也不会到达 b 的极大双色路径 P（其存在性由断言 3 保证），然后按照引理 6 中的策略，得到一组部分无圈边着色，其中边 ax 也已着色。由于这只需结合相邻颜色检查和沿路径重新着色，为边 ax 着色这一步可在 $O(m)$ 线性时间内完成。

现在我们分析获得所需分裂所需的时间。我们将证明，这样的分裂可以在 $O(n^3)$ 时间内获得。对于 G 中每一对不相邻顶点 (a, b)，令 S 为 $G \setminus \{a, b\}$ 中所有在图 $G[V(C) \cup \{a, b, w\}]$ (w 是一个同时与 a 和 b 相邻的标记顶点) 中为 2-稀疏的连通分支 C 构成的集合。令 C_1 为 S 中所有平凡连通分量构成的集合。令 C_2 为 S 中所有非平凡连通分量构成的集合，其中 $G[V(C) \cup \{a, b, w\}]$ 中 a 的每个邻点和 b 的每个邻点的度均为 2。令 C_3 为 S 中所有非平凡连通分量构成的集合，其中 $G[V(C) \cup \{a, b, w\}]$ 中 a 或 b 至少有一个邻点的度不小于 3。

若 $|C_1 \cup C_2| \geq 2$ with $C_2 \neq \phi$，则令 C' and C'' 为 $C_1 \cup C_2$ 中的任意两个连通分支，且至少有一个属于 C_2。现在，赋予 $X = V(C') \cup V(C'')$ 以及 $Y = V(G) \setminus (X \cup \{a, b\})$。因此，$(X, Y, a, b)$ 是所需的分裂~，其中 $deg(a) \geq 3$ 以及 $deg(b) \geq 3$ in G_X a b $|C_1 \cup C_2| < 2$ $C_2 \neq \phi$ $C \in C_2$ a b(,)。否则，若 if and，则令。若 and~在 C 中至少有两个邻点，则赋予 $X = V(C)$ 和 $Y = V(G) \setminus (X \cup \{a, b\})$，因此 (X, Y, a, b) 是所需的~分裂，其中 $deg(a) \geq 3$ 以及 $deg(b) \geq 3$ in $G_X(a, b)$。设 a or b 在 C 中有唯一邻点。若~ a 和 b 在 C 中均有唯一邻点，则舍弃该对 (a, b)。因此，~ ~a 或 b 中恰有一个在 C 中有唯一邻点。不失一般性，令 b 在 C 中有唯一邻点 b'。注意，由于 G 中不存在同时关联两个度为 2 的顶点的边，$deg(b') \geq 3$。现在，考虑分裂 $(X', Y' a, b')$，其中 $X' = X \setminus b'$ and $Y' = Y \cup \{b\}$。若 $G_{X'}(a, b')$ 不同构于 $K_{2,t}$ for any $t \geq 3$，则 (X', Y', a, b') 是所需的分裂，其中 $deg(a) \geq 3$ 以及 $deg(b') \geq 3$ in $G_{X'}(a, b')$。否则，若 $G_{X'}(a, b')$ 同构于 $K_{2,t}$ for some $t \geq 3$，则 (X, Y, a, b) 是所需的分裂，其中 $deg(a) \geq 3$ 以及 $deg(b) = 2$，且 X 为最小。

否则，如果 $C_2 = \phi$ 和 $C_3 \neq \phi$，则令 C 为 C_3中的一个连通分支。如果 a 和 b 在 X中都只有一个邻点，则舍弃 C，并转到 C_3中的下一个连通分支（如果存在）。否则，a 和 b 中恰有一个（设为a）在 C中至少有两个邻点。令 b'' 为 b 在 C中的唯一邻点。现在，赋予 $X = V(C)$ 和$Y = V(G) \setminus (X \cup \{a, b\})$。注意，由于 G中不存在同时关联两个度为 2 的顶点的边，因此 $deg(b'') \geq 3$。现在，考虑分裂 $(X'', Y'' a, b'')$，其中 $X'' = X \setminus b''$和 $Y' = Y \cup \{b\}$。如果 $G_{X''}(a, b'')$ 不同构于 K_2，且对任意 $t \geq 3$ 均如此，则 (X'', Y'', a, b'') 是所需的分裂，其中 $deg(a) \geq 3$，且 $deg(b'') \geq 3$ 在 $G_{X''}(a, b'')$ 中。否则，如果对某个 $t \geq 3$，$G_{X''}(a, b'')$ 同构于 K_2，则 (X, Y, a, b) 是所需的分裂，其中 $deg(a) \geq 3$，$deg(b) = 2$，且 X 是极小的。如果上述条件均不成立，则舍弃点对 (a, b)。对 G 中的每个非邻接点对 (a, b) 重复此过程，直到得到满足引理 5 中各项性质的所需分裂。

注意，验证给定的非邻接点对（a，b）在 G 中是否存在所需的相应分裂，可在线性时间内完成 $O(n+m)$；这也是通过从 G中删除该顶点对后刻画所得连通分支所需的时间。此外，容易看出，对于无弦图 $m = O(n)$，G。因此，由于这样的点对有 $O(n^2)$个，在 G 中找到满足引理5所述性质的分裂，可在$O(n^3)$时间内完成。显然，整个算法中至多需要找到 n 个分裂。因此，该算法

需要用 $O(n^4)$ 时间找到算法所需的全部分裂。

回想一下，对每条边进行着色都需要 $O(m)$ 时间，无论该图是否为 2-稀疏。因此，对所有边进行着色需要 $O(m^2)$ 时间。注意，将块的着色扩展到整个图需要 $O(m)$ 时间。容易看出，我们至多进行 $O(n)$ 次这样的扩展。因此，扩展最多需要 $O(mn)$ 时间。

因此，算法的运行时间为 $O(n^4 + m^2 + mn)$，其中主要耗时步骤是反复在 G 中寻找满足引理 5 中性质的分裂。由于无弦图的 $m = O(n)$，算法的运行时间为 $O(n^4)$。

参考文献

[1] Jin Akiyama、Geoffrey Exoo 和 Frank Harary，《图的覆盖与装填：III. 循环与非循环不变量》。Math. Slovaca，30(4)，(1980)，405–417。[2] Noga Alon、Benny Sudakov 和 Ayal Zaks，《图的非循环边着色》。J. Graph Theory，37(3)，(2001)，157–167。[3] Noga Alon 和 Ayal Zaks，《非循环边着色的算法方面》。Algorithmica，32(4)，(2002)，611–614。[4] D. Amar、A. Raspaud 和 O. Togni，《全光复合网络中的全对全波长路由》。Discrete Math.，235(1-3)，(2001)，353–363。[5] Lars Døvling Andersen、Edita M´a˘cajov´a 和 J´an Maz´ak，《三次图的最优非循环边着色》。J. Graph Theory，71(4)，(2012)，353–364。[6] Manu Basavaraju 和 L. Sunil Chandran，《2-退化图的无圈边着色》。J. Graph Theory，69(1)，(2010)，1–27。[7] Manu Basavaraju、L. Sunil Chandran、Nathann Cohen、Fr´ed´eric Havet 和 Tobias M¨uller，《平面图的无圈边着色》。SIAM J. Discrete Math.，25(2)，(2011)，463–478。[8] Daniel W. Cranston，《平面图的无圈边着色：当 Δ 足够大时，Δ 种颜色就足够》。SIAM J. Discrete Math.，33(2)，(2019)，614–628。[9] Reinhard Diestel，《图论》，Graduate Texts in Math. 第173卷，5th 版，Springer，柏林 (2017)。[10] G. A. Dirac，《极小2-连通图》。J. Reine Angew. Math.，228，(1967)，204–216。[11] Iosif Fiam˘c´ık，《图的非循环色类》。Math. Slovaca，28(2)，(1978)，139–145。[12] Ioannis Giotis、Lefteris Kirousis、Kostas I. Psaromiligkos 和 Dimitrios M. Thilikos，《通过 Lov´asz 局部引理进行无圈边着色》。Theoret. Comput. Sci.，665，(2017)，40–50。[13] Branko Gr¨unbaum，《平面图的非循环着色》。Israel J. Math.，14，(1973)，390–408。[14] Ian Holyer，《边着色的 NP 完全性》。SIAM J. Comput.，10(4)，(1981)，718–720。[15] John Hopcroft 和 Robert Tarjan，《算法 447：图操作的高效算法》。Commun. ACM，16(6)，(1973)，372–378。[16] Jian-Feng Hou 和 Jian-Liang Wu，《“外平面图的非循环边色数”的勘误[MR2656747]》。J. Graph Theory，72(3)，(2013)，364–365。[17] Jian-Feng Hou、Jian-Liang Wu、Gui-Zhen Liu 和 Bin Liu，《外平面图的非循环边色数》。J. Graph Theory，64(1)，(2010)，22–36。[18] A. V. Kostochka、E. Sopena 和 X. Zhu，《图的非循环色数与定向色数》。J. Graph Theory，24(4)，(1997)，331–340。[19] Daniel Leven 和 Zvi Galil，《求正则图色指数的 NP 完全性》。J. Algorithms，4(1)，(1983)，35–44。

[20] Benjamin L´evˆeque、Fr´ed´eric Maffray 和 Nicolas Trotignon，《不存在K_4的诱导细分的图》。J. Combin. Theory Ser. B，102(4)，(2012)，924–947。[21] Raphael C. S. Machado、Celina M. H. de Figueiredo 和 Nicolas Trotignon，《无弦图的边染色与全染色》。Discrete Math.，313(14)，(2013)，1547–1552。[22] Michael D. Plummer，《关于极小块》。Trans. Amer. Math. Soc.，134，(1968)，85–94。[23] WeiFan Wang 和 QiaoJun Shu，《 K_4-minor-free 图的无环色指数》。中国科学：数学，41(8)，(2011)，733–744。[24] Douglas B. West，《图论导引》。 2nd 版，普伦蒂斯·霍尔，新泽西州上萨德尔河 (2001)。